VOLUME ÚNICO

MATEMÁTICA

Manoel Paiva

coleção BASE

Contém questões dos ENEMs

EDITORA MODERNA

coleção BASE

Manoel Paiva

Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Santo André — SP,
com cursos de pós-graduação pela USP.
Professor do ensino médio e de cursos pré-vestibulares.
Autor da obra *Matemática*, volumes 1, 2 e 3 (Editora Moderna).

MATEMÁTICA

Volume único

1ª edição

De acordo com a 2ª edição das Matrizes Curriculares de Referência para o Sistema Nacional de Avaliação de Educação Básica (SAEB)

COPIA NÃO AUTORIZADA É CRIME
ABDR
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE DIREITOS REPROGRÁFICOS
RESPEITE O DIREITO AUTORAL

EDITORA MODERNA

APRESENTAÇÃO

Não sabemos, exatamente, desde quando se discutem propostas sobre o tipo de ensino de matemática mais adequado à formação do estudante. Para Platão (427-347 a.C.), o estudo da matemática deve ser essencialmente teórico, desligado das aplicações práticas e voltado para a contemplação. Em contraposição a essa concepção está o pensamento de Isócrates (436-338 a.C.), mais preocupado com as situações práticas, para quem a filosofia não passa de um jogo inútil desvinculado da realidade do cotidiano.

Essas duas correntes de pensamento deram origem à (sempre atual) questão:
— O ensino mais adequado à formação do indivíduo seria o mais teórico ou o mais voltado às situações do dia-a-dia? Novamente esse tema vem à tona, fazendo fervilhar o meio educacional.

Este livro tenta atingir o ponto de equilíbrio entre as duas concepções de ensino, com incursões freqüentes ao cotidiano, sem se descuidar dos aspectos teóricos e do formalismo necessário. Os conteúdos, que seguem a orientação da 2ª edição das Matrizes Curriculares de Referência para o Saeb (Sistema Nacional de Avaliação de Educação Básica), são apresentados sob a forma de textos teóricos e de atividades compostas de exercícios resolvidos, exercícios básicos e exercícios complementares. Essas atividades contêm questões do Enem (Exame Nacional de Ensino Médio) e de vestibulares de todo o país, além de questões inéditas.

Algumas informações sobre a estrutura do livro são necessárias para um bom aproveitamento no estudo de seus conteúdos:

- Quando necessário, os textos teóricos são complementados com exercícios resolvidos, ou, até mesmo, com exercícios propostos. Nesses casos, o texto complementar será destacado em boxe.
- Os exercícios básicos, que seguem rigorosamente a ordem crescente de dificuldade, são a ponte para se chegar aos exercícios complementares.
- Após cada série de exercícios básicos há uma indicação sobre quais dos exercícios complementares podem ser resolvidos a seguir.
- Alguns exercícios são acompanhados de uma sugestão, sem, no entanto, prejudicar a descoberta e a criatividade.
- As aplicações, no cotidiano, dos assuntos estudados são apresentadas em exercícios e em boxes ao longo da obra.
- Algumas questões exigem uma resposta pessoal do estudante. Quando isto ocorrer, a chave de respostas, no final do livro, apresentará um exemplo de uma possível resposta.

Na expectativa de que este livro contribua para o seu desenvolvimento como estudante e, acima de tudo, como cidadão ou cidadã, desejo-lhe um bom trabalho.

Manoel Paiva

A José e Rachel, meus maiores professores,
pelas lições de amor e honra.

SUMÁRIO

UNIDADE 1 TEMAS BÁSICOS DE ARITMÉTICA E ÁLGEBRA

Capítulo 1 O conjunto dos números reais

1 Classificação dos números, 1
Números naturais, 1 Números inteiros, 1 Números racionais, 1 Números irracionais, 1 Números reais, 2
2 Potenciação em IR, 2
Propriedades das potências, 3
3 Radiciação em IR, 3
Propriedades dos radicais, 4 Simplificação de radicais, 4 Operações com radicais, 4 Potência de expoente racional, 4 Racionalização de denominadores, 5

Capítulo 2 Equações e inequações do 1º grau

1 Equação do 1º grau, 7
2 Inequação do 1º grau, 8
3 Sistema de equações do 1º grau, 8

Capítulo 3 Polinômios

1 Produtos notáveis, 10
Produto da soma pela diferença de dois números, 10 Quadrado da soma e quadrado da diferença de dois números, 10 Aplicação de um produto notável na racionalização de denominadores, 11
2 Fatoração de polinômios, 11
Propriedade do produto nulo, 12

Capítulo 4 Concluindo a revisão sobre equações

1 Equação do 2º grau, 13
Fatoração do trinômio do 2º grau, 15
2 Equação envolvendo frações algébricas, 15
3 Equação irracional, 16

Capítulo 5 Porcentagem

UNIDADE 2 TEMAS BÁSICOS DE GEOMETRIA PLANA

Capítulo 6 Ângulos e polígonos

1 Generalidades sobre ângulos, 20
Classificação, 20 Pares de ângulos, 20
2 Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal, 20
3 Generalidades sobre polígonos, 22
Nomenclatura e elementos de um polígono, 22 Polígonos convexos, 22 Polígono regular, 22
4 Triângulos, 23
Classificação, 23 Elementos de um triângulo, 23 Ângulos em um triângulo, 23

Capítulo 7 Congruência de triângulos

1 Conceituação, 26
2 Casos de congruência de triângulos, 26
3 Propriedades do triângulo isósceles, 28
4 Propriedade da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo, 29

Capítulo 8 A proporção e a geometria

1 Teorema de Tales, 31
2 Semelhança de figuras planas, 32
3 Semelhança de triângulos, 32
Casos de semelhança de triângulos, 33 A razão de semelhança, 35
4 Relações métricas no triângulo retângulo, 35

Capítulo 9 Circunferência e círculo

1 Conceituação, 39
Arcos e cordas, 39
2 Posições relativas entre reta e circunferência, 40
3 Ângulos e circunferência, 40
Ângulo central de uma circunferência, 40 Ângulo inscrito em uma circunferência, 40 Ângulo de segmento, 41
4 Potência de ponto, 42
Ponto interior à circunferência, 42 Ponto exterior à circunferência, 43
5 Perímetro da circunferência, 43
6 Circunferências circunscrita e inscrita em polígonos regulares, 44
Quadrado, 44 Triângulo equilátero, 44 Hexágono regular, 45

Capítulo 10 Cálculo de áreas

1 Unidades de medida de área, 47
2 Área de algumas figuras planas, 47
Retângulo, 47 Quadrado, 47 Paralelogramo, 48 Triângulo, 48 Hexágono regular, 48 Trapézio, 48 Losango, 48 Círculo, 48
3 Razão entre áreas de figuras semelhantes, 51

UNIDADE 3 FUNÇÕES

Capítulo 11 Associando números reais a pontos de uma reta ou de um plano

1 O eixo real, 53
Intervalos reais, 53
2 Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, 54
Coordenadas de um ponto no plano cartesiano, 55

Capítulo 12 Função

1 Introdução, 57
2 Formalização do conceito de função, 57
Produto cartesiano, 57 Relação entre dois conjuntos, 57 Função, 59
3 Imagem de um elemento através de uma função, 60
Imagem de um elemento através do diagrama de flechas, 60 Imagem de um elemento através da lei $y = f(x)$, 60 Imagem de um elemento através do gráfico de uma função, 61
4 Estudo do sinal de uma função através do gráfico, 61
5 Análise gráfica — reconhecimento de uma função, 62
6 Determinação do domínio e do conjunto imagem de uma função, 63

Capítulo 13 Função real de variável real

1 Conceituação, 67
2 Raiz de uma função, 68
3 Função constante, 68
4 Função crescente e função decrescente, 69

Capítulo 14 Função afim ou do 1º grau

1 Conceituação, 73
2 Gráfico de uma função do 1º grau, 74
3 Variação de sinal da função de 1º grau, 76
4 Função definida por mais de uma sentença, 78

Capítulo 15 Função quadrática ou do 2º grau

1 A parábola, 81
Nomenclatura, 81
2 Gráfico de uma função do 2º grau, 82
3 Pontos notáveis da parábola, 82
Os pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox* (se existirem), 82 O ponto de intersecção da parábola com o eixo *Oy*, 84 O vértice da parábola, 84
4 Máximo (mínimo) de uma função do 2º grau, 86
Valor máximo de uma função do 2º grau, 86 Valor mínimo de uma função do 2º grau, 87
5 Variação de sinal de uma função do 2º grau, 88
Generalização, 88
6 Inequação do 2º grau, 88

Capítulo 16 Inequação produto e inequação quociente

1 Introdução, 92
2 Inequação produto, 92
3 Inequação quociente, 93

Capítulo 17 O conceito de módulo

1 Distância entre dois pontos do eixo real, 95
2 Módulo de um número real, 95

3 Propriedades dos módulos, 95
4 Desigualdades e módulos, 97
Propriedades, 97
5 Função modular, 98

Capítulo 18 Função exponencial

1 Conceituação, 102
2 Propriedades da função exponencial, 103
3 Equação exponencial, 103
Resolução de uma equação exponencial, 103
4 Inequação exponencial, 104

Capítulo 19 Teoria dos logaritmos — o porquê dos logaritmos

1 Princípios básicos, 106
2 Logaritmo, 106
Nomenclatura, 106 Convenção, 107
3 Propriedades dos logaritmos, 107
4 Outras propriedades dos logaritmos, 108
5 Função logarítmica, 110
Propriedades da função logarítmica, 111
6 Equação logaritmica, 112
Resolução de uma equação logarítmica, 112
7 Inequação logarítmica, 113

Capítulo 20 Composição e inversão de funções

1 Composição de funções, 116
2 Funções inversas, 117
Técnica para a obtenção da inversa de uma função, 117

UNIDADE 4 ESTATÍSTICA

Capítulo 21 Noções de estatística

1 O que é estatística?, 119
2 Universo estatístico ou população estatística, 119
3 Amostra, 119
4 Rol, 119
5 Classes, 119
6 Distribuição de freqüência, 120
7 Classes unitárias, 120
8 Representação gráfica de uma distribuição de freqüência, 121
Gráfico de linha, 121 Gráfico de barras verticais, 121 Gráfico de barras horizontais, 121 Gráfico por setores, 121
9 Histograma, 121

Capítulo 22 Medidas estatísticas

1 Introdução, 125
2 Medidas de posição, 125
Média aritmética ($\bar{x}$), 125 Média aritmética ponderada, 125 Moda (Mo), 126 Mediana (Md), 126
3 Medidas de dispersão, 127
Desvio absoluto médio (Dam), 127 Variância (σ^2), 128 Desvio padrão (σ), 128

UNIDADE 5 SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS

Capítulo 23 Seqüências

1 Conceituação, 131
2 Lei de formação de uma seqüência, 132

Capítulo 24 O que é uma progressão aritmética?

1 Progressão aritmética (P.A.), 133
2 Classificação das progressões aritméticas, 133
3 Propriedade, 133
4 Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, 134
5 Representação genérica de uma P.A., 135
6 Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A., 136
Termos equidistantes dos extremos, 136 Cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A., 136

Capítulo 25 O que é progressão geométrica?

1 Progressão geométrica (P.G.), 139
2 Classificação das progressões geométricas, 139
3 Propriedade, 140
4 Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, 140
5 Representação genérica de uma P.G., 143
6 Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G., 143
7 Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, 144
Cálculo da soma dos infinitos termos de uma P.G., 144
8 Progressões geométricas em cálculos de juro composto, 145
Juro composto, 145 Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante, 146

UNIDADE 6 TRIGONOMETRIA

Capítulo 26 Trigonometria no triângulo retângulo

1 Seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo, 149
2 Relação entre o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo, 151
3 Ângulos complementares, 151
4 A trigonometria e o teorema de Pitágoras, 153
5 Ângulos notáveis, 154
Ângulo de 45°, 154 Ângulos de 30° e 60°, 154 Tabela dos ângulos notáveis, 154

Capítulo 27 O sistema trigonométrico

1 O radiano, unidade de medida de arco e ângulo, 157
2 A medida da circunferência em radianos, 157
3 Transformações de unidades, 157
4 Circunferência trigonométrica, 159
5 Arcos trigonométricos, 159
Arcos côngruos, 160
6 Simetrias, 161

Capítulo 28 Seno e co-seno de um arco trigonométrico

1 Extensões dos conceitos de seno e co-seno, 164
2 Variação de sinal do seno e do co-seno, 164
3 Redução ao 1º quadrante, 165
Redução ao 2º para o 1º quadrante, 165 Redução ao 3º para o 1º quadrante, 165 Redução ao 4º para o 1º quadrante, 166 Conclusões, 166
4 Relação fundamental da trigonometria, 167
Conseqüências da relação fundamental, 168

Capítulo 29 Equações trigonométricas em seno ou co-seno

1 Método gráfico para a resolução de uma equação trigonométrica imediata, 170
2 Equações na forma fatorada, 172
3 Resolução de equações trigonométricas através de equações polinomiais, 173

Capítulo 30 Inequações trigonométricas em seno ou co-seno

1 Método gráfico para a resolução de inequações imediatas em seno ou co-seno, 175
2 Sistema de inequações trigonométricas em uma incógnita, 176
3 Resolução de inequações trigonométricas através de inequações polinomiais, 177

Capítulo 31 Tangente de um arco trigonométrico

1 Extensão do conceito de tangente, 179
Variação de sinal da tangente, 180 Teorema, 181
2 Redução ao 1º quadrante, 181
Redução ao 1º quadrante (generalização), 182
3 Arcos de medidas opostas (α e $-\alpha$), 182

Capítulo 32 Equações e inequações trigonométricas em tangente

1 Método gráfico para a resolução de uma equação imediata em tangente, 184
2 Método gráfico para a resolução de inequações imediatas em tangente, 186

Capítulo 33 As razões recíprocas do seno, do co-seno e da tangente

1 Co-tangente, secante e co-secante de um arco trigonométrico, 188
2 Identidades, 189
Técnicas para demonstração de identidades, 189
3 Identidades notáveis, 190

Capítulo 34 Resolução de equações e inequações trigonométricas em ℝ

1 Associando números reais a pontos da circunferência trigonométrica, 192
2 Expressão geral dos números reais associados a um ponto da circunferência trigonométrica, 192
3 Equações e inequações trigonométricas, 193
4 Expressão geral dos números reais associados a dois pontos da circunferência trigonométrica simétricos em relação à origem do sistema cartesiano, 194
5 Números reais associados a pontos que dividem a circunferência trigonométrica em partes iguais, 195

Capítulo 35 Transformações trigonométricas

1 Seno, co-seno e tangente dos arcos de medidas $a + b$ e $a - b$, 197
Demonstração da identidade (I), 197 Demonstração da identidade (V), 197
2 Seno, co-seno e tangente do arco duplo, 199
3 Fórmulas de transformação em produto, 201

Capítulo 36 As funções seno, co-seno e tangente

1 Conceituação, 206
2 Gráfico da função $y = \text{sen } x$, 206
3 Gráfico da função $y = \cos x$, 208
4 Gráfico da função $y = \text{tg } x$, 210

Capítulo 37 Resolução de triângulos

1 Aplicação do co-seno na resolução de triângulos, 212
Teorema (lei dos co-senos), 212
2 Aplicação do seno na resolução de triângulos, 213
Teorema (lei dos senos), 213
3 Cálculo da área de um triângulo em função das medidas de dois lados e do ângulo compreendido por ele, 215

UNIDADE 7 MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES

Capítulo 38 Matrizes

1 Introdução, 217
2 Matriz, 217
Representação genérica de uma matriz, 217
3 Matrizes especiais, 218
Matriz quadrada, 218 Matriz identidade, 218 Matriz nula, 218
4 Matrizes transpostas, 218
5 Elementos correspondentes em matrizes do mesmo tipo, 219
6 Igualdade de matrizes, 219
7 Adição de matrizes, 220
Propriedades da adição de matrizes, 220
8 Multiplicação de número por matriz, 220
Propriedades da multiplicação de número por matriz, 221
9 Subtração de matrizes, 221
10 Multiplicação de matrizes, 222
Multiplicação de linha por coluna, 222 Propriedades da multiplicação de matrizes, 223

Capítulo 39 Sistemas lineares

1 Introdução, 225
2 Equação linear, 225
Solução de uma equação linear, 225 Equação linear homogênea, 226
3 Sistema linear, 226
4 Solução de um sistema linear, 226
5 Classificação de um sistema linear, 226
6 Resolução de um sistema linear, 228
7 Sistema linear escalonado, 228
8 Resolução de um sistema linear escalonado, 228
Primeiro tipo: número de equações igual ao número de incógnitas, 228
Segundo tipo: número de equações menor que o número de incógnitas, 228
9 Sistemas lineares equivalentes, 229
10 Escalonamento de um sistema linear, 229

Capítulo 40 O conceito de determinante e sua aplicação na discussão de um sistema linear

1 O conceito de determinante, 233
Determinante de ordem dois, 233 Determinante de ordem três, 233
2 Discussão de um sistema linear, 235
Primeiro caso: sistemas lineares cujo número de equações é igual ao número de incógnitas, 235 Segundo caso: sistemas lineares cujo número de equações é diferente do número de incógnitas, 236
3 Sistema linear homogêneo, 238
Solução trivial de um sistema linear homogêneo, 238 Sistema linear homogêneo com número de equações igual ao número de incógnitas, 238

Capítulo 41 Determinantes e matrizes inversas

1 Determinantes, 241
Cofator, 241 Definição de determinante, 241 Teorema de Laplace, 242 Propriedades dos determinantes, 243
2 Matrizes inversas, 246
Cálculo da matriz inversa, 247

UNIDADE 8 ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Capítulo 42 Os princípios da análise combinatória

1 Introdução, 250
2 Princípio fundamental de contagem, 250
3 Princípio aditivo de contagem, 253

Capítulo 43 Classificação dos agrupamentos e métodos de contagem

1 Arranjos simples, 256
Cálculo do número de arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p, 256 Fatorial, 257 Propriedade fundamental dos fatoriais, 257 Extensão da definição de fatorial, 258 Cálculo do número de arranjos simples através de fatoriais, 258
2 Permutação simples, 259
Cálculo do número de permutações simples de n elementos distintos, 260
3 Permutação com elementos repetidos, 262
4 Combinação simples, 263
Cálculo do número de combinações simples de n elementos distintos tomados p a p, 263 Critério para diferenciar arranjo de combinação, 264

Capítulo 44 Binômio de Newton

1 Número binomial, 269
2 Teorema de Newton para o desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$, 269
Generalização, 270 Somatório, 271
3 Termo geral do binômio de Newton, 272

Capítulo 45 Probabilidade

1 Conceituação, 275
Experimento aleatório, 275 Espaço amostral de um experimento aleatório, 275 Evento de um espaço amostral, 275 Espaço amostral equiprovável, 275
2 Definição de probabilidade, 276
Propriedades, 277
3 Adição de probabilidades, 278
Eventos mutuamente exclusivos, 278
4 Probabilidade condicional, 279
Eventos independentes, 280
5 Multiplicação de probabilidades, 281

UNIDADE 9 GEOMETRIA ESPACIAL

Capítulo 46 Retas e planos

1 Introdução, 285
2 Posições relativas entre duas retas, 285
Retas paralelas, 285 Retas concorrentes, 285 Retas reversas, 285
3 Posições relativas entre reta e plano, 285
Retas paralelas a plano, 285 Reta secante (ou concorrente) a plano, 285 Reta contida em plano, 286

4 Posições relativas entre dois planos, 286
Planos paralelos, 286 Planos secantes, 286
5 Perpendicularidade, 286
Retas perpendiculares, 286 Reta perpendicular a plano, 286 Planos perpendiculares. 286
6 Ângulos no espaço, 287
Ângulos entre duas retas reversas, 287 Ângulos entre reta e plano, 287 Ângulos entre dois planos, 287

Capítulo 47 Poliedros

1 Região poligonal convexa, 290
2 Poliedro convexo, 290
Nomenclatura. 291
3 Relação de Euler, 291
4 Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo, 292
5 Poliedros regulares, 292

Capítulo 48 Prismas

1 Conceituação, 295
Elementos do prisma, 295 Nomenclatura, 295
2 Prisma reto, 295
3 Prisma regular, 296
4 Paralelepípedo reto-retângulo, 296
Medida de uma diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo, 296 Área total de um paralelepípedo reto-retângulo, 297 Volume de um paralelepípedo reto-retângulo, 297
5 Cubo, 298
Medida da diagonal de um cubo cuja aresta mede *a*, 299 Área total de um cubo cuja aresta mede *a*, 299 Volume de um cubo cuja aresta mede *a*, 299
6 Volume de um prisma qualquer, 300

Capítulo 49 Pirâmides

1 Conceituação, 305
Elementos de uma pirâmide, 305 Nomenclatura, 305
2 Pirâmide regular, 305
Apótema de uma pirâmide regular, 306 Apótema da base de uma pirâmide regular, 306 O teorema de Pitágoras e a pirâmide regular, 306
3 Volume de uma pirâmide qualquer, 307
4 Tronco de pirâmide de bases paralelas, 308

Capítulo 50 Cilindro

1 Cilindro circular, 311
Elementos do cilindro circular, 311 Cilindro circular reto, 311
Secção meridiana de um cilindro circular, 312 Cilindro equilátero, 312
2 Área lateral e área total de um cilindro circular reto, 312
3 Volume do cilindro circular, 313
4 Tronco de cilindro reto com uma base circular, 313
Volume de um tronco de cilindro reto com uma base circular, 313

Capítulo 51 Cone

1 Setor circular — revisão, 316
Ângulo central do setor circular, 316 Área do setor circular, 316
2 Cone circular, 316
Elementos do cone circular, 317 Cone circular reto, 317 Secção meridiana de um cone circular, 317 Cone equilátero, 317
3 O teorema de Pitágoras e o cone circular reto, 318
4 Área lateral e área total de um cone circular reto, 318
5 Volume do cone circular, 319
6 Tronco de cone circular de bases paralelas, 320

Capítulo 52 Esfera

1 Conceituação, 323
2 Posições relativas entre um plano e uma esfera, 324
O teorema de Pitágoras e a secção plano da esfera, 324
3 Volume da esfera e área da superfície esférica, 324
4 Fuso esférico, 325
5 Cunha esférica, 326
6 Esferas tangentes. 327
7 Esfera inscrita e esfera circunscrita a um sólido, 328
Esfera inscrita em cubo, 328 Cubo inscrito em esfera, 328
Esfera inscrita em cone circular reto, 329 Cone circular reto inscrito em esfera, 329

UNIDADE 10 GEOMETRIA ANALÍTICA

Capítulo 53 Distância entre dois pontos e ponto médio de um segmento de reta

1 O que é geometria analítica?, 332
2 Distância entre dois pontos, 332
3 Coordenadas de ponto médio de um segmento, 333

Capítulo 54 Equação da reta

1 Inclinação de uma reta, 336
2 Coeficiente angular de uma reta, 336
Cálculo do coeficiente angular de uma reta não-vertical por dois de seus pontos, 337
3 Condição de alinhamento de três pontos, 338
4 Equação fundamental da reta, 339
As bissetrizes dos quadrantes ímpares, 340 As bissetrizes dos quadrantes pares, 340 Reta horizontal e reta vertical, 341
5 Equação geral da reta, 343
6 Intersecção de duas retas concorrentes, 343
7 Feixe plano de retas concorrentes, 345

Capítulo 55 Outras formas da equação da reta — paralelismo e perpendicularidade

1 Equação reduzida da reta, 347
2 Estudo das posições relativas de duas retas em função de suas inclinações, 347
3 Retas perpendiculares, 349
4 Equações paramétricas da reta, 351

Capítulo 56 Distância entre ponto e reta — área de um triângulo

1 Cálculo da distância de um ponto a uma reta, 354
2 Aplicação de determinantes no cálculo de áreas e na condição de alinhamento de três pontos, 355
Área de um triângulo, 355 Condição de alinhamento de três pontos, 356 Obtenção da equação de uma reta através de determinante, 357

Capítulo 57 Representação gráfica de uma inequação do 1º grau

1 Semiplano de origem paralela a um dos eixos coordenados, 358
2 Semiplano de origem não-paralela a nenhum dos eixos coordenados, 359

Capítulo 58 Equação da circunferência

1 Equação reduzida da circunferência, 363
2 Equação normal da circunferência, 365
Obtenção do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação normal, 365
3 Reconhecimento de uma circunferência, 367

Capítulo 59 Reta e circunferência

1 Posições relativas entre reta e circunferência, 369
2 Intersecção de reta e circunferência, 370
Conclusão sobre a posição relativa entre reta e circunferência a partir do sistema formado por suas equações, 371

Capítulo 60 As cônicas: elipse, hipérbole e parábola

1 O que é uma cônica?, 373
2 Elipse, 373
Equação reduzida de uma elipse, 374
3 Hipérbole, 375
Equação reduzida de uma hipérbole, 377
4 Parábola, 378
Equação reduzida da parábola, 379

Capítulo 61 Lugar geométrico (L.G.)

1 Conceituação, 383
2 Determinação de um lugar geométrico, 383
3 Equação de um lugar geométrico no plano cartesiano, 384

UNIDADE 11 NÚMEROS COMPLEXOS

Capítulo 62 Conjunto dos números complexos

1 O que existe além dos números reais? — uma introdução histórica, 386
2 A unidade imaginária (*i*), 386
3 Número complexo, 386

4 Igualdade entre números complexos, 387
5 Números complexos conjugados, 387
6 Adição de números complexos, 387
Propriedades da adição de números complexos, 388
7 Subtração de números complexos, 388
8 Multiplicação de números complexos, 388
Propriedades da multiplicação de números complexos, 389 Cálculo do produto de números complexos através de propriedades, 389
9 Divisão de números complexos, 390
Propriedade da divisão de números complexos, 390
10 Potências de números complexos com expoentes inteiros, 391
Propriedades das potências de números complexos, 391
Potências de *i*, 391

Capítulo 63 Representação geométrica e forma trigonométrica de um número complexo

1 Plano de Argand-Gauss, 393
2 Módulo de um número complexo, 393
Propriedades do módulo de um número complexo, 394
3 Argumento de um número complexo, 395
Cálculo do argumento de um número complexo, 395
4 Forma trigonométrica de um número complexo, 396
5 Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica, 398
6 Divisão de números complexos na forma trigonométrica, 398
7 Potenciação em $\mathbb{C}$, 399
8 Radiciação em $\mathbb{C}$, 399
9 Resolução de equações do 2º grau em $\mathbb{C}$, 400

UNIDADE 12 POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Capítulo 64 Polinômio em uma variável

1 Conceituação, 402
2 Identidade de polinômios, 403
3 Operações com polinômios, 404
Propriedade fundamental da divisão de polinômios, 405
4 Raiz ou zero de um polinômio, 405
5 Fração polinomial, 406
Frações polinomiais idênticas, 406

Capítulo 65 Generalidades sobre a divisão de um polinômio por um binômio do 1º grau

1 Teorema do resto, 408
2 Teorema de D'Alembert, 409
3 Dispositivo de Briot-Ruffini para a divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$, 409
4 Divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$, 410
Extensão do teorema do resto, 411 Extensão do teorema de D'Alembert, 412
5 Divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x - a)(x - b)$, 412

Capítulo 66 Equações polinomiais

1 Definição, 414
2 Teorema fundamental da álgebra, 414
3 Teorema da decomposição, 415
Conseqüência do teorema da decomposição, 416 Multiplicidade de uma raiz, 416
4 Raízes imaginárias, 417
5 Raízes racionais, 418
6 Relações de Girard, 420
As relações de Girard em uma equação de 2º grau, 420 As relações de Girard em uma equação de 3º grau, 421 As relações de Girard em uma equação de *n*, 422

Respostas, 425

Bibliografia, 461

TEXTOS COMPLEMENTARES

A velocidade limite, 3
As relações entre as dilatações linear, superficial e volumétrica, 10
O número de ouro, 14
Ângulo, para que te quero?, 21
O Floco de Neve: um polígono fractal, 24
Determinação da rota na navegação aérea, 27
Escalas termométricas, 31
Um pequeno projeto de hidráulica, 33
Calculando o comprimento de um túnel a ser construído, 36
Circunferência: a curva que revolucionou o mundo, 39
Um modo curioso para o cálculo do número π, 44
Uma fusão da álgebra com a geometria, 49
Os sistemas de coordenadas do dia-a-dia, 56
Prática pode aumentar capacidade da memória, 70
A função do primeiro grau na economia, 75
Fogões solares, 82
Balística, 82
A função do segundo grau na economia, 85
A receita máxima, 86
Crescimento populacional, 102
Medida do nível sonoro, 107
Os terremotos, 111
Diretas já, 126
Monitoramento por satélite, 128
O código de barras, 131
A corrente milionária, 142
Calculando distâncias a pontos inacessíveis, 150
Eclipse solar, 151
O comprimento de uma curva, 158
As fases da Lua, 171
A reflexão total da luz, 176
A trigonometria e a astronomia, 203
O processo respiratório, 208
Uma outra maneira de se calcular o comprimento de um túnel a ser construído, 213
As matrizes e a engenharia, 218
Isolantes térmicos, 227
Contagem dos glóbulos vermelhos do sangue, 252
Bilhões e bilhões, 254
A análise combinatória e o futebol, 265
Quem não se arrisca..., 276
Cálculo da vazão de um rio, 298
Por que um bebê sente mais frio que um adulto?, 299
A geometria e a engenharia civil, 320
Fabricantes de lentes, 323
A medida de uma circunferência máxima da Terra, 326
Declividade de uma rampa, 337
As trajetórias dos planetas, 374
A hipérbole e a lei de Boyle, 378
A matemática ajudando a tomar decisões, 360
Aviões supersônicos, 380
Lugares geométricos: assim na Terra como no céu, 383
Os polinômios e os sistemas de numeração, 403
Matemática ajuda a controlar epidemias, 415

Capítulo 1

O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

1. CLASSIFICAÇÃO DOS NÚMEROS

Números naturais

Quantos alunos há em sua classe? Quantas capitais tem seu estado? Quantas diagonais tem um triângulo? A resposta a qualquer uma dessas perguntas resulta de uma contagem de unidades. Qualquer número que resulte de uma contagem de unidades é chamado de **número natural**. Indica-se por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não-nulos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$
$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$

Números inteiros

A subtração nem sempre é possível em $\mathbb{N}$, por exemplo, não existe número natural que represente a diferença $3 - 5$. Por isso, foi criado o conjunto dos números inteiros. Nesse conjunto a diferença $3 - 5$ é representada por -2. Indica-se por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e por $\mathbb{Z}^*$ o conjunto dos números inteiros não-nulos:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$
$$\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

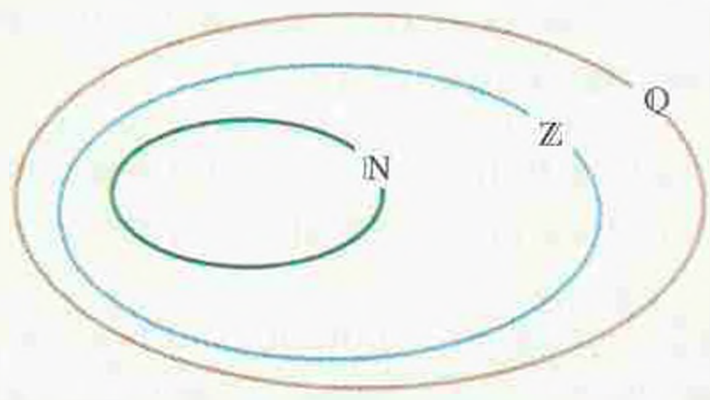
Observe que todo número natural é inteiro. Por isso, escrevemos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (lê-se "$\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$" ou "$\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$").

Números racionais

A divisão nem sempre é possível em $\mathbb{Z}$, por exemplo, não existe número inteiro que represente o quociente $-3 : 2$. Por isso, foi criado o conjunto dos números racionais. Nesse conjunto o quociente $-3 : 2$ é indicado por $-\frac{3}{2}$ ou por $-1{,}5$. Indica se por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e por $\mathbb{Q}^*$ o conjunto dos números racionais não-nulos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$
$$\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}^* \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Observe, portanto, que número racional é todo aquele que pode ser representado como a razão entre dois números inteiros, com o segundo não-nulo. Assim, concluímos que todo número inteiro também é racional, pois pode ser considerado como uma razão de denominador 1. Por exemplo: $5 = \frac{5}{1}$; por isso, escrevemos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, temos também que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Essas relações entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ podem ser resumidas pelo diagrama:



Exemplos

a) O número decimal 3,7 é racional, pois pode ser representado como a razão entre dois inteiros: $\frac{37}{10}$.

b) No número decimal 2,5555... o algarismo 5 se repete indefinidamente. Esse número é chamado de **dízima periódica** de parte inteira 2 e período 5. Para representá-lo sob a forma de razão entre dois inteiros:

- indica-se por g a dízima periódica; $g = 2{,}5555...$
- multiplicam-se por 10 ambos os membros dessa igualdade: $10g = 25{,}5555...$
- efetua-se $10g - g = 25{,}5555... - 2{,}5555...$, obtendo $9g = 23$, portanto, $g = \frac{23}{9}$.

A fração $\frac{23}{9}$ é chamada de **geratriz** da dízima periódica, porque ela gera a dízima a partir da divisão de 23 por 9.

Nota

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números decimais finitos e todas as dízimas periódicas.

Números irracionais

Dentre os números decimais existem as **dízimas não-periódicas**, que são números com infinitas casas decimais e não-periódicos. Esses números são chamados de **irracionais**, e o conjunto formado por eles é indicado por $\mathbb{Q}'$, isto é,

$$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \text{ é dízima não-periódica}\}$$

Exemplos

a) Um dos números irracionais mais conhecidos é o quociente do perímetro de uma circunferência pela medida de seu diâmetro. Esse número é representado pela letra grega π (pi):

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950...$

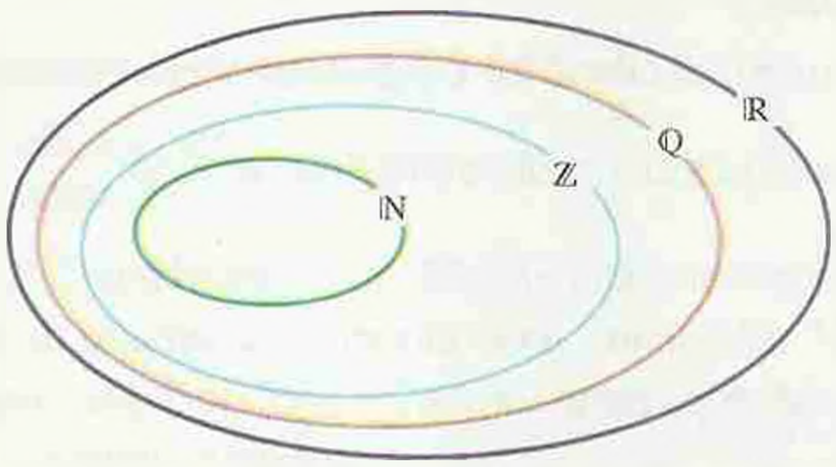
b) Vamos imaginar uma dízima não-periódica qualquer: 5,12122122212222... (aumenta um algarismo 2 de cada vez). Esse número é irracional. Qualquer dízima não-periódica que você imaginar é um número irracional.

Números reais

Qualquer número racional ou irracional é chamado de **número real**. Podemos dizer, portanto, que número real é todo número decimal, finito ou infinito. Indica-se por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e por $\mathbb{R}^*$ o conjunto dos números reais não-nulos, isto é:

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é número racional ou irracional}\}$
$\mathbb{R}^* = \{x \mid x \text{ é número real diferente de zero}\}$

As relações entre os conjuntos numéricos até agora apresentados podem ser resumidos pelo diagrama:



Nota

Usaremos as notações a seguir para representar alguns subconjuntos especiais de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \text{ é número real positivo ou nulo}\}$
$\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \text{ é número real positivo}\}$
$\mathbb{R}_- = \{x \mid x \text{ é número real negativo ou nulo}\}$
$\mathbb{R}_-^* = \{x \mid x \text{ é número real negativo}\}$

Analogamente, representamos: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$, $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_-^*$..

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Dados os conjuntos $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 7\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -4 < x \leq 2\}$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Resolução

Inicialmente vamos representar os elementos de cada conjunto:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

- O conjunto $A \cup B$ (reunião de A e B) é formado por todos os elementos que pertencem a A ou B, isto é, $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- O conjunto $A \cap B$ (intersecção de A e B) é formado pelos elementos comuns a A e B, isto é, $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Dados os conjuntos $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ é par}\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } -5 \leq x < 5\}$, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

B.2 Classifique cada uma das afirmações a seguir como V (verdadeira) ou F (falsa).

a) 6 é número racional.

b) $\frac{4}{3}$ é número natural.

c) $-\frac{2}{5}$ é número racional.

d) 0 é número real.

e) Se x é um número irracional, então $5 + x$ é um número irracional.

f) A dízima periódica 4,7777... é número irracional.

g) -4 é número par.

B.3 Transforme em fração irredutível os números decimais:

a) 2,5
b) 3,81
c) 0,03
d) 4,222... (dízima periódica)
e) 3,4555... (Para obter a geratriz dessa dízima, faça $g = 3{,}4555...$; a seguir, multiplique por 10 e por 100 ambos os membros dessa igualdade; finalmente, efetue $100g - 10g$.)

Exercício complementar C.1

2. POTENCIAÇÃO EM $\mathbb{R}$

Definições: Sendo a um número real e n um número inteiro, tem-se que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ fatores}} \text{ (se } n > 1)$$

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (se $a \neq 0$)

Nota

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto a adoção do valor 1 para potência 0^0, porém essa controvérsia não vai interferir no nosso estudo.

Exemplos

a) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

b) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{125}$

d) $5^0 = 1$

e) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

f) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = \frac{16}{9}$

(**Regra prática.** Inverte-se a base da potência e troca-se o sinal do expoente: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$.)

Propriedades das potências

Dados os números reais a e b, e os números inteiros m e n, obedecidas as condições de existência, temos:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (conserva-se a base e adicionam-se os expoentes)

$a^m : a^n = a^{m-n}$ (conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)

$(a^m)^n = a^{mn}$ (conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)

$(ab)^m = a^m \cdot b^m$ (distributiva da potenciação em relação à multiplicação)

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (distributiva da potenciação em relação à divisão)

Exemplos

a) $5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

b) $3^6 : 3^4 = 3^{6-4} = 3^2$

c) $(6^3)^4 = 6^{3 \cdot 4} = 6^{12}$

d) $(5a)^2 = 5^2a^2 = 25a^2$

e) $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.4 Calcule os valores das potências:

a) 6^2

b) $(-6)^2$

c) -6^2

d) $(-2)^3$

e) -2^3

f) 5^0

g) $(-8)^0$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

i) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

j) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

k) 0^{28}

l) 1^{32}

m) $(-1)^{20}$

n) $(-1)^{17}$

o) 4^{-2}

p) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

q) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

r) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

s) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

t) $(-5)^{-3}$

B.5 Obedecidas as condições de existência, efetue:

a) $(3x)^4$

b) $(x^3)^5$

c) $(2x^2)^3$

d) $(5a^2b^3)^3$

e) $\left(\frac{3a}{b^2}\right)^4$

f) $\left(\frac{2ab^3}{5x^4}\right)^{-2}$

g) $\left(-\frac{1}{3a^2}\right)^{-4}$

B.6 Obedecidas as condições de existência, efetue:

a) $a^6 \cdot a^4$

b) $a^8 : a^3$

c) $\left(\frac{2ab^2}{c^3}\right)^2\left(\frac{a^2c}{b}\right)^3$

d) $\left(\frac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2 : \left(\frac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3$

B.7 (Fuvest-SP) Qual é a metade de 2^{22}?

Exercícios complementares de C.2 a C.6

3. RADICIAÇÃO EM $\mathbb{R}$

Definição 1

Sendo a um número real não-negativo e n um inteiro positivo, define-se:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \text{ e } b \geqslant 0, \text{ com } b \in \mathbb{R}$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$ e $2 \geqslant 0$.

b) $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$ e $3 \geqslant 0$.

c) $\sqrt[1]{5} = 5$, pois $5^1 = 5$ e $5 \geqslant 0$.

d) $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$ e $0 \geqslant 0$.

Nota

A radiciação em $\mathbb{R}$ é uma operação e, portanto, o resultado deve ser **único**. É por isso que a definição exige $b \geqslant 0$, para evitarem-se erros do tipo $\sqrt{9} = \pm 3$.

Definição 2

Sendo a um número real positivo e n um número inteiro positivo, define-se:

$$\sqrt[n]{-a} = b \Leftrightarrow b^n = -a, \text{ com } b \in \mathbb{R}$$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$.

b) $\sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1)^5 = -1$.

c) $\sqrt{-9} = ?$ (Qual o número real cujo quadrado é igual a -9? Não existe tal número.)

Perceba que não existe, em $\mathbb{R}$, radical de índice par e radicando negativo.

A velocidade limite

Um corpo caindo no ar atinge uma velocidade limite v_L, após algum tempo de queda, dada por

$$v_L = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

em que m é a massa do corpo, g é a aceleração da gravidade e c é uma constante associada à resistência que o ar exerce sobre esse corpo. Por exemplo, quando uma pessoa pula de pára-quedas, a resistência do ar é muito grande, fazendo com que o pára-quedista atinja rapidamente a velocidade limite que se mantém constante até o contato com o solo.

Propriedades dos radicais

As propriedades a seguir só podem ser aplicadas para radicais com radicandos **não**-negativos.

Obedecidas as condições de existência, tem-se que:

I. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

II. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

III. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}$

IV. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$

V. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Exemplos

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{5 \cdot 2} = \sqrt[3]{10}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\dfrac{8}{2}} = \sqrt[5]{4}$

c) $\sqrt[6]{5^4} = \sqrt[3]{5^2}$

d) $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3 \cdot 2]{7} = \sqrt[6]{7}$

Simplificação de radicais

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.2 Simplificar os radicais:

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt{160}$

Resolução

a) $50 = 2 \cdot 5^2$

Logo, $\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt[2]{5^2}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

b) $16 = 2^4$

Logo, $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$.

c) $160 = 2^5 \cdot 5$

Logo,

$\sqrt{160} = \sqrt{2^5 \cdot 5} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt[2]{2^4} \cdot \sqrt{2 \cdot 5} =$

$= 2^2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$.

Operações com radicais

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Efetuar:

a) $6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

b) $4\sqrt{18} + 3\sqrt{8}$

c) $3\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{3}$

d) $4\sqrt{6} : 2\sqrt{3}$

Resolução

a) $6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}(6 + 3 - 2) = 7\sqrt{5}$.

Fator comum

b) $18 = 3^2 \cdot 2$, $\quad 8 = 2^3$.

Assim, temos:

$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Logo,

$4\sqrt{18} + 3\sqrt{8} = 4 \cdot 3\sqrt{2} + 3 \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 12\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$.

c) $3\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{3} = (3 \cdot 5)(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}) = 15\sqrt[3]{6}$.

d) $4\sqrt{6} : 2\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{4}{2}\sqrt{\dfrac{6}{3}} = 2\sqrt{2}$.

Potência de expoente racional

Definição 1

Sendo a um número real positivo e os números inteiros k e n, $n \geqslant 1$, define-se:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Exemplos

a) $7^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{7^3}$

b) $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

c) $16^{-0,25} = 16^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$

Definição 2

Sendo k e n números inteiros positivos, define-se:

$$0^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{0^k} = 0$$

Exemplo

$$0^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{0^4} = \sqrt[3]{0} = 0$$

Nota

As cinco propriedades enunciadas para potências de expoentes inteiros continuam válidas para potências de expoentes racionais.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Calcular o valor da expressão:

$$E = 16^{0,5} + 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{32}\right)^{-0,2}$$

Resolução

A expressão E pode ser escrita na forma:

$$E = (2^4)^{0,5} + (2^3)^{\frac{1}{3}} + (2^5)^{0,2}$$

Pelas propriedades das potências de expoentes racionais, temos que:

$$(2^4)^{0,5} = 2^{4 \cdot 0,5} = 2^2 = 4$$

$$(2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

$$(2^5)^{0,2} = 2^{5 \cdot 0,2} = 2^1 = 2$$

Logo, $E = 4 + 2 + 2 \therefore E = 8$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.8 Calcule:

a) $\sqrt[3]{125}$ d) $\sqrt[5]{1}$ g) $\sqrt[3]{-125}$

b) $\sqrt[5]{243}$ e) $\sqrt[6]{0}$ h) $\sqrt[5]{-32}$

c) $\sqrt{36}$ f) $\sqrt[1]{7}$ i) $\sqrt[7]{-1}$

B.9 Simplifique os radicais:

a) $\sqrt[3]{40}$ d) $\sqrt[5]{128}$ g) $\sqrt{\frac{20}{9}}$

b) $\sqrt{80}$ e) $\sqrt{40}$ h) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{24}$ f) $\sqrt{12}$ i) $\sqrt{\frac{18}{25}}$

B.10 Efetue:

a) $6\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{7}$ e) $3\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$

b) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{18}$ f) $4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

c) $2\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{3}$ g) $8\sqrt{10} : 2\sqrt{5}$

d) $4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}$ h) $20\sqrt[3]{6} : 4\sqrt[3]{2}$

B.11 Demonstra-se que "Se o número $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$, não é inteiro, então é irracional". De acordo com essa propriedade, qual das alternativas apresenta apenas números irracionais?

a) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{8}$ e $\sqrt{3}$ d) $\sqrt[3]{0}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[5]{1}$ e) $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{7}$, $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt{9}$

B.12 Calcule o valor da expressão $A = 8^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{1}{4}}$.

B.13 Calcule o valor da expressão

$$A = (0,25)^{0,5} + 81^{0,25} + 16^{-0,5}$$

Exercício complementar C.6

Racionalização de denominadores

Observe que o denominador da fração $\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$ é um número irracional. Racionalizar esse denominador significa transformá-lo em um número racional. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador da fração por $\sqrt[3]{7^2}$:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{7}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^{1+2}}} =$$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}} = \frac{5\sqrt[3]{49}}{7}$$

O segredo dessa racionalização é transformar o denominador num produto de radicais de mesmo índice, tal que a soma dos expoentes dos radicandos seja igual a esse índice.

Analogamente, para racionalizar o denominador de $\frac{10}{\sqrt{5}}$, efetuamos:

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[2]{5^1} \cdot \sqrt[2]{5^1}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[2]{5^2}} =$$

$$= \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

Nota

No capítulo 3, onde estudaremos os **produtos notáveis**, veremos um outro caso de racionalização.

EXERCÍCIO BÁSICO

B.14 Racionalizar o denominador de:

a) $\frac{7}{\sqrt[5]{3^2}}$ b) $\frac{21}{\sqrt{7}}$ c) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$

Exercícios complementares de C.7 a C.9

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 A expressão

$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10.000} + \frac{3}{100.000.000} + \ldots$ representa a soma de infinitas frações em que, à direita do algarismo 1 do denominador, a quantidade de zeros dobra de uma fração para a seguinte. Essa soma é um número racional ou irracional? Por quê?

C.2 Sabendo que $(1,2)^{10} = 6,19$ e que $(1,2)^7 = 3,58$, calcule $(1,2)^{17}$.

C.3 Calcule o valor da expressão:

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

C.4 Simplifique a expressão $E = \frac{3^{n+2} \cdot 3^n}{3 \cdot 3^{n+1}}$.

C.5 (Fuvest-SP) O valor de $(0,2)^3 + (0,16)^2$ é:

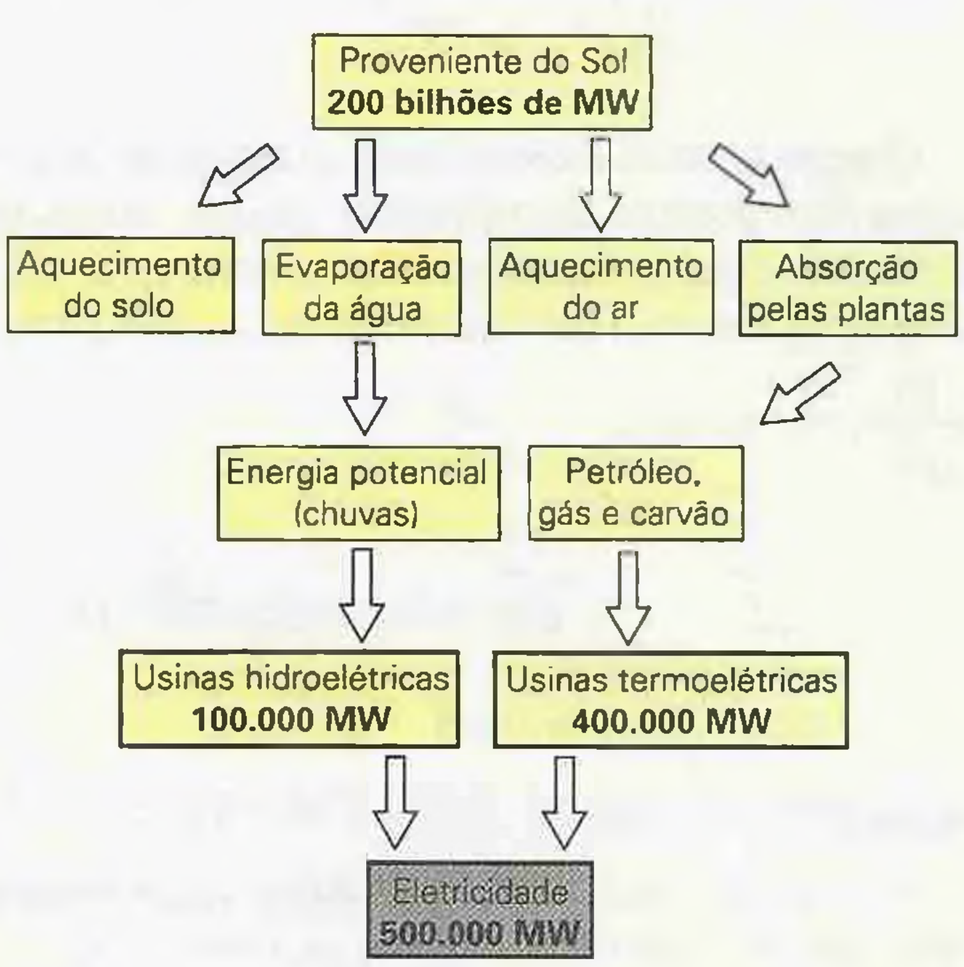
a) 0,0264 c) 0,1056 e) 0,6256

b) 0,0336 d) 0,2568

C.6 (UFPB) Sabendo que $5^{0,35} = k$, conclui-se que $5^{1,7}$ é igual a:

a) $25k^2$ c) $3k^2$ e) $5k^2$
b) $25k^3$ d) $3k^3$

C.7 (Enem) O diagrama abaixo representa a energia solar que atinge a Terra e sua utilização na geração de eletricidade. A energia solar é responsável pela manutenção do ciclo da água, pela movimentação do ar, e pelo ciclo do carbono que ocorre através da fotossíntese dos vegetais, da decomposição e da respiração dos seres vivos, além da formação de combustíveis fósseis.



De acordo com o diagrama, a humanidade aproveita, na forma de energia elétrica, uma fração da energia recebida como radiação solar, correspondente a:

a) $4 \cdot 10^{-9}$ c) $4 \cdot 10^{-4}$ e) $4 \cdot 10^{-2}$
b) $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ d) $2{,}5 \cdot 10^{-3}$

C.8 (Enem) Se compararmos a idade do planeta Terra, avaliada em quatro e meio bilhões de anos ($4{,}5 \cdot 10^9$ anos), com a de uma pessoa de 45 anos, então, quando começaram a florescer os primeiros vegetais, a Terra já teria 42 anos. Ela só conviveu com o homem moderno nas últimas quatro horas e, há cerca de uma hora, viu-o começar a plantar e a colher. Há menos de um minuto percebeu o ruído de máquinas e de indústrias e, como denuncia uma ONG de defesa do meio ambiente, foi nesses últimos sessenta segundos que se produziu todo o lixo do planeta!

I. O texto acima, ao estabelecer um paralelo entre a idade da Terra e a de uma pessoa, pretende mostrar que:
   a) a agricultura surgiu logo em seguida aos vegetais, perturbando desde então seu desenvolvimento.
   b) o ser humano só se tornou moderno ao dominar a agricultura e a indústria, em suma, ao poluir.
   c) desde o surgimento da Terra, são devidas ao ser humano todas as transformações e perturbações.
   d) o surgimento do ser humano e da poluição é cerca de dez vezes mais recente que o do nosso planeta.
   e) a industrialização tem sido um processo vertiginoso, sem precedentes em termos de dano ambiental.

II. O texto permite concluir que a agricultura começou a ser praticada há cerca de:
   a) 365 anos. d) 10.000 anos.
   b) 460 anos. e) 460.000 anos.
   c) 900 anos.

III. Na teoria do *Big Bang*, o Universo surgiu há cerca de 15 bilhões de anos, a partir da explosão e expansão de uma densíssima gota. De acordo com a escala proposta no texto, essa teoria situaria o início do Universo há cerca de:
   a) 100 anos. d) 1.500 anos.
   b) 150 anos. e) 2.000 anos.
   c) 1.000 anos

C.9 (U.E. Londrina-PR) Sendo n um número natural maior que 1, a expressão $\frac{5}{\sqrt[n]{5^{n+1}}}$ é equivalente a:

a) $\frac{\sqrt[n]{5}}{5}$ c) $\frac{\sqrt[n]{5^{n-1}}}{5}$ e) $5\sqrt[n]{5}$
b) $\sqrt[n]{5}$ d) $\sqrt[n]{5^{n-1}}$

Capítulo 2

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

1. EQUAÇÃO DO 1º GRAU

As equações do primeiro grau são aquelas que podem ser representadas sob a forma $ax + b = 0$, em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$, e x é a variável. A resolução desse tipo de equação é fundamentada nas propriedades da igualdade, descritas a seguir.

Adicionando um mesmo número a ambos os membros de uma equação, ou subtraindo um mesmo número de ambos os membros, a igualdade se mantém.

Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número não-nulo, a igualdade se mantém.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Determine o número x tal que $8x - 7 = 6x + 10$.

Resolução

Subtraindo $6x$ de cada membro da equação e adicionando 7 a cada membro, obtemos:

$$8x - 6x = 10 + 7$$
$$\therefore 2x = 17$$

Dividindo ambos os membros dessa igualdade por 2, obtemos $x = \frac{17}{2}$.

R.2 Considerando o conjunto universo dos números racionais, dê o conjunto solução da equação

$$\frac{3x}{4} + 2 = \frac{5}{3} + \frac{x}{6}.$$

Resolução

Para facilitar a resolução, podemos eliminar os denominadores, multiplicando ambos os membros da equação pelo mmc(4, 3, 6) = 12:

$$12\left(\frac{3x}{4} + 2\right) = 12\left(\frac{5}{3} + \frac{x}{6}\right)$$
$$\therefore 9x + 24 = 20 + 2x$$

Subtraindo 24 e $2x$ de cada membro da equação, obtemos:

$$9x - 2x = 20 - 24$$
$$\therefore 7x = -4$$
$$\therefore x = -\frac{4}{7}$$

Como esse valor de x pertence ao conjunto universo considerado ($\mathbb{Q}$), então ele serve como solução. Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \left\{-\frac{4}{7}\right\}$.

Nota

Se o conjunto universo fosse o conjunto dos números naturais, então o conjunto solução seria vazio, pois $-\frac{4}{7}$ não é natural.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine o valor da incógnita nas equações:

a) $10x - 8 = 3x + 6$

b) $5 + 2(3y - 1) = 7y + 6$

c) $4t - (2t - 5) = 3 - 4(2t + 3)$

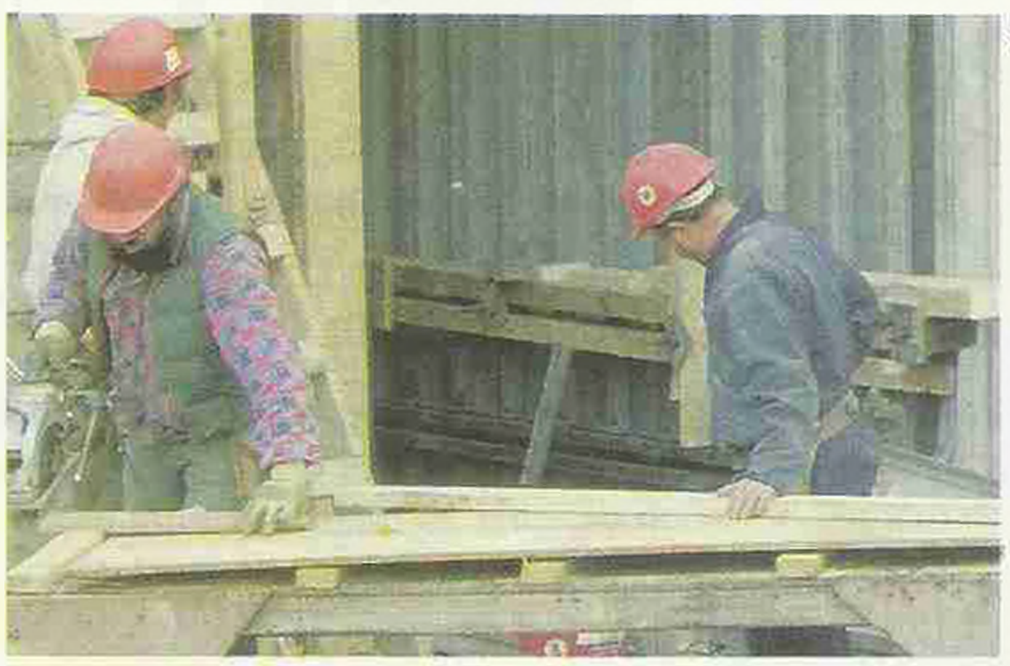
B.2 Considerando como universo o conjunto dos números reais, determine o conjunto solução das equações:

a) $\frac{x}{8} - 2 = \frac{3x}{6} + x - 4$

b) $\frac{n}{3} + \frac{n+2}{4} = 4$

c) $\frac{2k+1}{2} - \frac{k-3}{6} = \frac{1}{3}$ **(Cuidado!)**

B.3 Um carpinteiro cortou um caibro de 11 m de comprimento em dois pedaços. Um dos pedaços tem 1 m a menos que o dobro do outro. Qual é a medida do maior pedaço?



CID

B.4 Duas caixas A e B contêm barras de chocolate. A caixa A contém 6 barras a mais que a metade de barras da caixa B. Sabendo que A e B contêm juntas 36 barras, quantas barras de chocolate contém a caixa B?

B.5 Priscilla, Emerson e Ewerton receberam juntos R$ 205,00 por um trabalho realizado. Priscilla recebeu R$ 5,00 a mais do que Emerson, e Ewerton recebeu R$ 15,00 a menos do que o triplo do que recebeu Priscilla. Quanto recebeu cada um?

B.6 Aloízio gastou R$ 6.500.00 para mobiliar sua casa, comprando em três lojas, *A*, *B* e *C*. Na loja *B* gastou R$ 1.100,00 a mais do que na loja *A*, e na loja *C* gastou R$ 850,00 a mais que $\frac{2}{3}$ do que na loja *A*. Qual foi o valor de sua compra na loja *C*?

Exercícios complementares de C.1 a C.3

2. INEQUAÇÃO DO 1º GRAU

Inequações do primeiro grau são aquelas que podem ser representadas sob a forma $ax + b > 0$ (ou com as relações $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ ou $\neq$) em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$, e x é a variável. A resolução desse tipo de inequação é fundamentada nas propriedades das desigualdades, descritas a seguir.

Adicionando um mesmo número a ambos os membros de uma inequação, ou subtraindo um mesmo número de ambos os membros, a desiguladade se mantém.

Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma inequação por um mesmo número **positivo**, a desigualdade se mantém.

Dividindo ou multiplicando por um mesmo número **negativo** ambos os membros de uma inequação do tipo $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$, a desigualdade inverte o sentido.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.3 Considerando como universo o conjunto dos números naturais, determine o conjunto solução da inequação $5x - 8 < 3x + 12$.

Resolução

Adicionando 8 a cada membro da inequação e subtraindo $3x$ de cada membro, obtemos:

$$5x - 3x < 12 + 8$$
$$\therefore 2x < 20$$

Dividindo ambos os membros da inequação por 2, obtemos:

$$x < \frac{20}{2}$$
$$\therefore x < 10$$

Assim, o conjunto solução S da inequação é $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ e } 9\}$.

R.4 Se o universo do exercício anterior fosse o conjunto dos números reais, qual seria o conjunto solução da inequação?

Resolução

Não é possível explicitar, um a um, todos os números reais menores que 10. Por isso, representa-se o conjunto solução S simplesmente por $S = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x < 10\}$.

R.5 Determine o maior número inteiro t que satisfaz a desigualdade $1 - \frac{11t}{2} > \frac{7}{6} - 2t$.

Resolução

Para facilitar a resolução, podemos eliminar os denominadores, multiplicando ambos os membros da inequação pelo mmc(2, 6) = 6:

$$6\left(1 - \frac{11t}{2}\right) > 6\left(\frac{7}{6} - 2t\right)$$
$$\therefore 6 - 33t > 7 - 12t$$

Subtraindo 6 de cada membro da inequação e adicionando $12t$ a cada membro, obtemos:

$$-33t + 12t = 7 - 6$$
$$\therefore -21t > 1$$

Dividindo ambos os membros da inequação por -21, obtemos $t < -\frac{1}{21}$.

O maior número inteiro que satisfaz essa desigualdade é o -1.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 Considerando o universo dos números inteiros, determine o conjunto solução das inequações:

a) $9x - 5(3 - 2x) > 7x + 9$

b) $4y - 5 < 2(y + 3) + 5y$

c) $6t - (5t + 8) \leqslant 1 - 2(5 - t)$

B.8 Resolver as inequações no universo $\mathbb{R}$:

a) $\frac{2x}{5} - 1 \geqslant \frac{x}{10} + \frac{3x}{8}$

b) $4k - \frac{3(k + 2)}{4} < \frac{1}{2} + 2(1 - 3k)$

c) $y - \frac{1 - 3y}{10} \leqslant \frac{y}{2} - \frac{4 + y}{5}$

d) $2a - \frac{a - 4}{2} \neq 1$

Exercícios complementares C.4 e C.5

3. SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

No capítulo 39 estudaremos os sistemas de equações do primeiro grau. O objetivo, agora, é revisar a resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas, o que faremos através de exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Resolver, pelo método da substituição, o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - 6y = 3 \end{cases}$$

Resolução

Isola-se uma das incógnitas em qualquer uma das equações, por exemplo, isola-se x na primeira equação:

$$\begin{cases} x = 4 - 2y \quad \text{(I)} \\ 2x - 6y = 3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substitui-se a incógnita x da equação (II) pelo valor de x obtido na equação (I):

$$2(4 - 2y) - 6y = 3$$
$$\therefore 8 - 4y - 6y = 3$$
$$\therefore -10y = -5$$
$$\therefore y = \frac{1}{2}$$

Substitui-se $y = \frac{1}{2}$ em qualquer uma das equações (I) ou (II), por exemplo, em (I):

$$x = 4 - 2 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\therefore x = 3$$

O conjunto solução S do sistema é formado pelo par ordenado (x, y) que satisfaz o sistema, isto é:

$$S = \left\{\left(3, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

R.7 Resolver, pelo método da adição, o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = -5 \\ 3x + 10y = 1 \end{cases}$$

Resolução

Devemos obter um sistema equivalente a esse, de modo que os coeficientes de x ou de y sejam opostos. Por exemplo, podemos multiplicar por -10 ambos os membros da primeira equação:

$$\begin{cases} -20x - 10y = 50 \\ 3x + 10y = 1 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as equações desse sistema, obtém-se:

$$-17x = 51$$
$$\therefore x = -3$$

Substitui-se x por -3 na equação $3x + 10y = 1$:

$$3 \cdot (-3) + 10y = 1$$
$$\therefore y = 1$$

Temos, então, como conjunto solução $S = \{(-3, 1)\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Resolver, pelo método da substituição, os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

B.10 Resolver, pelo método da adição, os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 9x - 5y = -7 \\ 3x - 7y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 8x - 4y - 2 = 1 - y \\ 3x - 2 = 2y + 6x \end{cases}$

B.11 (UFMT) O valor de p no sistema $\begin{cases} \frac{3p}{2} - q = \frac{1}{6} \\ \frac{p}{4} + \frac{q}{2} = \frac{2}{3} \end{cases}$ é:

a) $\frac{3}{4}$ c) -4 e) $\frac{23}{22}$

b) $\frac{23}{24}$ d) -2

Exercícios complementares C.6 e C.7

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Vunesp) Um clube promoveu um *show* de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi R$ 1.400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo-se que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, o número de sócios presentes ao *show* é:

a) 80 c) 120 e) 160

b) 100 d) 140

C.2 (U. Católica de Salvador-BA) Um certo metal é obtido fundindo-se 15 partes de cobre com 6 partes de zinco. Para obter-se 136,5 kg desse metal, são necessários:

a) 97,5 kg de cobre. d) 41,5 kg de zinco.

b) 45 kg de zinco. e) 91,8 kg de cobre.

c) 92 kg de cobre.

C.3 (UFPB) Resolvendo a equação $4(1 - 2x) = 1 - 5x + 3(1 - x)$ no universo $\mathbb{R}$ dos números reais, obtém-se como conjunto solução:

a) $\varnothing$ c) $\{3\}$ e) $\{-3\}$

b) $\mathbb{R}$ d) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$

C.4 (Unifor-CE) O menor número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{1 + 7x}{5} > x - \frac{2}{3}$ é:

a) -3 c) -1 e) 1

b) -2 d) 0

C.5 Resolver no universo $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $-3(2x - 5) > 1 - 6x$

b) $-3(2x - 5) < 1 - 6x$

C.6 (Fuvest-SP) Um casal tem filhos e filhas. Cada filho tem o número de irmãos igual ao número de irmãs. Cada filha tem o número de irmãos igual ao dobro do número de irmãs. Qual é o total de filhos e filhas do casal?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

C.7 (U. Amazonas-AM) Para comemorar a passagem do Ano Novo, um clube da cidade ofereceu, a seus associados, um baile de *réveillon* com ceia. Aos sócios foram cobrados ingressos de R$ 20,00, sendo que os dependentes pagaram apenas a metade. Com os 1.200 participantes, o clube arrecadou um total de R$ 18.000,00. O número de dependentes presentes no *réveillon* foi:

a) 900 c) 720 e) 540

b) 840 d) 600

Capítulo 3

POLINÔMIOS

1. PRODUTOS NOTÁVEIS

Produto da soma pela diferença de dois números

O **produto da soma pela diferença** de dois números a e b, isto é, $(a + b)(a - b)$, é obtido através da propriedade distributiva:

$(a + b)(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ba} - b^2$, ou seja:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Note, portanto, que o produto da soma pela diferença de dois números é igual ao **quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo** número.

Exemplos

a) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$

b) $(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2) = (\sqrt{2})^2 - 4 = 3$

Quadrado da soma e quadrado da diferença de dois números

O **quadrado da soma** e o **quadrado da diferença** de dois números a e b, isto é, $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$, são desenvolvidos através da propriedade distributiva:

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$, ou seja:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Note, portanto, que o quadrado da soma de dois números é igual ao **quadrado do primeiro mais o duplo produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo número**.

- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2$, ou seja:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Note, portanto, que o quadrado da diferença de dois números é igual ao **quadrado do primeiro menos o duplo produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo número.**

Exemplos

a) $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

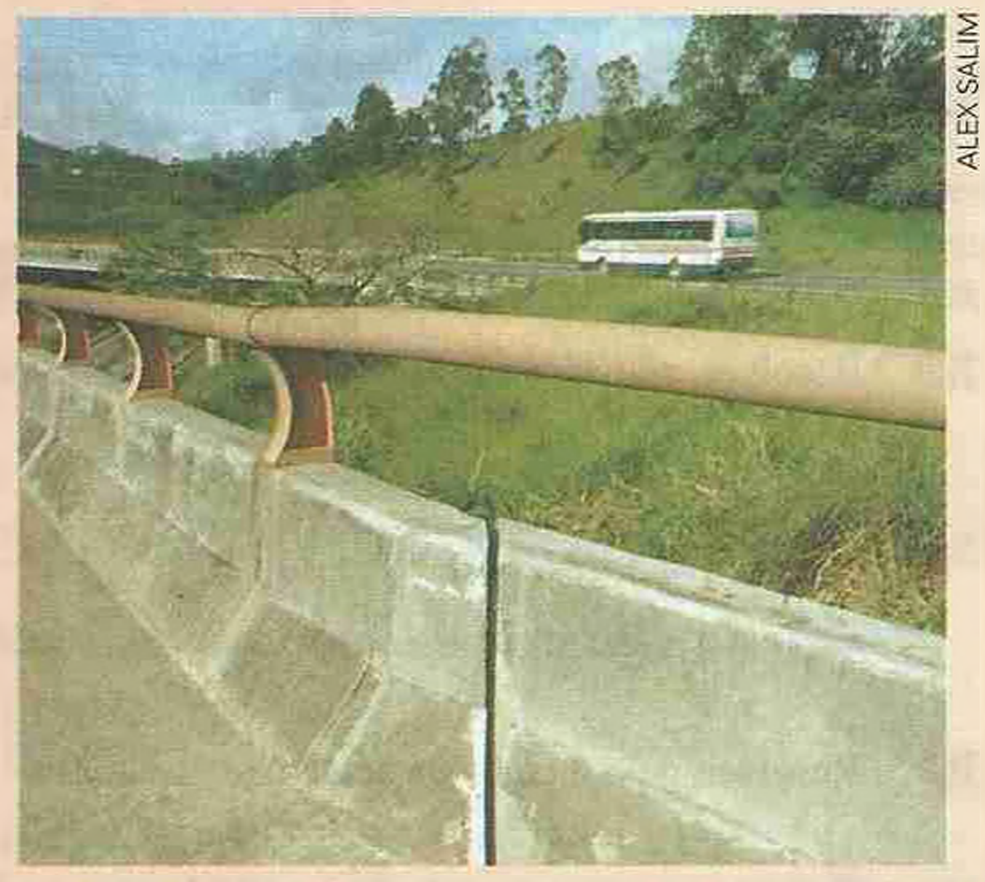
b) $(3t - 5)^2 = (3t)^2 - 2 \cdot 3t \cdot 5 + 5^2 = 9t^2 - 30t + t^2$

As relações entre as dilatações linear, superficial e volumétrica

Aquecendo-se uma barra de ferro, constatam-se aumentos no comprimento, na área e no volume. A essas expansões na barra de ferro são dados os nomes de dilatação linear, dilatação superficial e dilatação volumétrica, respectivamente. Admitindo que o comprimento da barra antes do aquecimento seja unitário (1) e que a dilatação linear seja x, podemos calcular suas dilatações superficial e volumétrica, respectivamente, da seguinte maneira:

$$(1 + x)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 = 1 + 2x + x^2$$
$$(1 + x)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot x^2 + x^3 =$$
$$= 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Como os termos x^2, $3x^2$ e x^3 serão muito pequenos em relação ao valor de cada expressão, podemos desprezá-los. Por exemplo, se a dilatação linear é 0,1 cm, a superficial é 0,2 cm² e a volumétrica é 0,3 cm³.



ALEX SALIM

Os vãos que se observam entre as peças de concreto que compõem uma ponte ou viaduto são chamados de **juntas de dilatação**. Suas dimensões são calculadas de modo a evitar danos à estrutura causados por variações de temperatura.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Desenvolva cada um dos produtos da soma pela diferença de dois números:

a) $(x + 4)(x - 4)$
b) $(y - 1)(y + 1)$
c) $(3t + 5)(3t - 5)$
d) $(x^3 - 2)(x^3 + 2)$
e) $(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)$
f) $(2\sqrt{3} - 1)(2\sqrt{3} + 1)$

B.2 Desenvolva cada um dos quadrados da soma (ou da diferença) de dois números:

a) $(x + 6)^2$
b) $(3k + 2)^2$
c) $(y - 3)^2$
d) $(5t - 4)^2$
e) $(2x + 3y)^2$
f) $(k^3 - 7)^2$

Exercícios complementares C.1 e C.2

Aplicação de um produto notável na racionalização de denominadores

No capítulo 1, aprendemos a racionalizar denominadores que apresentam apenas multiplicação envolvendo radical. Agora, vamos estudar a racionalização de denominadores que apresentam adição ou subtração envolvendo **raiz quadrada**. Essa racionalização é obtida através do produto notável:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Por exemplo, para racionalizar o denominador de $\frac{2}{4 + \sqrt{3}}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $4 - \sqrt{3}$. Observe:

$$\frac{2}{4 + \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{4^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{16 - 3} = \frac{8 - 2\sqrt{3}}{13}$$

Exercício complementar C.3

EXERCÍCIO BÁSICO

B.3 Racionalize o denominador de:

a) $\frac{2}{3 + \sqrt{5}}$
b) $\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
c) $\frac{22}{2\sqrt{3} + 1}$

2. FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

Fatorar um número ou um polinômio significa representá-lo sob a forma de um produto. Por exemplo:

- uma fatoração do número 18 é $6 \cdot 3$;
- a fatoração **completa** do número 18 é $2 \cdot 3 \cdot 3$;
- uma fatoração do polinômio $3xy + 3xz$ é $3(xy + xz)$;
- a fatoração completa do polinômio $3xy + 3xz = 3x(y + z)$.

Através dos exercícios resolvidos a seguir, faremos uma breve revisão sobre os principais casos de fatoração.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 **(1º caso de fatoração – fator comum)** Fatorar o polinômio $4x^2 + 6x^3y - 8x^4y^5$.

Resolução

Fatorar esse polinômio significa transformá-lo em produto. Para isso, coloca-se em evidência o mdc entre os monômios que o compõem, isto é, o produto dos fatores comuns tomados com o menor expoente: $2x^2$. Assim, temos:

$$4x^2 + 6x^3y - 8x^4y^5 = 2x^2(2 + 3xy - 4x^2y^5)$$

R.2 **(2º caso de fatoração – agrupamento)** Fatorar o polinômio $60x^3 + 24x^2 + 50x + 20$.

Resolução

Agrupam-se os termos que têm fator comum, de modo que as fatorações desses agrupamentos também tenham um fator comum. Se isso for possível, o polinômio pode ser fatorado. Observe:

$$60x^3 + 24x^2 + 50x + 20 =$$
$$= \underbrace{(60x^3 + 24x^2)} + \underbrace{(50x + 20)} =$$
$$= 12x^2\underbrace{(5x + 2)} + 10\underbrace{(5x + 2)} =$$
$$= (5x + 2)(12x^2 + 10)$$

R.3 **(3º Caso de fatoração – diferença de dois quadrados)** Fatorar o polinômio $9k^2 - 25$.

Resolução

$$9k^2 - 25 = \underbrace{(3k)^2 - 5^2} = \underbrace{(3k + 5)(3k - 5)}$$

Diferença de dois quadrados — **Produto da soma pela diferença das bases dos quadrados**

R.4 **(4º caso de fatoração – trinômio quadrado perfeito)** Fatorar os polinômios:

a) $x^2 + 6xy + 9y^2$
b) $4t^2 - 12t + 9$

Resolução

a) $x^2 + 6xy + 9y^2 =$

Soma de dois quadrados de bases x e $3y$

$$= x^2 + \underbrace{2 \cdot x \cdot 3y} + (3y)^2 = \underbrace{(x + 3y)^2}$$

Duplo produto das bases dos quadrados — **Quadrado da soma das bases dos quadrados**

b) $4t^2 - 12t + 9 =$

Soma de dois quadrados de bases $2t$ e 3

$$= 2t^2 - \underbrace{2 \cdot 2t \cdot 3} + 3^2 = \underbrace{(2t - 3)^2}$$

Duplo produto das bases dos quadrados — **Quadrado da diferença das bases dos quadrados**

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.4 Colocando em evidência o fator comum, fatore as expressões:

a) $8ab^2 + 10a^2b$

b) $5x^2 - 15xy$

c) $3t^3 - 6t^2$

d) $6a^3b + 12ab^3 - 3a^3b^3$

e) $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^x$

B.5 Agrupando os termos com fator comum, fatore os polinômios:

a) $ac + ad + bc + bd$

b) $ax + ay - bx - by$

c) $xz - yz + xw - yw$

d) $6ac + 18bc + 10ad + 30bd$

e) $12x^3 + 18x^2 + 4x + 6$

f) $8y^3 - 2y^2 + 12y - 3$

B.6 Fatore cada uma das diferenças de dois quadrados:

a) $a^2 - b^2$

b) $x^2 - 9$

c) $y^2 - 1$

d) $4 - 9z^2$

e) $25p^2 - 16q^2$

f) $a^4 - b^2$ **Sugestão.** Faça $a^4 = (a^2)^2$.

g) $x^6 - y^2$

h) $4c^8 - d^2$

B.7 Fatore os trinômios quadrados perfeitos:

a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $x^2 - 2xy + y^2$

c) $9a^2 + 30a + 25$

d) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

e) $t^2 + 2t + 1$

f) $25y^2 - 10y + 1$

g) $x^4 + 6x^2y + 9y^2$

B.8 (UFPI) Fatore o polinômio $x^2 + 2xy + y^2 - z^2$.
(Sugestão. Os três primeiros termos formam um trinômio quadrado perfeito.)

Exercícios complementares de C4 a C6.

Propriedade do produto nulo

O produto de números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores é igual a zero.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $x^4 + 4x^3 - 8x - 32 = 0$.

Resolução

Fatorando, por agrupamento, o primeiro membro da equação, temos:

$x^4 + 4x^3 - 8x - 32 = 0 \Leftrightarrow x^3(x + 4) - 8(x + 4) = 0$

$\therefore (x + 4)(x^3 - 8) = 0$

Pela propriedade do produto nulo concluímos que pelo menos um dos fatores é zero, isto é:

$x + 4 = 0$ ou $x^3 - 8 = 0$, ou seja:

$x + 4 = 0$ ou $x^3 = 8$ e, portanto:

$x = -4$ ou $x = 2$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \{-4, 2\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Através da propriedade do produto nulo, resolva as equações no universo $\mathbb{R}$:

a) $x^5 - x^4 = 0$ (**Sugestão.** Fatore o primeiro membro.)

b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

B.10 (Mackenzie-SP) A equação $3x^3 + 4x^2 - 3x - 4 = 0$ possui exatamente:

a) uma raiz irracional.

b) duas raízes irracionais.

c) duas raízes inteiras.

d) três raízes inteiras.

e) duas raízes não reais.

Exercício complementar C.7

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFMS) A expressão $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$ é igual a:

a) $a^4 + b^4$

b) $a^4 - b^4$

c) $a^4 - 2ab + b^4$

d) $a^4 + 2ab + b^4$

e) $a^4 + 2ab^2 - b^4$

C.2 O polinômio $(x + 5)(x - 5)(x^2 - 25)$ é idêntico a:

a) $x^4 - 625$

b) $x^4 + 625$

c) $x^4 - 50x^2 + 625$

d) $x^4 - 50x + 625$

e) $x^4 + 50x^2 + 625$

C.3 (PUC/Campinas-SP) Simplificando-se a expressão $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$, obtém-se:

a) 10

b) 25

c) $10 - 2\sqrt{6}$

d) $10 + 2\sqrt{6}$

e) $10 + 4\sqrt{6}$

C.4 (Cesgranrio) Fatorando o polinômio $3x^2 - 2xy - y^2$ obtém-se um dos fatores igual a:

a) $3x - y$

b) $3x + y$

c) $x - 2y$

d) $x + 2y$

e) $3x - 2y$

(**Sugestão.** Transforme o monômio $-2xy$ em $-3xy + xy$.)

C.5 (F. Santo André S.P) Simplifique a fração $\frac{ac + a + bc + b}{a^2 - b^2}$.

(**Sugestão.** Fatore o numerador e o denominador.)

C.6 (UFMG) O valor numérico da expressão $\frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 20}{5x^2 + 20}$, para $x = 1495$ é:

a) 3 000 000

b) 460

c) 2

d) 1

e) 300

C.7 (UFPI) No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \neq 0$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ ou } x \neq 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3 \text{ e } x \neq 4\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ ou } x \neq -3 \text{ ou } x \neq 4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3 \text{ ou } x \neq 4\}$

(**Sugestão.** Fatore o primeiro membro da inequação.)

Capítulo 4

CONCLUINDO A REVISÃO SOBRE EQUAÇÕES

1. EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$, é chamada de **equação do 2º grau**. Quando $b = 0$ ou $c = 0$, tem-se uma equação do 2º grau **incompleta**.

Qualquer equação do 2º grau pode ser resolvida através da fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

A expressão Δ (delta), chamada de discriminante da equação, nos informa se a equação tem raízes reais e, no caso de existirem, se são iguais ou diferentes.

Quando $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais.
Quando $\Delta \geqslant 0$, a equação possui duas raízes reais, sendo iguais quando $\Delta = 0$ ou distintas quando $\Delta > 0$.

Se x_1 e x_2 são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, então a soma S e o produto P dessas raízes são:

$$\begin{cases} S = -\dfrac{b}{a} \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Considerando o universo dos números reais, resolva as equações do segundo grau incompletas:
a) $4t^2 - 25 = 0$
b) $y^2 + 9 = 0$
c) $x^2 - 3x = 0$

Resolução

a) Isolando o monômio em t no primeiro membro da igualdade, temos:

$$4t^2 = 25$$
$$\therefore t^2 = \frac{25}{4}$$
$$\therefore t = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$$

Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$.

b) Isolando o monômio em y no primeiro membro da igualdade, temos:

$$y^2 = -9$$

Como não existe número real cujo quadrado é negativo, concluímos que o conjunto solução S da equação é $S = \varnothing$.

c) Fatorando o primeiro membro da equação, obtemos:

$$x(x - 3) = 0$$

A **propriedade do produto nulo** garante que "O produto de números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores é igual a zero". Assim, temos que:
$x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 3 = 0$, ou seja: $x = 0$ ou $x = 3$. Logo, o conjunto solução S da equação é $S = \{0, 3\}$.

R.2 Resolver, no universo dos números reais, a equação do 2º grau $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

Resolução

Indentificam-se os coeficientes a, b e c.
$a = 5$; $b = -3$ e $c = -2$.
Calcula-se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49$.

Aplica-se a fórmula resolutiva $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 5} = \frac{3 \pm 7}{10}.$$

Logo, $x = 1$ ou $x = -\dfrac{7}{10}$.

Conclui-se, então, que o conjunto solução S da equação é $S = \left\{1, -\frac{7}{10}\right\}$.

Nota

A fórmula resolutiva também pode ser aplicada para equações incompletas, porém é muito mais simples resolvê-las como no exercício **R.1**.

R.3 Obtenha m de modo que a equação do 2º grau $3x^2 - 2x + m = 0$ não admita raízes reais.

Resolução

A equação não admite raízes reais se, e somente se, $\Delta < 0$, isto é:

$$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m < 0$$
$$\therefore 4 - 12m < 0$$
$$\therefore -12m < -4$$
$$\therefore m > \frac{1}{3}$$

Assim, a equação não admite raízes reais se, e somente se, $m > \frac{1}{3}$.

R.4 Determine k sabendo que a soma das raízes da equação do 2º grau $5x^2 + kx - 2 = 0$ é $\frac{3}{5}$.

Resolução

A soma S das raízes é dada por $S = -\frac{b}{a}$, portanto, temos $\frac{3}{5} = -\frac{k}{5}$, ou seja: $k = -3$.

R.5 Resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 - 3x = 2 \end{cases}$

Resolução

Isola-se uma das incógnitas na equação do 1º grau:

$$\begin{cases} x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 3x = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substitui-se na equação (II) o valor obtido na equação (I):

$x^2 + (3 - x)^2 - 3x = 2$

$\therefore x^2 + 9 - 6x + x^2 - 3x = 2$

$\therefore 2x^2 - 9x + 7 = 0$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25$

$\therefore x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ ou $x = 1$

Substituindo $x = \frac{7}{2}$ na equação (I) obtém-se

$y = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$.

Substituindo $x = 1$ na equação (I) obtém-se

$y = 3 - 1 = 2$.

Assim, o conjunto solução S do sistema é

$S = \left\{\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 2)\right\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Considerando o universo dos números reais, resolva as equações do 2º grau incompletas:

a) $x^2 - 25 = 0$
b) $3t^2 - 48 = 0$
c) $9y^2 - 1 = 0$
d) $2x^2 - 1 = 0$
e) $4y^2 + 16 = 0$
f) $x^2 - 7x = 0$
g) $3y^2 - 2y = 0$
h) $5t^2 + 2t = 0$

B.2 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $3x^2 + 5x - 2 = 0$
b) $t^2 - 6t + 9 = 0$
c) $2y^2 - 3y + 2 = 0$
d) $\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{5} = \frac{30 + x}{10}$

B.3 Para que valores de m a equação do 2º grau $x^2 + 3x + m = 0$ não admite raízes reais?

B.4 Determine os valores de k para os quais a equação do 2º grau $y^2 - ky + 1 = 0$ admita raízes reais e iguais.

B.5 A equação do 2º grau $x^2 + 2x + m = 0$ admite duas raízes reais e distintas. Determine os valores de m.

B.6 A equação na variável x, $kx^2 - 5x - 8 = 0$ admite raízes reais para que valores reais de k?

B.7 Sem resolver as equações a seguir, calcule a soma e o produto de suas raízes. A partir da soma e do produto, tente determinar mentalmente as raízes de cada equação.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $y^2 - 9y + 20 = 0$
c) $x^2 + 5x + 6 = 0$
d) $t^2 + 2t - 8 = 0$

B.8 Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 + y = 11 \end{cases}$

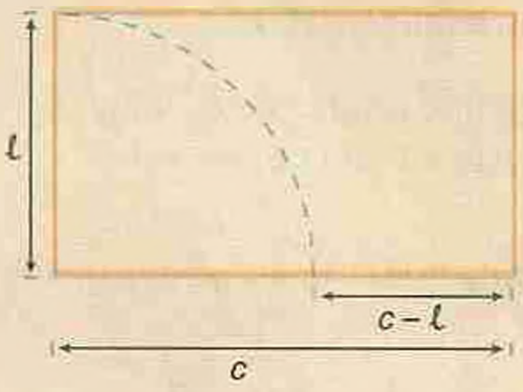
b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x^2 + x - y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x^2 - 2y - x = -2 \end{cases}$

Exercícios complementares de C.1 a C.5

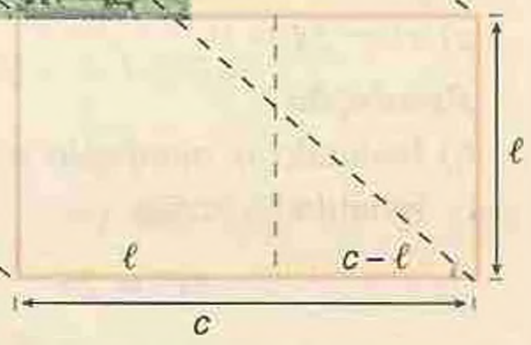
O número de ouro

Grandes artistas como os italianos Michelangelo (1475-1564) e Leonardo Da Vinci (1452-1519) usaram em suas obras o **retângulo áureo**. Esse nome é dado a todo retângulo em que a razão da maior dimensão c (comprimento) para a menor ℓ (largura) é igual à razão de ℓ para $c - \ell$, isto é:



$$\frac{c}{\ell} = \frac{\ell}{c - \ell}$$

CID



Dessa igualdade, chamada de **proporção áurea**, surgiu um critério estético muito usado pelos artistas desde o quinto século antes de Cristo. Por exemplo, o Partenon, templo grego erguido de 447 a 432 a.C., teve seu projeto baseado no retângulo áureo.

Se na proporção áurea considerar-se como unitário o comprimento c obtém-se $\frac{1}{\ell} = \frac{\ell}{1 - \ell}$, ou seja:

$\ell^2 + \ell - 1 = 0$. A raiz positiva dessa equação do 2º grau é chamada de **número de ouro**. Determine-a.

Fatoração do trinômio do 2º grau

Sendo r_1 e r_2 as raízes do trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, temos que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Assim, o trinômio pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2] = \\ &= a[x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2] = \\ &= a[x(x - r_1) - r_2(x - r_1)] = \\ &= a(x - r_1)(x - r_2) \end{aligned}$$

Temos, então:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Fatorar o trinômio do 2º grau $5x^2 - 3x - 2$.

Resolução

Inicialmente determinamos as raízes do trinômio. As raízes são os números que atribuídos à variável x anulam o trinômio, isto é, $5x^2 - 3x - 2 = 0$.

Temos:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2)}}{2 \cdot 5}$$

$$\therefore x = 1 \text{ ou } x = -\frac{2}{5}$$

Podemos, então, apresentar o trinômio na forma fatorada:

$$5x^2 - 3x - 2 = 5(x - 1)\left(x - \left(-\frac{2}{5}\right)\right) =$$

$$= 5(x - 1)\left(x + \frac{2}{5}\right)$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Fatore os trinômios do 2º grau:

a) $3x^2 - 5x + 2$
b) $4y^2 + 6y - 4$
c) $p^2 - 4p + 3$
d) $x^2 + x - 2$
e) $k^2 - 2k + 1$
f) $9z^2 + 6z + 1$

B.10 (Faap-SP) A expressão $\dfrac{2x^2 - 14x + 24}{x^2 - 9}$, com $x \neq 3$ e $x \neq -3$, é igual a:

a) $\dfrac{x - 4}{x - 3}$
b) $\dfrac{2x - 8}{x + 3}$
c) $\dfrac{2x + 8}{x - 3}$
d) $\dfrac{x + 4}{x + 3}$
e) $\dfrac{x - 2}{x - 3}$

Exercício complementar C.6

2. EQUAÇÃO ENVOLVENDO FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Fração algébrica é toda aquela cujos termos são polinômios, sendo o denominador não constante, por exemplo, $\dfrac{x + 2}{x - 1}$, $\dfrac{1}{3t^2}$. Os exercícios resolvidos a seguir têm como objetivo rever a resolução de equações que envolvem esse tipo de fração.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{4}{9x}$.

Resolução

Condição de existência: $x \neq 0$.

O mmc dentre os denominadores 3^2, $3x^2$ e 3^2x é o produto de todos os seus fatores, sendo que dentre fatores repetidos é escolhido o de maior expoente, isto é:

$\text{mmc}(3^2, 3x^2, 3^2x) = 3^2x^2 = 9x^2$

Multiplicando ambos os membros da equação por esse mmc, temos:

$$9x^2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3x^2}\right) = 9x^2 \cdot \frac{4}{9x}$$

$$\therefore x^2 + 3 = 4x$$

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$$

$$\therefore x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \{3, 1\}$.

R.8 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{4x - 4} = \dfrac{3}{x^2 - 1}$.

Resolução

Condição de existência: $x \neq 1$ e $x \neq -1$.

Para o cálculo do mmc dentre os denominadores, fatoramos cada um deles, obtendo: 2, $2^2(x - 1)$ e $(x + 1)(x - 1)$.

O mmc é o produto de todos os fatores desses polinômios, sendo que dentre fatores repetidos é escolhido o de maior expoente, isto é:

$\text{mmc}[2, 2^2(x - 1), (x + 1)(x - 1)] = 2^2(x + 1)(x - 1)$

Multiplicando ambos os membros da equação por esse mmc, temos:

$$4(x + 1)(x - 1)\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{4(x - 1)}\right) =$$

$$= 4(x + 1)(x - 1) \cdot \frac{3}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$\therefore 6(x + 1)(x - 1) - 2(x + 1) = 12$$

$$\therefore 6(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 12$$

$$\therefore 6x^2 - 6 - 2x - 2 - 12 = 0$$

$$\therefore 6x^2 - 2x - 20 = 0$$ (Para facilitar os cálculos, podemos dividir por 2 ambos os membros.)

$$\therefore 3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 121$$

$$\therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}$$

Assim, o conjunto solução S da equação é $S = \left\{2, -\dfrac{5}{3}\right\}$.

EXERCÍCIO BÁSICO

B.11 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $\frac{5}{8x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{t^2} - \frac{1}{3t} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{y+1}{y} - 1 = \frac{4}{3y^2}$

d) $\frac{1}{x-2} + 2 = \frac{1}{x}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n-2} = \frac{1}{n^2-2n+1}$

f) $\frac{4}{x^2-1} - \frac{2}{x} = \frac{1}{x+1}$

Exercícios complementares C.7 e C.8

3. EQUAÇÃO IRRACIONAL

Equações que apresentam a incógnita sob um radical são chamadas de **equações irracionais**. Através do exercício resolvido a seguir, faremos uma breve revisão sobre esse tipo de equação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.9 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt{2x+1} + 1 = x$.

Resolução

Inicialmente isola-se o radical em um dos membros da igualdade:

$$\sqrt{2x+1} = x - 1 \quad \text{(I)}$$

A seguir, elevam-se ambos os membros a um expoente igual ao índice do radical:

$$(\sqrt{2x+1})^2 = (x-1)^2$$
$$\therefore 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$$
$$\therefore x^2 - 4x = 0$$
$$\therefore x(x-4) = 0$$
$$\therefore x = 0 \text{ ou } x = 4$$

Quando elevamos a um expoente par ambos os membros de uma equação, podemos estar transformando em verdadeira uma sentença que anteriormente era falsa, por exemplo, $3 = -3$ é uma sentença falsa, mas, elevando os dois membros ao quadrado, obtém-se uma sentença verdadeira, $3^2 = (-3)^2$.

Isto significa que os candidatos a raízes, 0 e 4, podem não ser raízes da equação original. Por isso, devemos testar cada um deles para verificar se são realmente raízes da equação proposta.

Verificação

- Substituindo $x = 0$ na equação (I), temos:

  $\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 0 - 1$ **(Falsa!)**

- Substituindo $x = 4$ na equação (I), temos:

  $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 4 - 1$ **(Verdadeira!)**

  Concluímos, então, que apenas o número 4 é raiz da equação. Logo, o conjunto solução S é $S = \{4\}$.

EXERCÍCIO BÁSICO

B.12 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\sqrt{x^2+27} - x = x$

b) $\sqrt{x-4} + x = 6$

c) $\sqrt{t+6} = -t$

d) $\sqrt{x+8} + \sqrt{x} = 4$ **Sugestão.** Isole a $\sqrt{x+8}$ e eleve ambos os membros ao quadrado.

Exercício complementar C.9

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 A área de um retângulo, em cm², é $3t^2 + 5t - 2$, e a área de um triângulo, em cm², é $t^2 - 4$. Sabendo que a razão da área do retângulo para a área do triângulo é igual a 8, conclui-se que a área do retângulo é:

a) 40 cm² c) 22 cm² e) 96 cm²
b) 48 cm² d) 24 cm²

C.2 (UFBA) O número de pacotes de bombons contidos em uma caixa é duas unidades maior que o número de bombons de cada pacote. Sabendo que a caixa contém 80 bombons, calcule o número de pacotes que contém a caixa.

C.3 (UFES) Para que valores reais de k o sistema nas variáveis x e y:

$$\begin{cases} y = k \\ x^2 + y + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

admite como soluções dois pares ordenados diferentes de números reais?

C.4 (UFRS) Para que valores reais de k a equação na variável x, $x^2 + (k-1)x + k^2 = 0$ admite raízes reais e iguais?

C.5 (PUC-MG) O valor de k para que a soma das raízes da equação do 2º grau $(k-3)x^2 - 4kx + 1 = 0$ seja igual ao seu produto é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$

C.6 (FEI-SP) Calcule o valor numérico da expressão $\frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$ para $x = 12.034$.

C.7 (PUC-SP) Uma pessoa, em seu antigo emprego, trabalhava x horas por semana e ganhava R$ 60,00 pela semana trabalhada. Em seu novo emprego, essa pessoa continua ganhando os mesmos R$ 60,00 por semana. Trabalha, porém, 4 horas a mais por semana e recebe R$ 4,00 a menos por hora trabalhada. O valor de x é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

C.8 (Univali-SC) Uma agência de turismo organizou uma excursão para uma turma de estudantes. A despesa total será de R$ 3.600,00. Como 6 estudantes não poderão ir ao passeio, a parte de cada um aumentou em R$ 20,00. O número de estudantes é:

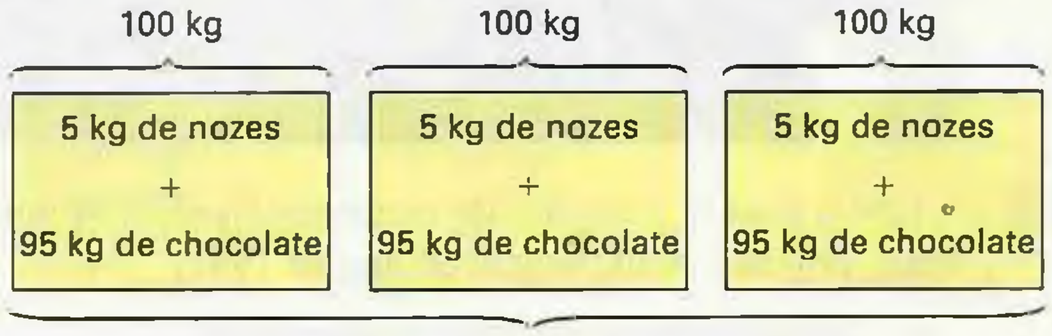
a) 40 b) 28 c) 25 d) 36 e) 30

C.9 (FEI-SP) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = 7$.

Capítulo 5

PORCENTAGEM

Para a fabricação de 300 kg de ovos de Páscoa crocantes foram necessários 15 kg de nozes e o restante de chocolate. Isso significa que em cada 100 kg de ovos há 5 kg de nozes.



Podemos dizer, também, que em um **cento** de quilogramas desses ovos há 5 kg de nozes, ou seja, a quantidade de nozes que compõem esses ovos é de 5 por **cento**. Há um símbolo matemático para indicar a expressão **por cento**: é o símbolo %. Assim, a quantidade de nozes desses ovos é 5% (lê-se: cinco por cento).

A expressão $x\%$, que se lê "x por cento", é chamada de **taxa percentual** e representa a razão $\frac{x}{100}$, isto é:

$$x\% = \frac{x}{100}$$

em que x é um número real qualquer.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Representar sob a forma de fração irredutível cada taxa percentual:

a) 20% b) 120% c) 0,5%

Resolução

a) $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

b) $120\% = \frac{120}{100} = \frac{6}{5}$

c) $0{,}5\% = \frac{0{,}5}{100} = \frac{5}{1.000} = \frac{1}{200}$

R.2 Representar sob a forma de número decimal cada uma das taxas percentuais:

a) 35% b) 0,2%

Resolução

a) $35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$

b) $0{,}2\% = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}002$

R.3 Representar sob a forma de taxa percentual cada um dos números decimais:

a) 0,42 b) 2,37

Resolução

a) $0{,}42 = \frac{42}{100} = 42\%$

b) $2{,}37 = \frac{237}{100} = 237\%$

Observe, através deste exercício, que para transformar um número decimal em taxa percentual, basta multiplicá-lo por 100 e dividir o produto obtido por 100 (o número não se altera). Observe:

$$0{,}005 = \frac{0{,}005 \cdot 100}{100} = \frac{0{,}5}{100} = 0{,}5\%$$

R.4 Representar sob a forma de taxa percentual cada uma das frações:

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{29}{5}$

Resolução

a) $\frac{5}{8} = 0{,}625 = \frac{0{,}625 \cdot 100}{100} = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$

b) $\frac{29}{5} = 5{,}8 = \frac{5{,}8 \cdot 100}{100} = \frac{580}{100} = 580\%$

R.5 De uma pesquisa, em que foram entrevistados 625 estudantes do curso noturno, concluiu-se que 84% deles trabalham. Quantos, dos estudantes entrevistados, trabalham?

Resolução

Devemos calcular 84% de 625. Lembrando que a preposição **"de"** indica **multiplicação**, esse cálculo é feito do seguinte modo:

$$84\% \cdot 625 = 0{,}84 \cdot 625 = 525$$

Logo, dentre os entrevistados, 525 estudantes trabalham.

R.6 Dentre os 1.250 médicos que participaram de um congresso, 48% eram mulheres. Dentre as mulheres, 9% eram pediatras. Quantas mulheres pediatras participaram desse congresso?

Resolução

Devemos calcular 9% de 48% de 1.250. O resultado é obtido do seguinte modo:

$$9\% \cdot 48\% \cdot 1.250 = 0{,}09 \cdot 0{,}48 \cdot 1.250 = 54$$

Logo, havia 54 mulheres pediatras participando desse congresso.

R.7 Para a confecção de uma peça metálica foram fundidos 15 kg de cobre, 9,75 kg de zinco e 0,25 kg de estanho. Qual é a porcentagem de cobre dessa peça?

Resolução

A razão da massa de cobre para a massa total da peça é $\frac{15}{25}$. Transformando essa razão em taxa percentual, temos:

$$\frac{15}{25} = 0{,}6 = \frac{0{,}6 \cdot 100}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$$

Logo, a porcentagem de cobre contida na peça é 60%.

R.8 Na compra de uma camisa tive um desconto de 12% sobre o preço de etiqueta. Qual era o preço de etiqueta, sabendo que o desconto foi de R$ 2,40?

Resolução

Sendo p o preço de etiqueta, temos que $12\% \cdot p = 2{,}40$, ou seja:

$$0{,}12 \cdot p = 2{,}40$$

$$\therefore p = \frac{2{,}40}{0{,}12} = 20$$

Logo, o preço de etiqueta era R$ 20,00.

R.9 O preço de um produto sofreu um reajuste de 12%, aumentando para R$ 60,48. Qual era o preço desse produto antes do reajuste?

Resolução

Sendo p o preço antes do reajuste, temos que $p + 12\% \cdot p = 60{,}48$, ou seja:

$$p + 0{,}12p = 60{,}48$$

$$\therefore 1{,}12p = 60{,}48$$

$$\therefore p = \frac{60{,}48}{1{,}12} = 54$$

Logo, o preço do produto, antes do reajuste, era R$ 54,00.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Represente sob a forma de fração irredutível cada uma das taxas percentuais:

a) 34% b) 3% c) 315% d) 0,8%

B.2 Represente sob a forma de número decimal cada uma das taxas percentuais:

a) 46% b) 149% c) 0,23% d) 56,83%

B.3 Represente sob a forma de taxa percentual cada um dos números decimais:

a) 0,65 c) 0,4 e) 0,003
b) 1,32 d) 0,09

B.4 Represente sob a forma de taxa percentual cada uma das frações:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{17}{50}$ c) $\frac{12}{5}$ d) $\frac{2}{3}$

B.5 (UFPB) Em uma eleição, um candidato recebeu $\frac{7}{20}$ dos votos dos eleitores. Portanto, o percentual de votos obtido por esse candidato foi de:

a) 35% c) 7% e) 27%
b) 20% d) 14%

B.6 Em uma assembléia compareceram 120 pessoas, das quais 40% eram mulheres. Quantas mulheres estiveram presentes nessa assembléia?

B.7 A população do Japão, no ano de 1998, era de 125.200.000 habitantes, dos quais 6,7% viviam na capital Tóquio (esses valores são aproximados). Qual era o número de habitantes da capital japonesa?

CID

B.8 A tabela mostra a receita das empresas General Motors, Ford, Toyota e Volkswagen no ano de 1997.

Receita em bilhões de dólares	
GM	178
Ford	153
Toyota	100
Volkswagem	63

(Fonte: revista *Isto É*, 13/5/98)

a) A receita da GM representa que porcentagem da receita total das quatro empresas juntas?
b) A receita da GM representa que porcentagem da receita da Toyota?
c) A receita da Volkswagen representa que porcentagem da receita da Toyota?
d) A receita da Ford representa que porcentagem da receita da GM?

B.9 Em um exame vestibular, 15% das questões eram de matemática, das quais 8% eram de geometria. Qual a porcentagem de questões de geometria que compunham esse exame?

B.10 O salário de Luiz é de R$ 1.200,00 mensais. Sua despesa mensal consome 80% desse salário, sendo que 45% dessa despesa corresponde ao aluguel de sua casa. Qual é o valor desse aluguel?

B.11 Uma propaganda anuncia que um automóvel pode ser comprado com uma entrada de 35% do valor total, mais 10 prestações mensais iguais sem juros. Sabendo que essa entrada corresponde a R$ 4.900,00, calcule o valor de cada prestação.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFCE) Evandro comprou, na Bolsa de Valores, 25.000 ações da empresa *A* por R$ 50.000,00. Se o preço destas ações caiu 9%, determine o preço de cada ação após a queda.

C.2 (Unicamp-SP) Uma pessoa investiu R$ 3.000,00 em ações. No primeiro mês ela perdeu 40% do total investido e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.

a) Com quantos reais ela ficou após os dois meses?
b) Qual foi seu prejuízo após os dois meses, em porcentagem, sobre o valor do investimento inicial?

C.3 (UFGO) O custo de produção de um produto é composto de 20% de mão-de-obra; 40% de matéria-prima; 10% de energia elétrica e 30% de outras despesas, como, por exemplo, encargos sociais. Num momento de desequilíbrio econômico, ocorreram os seguintes reajustes:

- mão-de-obra 50%
- matéria-prima 100%
- energia elétrica 75%
- outras despesas 40%

Qual foi o acréscimo no custo de produção do produto?

C.4 (UFMG) Certa região do país, cuja área é de 300.000 km², possui 80% de terras cultiváveis, 25% das quais são improdutivas. Essas terras improdutivas deverão ser usadas no assentamento de famílias de agricultores sem terra. Supondo que cada família receba 30 hectares (1 ha = 10.000 m²) e que o custo do assentamento de cada uma delas seja de R$ 30.000,00, o custo total do assentamento naquela região, em bilhões de reais, será de:

a) 2,4 c) 6,0 e) 5,8
b) 0,8 d) 4,8

Lembrete. Dentre os múltiplos e submúltiplos do m² cada unidade vale 100 vezes a unidade imediatamente inferior, por exemplo, 1 m² = 100 dm².

C.5 (PUC-MG) Um comerciante elevou o preço de suas mercadorias em 50% e divulgou, no dia seguinte, uma remarcação com desconto de 50% em todos os preços. O desconto realmente concedido em relação aos preços originais foi de:

a) 40% c) 32% e) 25%
b) 36% d) 28%

C.6 (U. Católica de Salvador-BA) Hoje, 50% da produção de uma fábrica de sucos é de suco de caju e 50% é de suco de maracujá. Se a produção de suco de caju aumentar em 10% ao mês e a de suco de maracujá aumentar em 20% ao mês, daqui a dois meses a porcentagem de suco de maracujá produzido, em relação ao total produzido no mês, será de, aproximadamente:

a) 52% c) 57,3% e) 72%
b) 54,3% d) 60,5%

C.7 (Fuvest-SP) O preço de certa mercadoria sofre, anualmente, um acréscimo de 100%. Supondo que o preço atual seja R$ 100,00, daqui a três anos o preço será:

a) R$ 300,00 d) R$ 800,00
b) R$ 400,00 e) R$ 1.000,00
c) R$ 600,00

C.8 (Fuvest-SP) No dia 1º de setembro, foi aberta uma caderneta de poupança e depositada uma quantia x. No dia 1º de dezembro do mesmo ano o saldo era de R$ 665.500,00. Sabendo que, entre juros e correção monetária, a caderneta rendeu 10% ao mês, qual era a quantia x, em milhares de reais?

a) 650 c) 550 e) 450
b) 600 d) 500

C.9 (Unifor-CE) No mês de outubro, devido à crise atual, o dono de uma confecção reduziu os preços de setembro em 10%. Não obtendo o aumento de vendas desejado, em novembro os preços foram novamente reduzidos em 10%. Após essa segunda redução, quem compra agora um vestido por R$ 145,80 está economizando, em relação ao preço de setembro, a quantia de:

a) R$ 36,45 c) R$ 32,00 e) R$ 29,16
b) R$ 34,20 d) R$ 30,61

C.10 (Enem) Uma escola de ensino médio tem 250 alunos que estão matriculados na 1ª, 2ª ou 3ª série. 32% dos alunos são homens e 40% dos homens estão na 1ª série. 20% dos alunos matriculados estão na 3ª série, sendo 10 alunos homens. Dentre os alunos da 2ª série, o número de mulheres é igual ao número de homens.
A tabela a seguir pode ser preenchida com as informações dadas:

	1ª	2ª	3ª	Total
Mulher	a	b	c	$a+b+c$
Homem	d	e	f	$d+e+f$
Total	$a+d$	$b+e$	$c+f$	250

O valor de a é:

a) 10 c) 92 e) 120
b) 48 d) 102

C.11 (Enem) O alumínio se funde a 666 °C e é obtido à custa de energia elétrica, por eletrólise — transformação realizada a partir do óxido de alumínio a cerca de 1.000 °C.
A produção brasileira de alumínio, ano de 1985, foi da ordem de 550.000 toneladas, tendo sido consumidos cerca de 20 kWh de energia elétrica por quilograma do metal. Nesse mesmo ano, estimou-se a produção de resíduos sólidos urbanos brasileiros formados por metais ferrosos e não-ferrosos em 3.700 t/dia, das quais 1,5% estima-se corresponder ao alumínio.

([Dados adaptados de] FIGUEIREDO, P. J. M. *A sociedade do lixo*: resíduos, a questão energética e a crise ambiental. Piracicaba, Unimep, 1994.)

Suponha que uma residência tenha objetos de alumínio em uso cuja massa total seja de 10 kg (panelas, janelas, latas etc.). O consumo de energia elétrica mensal dessa residência é de 100 kWh. Sendo assim, na produção desses objetos utilizou-se uma quantidade de energia elétrica que poderia abastecer essa residência por um período de:

a) 1 mês. c) 3 meses. e) 5 meses.
b) 2 meses. d) 4 meses.

C.12 (Enem) Muitas usinas hidroelétricas estão situadas em barragens. As características de algumas das grandes represas e usinas brasileiras estão apresentadas no quadro abaixo.

Usina	Área alagada (km²)	Potência (MW)	Sistema hidrográfico
Tucuruí	2.430	4.240	Rio Tocantins
Sobradinho	4.214	1.050	Rio São Francisco
Itaipu	1.350	12.600	Rio Paraná
Ilha Solteira	1.077	3.230	Rio Paraná
Furnas	1.450	1.312	Rio Grande

A razão entre a área da região alagada por uma represa e a potência produzida pela usina nela instalada é uma das formas de estimar a relação entre o dano e o benefício trazidos por um projeto hidroelétrico. A partir dos dados apresentados no quadro, o projeto que mais onerou o ambiente em termos de área alagada por potência foi:

a) Tucuruí. c) Itaipu. e) Sobradinho.
b) Furnas. d) Ilha Solteira.

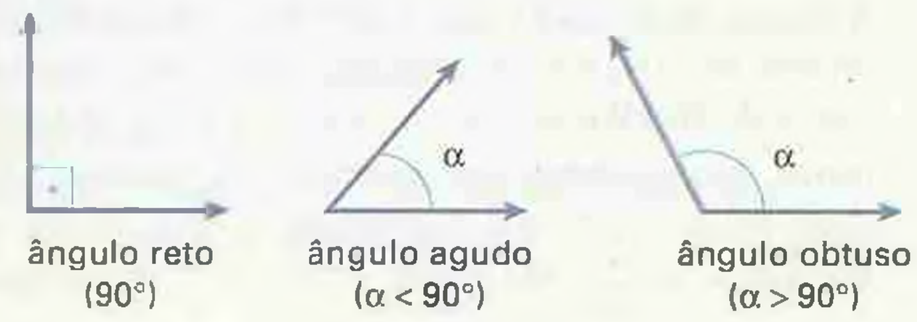
Capítulo 6

ÂNGULOS E POLÍGONOS

1. GENERALIDADES SOBRE ÂNGULOS

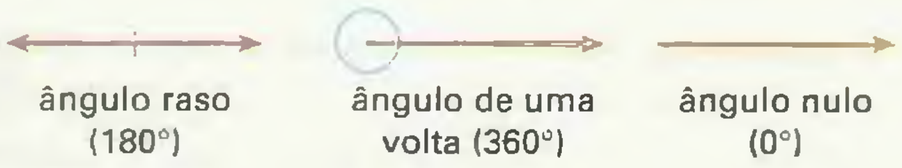
Classificação

a) **Ângulo geométrico** é todo aquele cuja medida é maior que 0° e menor que 180°. Por comodidade omitiremos o termo geométrico, chamando-o simplesmente de **ângulo**.



ângulo reto (90°) | ângulo agudo ($\alpha < 90°$) | ângulo obtuso ($\alpha > 90°$)

b) **Ângulo não geométrico** é todo aquele cuja medida é maior ou igual a 180°, ou é menor ou igual a 0°.



ângulo raso (180°) | ângulo de uma volta (360°) | ângulo nulo (0°)

No estudo da trigonometria você verá outros exemplos de ângulos não geométricos.

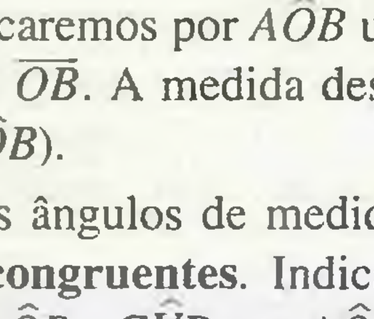
Notas

1. Indicaremos por $A\hat{O}B$ um ângulo de vértice O e lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. A medida desse ângulo será simbolizada por $m(A\hat{O}B)$.

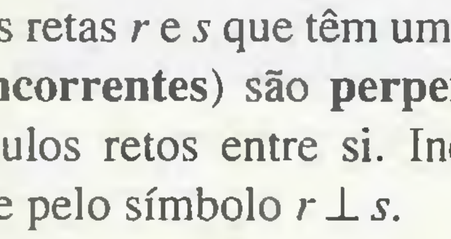
2. Dois ângulos de medidas iguais são chamados de ângulos **congruentes**. Indica-se a congruência de dois ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{V}D$ por $A\hat{O}B \cong C\hat{V}D$.

3. Duas retas r e s que têm um único ponto em comum (retas **concorrentes**) são **perpendiculares** quando formam ângulos retos entre si. Indicamos essa perpendicularidade pelo símbolo $r \perp s$.

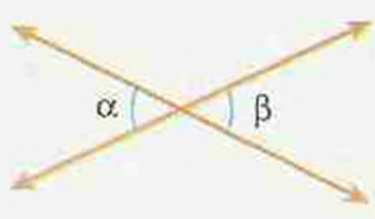
Pares de ângulos



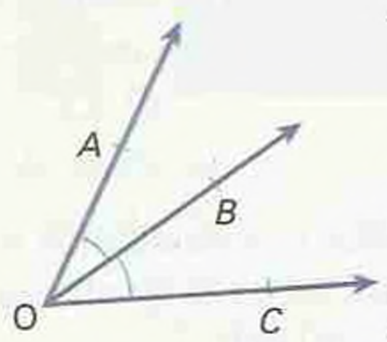
complementares
$\alpha + \beta = 90°$



suplementares
$\alpha + \beta = 180°$



ângulos opostos pelos vértice
$(\alpha = \beta)$



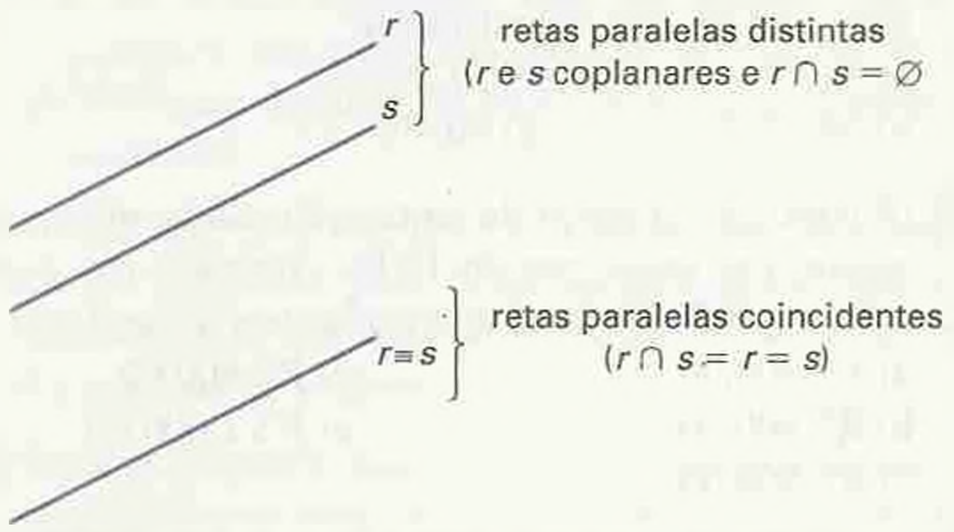
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ têm um lado comum e a intersecção de seus interiores é vazia, por isso são chamados de **adjacentes**.

Nota

Se $m(A\hat{O}B) = m(B\hat{O}C)$, a semi-reta $\overrightarrow{OB}$ é chamada de **bissetriz** ângulo $A\hat{O}C$.

2. ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS RETAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

Duas retas **coplanares** r e s são paralelas se, e somente se, não têm ponto em comum ou têm todos os seus pontos em comum.

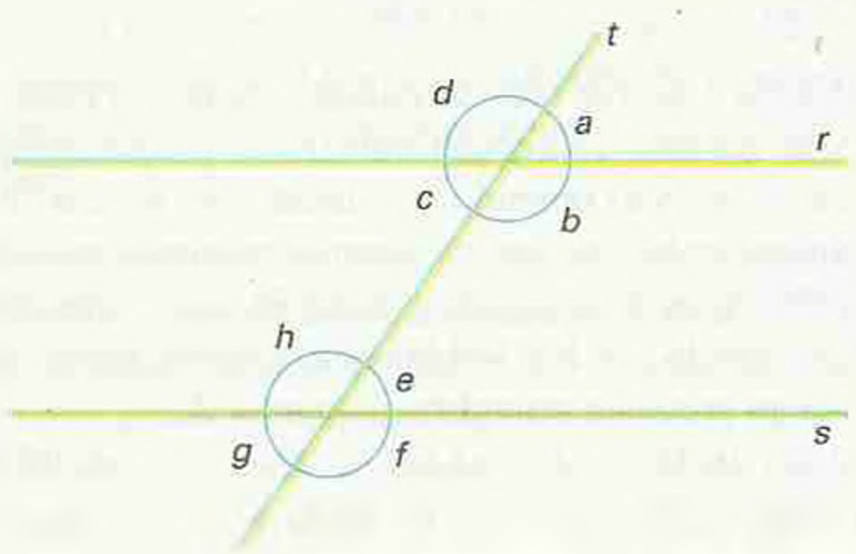


r e s coplanares e $r \cap s = \varnothing$ — retas paralelas distintas

$r \cap s = r = s$ — retas paralelas coincidentes

Indicamos que r é paralela a s pelo símbolo $r \parallel s$.

Duas retas r e s, paralelas distintas, e uma transversal t determinam oito ângulos geométricos, conforme figura. Dois quaisquer desses ângulos ou são **suplementares** ou são **congruentes**:



correspondentes $\begin{cases} a = e \\ b = f \\ c = g \\ d = h \end{cases}$

alternos $\begin{cases} \text{internos} \begin{cases} b = h \\ c = e \end{cases} \\ \text{externos} \begin{cases} a = g \\ f = d \end{cases} \end{cases}$

colaterais $\begin{cases} \text{internos} \begin{cases} b + e = 180° \\ c + h = 180° \end{cases} \\ \text{externos} \begin{cases} a + f = 180° \\ d + g = 180° \end{cases} \end{cases}$

Nota

Se uma reta transversal t determina com duas retas coplanares, r e s, ângulos alternos congruentes, então $r \parallel s$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 (PUC-SP) Um ângulo mede a metade de seu complemento, então esse ângulo mede:

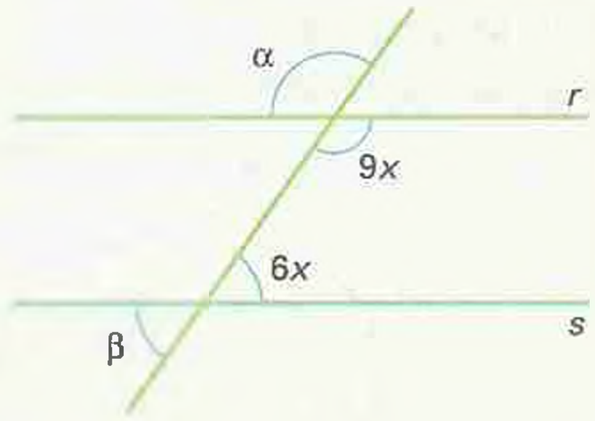
a) 30° c) 45° e) 68°
b) 60° d) 90°

B.2 A medida x de um ângulo tem 80° a mais que a medida de seu suplemento. Determine x.

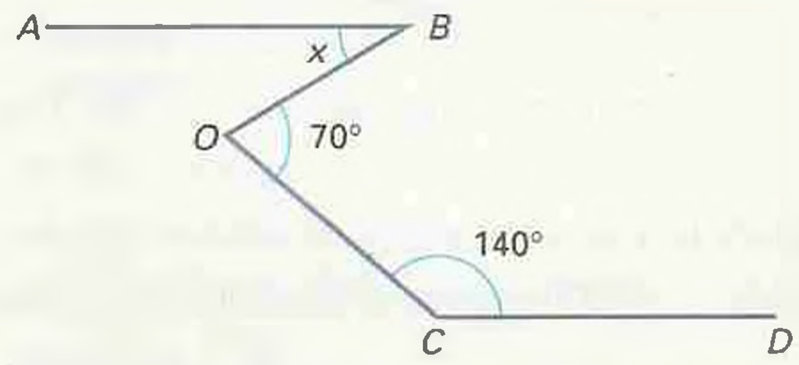
B.3 Quatro retas, r, s, t, u, de um plano, concorrem em um mesmo ponto, sendo $r \perp s$ e $t \perp u$. Um ângulo agudo formado por r e u mede 36°. Obtenha a medida de um ângulo obtuso determinado por t e s.

B.4 (PUC-SP) Se r é paralela a s, então α e β medem, respectivamente:

a) 120° e 60°
b) 100° e 80°
c) 108° e 72°
d) 150° e 30°
e) 140° e 40°



B.5 Determine a medida x do ângulo $A\hat{B}O$ da figura abaixo, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



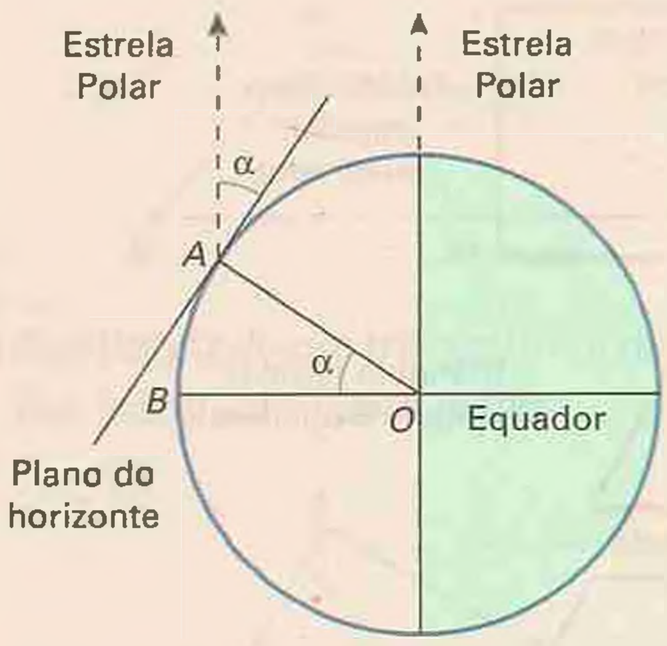
Exercícios complementares de C.1 a C.3

Ângulo, para que te quero?

Você já se perguntou como os navegantes calculam a latitude (medida em graus ao norte ou ao sul do equador) e a longitude (medida em graus a leste ou a oeste do meridiano de Greenwich)?

Ao norte ou ao sul do equador são tomadas como referências as estrelas Polaris e Sigma Octantis, respectivamente. Essas estrelas podem ser consideradas como pontos do eixo de rotação da Terra, e os seus raios de luz que incidem sobre a superfície do nosso planeta podem ser considerados paralelos.

Ao norte do equador, um navegador, com o auxílio de um sextante, mira a estrela Polaris e obtém a medida α do ângulo que esse raio visual forma com o plano do horizonte. Essa medida é a latitude do ponto em que se encontra. A figura abaixo explica o porquê.



A medida do ângulo central $A\hat{O}B$ é igual à medida do ângulo determinado pelo observador.

Analogamente, ao sul do equador em relação à estrela Sigma Octantis.

A longitude é calculada levando-se em conta que a Terra gira de oeste para leste 360° em 24 horas, ou seja, 15° por hora. Convencionou-se associar a medida 0° ao meridiano que passa pelo observatório de Greenwich, na Inglaterra. Assim, por exemplo, um navegador que possui um relógio marcando 18 h, horário de Greenwich, no instante em que observa o Sol sobre o meridiano local (meio-dia local), conclui que sua longitude é 90° a oeste.

Atualmente, métodos mais modernos para o cálculo de latitude e longitude permitem viagens até sob geleiras polares, sem nenhuma referência visível.

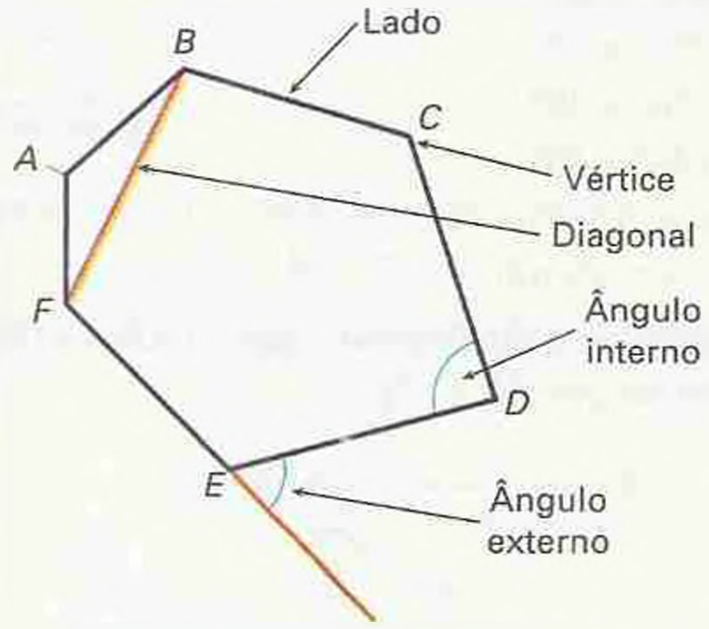
Entrada do observatório de Greenwich. O mostrador do relógio da foto apresenta 24 divisões, uma para cada hora do dia.

3. GENERALIDADES SOBRE POLÍGONOS

Nomenclatura e elementos de um polígono

Polígono é um conjunto de segmentos de reta coplanares tais que:

- cada extremidade de qualquer um deles é extremidade de dois e apenas dois deles;
- dois segmentos consecutivos quaisquer, dentre eles, não são colineares.



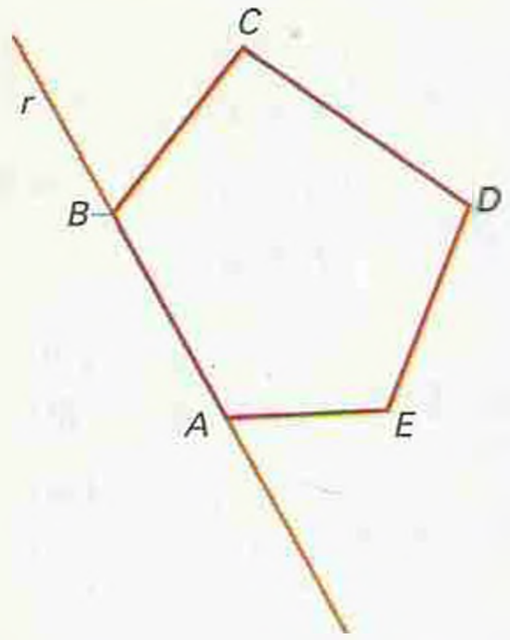
A tabela a seguir mostra os nomes que recebem os polígonos, conforme o seu número de lados (ou de vértices).

Número de lados (Número de vértices)	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
13	Tridecágono
14	Tetradecágono
15	Pentadecágono
16	Hexadecágono
17	Heptadecágono
18	Octadecágono
19	Eneadecágono
20	Icoságono

Aos polígonos com mais de 20 lados não daremos nomes especiais, nos referindo a eles explicitando o seu número de lados.

Polígonos convexos

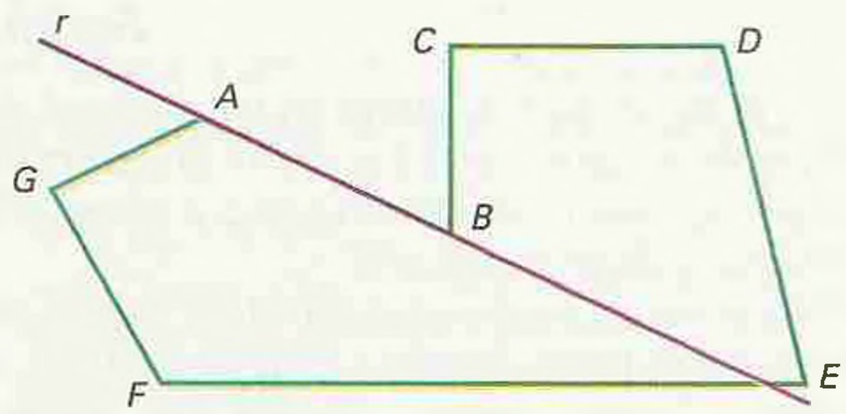
Observe que a reta r que contém o lado $\overline{AB}$ do pentágono abaixo deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano de origem r:



O mesmo acontece com a reta que contém qualquer um dos outros lados. Por isso, dizemos que esse pentágono é **convexo**.

> Um polígono é **convexo** se, e somente se, a reta que contém qualquer um de seus lados deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano de origem nessa reta.

Observando o polígono $ABCDEFG$, constatamos que ele **não** é convexo, pois a reta r que contém o lado $\overline{AB}$ não deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano de origem r.



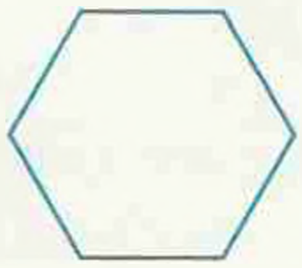
Polígono regular

Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si é chamdo de **polígono regular**.

Exemplos

Quadrilátero regular (quadrado)

Triângulo regular (triângulo eqüilátero)



Hexágono regular

4. TRIÂNGULOS

Classificação

a) Quanto aos ângulos

Triângulo retângulo (um ângulo interno reto)

Triângulo acutângulo (os três ângulos internos agudos)

Triângulo obtusângulo (um ângulo interno obtuso)

b) Quanto aos lados

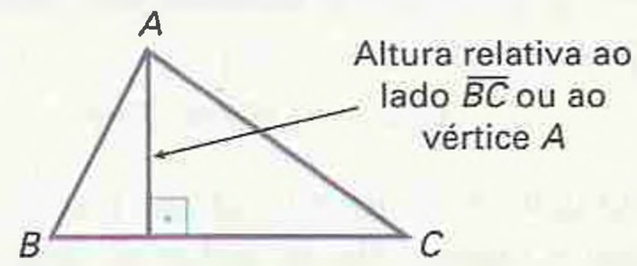
Triângulo equilátero (os três lados congruentes entre si)

Triângulo isósceles (dois lados congruentes entre si)

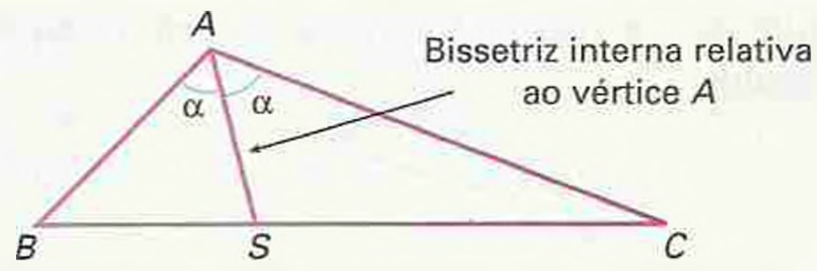
Triângulo escaleno (os três lados com medidas diferentes entre si)

Elementos de um triângulo

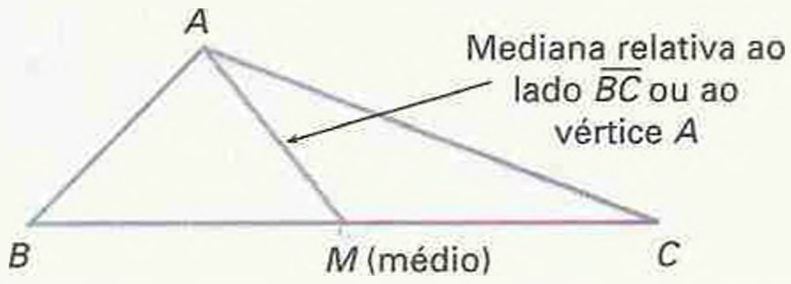
a) Altura de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao lado oposto, perpendicularmente.



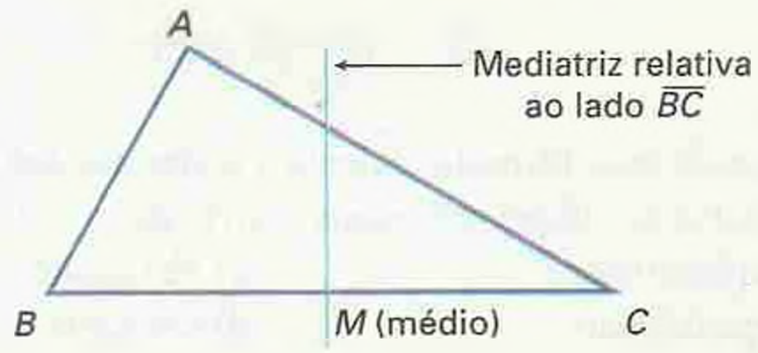
b) Bissetriz interna de um triângulo é o segmento de reta contido na bissetriz de um ângulo interno, ligando um vértice ao lado oposto.



c) Mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.



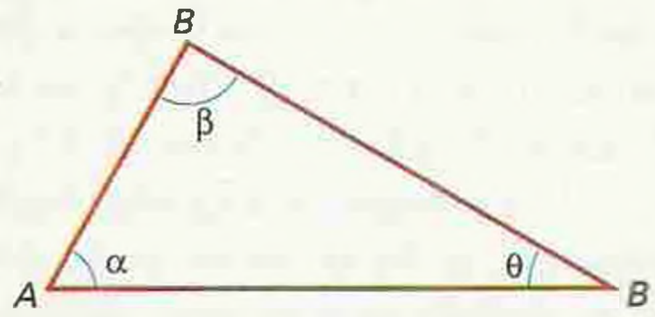
d) Mediatriz de um triângulo é a reta perpendicular a um dos lados pelo ponto médio.



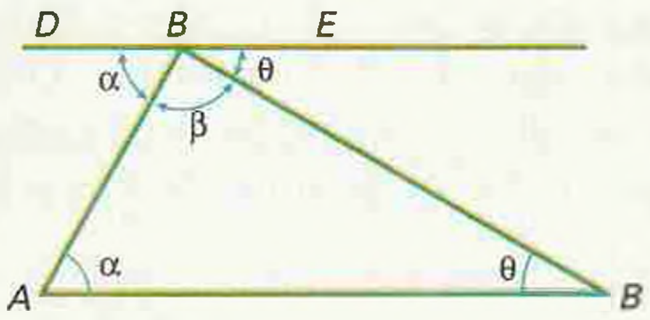
Ângulos em um triângulo

a) Soma dos ângulos internos de um triângulo

Consideremos um triângulo qualquer ABC cujos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas α, β e θ, respectivamente;



traçando por B a reta $\overline{DE}$ paralela a $\overline{AB}$, determinamos ângulos alternos congruentes;

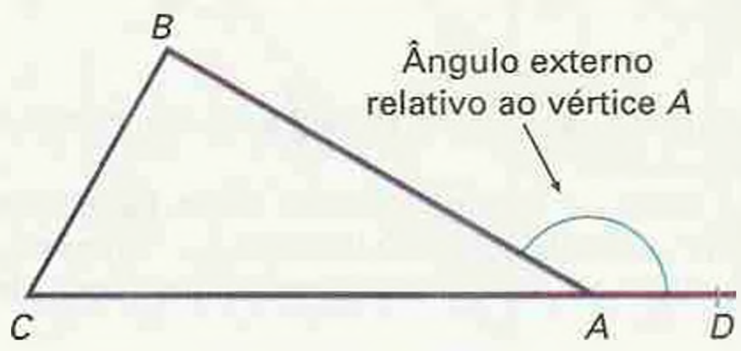


como o ângulo $D\hat{B}E$ é raso, concluímos que $\alpha + \beta + \theta = 180°$, isto é:

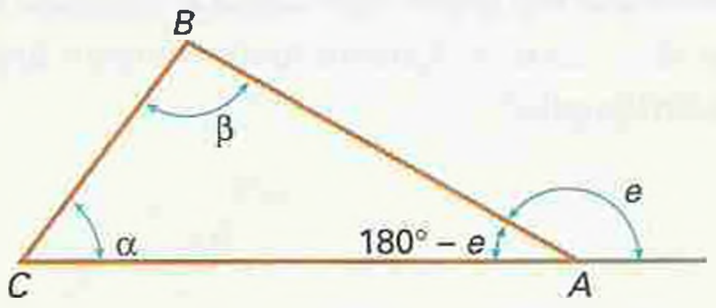
> A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

b) Teorema do ângulo externo de um triângulo

Na figura abaixo, o ângulo $B\hat{A}D$ é adjacente e suplementar de um ângulo interno do triângulo ABC; por isso, $B\hat{A}D$ é chamado de **ângulo externo** desse triângulo.



Sendo α e β as medidas dos ângulos internos C e B, respectivamente, e indicando por e a medida do ângulo externo relativo ao vértice A temos:



Logo,

$$\alpha + \beta + 180° - e = 180°$$
$$\therefore e = \alpha + \beta$$

isto é:

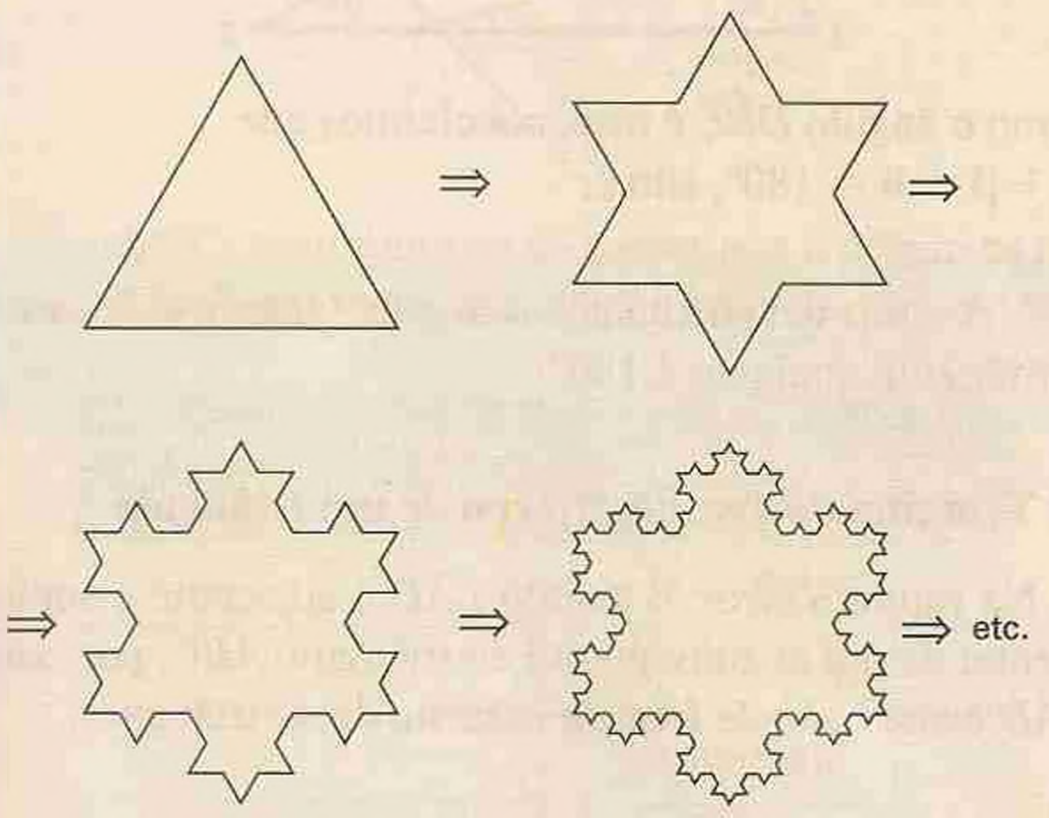
> A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

O Floco de Neve: um polígono fractal

O termo "fractal" foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, pesquisador da IBM e autor de trabalhos pioneiros sobre a Geometria Fractal. (...)

A característica principal de uma linha ou de uma figura fractal é a repetição de padrões: o desenho visível numa determinada escala repete-se sucessivamente em escalas cada vez menores. (...)

Um exemplo interessante de polígono fractal é o que representa um floco de neve no plano. Sua construção é relativamente simples. Parte-se de um triângulo equilátero e dividem-se seus lados em três partes iguais. Em cada um dos lados, apaga-se a parte do meio e constrói-se, com base no segmento central (que foi apagado), um novo triângulo equilátero de lado igual a 1/3 do primitivo. Então, sobre cada lado resultante repete-se o processo anterior várias vezes, como mostram as figuras a seguir:



(...)

José Domingos Vasconcelos. Desenhando um fractal plano, site *Estadão na escola*.

Para ler o texto na íntegra consulte o site **Estadão na escola** (www.estadao-escola.com.br), clicando em "Sugestões de atividades", "Matemática" e "Desenhando um fractal plano".

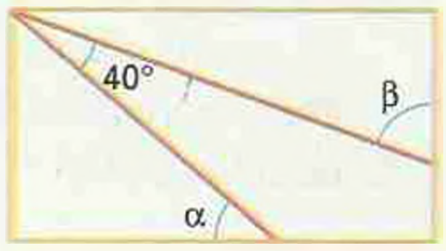
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.6 As medidas em graus, dos ângulos internos de um triângulo são x, $2x$ e $3x$. Quanto mede o menor ângulo interno desse triângulo?

B.7 Um ângulo agudo de um triângulo retângulo mede o quádruplo da medida do outro ângulo agudo. Quanto mede o menor ângulo interno desse triângulo?

B.8 (Fuvest-SP) No retângulo, o valor, em graus, de $\alpha + \beta$ é:

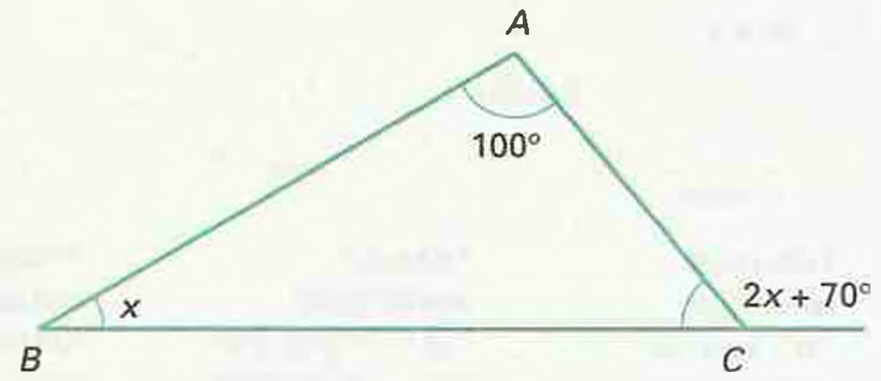
a) 50
b) 90
c) 120
d) 130
e) 220



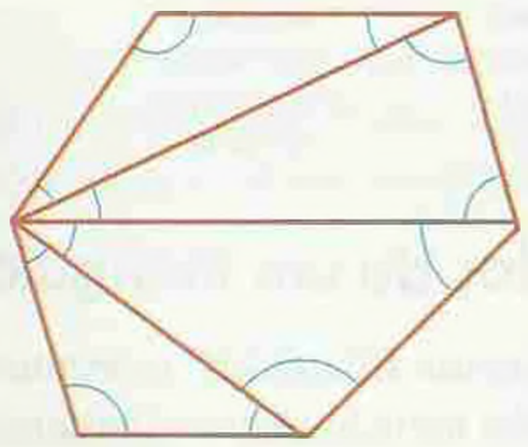
Nota

Retângulo é todo quadrilátero que possui os quatro ângulos retos.

B.9 Determine a medida do ângulo externo relativo ao vértice C do triângulo abaixo:



B.10 As diagonais que "partem" de um mesmo vértice de um polígono convexo dividem-no em triângulos. Multiplicando por 180° o número de triângulos, obtém-se a soma das medidas dos ângulos internos do polígono convexo. Por exemplo, as diagonais que partem de um mesmo vértice de um hexágono convexo dividem-no em 4 triângulos. Observe:



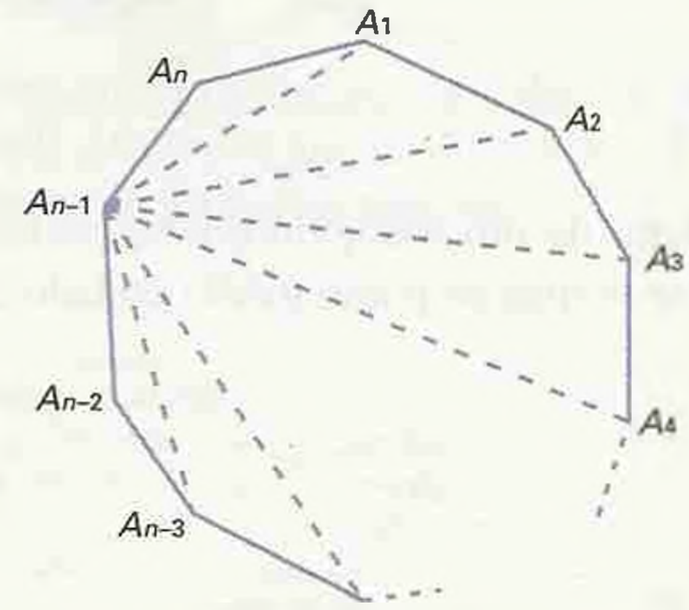
Portanto, a soma S_i das medidas dos ângulos internos desse polígono é:

$$S_i = 4 \cdot 180° = 720°$$

Raciocinando desse modo, calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de:

a) 4 lados (quadrilátero);
b) 5 lados (pentágono);
c) 8 lados (octógono).

B.11 As diagonais que "partem" de um mesmo vértice de um polígono convexo de n vértices dividem-no em $n - 2$ triângulos:



Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, concluímos que a soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é:

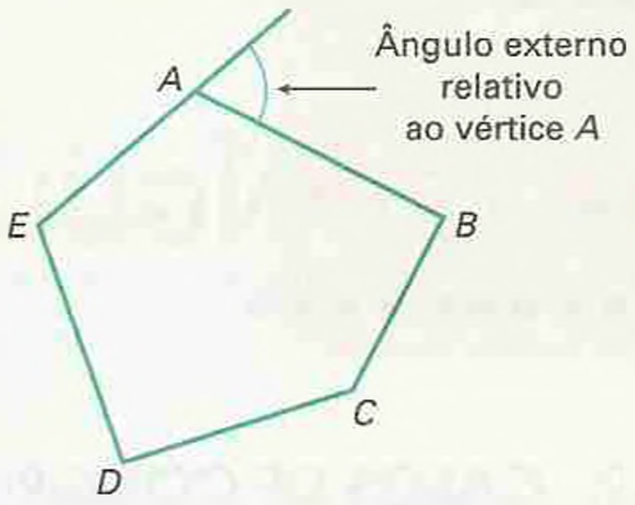
$$S_i = 180° (n - 2)$$

Usando essa fórmula, calcule a soma dos ângulos internos dos seguintes polígonos convexos:

a) quadrilátero
b) pentágono
c) hexágono
d) decágono

B.12 Quanto mede cada ângulo interno de um hexágono regular?

B.13 Um ângulo adjacente e suplementar de um ângulo interno de um polígono convexo é chamado de **ângulo externo**.



Em relação a cada vértice temos dois ângulos externos opostos pelo vértice. Considerando apenas um desses ângulos em cada vértice, prove que a soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo é $S_e = 360°$.

Sugestão. Use a fórmula do exercício **B. 11** e observe que um ângulo externo e o ângulo interno adjacente são suplementares.

B.14 Quanto mede cada ângulo externo de um decágono regular?

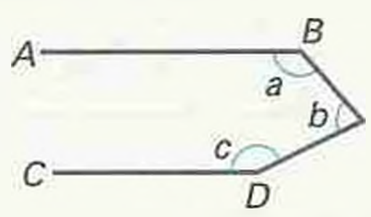
Exercícios complementares de C.4 a C.11

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UnB-DF) A figura mostra as medidas a, b e c dos ângulos assinalados, sendo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

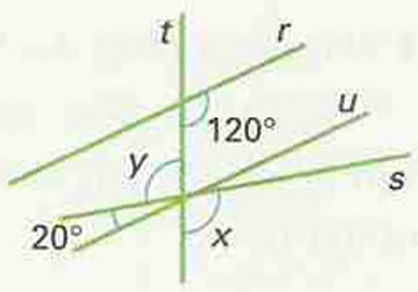
Nessas condições, pode-se afirmar que:

a) $a + b + c = 360°$
b) $b = a + c$
c) $b = c - a$
d) $a + b = 180°$
e) $a = b + c$

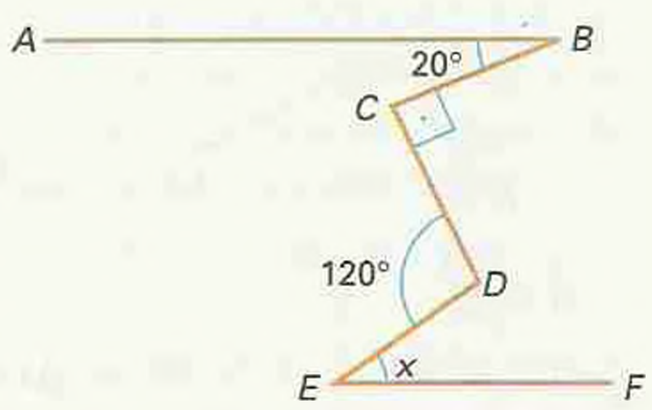


C.2 (FGV-SP) Considere as retas r, s, t, u, todas num mesmo plano, com $r \parallel u$, conforme figura. O valor em graus de $2x + 3y$ é:

a) 64°
b) 500°
c) 520°
d) 660°
e) 580°

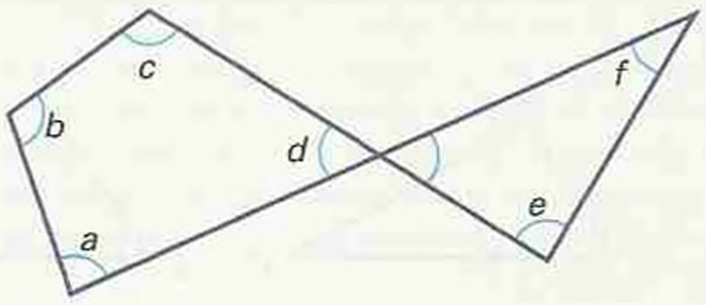


C.3 Determine a medida x do ângulo $D\hat{E}F$ da figura ao lado, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$.

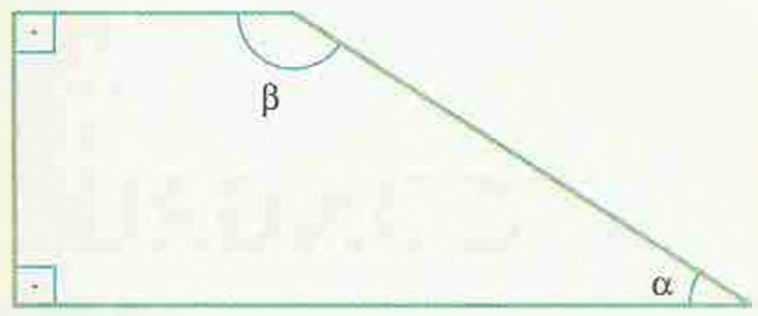


C.4 (Fuvest-SP) Na figura abaixo os ângulos a, b, c, d medem, respectivamente, $\frac{x}{2}$, $2x$, $\frac{3x}{2}$ e x. O ângulo e é reto. Qual é a medida do ângulo f?

a) 16°
b) 18°
c) 20°
d) 22°
e) 24°



C.5 No quadrilátero a seguir, a medida β é igual ao quíntuplo da medida α.



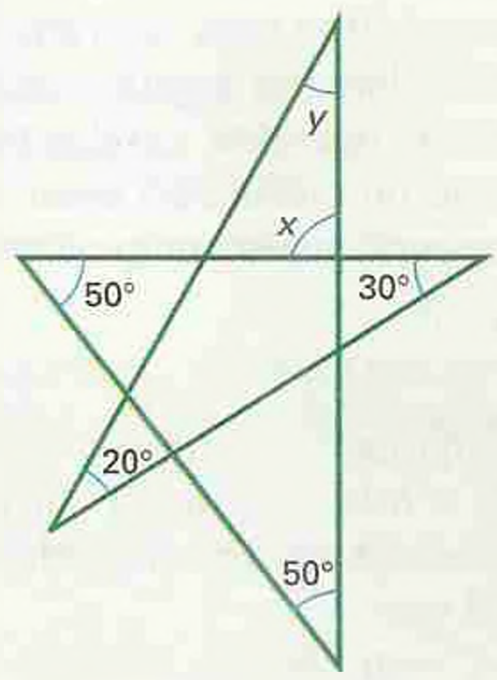
a) Determine a medida α, em graus.
b) Determine a medida de um ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos de medidas α e β.

C.6 Um triângulo ABC é retângulo em A, e um dos outros ângulos internos mede 40°. Determine a medida do ângulo formado pela altura e pela bissetriz relativa ao vértice A.

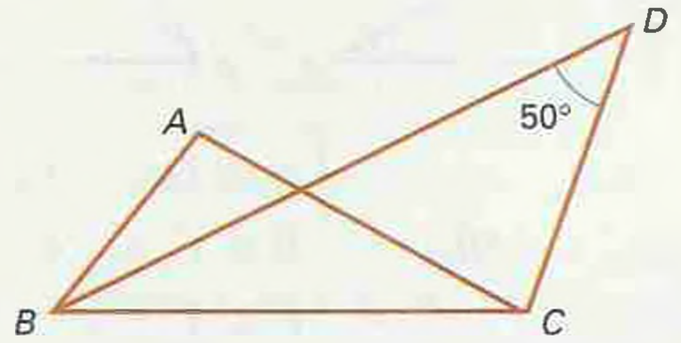
C.7 (Fuvest-SP) Considere um triângulo ABC tal que a altura $\overline{BH}$ seja interna ao triângulo e os ângulos $B\hat{A}H$ e $H\hat{B}C$ sejam congruentes. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

C.8 O ângulo externo relativo ao vértice A de um triângulo ABC mede 100°. As medidas dos ângulos internos B e C estão na razão 2 para 3, nessa ordem. Determine a medida do ângulo externo relativo ao vértice B.

C.9 Determine as medidas x e y na figura abaixo:

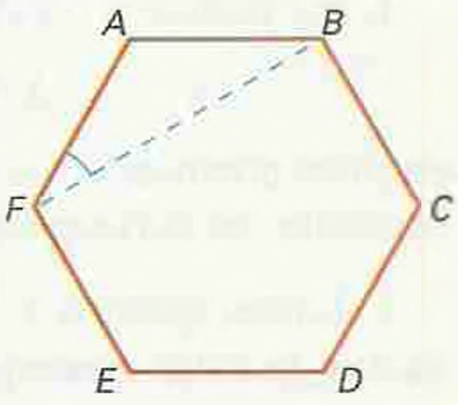


C.10 (Vunesp) No triângulo ABC da figura $\overline{BD}$ é bissetriz do ângulo interno B, e $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo externo relativo ao vértice C. Determine a medida do ângulo interno A.



C.11 (UFRJ) No hexágono regular, o ângulo $A\hat{F}B$ mede:

a) 60°
b) 30°
c) 40°
d) 50°
e) 52°

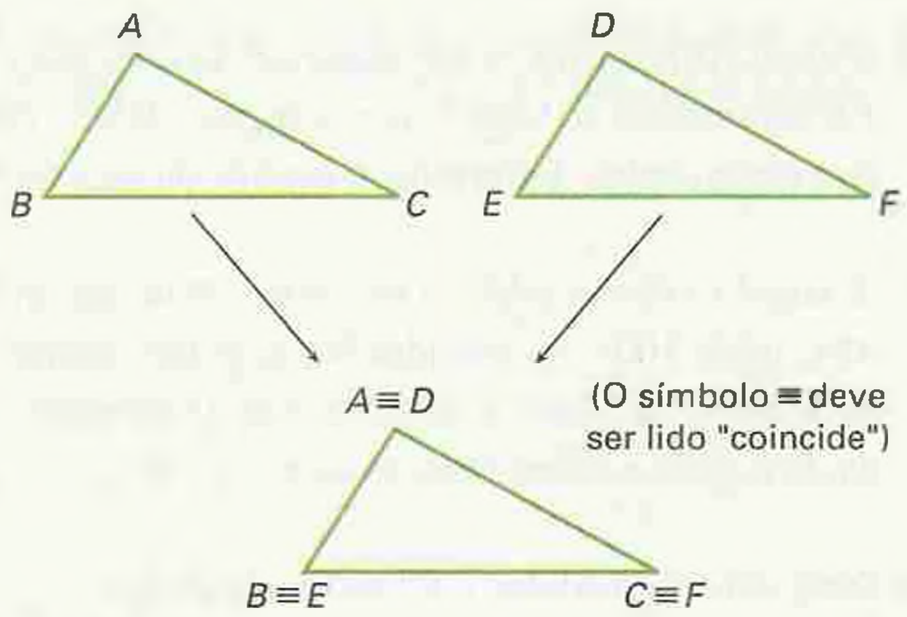


Capítulo 7

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

1. CONCEITUAÇÃO

Imagine dois triângulos recortados em cartolina, de modo que seja possível colocar um sobre o outro para que cada ponto de qualquer um deles coincida com algum ponto do outro:



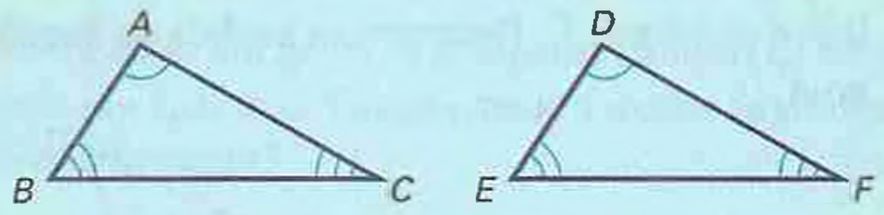
Isso só é possível se para cada ângulo de qualquer um dos triângulos existe um ângulo congruente no outro; e para cada lado de qualquer um dos triângulos existe um lado congruente no outro. Sob essas condições dizemos que os dois triângulos são **congruentes**.

Definição

Dois triângulos são **congruentes** se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro, tal que:

I) ângulos com vértices correspondentes são congruentes;

II) lados opostos a vértices correspondentes são congruentes.



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \end{cases}$$

Notas

1. Ao indicar a congruência por

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

estamos afirmando que os vértices A, B, C são, **respectivamente**, os correspondentes dos vértices D, E, F.

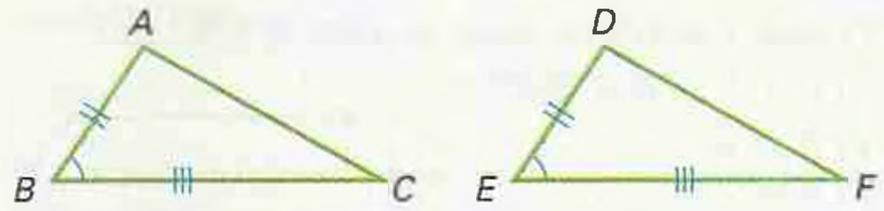
2. Lados opostos a vértices correspondentes são chamados de lados correspondentes.

2. CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

A definição de congruência de triângulos exige que sejam obedecidas seis condições: três congruências entre lados e três entre ângulos. Porém, escolhendo adequadamente algumas dentre essas seis condições, percebemos que, se elas forem obedecidas, as outras também o serão. Qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a congruência de dois triângulos é chamado de **caso de congruência**. A seguir apresentamos os casos principais.

Caso LAL (lado, ângulo, lado)

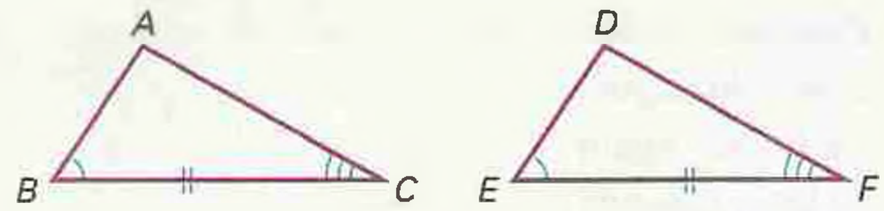
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm dois lados e o ângulo compreendido por eles, respectivamente, congruente.



$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Caso ALA (ângulo, lado, ângulo)

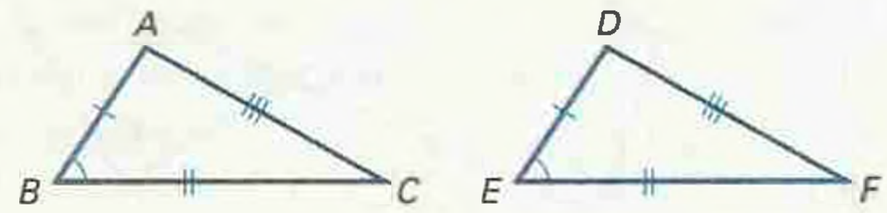
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm um lado e os ângulos adjacentes a ele, respectivamente, congruentes.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{E} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)

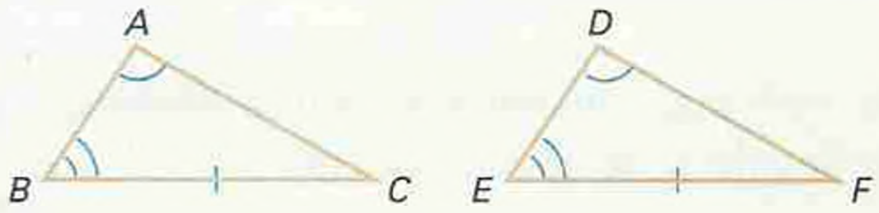
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente, congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Caso LAA$_o$ (lado, ângulo, ângulo oposto)

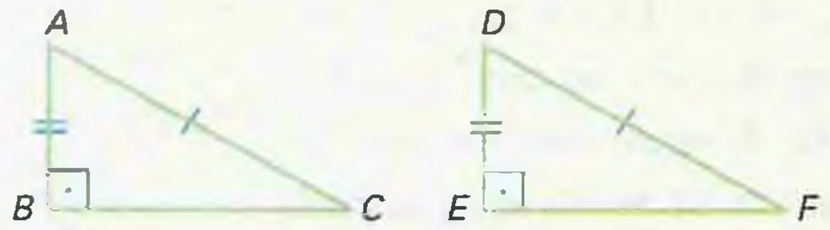
Dois triângulos são congruentes se, e somente se, têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente, congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{A} \cong \hat{D}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Caso RHC (ângulo reto, hipotenusa, cateto)

Dois triângulos retângulos são congruentes se, e somente se, têm a hipotenusa e um cateto, respectivamente, congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \text{ e } \hat{E} \text{ são retos} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \\ \overline{AB} \cong \overline{DE}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Determinação da rota na navegação aérea

Voando para um certo ponto, um avião sofre um desvio quando recebe um vento lateral. Por isso, a rota deve ser corrigida. Em princípio isso é conseguido através de um paralelogramo *ABCD* no qual a velocidade, a direção e o sentido do vento são representados pelo lado $\overline{AB}$; a rota direta ao ponto em que se quer chegar é representada pela diagonal $\overline{AC}$; e a velocidade, a direção e o sentido que se imprimem ao avião são representados pelo lado $\overline{AD}$, conforme a figura 1. Se a correção não for feita, comete-se o erro mostrado na figura 2.

Figura 1

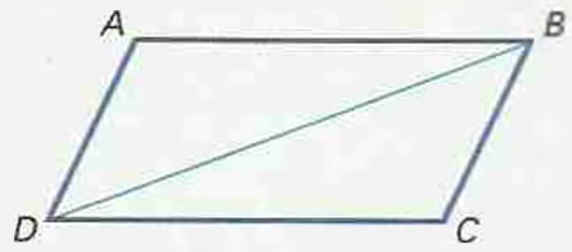
O avião está em *A*; *AC* é a direção do objetivo; *AD* é a direção que se imprime ao aparelho para que a resultante o leve à meta. Se isso não for feito cometeremos o erro mostrado na figura seguinte.

Figura 2

O avião está em *A*; *AB* é a direção do vento; *AC* a direção da meta. O vento desvia o avião que, em vez de se dirigir para seu objetivo, segue a resultante *AD*.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 O quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo, isto é, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

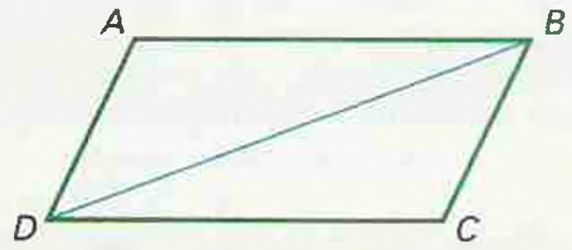


Mostre que os triângulos *ABD* e *CDB* são congruentes. (Basta identificar um dos cinco casos de congruência.)

Nota
Dessa congruência temos que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Concluímos, então, a importante propriedade:

> Em um paralelogramo, dois lados opostos quaisquer são congruentes.

B.2 No quadrilátero plano *ABCD* tem-se que $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



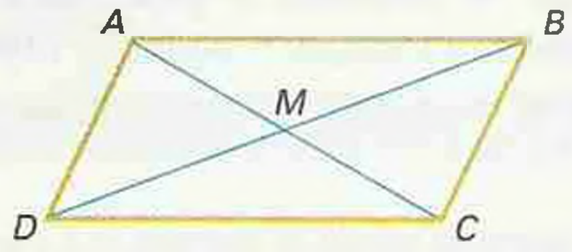
Mostre que os triângulos *ABD* e *CDB* são congruentes. (Basta identificar um dos cinco casos de congruência.)

Nota
Dessa congruência, temos que:
- $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$, logo $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$;
- $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$, logo $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Concluímos, então, a importante propriedade:

> Todo quadrilátero plano, em que dois lados opostos quaisquer são congruentes, é um paralelogramo.

B.3 O quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo.



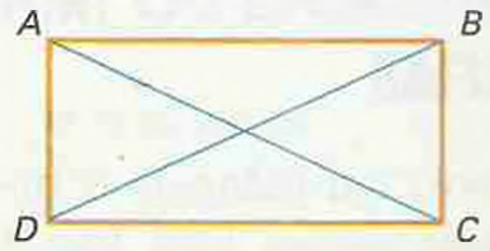
Mostre que os triângulos *AMB* e *CMD* são congruentes.

Nota
Dessa congruência, temos que:
- $\overline{AM} \cong \overline{CM}$, logo *M* é ponto médio de $\overline{AC}$.
- $\overline{BM} \cong \overline{DM}$, logo *M* é ponto médio de $\overline{BD}$.

Concluímos, então, a importante propriedade:

> O ponto de cruzamento das diagonais de um paralelogramo é o ponto médio de cada uma delas.

B.4 O quadrilátero *ABCD* é um retângulo, isto é, tem os quatro ângulos retos.



Mostre que os triângulos *ADC* e *BCD* são congruentes.

Nota

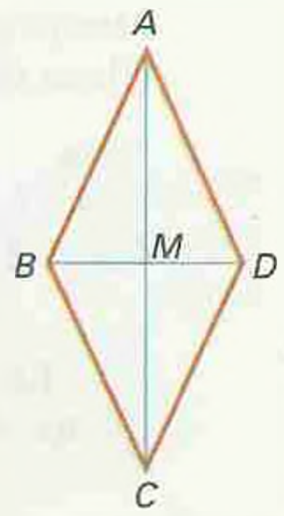
Dessa congruência, temos que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Concluímos, então, a importante propriedade:

As diagonais de um retângulo são congruentes.

Observe que um retângulo também é paralelogramo, portanto, valem para o retângulo as propriedades deduzidas para o paralelogramo.

B.5 O quadrilátero plano $ABCD$ é um losango, isto é, tem os quatro lados congruentes entre si.
Mostre que os triângulos AMD, AMB, CMD e CMB são congruentes entre si.



Nota

Dessa congruência, temos que:

- $A\hat{M}D \cong A\hat{M}B \cong C\hat{M}B \cong C\hat{M}D$, logo, cada um desses ângulos é reto, pois a soma de suas medidas é 360°.
- $M\hat{A}B \cong M\hat{A}D$, $M\hat{C}B \cong M\hat{C}D$, $M\hat{B}A \cong M\hat{B}C$ e $M\hat{D}A \cong M\hat{D}C$.

Concluímos, então, as importantes propriedades:

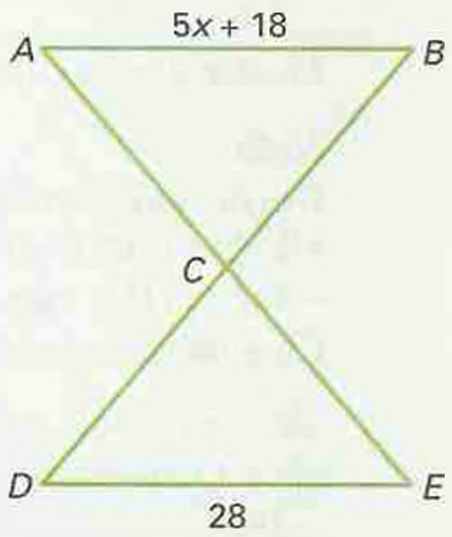
As diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

As diagonais do losango estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

Notas

1. Um losango também é um paralelogramo, e, portanto, valem para o losango todas as propriedades do paralelogramo.
2. Um quadrado é um quadrilátero plano que possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos. Logo, o quadrado é paralelogramo, é retângulo e também é losango; e, portanto, valem para o quadrado todas as propriedades concluídas nos exercícios de B.1 a B.5.

B.6 Na figura ao lado, C é ponto médio de cada um dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$; e as medidas indicadas estão na mesma unidade de comprimento.
a) Determine o número x.
b) Qual é a posição relativa das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$? Por quê?



Exercícios complementares de C.1 a C.6

3. PROPRIEDADES DO TRIÂNGULO ISÓSCELES

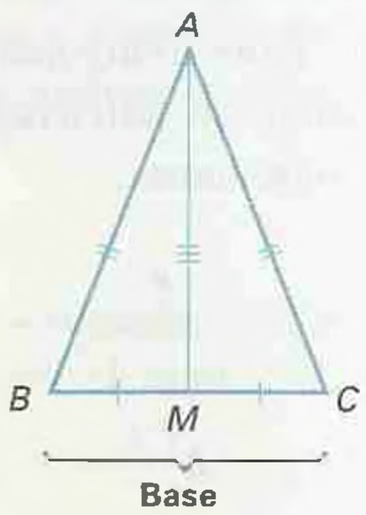
Como vimos, um triângulo é isósceles quando tem dois lados congruentes. Esse tipo de triângulo possui algumas propriedades que merecem destaque, devido a sua grande aplicação na resolução de problemas. Para facilitar a compreensão dessas propriedades, convencionamos que em um triângulo isósceles o vértice comum aos lados congruentes é chamado de **vértice do triângulo isósceles** e o lado oposto a esse vértice é chamado de **base do triângulo isósceles**. Desse modo, temos que:

Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

A mediana, a bissetriz e a altura relativas à base do triângulo isósceles coincidem.

A mediatriz relativa à base de um triângulo isósceles contém a mediana, a bissetriz e a altura relativas a essa base.

Para justificar essas propriedades, vamos traçar a mediana $\overline{AM}$ relativa à base $\overline{BC}$ de um triângulo isósceles ABC:



Pelo caso **LLL** de congruência de triângulos temos que $\Delta AMB \cong \Delta AMC$. Conseqüentemente:

I) $A\hat{B}M \cong A\hat{C}M$, ou seja, os ângulos da base do triângulo isósceles são congruentes.

II) $B\hat{A}M \cong C\hat{A}M$, e, portanto, a mediana $\overline{AM}$ coincide com a bissetriz interna relativa ao vértice do triângulo isósceles.

III) $A\hat{M}B \cong A\hat{M}C$ e $m(A\hat{M}B) + m(A\hat{M}C) = 180°$
Logo, cada um dos ângulos $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$ é reto, portanto, a mediana $\overline{AM}$ coincide com a altura relativa à base do triângulo isósceles.

IV) A altura relativa à base do triângulo isósceles é perpendicular a essa base no ponto médio M. Logo, essa altura está contida na mediatriz relativa a essa base. Como a altura coincide com a mediana e com a bissetriz relativas à base, temos justificada a última propriedade.

Valem também as recíprocas dessas propriedades, isto é:

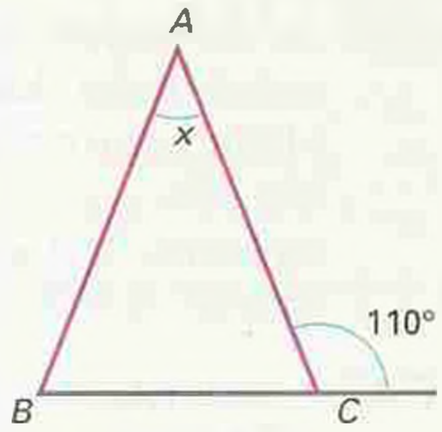
Se um triângulo possui dois ângulos internos congruentes, então ele é isóceles.

Se a mediana relativa a um lado de um triângulo coincide com a bissetriz ou com a altura relativa a esse lado, então esse triângulo é isósceles.

Se a mediatriz relativa a um lado de um triângulo contém a mediana, a bissetriz ou a altura relativa a esse lado, então esse triângulo é isósceles.

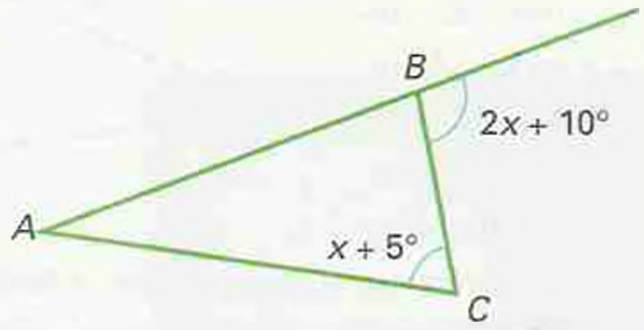
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 No triângulo ABC da figura tem-se que $AB = AC$. Determine a medida x, em graus.



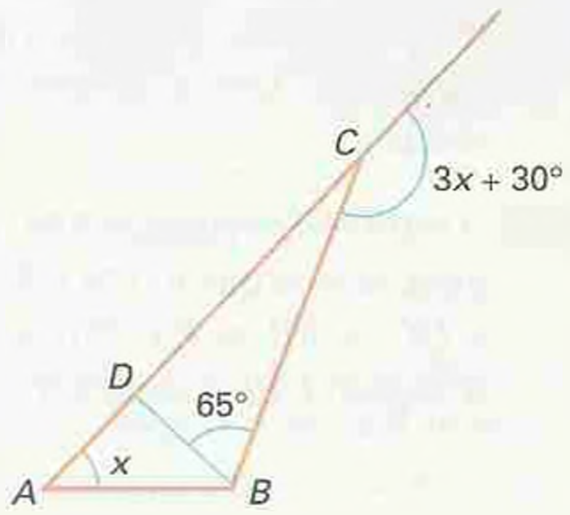
Nota
A medida de um segmento $\overline{AB}$ é indicada por AB (sem o traço).

B.8 No triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ da figura, determine a medida do ângulo interno $\hat{A}$.



B.9 Determine a medida de cada ângulo agudo de um triângulo retângulo isósceles.

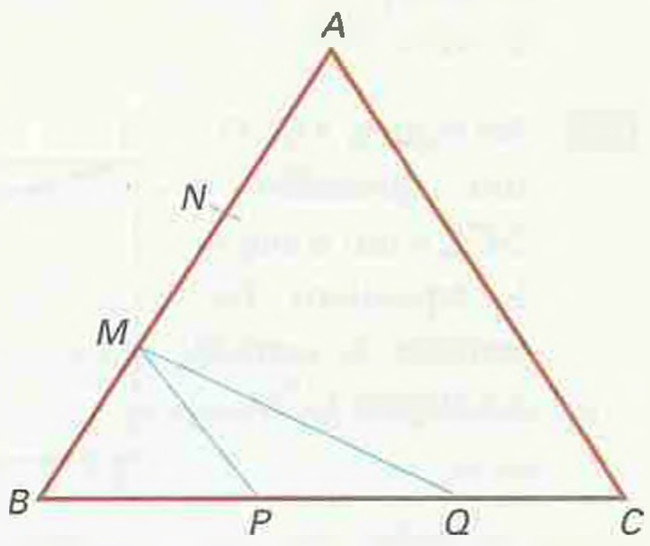
B.10 Na figura ao lado, os pontos A, D e C são colineares e $AD = BD$. Determine a medida x, em graus.



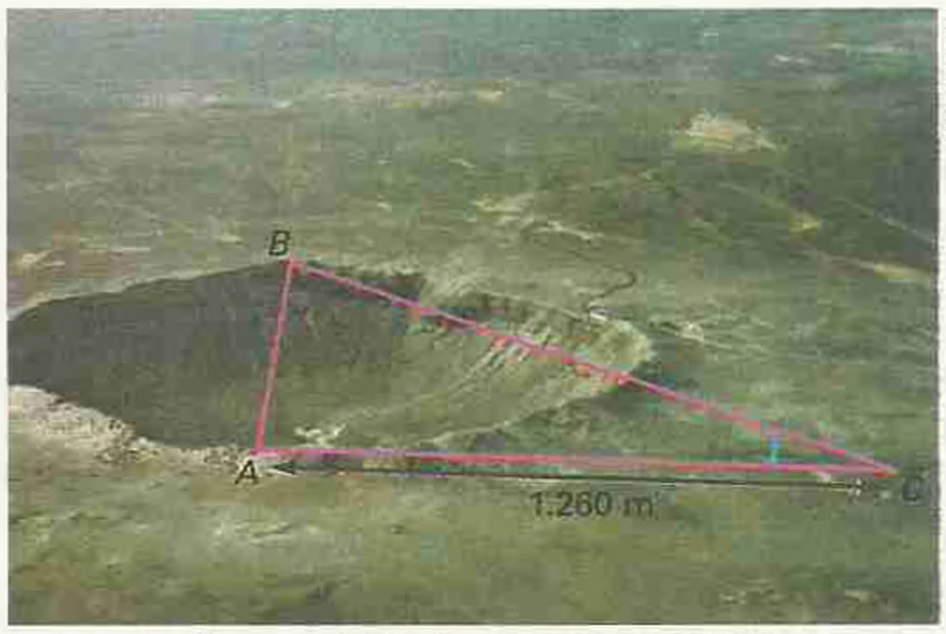
B.11 (Fuvest-SP) Num triângulo isósceles um ângulo $\hat{A}$ mede 100°. Qual é a medida de um ângulo agudo formado pelas alturas que não passam pelo vértice A?

B.12 Quanto mede cada ângulo interno de um triângulo equilátero?

B.13 (Vunesp) O triângulo ABC da figura é equilátero. Os pontos M e N e os pontos P e Q dividem os lados a que pertencem em três segmentos de reta de mesma medida. Nessas condições, calcule:
a) a medida do ângulo $M\hat{P}Q$ (vértice P);
b) a medida do ângulo $B\hat{M}Q$ (vértice M).



B.14 Há milhares de anos, um meteorito com mais de um milhão de toneladas chocou-se com o solo no Arizona, EUA, formando uma enorme cratera (Cratera de Barringer). Para medir o diâmetro dessa cratera, um geólogo fixou dois pontos A e B, extremos de um diâmetro da cratera, e caminhou 1.260 m, a partir do ponto A, perpendicularmente a $\overline{AB}$, até um ponto C tal que $m(A\hat{C}B) = 45°$. Qual é a medida do diâmetro $\overline{AB}$?

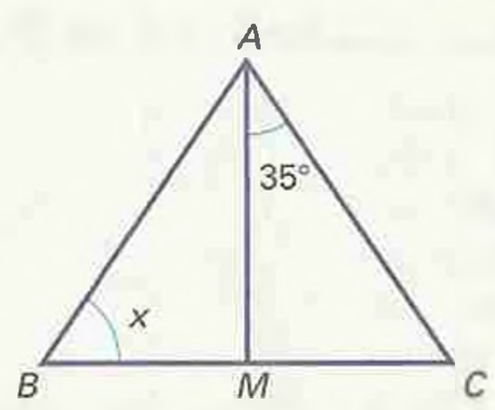


FOTOS: CID

Cratera de Barringer, Arizona, EUA

Vista interior da cratera.

B.15 O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e M é ponto médio da base. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.



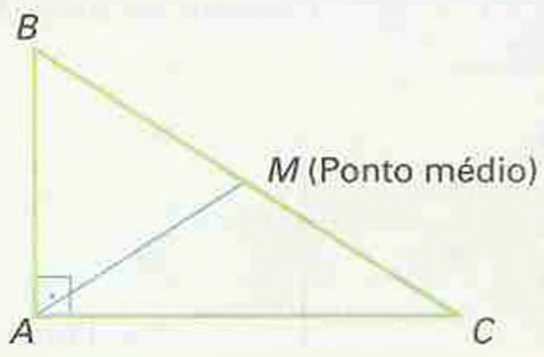
B.16 Num triângulo retângulo ABC, um ponto D da hipotenusa $\overline{AC}$ é tal que os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}D$ têm a mesma medida. Sabendo que $AC = 10$ cm, calcule a medida do segmento $\overline{BD}$.

Exercícios complementares C.7 e C.8

4. PROPRIEDADE DA MEDIANA RELATIVA À HIPOTENUSA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

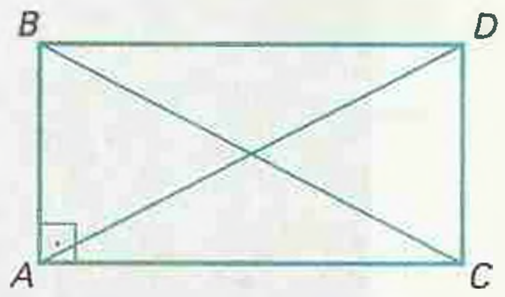
Dentre as várias propriedades do triângulo retângulo, vamos destacar uma, decorrente do conceito de congruência de triângulos, que afirma:

> Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.

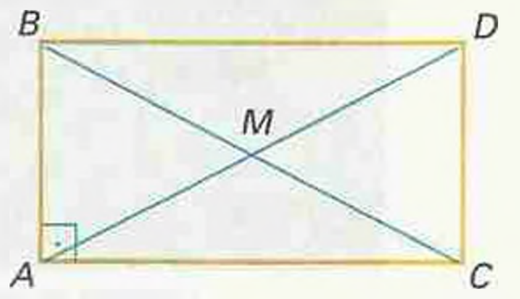


$$AM = \frac{BC}{2}$$

Para entender o porquê dessa propriedade, construa o retângulo $ABDC$ e suas diagonais:



As diagonais de um retângulo são congruentes e o ponto comum às duas é ponto médio de cada uma. Logo, esse é o ponto médio, M, da hipotenusa do triângulo ABC:

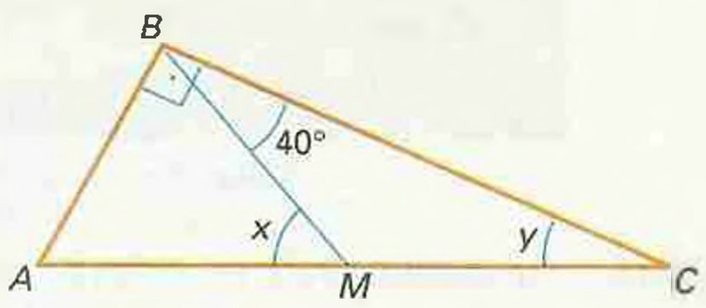


Como $\begin{cases} AM = \dfrac{AD}{2} \\ AD = BC \end{cases}$ concluímos que

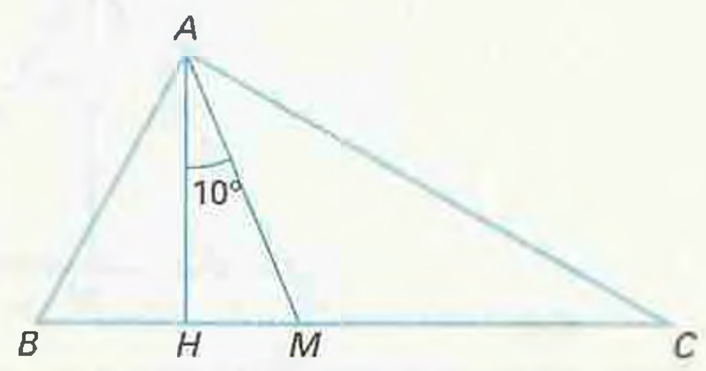
$$AM = \frac{BC}{2}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.17 Na figura, M é ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo ABC, e o ângulo $C\hat{B}M$ mede 40°.
Determine as medidas x e y, em graus.



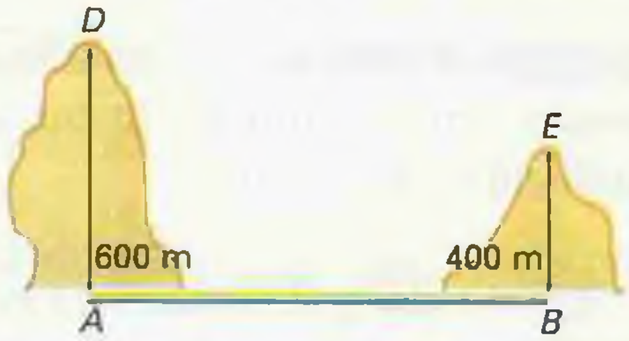
B.18 (E. E. Mauá-SP) No triângulo ABC, retângulo em A, a altura $\overline{AH}$ forma ângulo de 10° com a mediana $\overline{AM}$.
Calcular as medidas dos ângulos internos do triângulo ABH.



Exercícios complementares C.9 e C.10

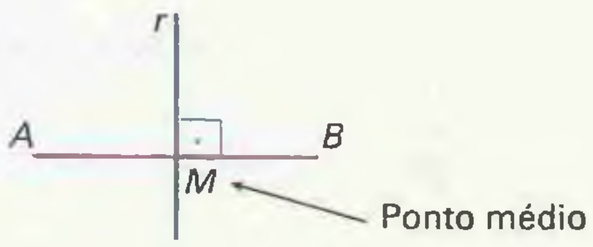
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Duas montanhas têm alturas 600 m e 400 m em relação a um terreno plano e horizontal, sendo A e B os "centros" das bases; e D e E seus topos, conforme figura.



Sobre um ponto C do segmento $\overline{AB}$, será construído um posto de observação da guarda florestal, tal que $\overline{CD} \cong \overline{CE}$ e $m(D\hat{C}E) = 90°$. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$.

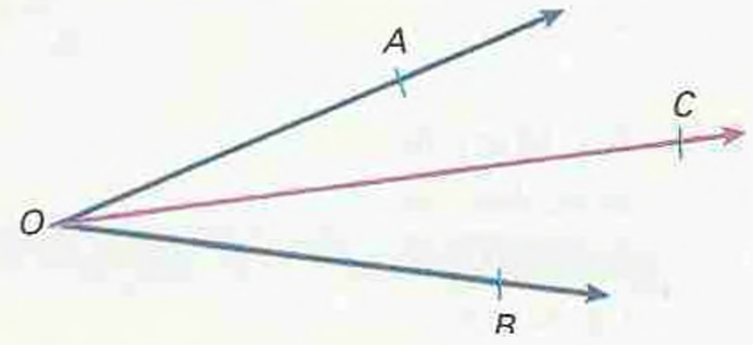
C.2 A reta r é mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Mostre que qualquer ponto de r equidista de A e B.



Sugestão. Tome um ponto P qualquer da mediatriz, $P \not\equiv M$ (pois M com certeza equidista dos extremos A e B) e trace os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.

C.3 As três mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto chamado de **circuncentro do triângulo**. Mostre que o circuncentro equidista dos três vértices do triângulo.
Sugestão. Use a propriedade deduzida no exercício anterior.

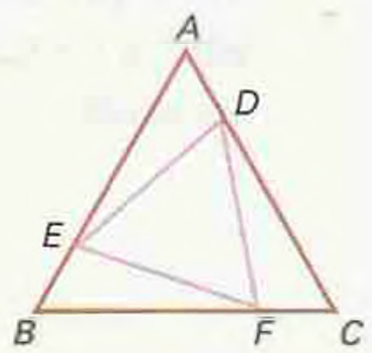
C.4 A semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$. Mostre que qualquer ponto dessa bissetriz equidista dos lados do ângulo.



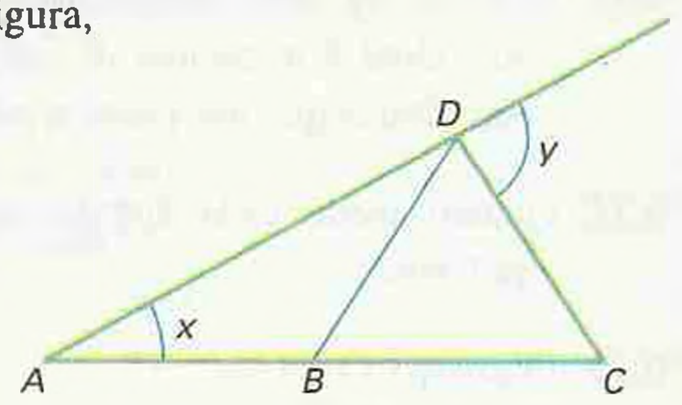
Sugestão. Tome um ponto P, $P \not\equiv O$, qualquer da bissetriz e trace, a partir dele, segmentos perpendiculares aos lados do ângulo.

C.5 As bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto I chamado de **incentro do triângulo**. Mostre que o ponto I equidista dos três lados do triângulo.
Sugestão. Use a propriedade deduzida no exercício anterior.

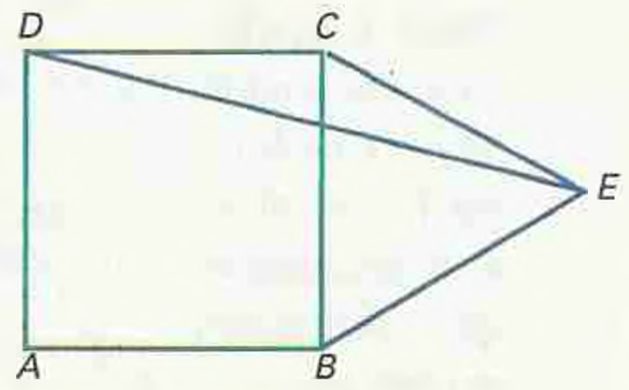
C.6 (UFES) No triângulo ABC da figura, tem-se que $\overline{AD} \cong \overline{CF} \cong \overline{BE}$ e $\overline{DC} \cong \overline{FB} \cong \overline{EA}$. Prove que o triângulo DEF é equilátero.



C.7 (Fuvest-SP) Na figura, $AB = BD = CD$.
Então:
a) $y = 3x$
b) $y = 2x$
c) $x + y = 180°$
d) $x = y$
e) $3x = 2y$

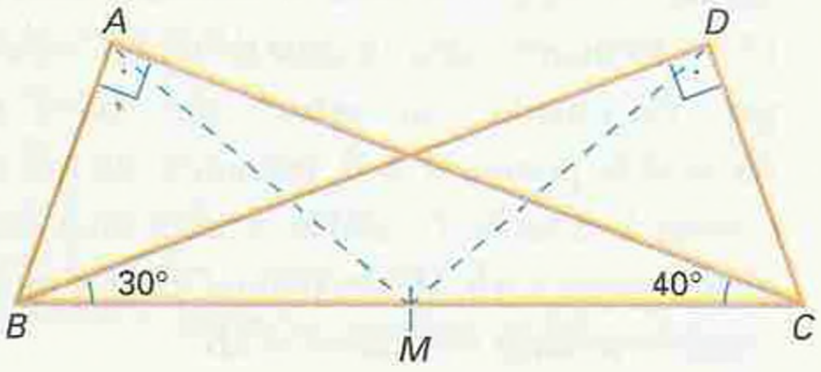


C.8 Na figura, $ABCD$ é um quadrado e BCE é um triângulo equilátero. Determine a medida do ângulo $C\hat{E}D$.



C.9 Calcule a medida do ângulo formado pela altura e pela mediana relativas à hipotenusa de um triângulo retângulo que possui um ângulo interno de 20°.

C.10 (UnB-DF) Na figura abaixo, calcule a medida do ângulo $A\hat{M}D$, sabendo que M é ponto médio de $\overline{BC}$.

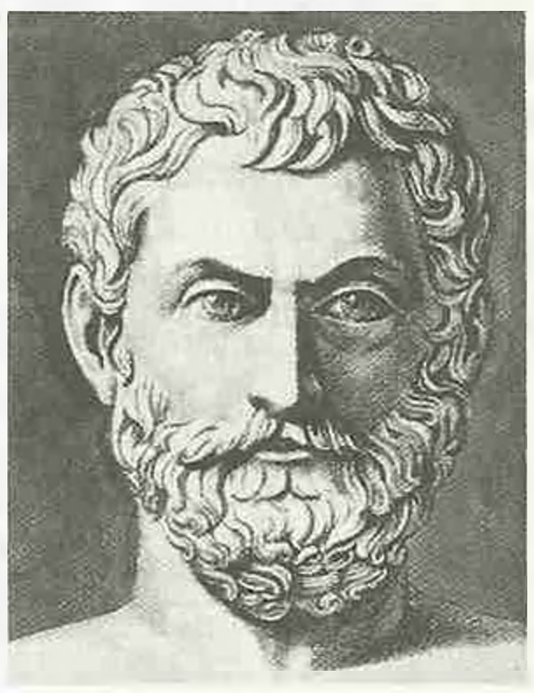


Capítulo 8

A PROPORÇÃO E A GEOMETRIA

1. TEOREMA DE TALES

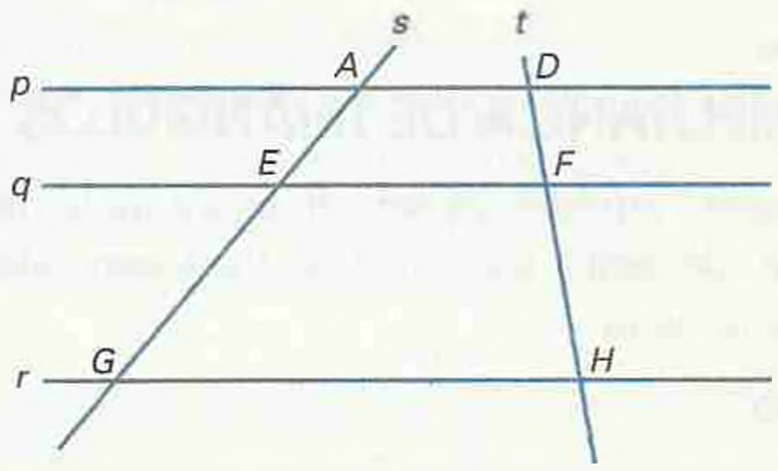
A famosa frase "Conhece-te a ti mesmo", dita por Tales de Mileto (624 a.C. – 548 a.C.), caracteriza bem o homem que mereceu de Aristóteles o comentário: "Para Tales a questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos".



Tales de Mileto
(624 a.C. – 548 a.C.).

Tales é considerado o primeiro filósofo grego e é, também, o primeiro homem da história a quem se atribuem descobertas matemáticas específicas, embora, antes dele, já houvesse um grande conhecimento matemático. Um dos teoremas associados ao nome de Tales trata da proporção entre segmentos de reta, conforme é descrito a seguir.

Consideremos três retas paralelas p, q, r "cortadas" por duas transversais s e t:



Dizemos que dois segmentos das transversais s e t são **correspondentes** quando seus extremos pertencem às mesmas paralelas. Por exemplo: $\overline{AE}$ e $\overline{DF}$ são correspondentes, pois seus extremos pertencem às mesmas paralelas p e q; analogamente são correspondentes $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$, $\overline{AG}$ e $\overline{DH}$.

Tales demonstrou **que a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes na outra transversal**, isto é:

$$\frac{AE}{EG} = \frac{DF}{FH} \qquad \frac{GE}{GA} = \frac{HF}{HD}$$

$$\frac{AE}{AG} = \frac{DF}{DH} \qquad \text{etc.}$$

Esse teorema pode ser generalizado para mais de três paralelas, como segue.

> Se três ou mais retas paralelas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

Escalas termométricas

A escala **Celsius** adota, sob pressão normal, o valor 0 (zero) para a temperatura de fusão do gelo e o valor 100 (cem) para a temperatura sob a qual a água entra em ebulição. Na escala **Fahrenheit**, são atribuídos os valores 32 e 212 a essas temperaturas, respectivamente. Os símbolos °C e °F indicam graus Celsius e graus Fahrenheit, respectivamente. Aplicando o teorema de Tales podemos transformar medidas de uma dessas escalas para a outra, por exemplo, para transformar 54 °C em graus Fahrenheit, agimos da seguinte maneira:

Termômetro graduado nas escalas Fahrenheit e Celsius.

$$\frac{MP}{NP} = \frac{M'P'}{N'P'} \Rightarrow \frac{100 - 0}{75 - 0} = \frac{212 - 32}{x - 32}$$

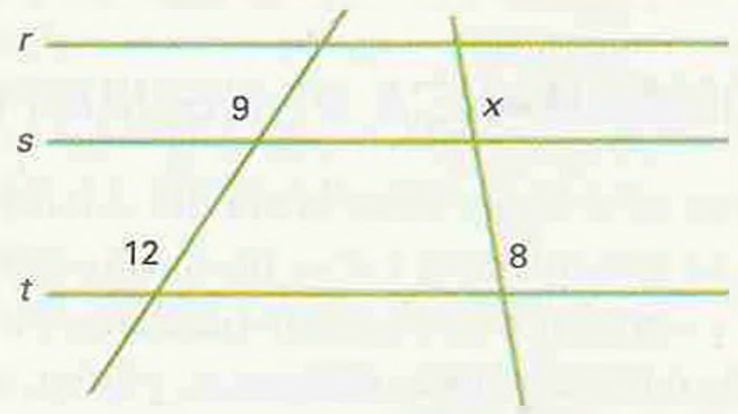
$\therefore x = 167$

Logo, 75 °C equivalem a 167 °F.

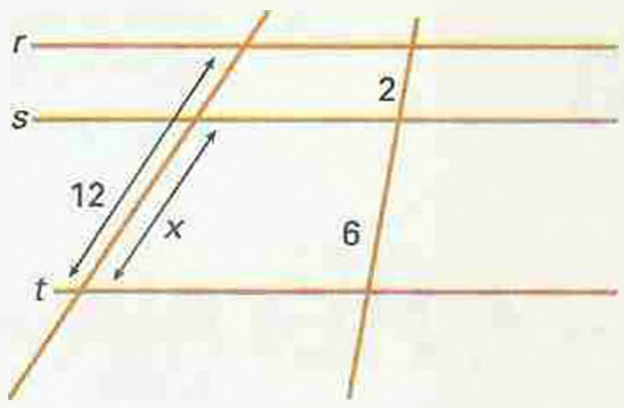
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine a medida x em cada figura:

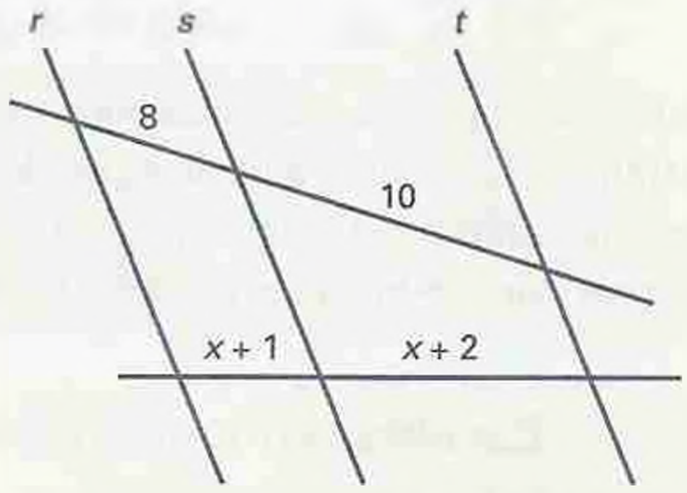
a) $r \parallel s \parallel t$



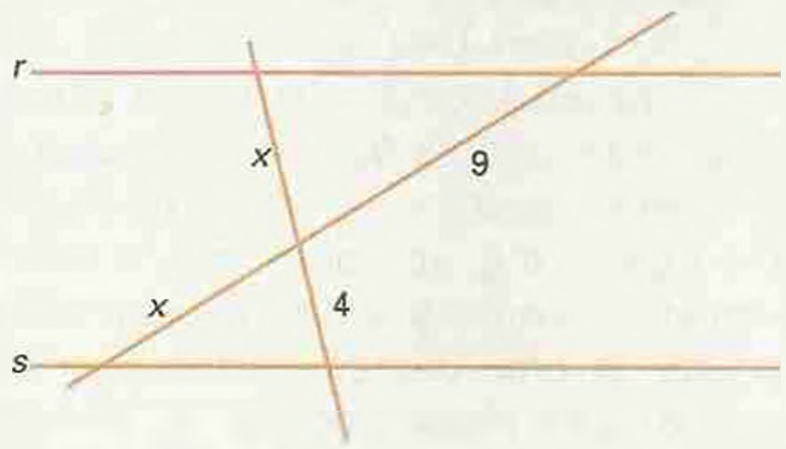
b) $r \parallel s \parallel t$



c) $r \parallel s \parallel t$



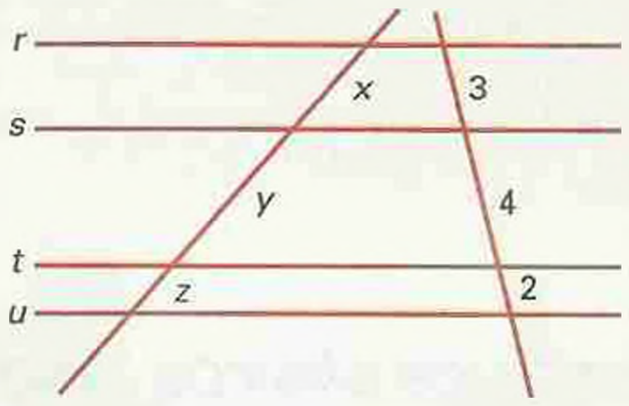
d) $r \parallel s$



Sugestão. Pelo ponto comum às transversais, trace uma reta t paralela às retas r e s.

e) $r \parallel s$

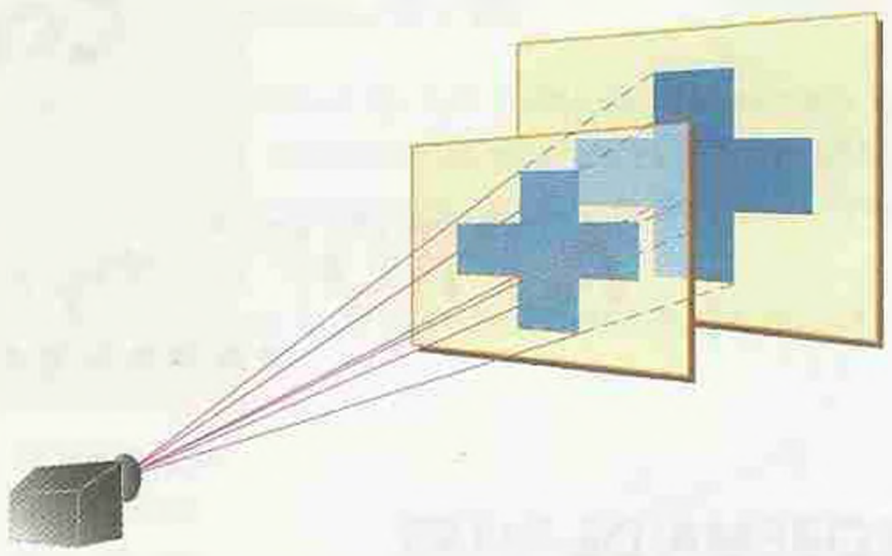
B.2 Determine as medidas x, y e z na figura abaixo, sabendo que $x + y + z = 12$ e que $r \parallel s \parallel t \parallel u$.



Exercícios complementares de C.1 a C.3

2. SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

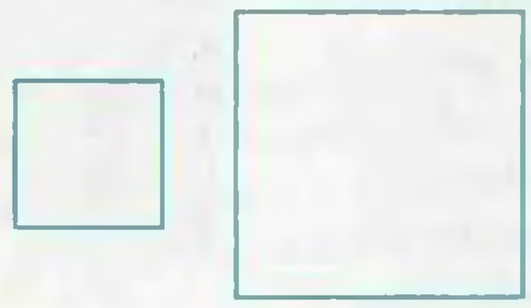
Imagine a figura contida em um eslaide projetada sobre uma tela colocada a duas distâncias diferentes do projetor, e em planos de projeção paralelos. As imagens projetadas terão tamanhos diferentes, porém, terão a mesma "forma". Por isso, dizemos que essas figuras são **semelhantes**.



Um dos conceitos mais importantes da geometria é o de **semelhança** de figuras planas. **Intuitivamente**, duas figuras planas são **semelhantes** quando têm a mesma **forma**, mas não, necessariamente, o mesmo tamanho.

Exemplos

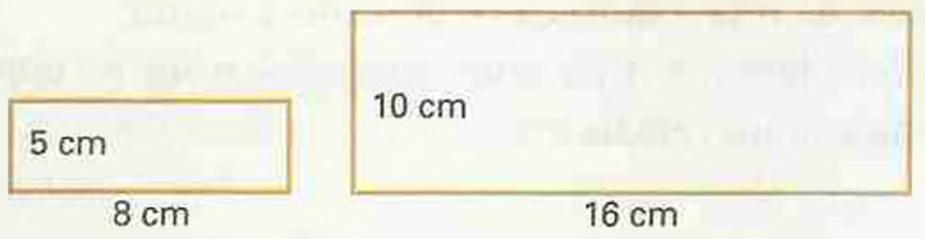
a) Dois quadrados quaisquer são figuras semelhantes.



Nota

Se os quadrados tiverem o mesmo tamanho, então eles são **congruentes**. A congruência é um caso particular da **semelhança.**

b) Dois retângulos só são semelhantes quando seus lados são proporcionais.



3. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

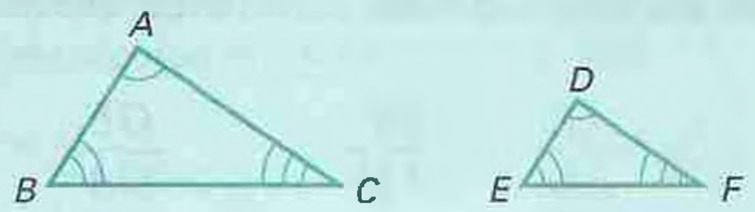
O conceito intuitivo de semelhança é muito importante, porém, devemos formalizá-lo. Para isso, adotamos a definição a seguir.

Definição

Dois triângulos são **semelhantes** se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro, tal que:

I) ângulos com vértices correspondentes são congruentes;

II) lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais.



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

Notas

1. Ao indicar a semelhança por $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ estamos afirmando que os vértices A, B e C são, respectivamente, os correspondentes dos vértices D, E e F.

2. Lados opostos a ângulos correspondentes são chamados de **lados correspondentes**.

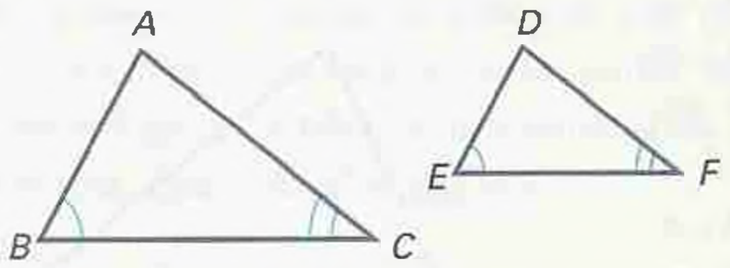
3. A razão entre dois lados correspondentes é chamada **razão de semelhança.**

Casos de semelhança de triângulos

A definição de semelhança de triângulos exige que sejam obedecidas seis condições: três congruências e três proporcionalidades. Porém, escolhendo adequadamente algumas dentre essas seis condições, percebemos que, se elas forem obedecidas, as outras também o serão. Qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a semelhança de dois triângulos é chamado de **caso de semelhança**. A seguir apresentamos os casos principais.

Caso AA (ângulo, ângulo)

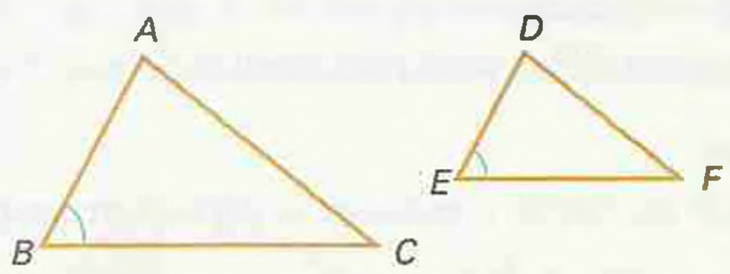
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} \cong \hat{E} \\ \text{e} \\ \hat{C} \cong \hat{F}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LAL (lado, ângulo, lado)

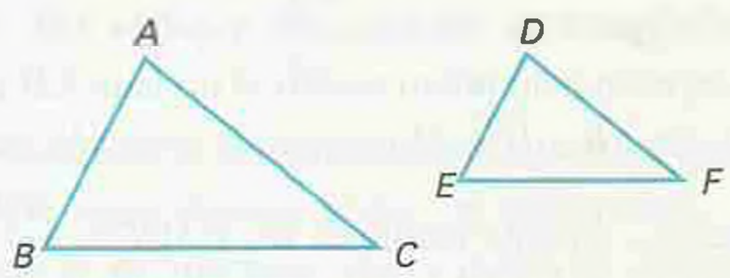
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados, respectivamente, proporcionais; e são congruentes os ângulos formados por esses lados.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} \\ \text{e} \\ \hat{B} \cong \hat{E}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)

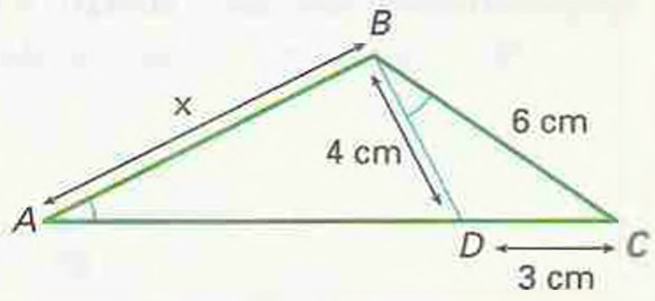
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente, proporcionais.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

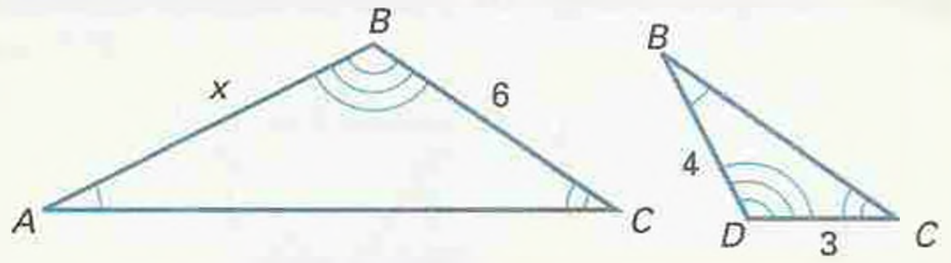
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC ao lado, sabendo que $B\hat{A}C \cong D\hat{B}C$.



Resolução

Separando os triângulos ABC e BDC, e observando que $B\hat{A}C \cong D\hat{B}C$ e $B\hat{C}A \cong B\hat{C}D$ ($\hat{C}$ é ângulo comum aos dois triângulos), concluímos que $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ (caso **AA**). Marcando ângulos congruentes com o mesmo número de tracinhos, temos:



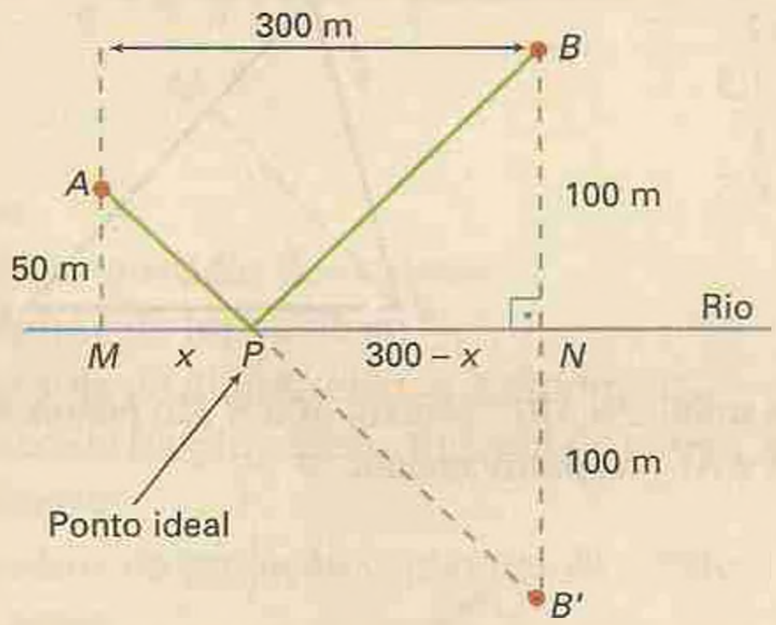
Para montar a proporção entre as medidas dos lados, colocamos como numeradores as medidas dos lados de um mesmo triângulo e em cada denominador colocamos o correspondente do numerador (lados correspondentes são lados opostos a ângulos congruentes), isto é:

$$\frac{x}{4} = \frac{6}{3} \therefore x = 8$$

Logo, o lado $\overline{AB}$ mede 8 cm.

Um pequeno projeto de hidráulica

Dois chacareiros, que moram em um mesmo lado de um rio, fizeram uma sociedade na compra de uma bomba d'água que será instalada em um ponto do rio e servirá as duas residências A e B, conforme a figura. Decidiram instalar a bomba em um ponto do rio de modo que gastassem o mínimo possível com encanamento. O engenheiro contratado para executar o projeto determinou o ponto ideal para a instalação da bomba de acordo com o raciocínio descrito a seguir.



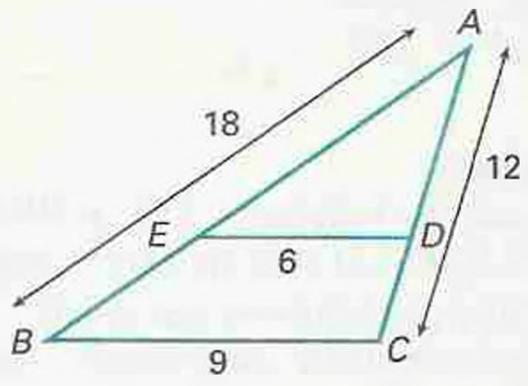
Inicialmente, o engenheiro determinou o ponto B', simétrico de B em relação ao rio. O menor comprimento de um encanamento ligando o ponto A ao ponto B' é a medida do segmento $\overline{AB'}$. Como os triângulos NBP e $NB'P$ são congruentes, tem-se que $PB' = PB$, portanto, o menor comprimento de um encanamento ligando A a um ponto do rio e deste ao ponto B é a soma das medidas AP e PB. Da semelhança entre os triângulos AMP e $B'NP$ tem-se a proporção:

$$\frac{50}{100} = \frac{x}{300 - x} \Rightarrow x = 100$$

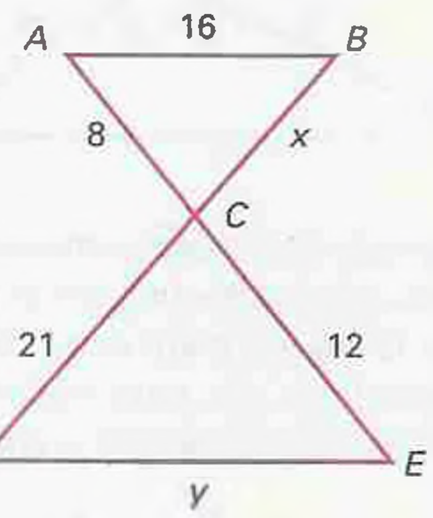
Logo, o ponto ideal é aquele que dista 100 m de M.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.3 No triângulo ABC, abaixo, o segmento $\overline{ED}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Determine as medidas de $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$.

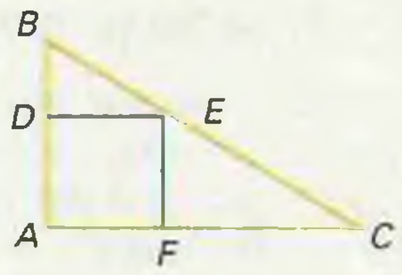


B.4 Na figura abaixo, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. Determine as medidas x e y.



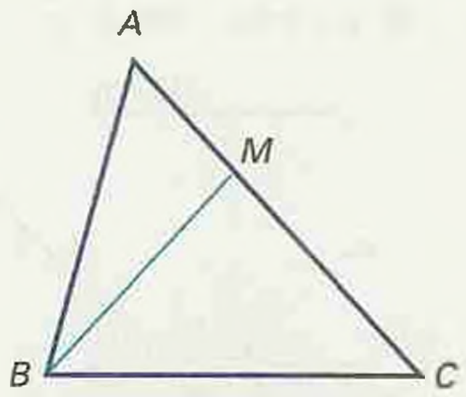
B.5 (Fuvest-SP) Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, $ADEF$ é um quadrado, $AB = 1$ e $AC = 3$. Quanto mede o lado do quadrado?

a) 0,70
b) 0,75
c) 0,80
d) 0,85
e) 0,90

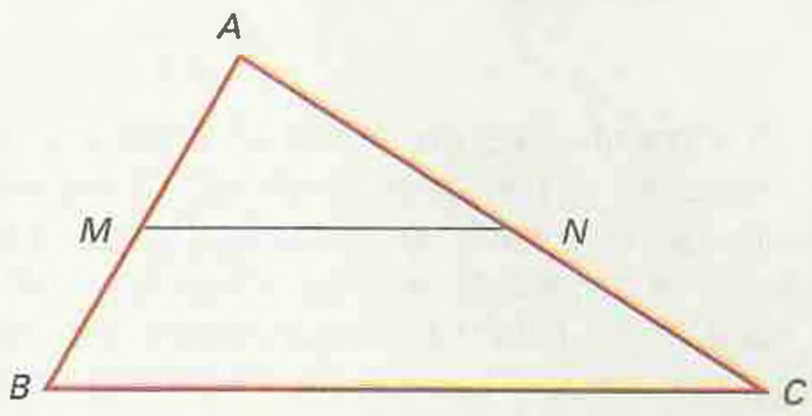


B.6 (Fuvest-SP) Dados $M\hat{B}C \cong B\hat{A}C$, $AB = 3$, $BC = 2$, $AC = 4$, então, MC é igual a:

a) 3,5
b) 2
c) 1,5
d) 1
e) 0,5



B.7 No triângulo ABC, abaixo, M e N são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.



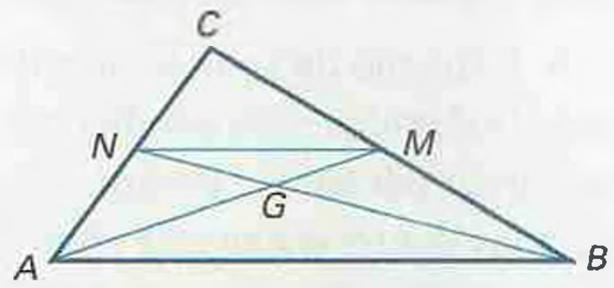
a) Mostre que os triângulos ABC e AMN são semelhantes (basta identificar um caso de semelhança).
b) Qual a posição relativa entre as retas $\overline{MN}$ e $\overline{BC}$? Por quê?
c) A medida do segmento $\overline{MN}$ equivale a quanto da medida BC?

Nota

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é chamado de **base média** do triângulo. Resolvendo o exercício B.7 você concluirá a importante propriedade:

> Cada base média de um triângulo é paralela a um dos lados e mede metade desse lado.

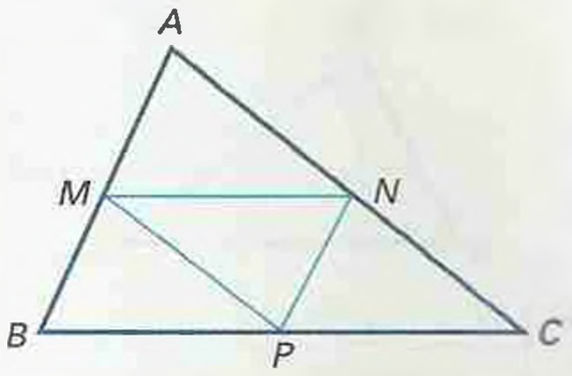
B.8 As três medianas de um triângulo se cruzam em um mesmo ponto G chamado de **baricentro do triângulo**. Mostre que o ponto G divide cada mediana na razão 2 para 1.



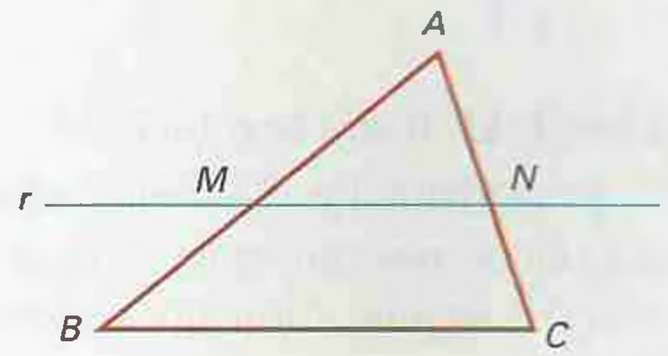
Sugestão. Desenhe duas medianas $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ de um triângulo ABC e trace a base média $\overline{MN}$.

B.9 (U. F. Juiz de Fora-MG) O perímetro do triângulo ABC, abaixo, é 18 cm. O perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos médios M, N e P dos lados do triângulo ABC é:

a) 12 cm
b) 8 cm
c) 15 cm
d) 8 cm
e) 9 cm



B.10 Na figura, a reta r passa pelo ponto médio M do lado $\overline{AB}$ e é paralela ao lado $\overline{BC}$. Mostre que o ponto N, onde r intercepta $\overline{AC}$, é ponto médio de $\overline{AC}$.

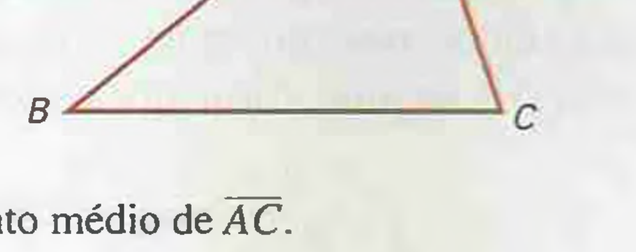


Nota

Desse exercício, conclui-se a importante propriedade:

> A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo, e é paralela a um dos outros lados, intercepta o terceiro lado no **ponto médio**.

B.11 **Trapézio** é todo quadrilátero que possui dois lados paralelos. Esses lados são chamados de **bases** do trapézio. No trapézio $ABCD$, acima, a reta r passa pelo ponto médio M do lado $\overline{AD}$ e é paralela às bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$. Mostre que o ponto N, onde r intercepta $\overline{BC}$, é ponto médio de $\overline{BC}$ e $MN = \dfrac{AB + CD}{2}$.



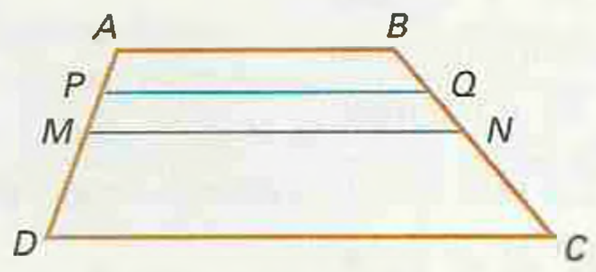
Sugestão. Trace uma diagonal do trapézio e use a propriedade da base média de um triângulo.

Nota

O segmento $\overline{MN}$ é chamado de **base média** do trapézio. Desse exercício e do fato que existe uma única reta que passa por M e N, concluímos a importante propriedade:

> A base média de um trapézio é paralela às bases do trapézio e sua medida é a média aritmética das medidas dessas bases.

B.12 As bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ do trapézio abaixo medem 6 cm e 10 cm, respectivamente. M, N, P e Q são pontos médios dos segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$, respectivamente. Calcule a medida de cada um dos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$.

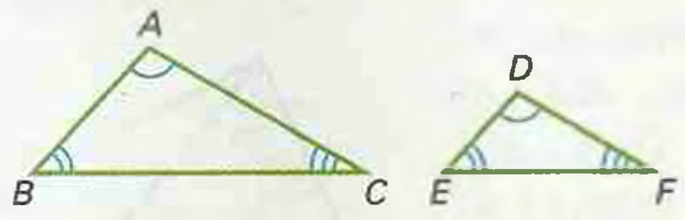


Exercícios complementares de C.4 a C.8

A razão de semelhança

Vimos que a razão de semelhança de dois triângulos é a razão entre as medidas de dois lados correspondentes. Porém, existem outras maneiras para se calcular essa razão, por exemplo, a razão entre alturas correspondentes é igual à razão de semelhança, conforme demonstração a seguir.

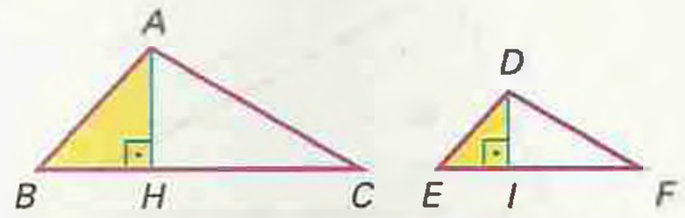
Consideremos que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$:



A razão de semelhança do triângulo ABC para DEF é o número k tal que:

$$k = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad \text{(I)}$$

Traçando as alturas correspondentes $\overline{AH}$ e $\overline{DI}$, temos pelo caso **AA** que os triângulos ABH e DEI são semelhantes:



logo, temos que:

$$\frac{AH}{DI} = \frac{AB}{DE} \quad \text{(II)}$$

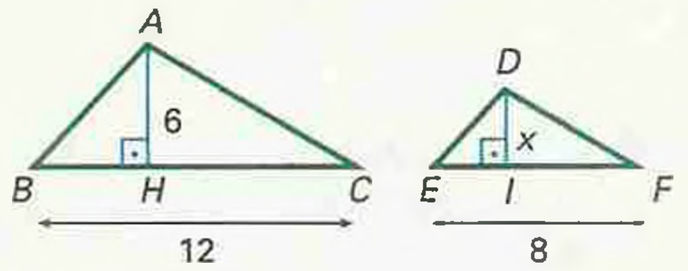
Em (I) observamos que $\frac{AB}{DE} = k$, logo, em (II), podemos concluir que:

$$\frac{AH}{DI} = k$$

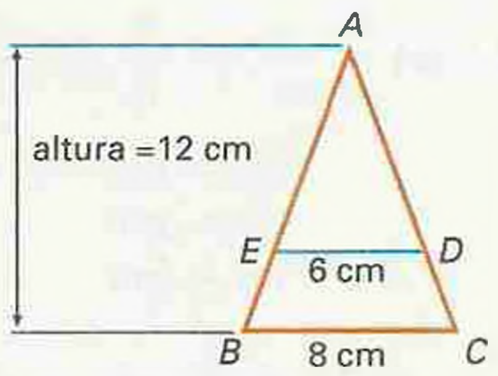
ou seja, a razão entre as alturas correspondentes $\overline{AH}$ e $\overline{DI}$ é a razão de semelhança entre os triângulos. Analogamente, pode-se demonstrar que a razão de semelhança se mantém para dois quaisquer comprimentos correspondentes: medianas, bissetriz, perímetros etc.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.13 Sabendo que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, determine a medida da altura $\overline{DI}$.



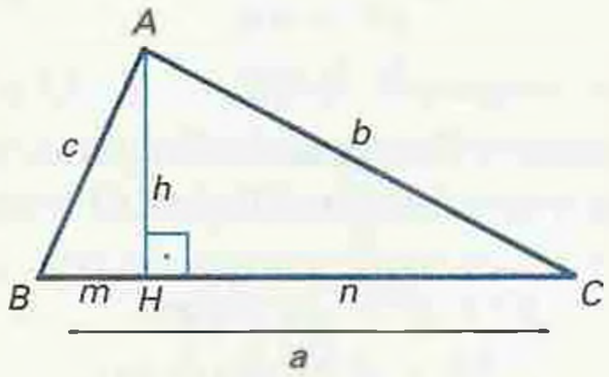
B.14 No triângulo ABC o segmento $\overline{ED}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Calcule a medida da altura do triângulo AED, relativa ao lado $\overline{ED}$.



Exercício complementar C.9

4. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

No triângulo retângulo ABC



temos que:

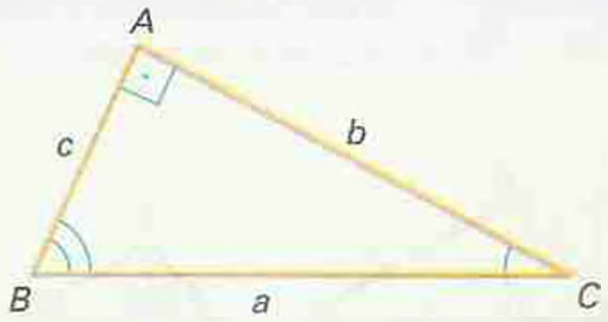
- b e c são as medidas dos catetos;
- a é a medida da hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- m é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- n é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

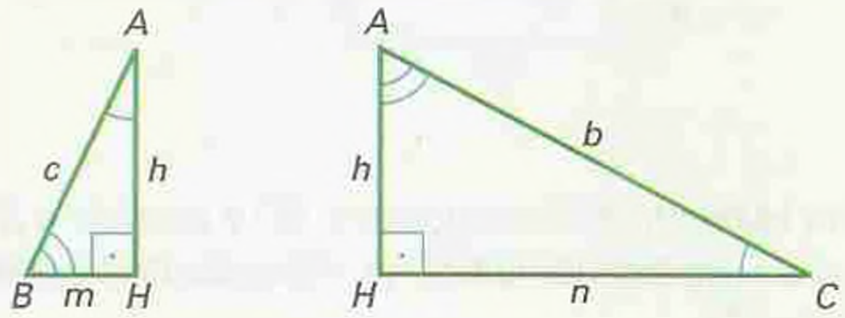
Vamos demonstrar as seguintes relações métricas:

$ah = bc$
$c^2 = am$
$b^2 = an$
$ch = bm$
$bh = cn$
$h^2 = mn$
$a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras)

Demonstrações

O triângulo retângulo ABC pode ser separado em três triângulos semelhantes entre si.





Assim, temos:

- $\Delta ABC \sim \Delta HBA \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$

  logo,

  $$ah = bc$$
  $$c^2 = am$$
  $$ch = bm$$

- $\Delta ABC \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$

  logo,

  $$b^2 = an$$
  $$ah = bc$$
  $$bh = cn$$

- $\Delta HBA \sim \Delta HAC \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$

  logo,

  $$bh = cn$$
  $$ch = bm$$
  $$h^2 = mn$$

- Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, obtendo:

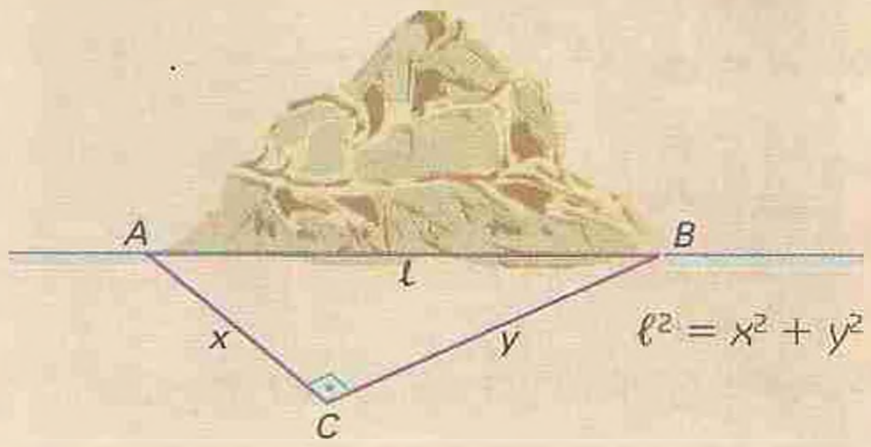
  $$b^2 + c^2 = an + am$$
  $$\therefore b^2 + c^2 = a(n + m)$$

  como $n + m = a$, concluímos que:

  $$b^2 + c^2 = a^2$$

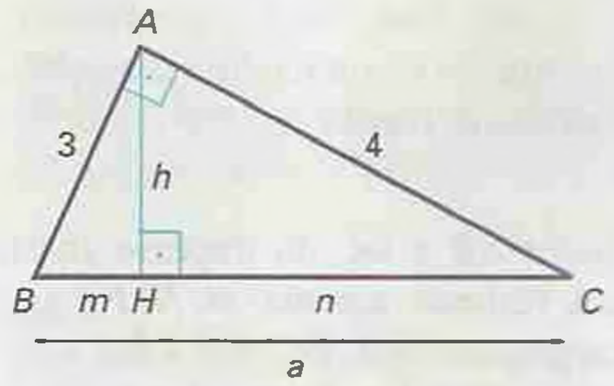
Calculando o comprimento de um túnel a ser construído

Para calcular o comprimento ℓ de um túnel que será construído ligando dois pontos A e B da base de uma montanha, pode-se usar o Teorema de Pitágoras. Considera-se no plano da base da montanha um ponto C tal que $\overline{CA} \perp \overline{CB}$ e medem-se as distâncias $CA = x$ e $CB = y$, conforme a figura. Através do Teorema de Pitágoras obtém-se o comprimento ℓ.

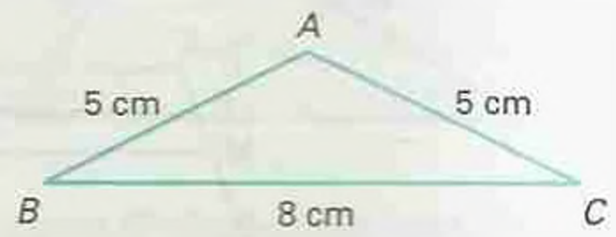


EXERCÍCIOS BÁSICOS

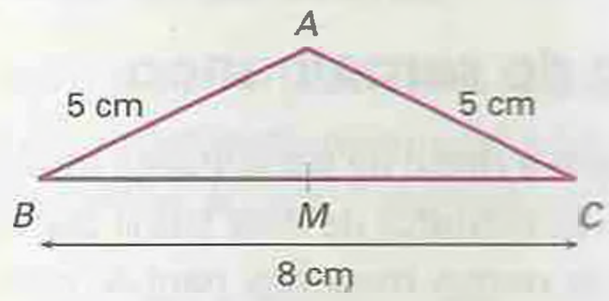
B.15 Determine as medidas a, h, m e n no triângulo retângulo ABC, abaixo.



B.16 Calcule a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo isósceles:



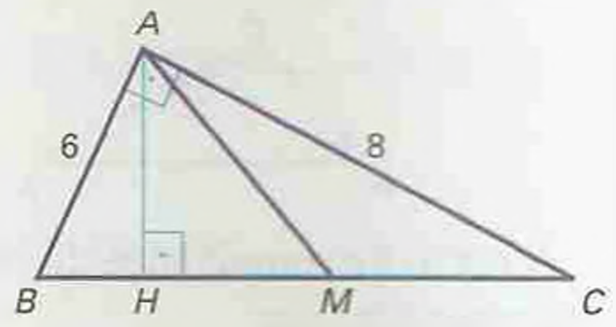
B.17 Sendo M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ do triângulo isósceles abaixo, calcule a distância entre M e o lado $\overline{AC}$.



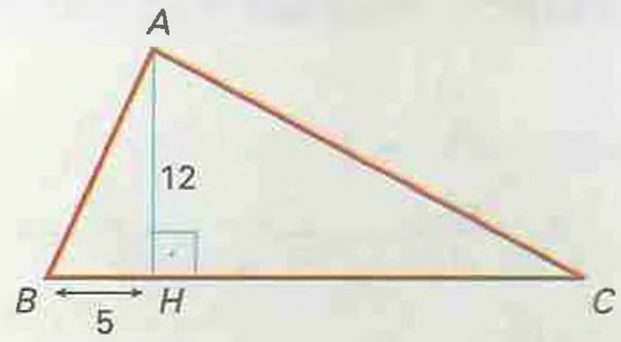
Nota

A distância entre um ponto P e uma reta r é a medida do segmento $\overline{PQ}$, perpendicular a r, com $Q \in r$.

B.18 No triângulo retângulo ABC ao lado, $\overline{AM}$ é a mediana relativa à hipotenusa, e $\overline{AH}$ é a altura. Calcule a medida do segmento $\overline{HM}$.



B.19 No triângulo retângulo ABC abaixo, calcule a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.



B.20 Calcule a medida de uma diagonal de cada um dos quadrados abaixo.

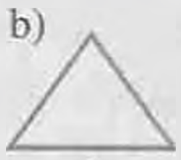
a)

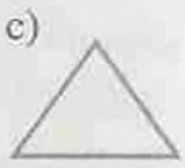
b)

c)

B.21 Calcule a medida de uma altura de cada um dos triângulos equiláteros abaixo.

a)

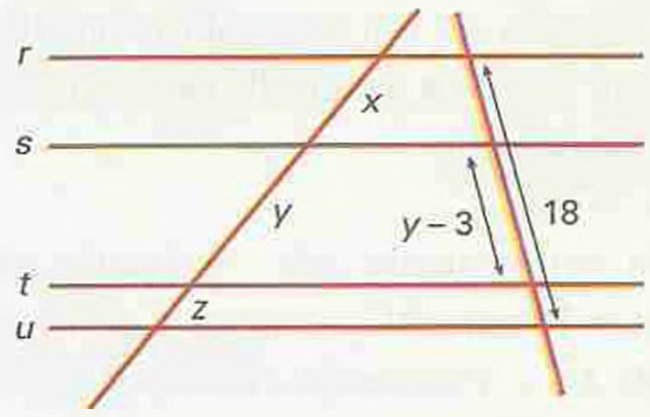
b) 

c) 

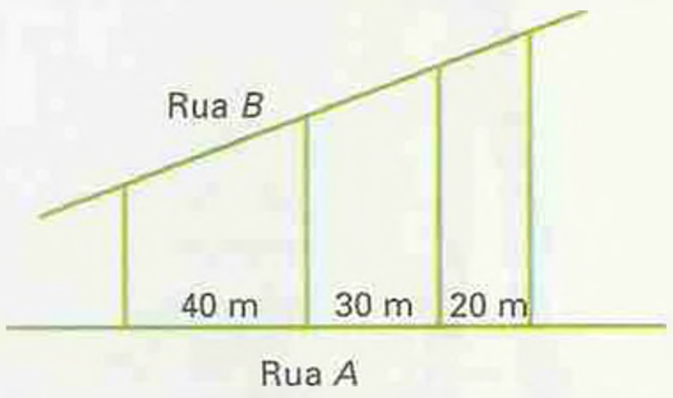
Exercícios complementares de C.10 a C.15

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

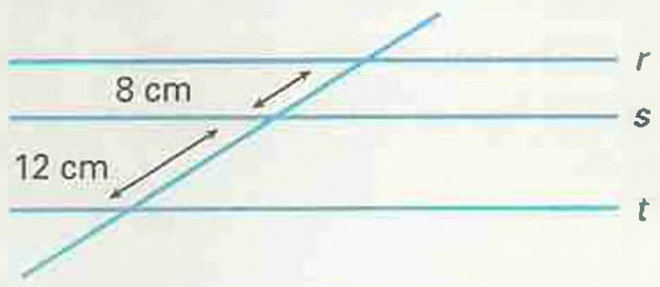
C.1 Determine a medida y, na figura abaixo, sabendo que $x + z = y$ e que $r \parallel s \parallel t \parallel u$.



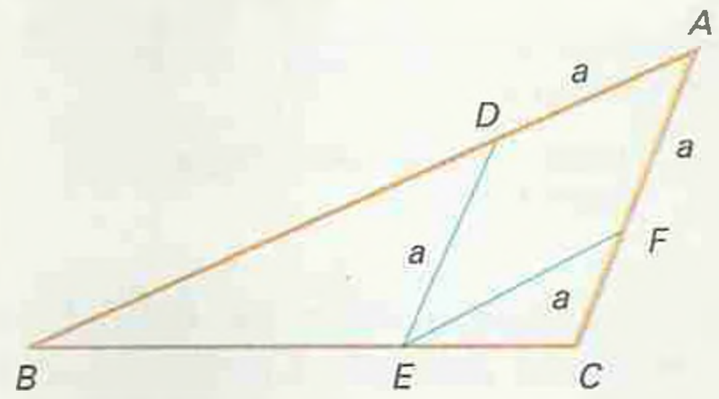
C.2 Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como mostra o esquema. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida da frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua é 180 m?



C.3 A distância entre duas retas paralelas é a medida do segmento perpendicular a ambas e com extremos pertencentes a elas. Sabendo que as retas r, s e t da figura abaixo são paralelas e que a distância entre r e s é 6 cm, calcule a distância entre s e t.



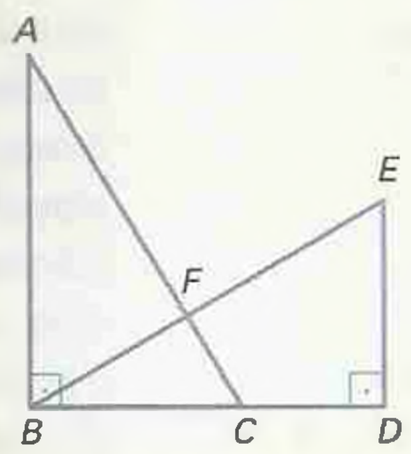
C.4 (Cesgranrio) O losango $ADEF$ está inscrito no triângulo ABC, como mostra a figura.



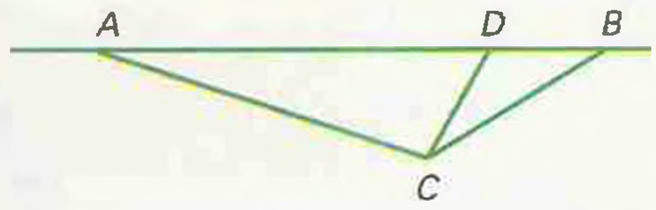
Se $AB = 12$ m, $BC = 8$ m e $AC = 6$ m, a medida a do lado do losango é:

a) 4 m
b) 3 m
c) 2 m
d) 5 m
e) 8 m

C.5 (UnB-DF modificado) Na figura a seguir, os triângulos retângulos ABC e BDE são congruentes, C é ponto médio de $\overline{BD}$ e $AB = 40$ cm. Calcule a razão $\frac{CF}{BF}$.



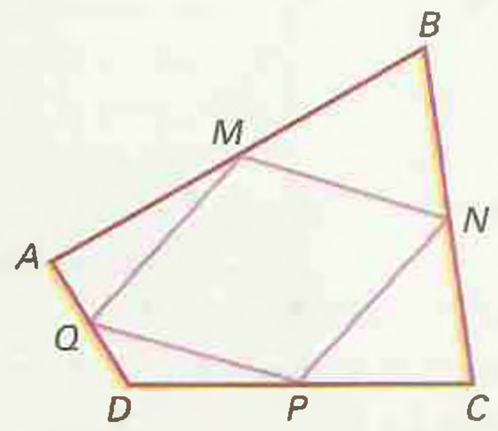
C.6 Um trecho reto AB de uma estrada mede 1.800 m. Nesse trecho há três saídas: A, D e B, que ligam, em linha reta, essa estrada a uma cidade C, conforme figura.



Sabendo que $CB = 1.200$ m e que $B\hat{A}C \cong D\hat{C}B$, calcule a distância entre os pontos D e B.

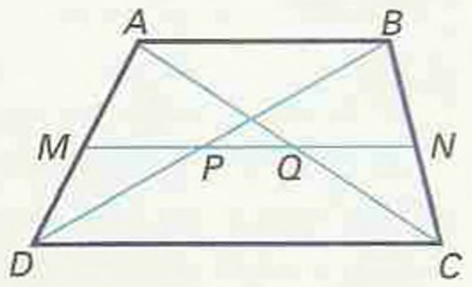
C.7 (UFRS) As diagonais de um quadrilátero $ABCD$ medem 12 cm e 16 cm. O quadrilátero cujos vértices são os pontos médios M, N, P e Q dos lados do quadrilátero $ABCD$ tem perímetro:

a) 42 cm
b) 40 cm
c) 26 cm
d) 28 cm
e) 19 cm

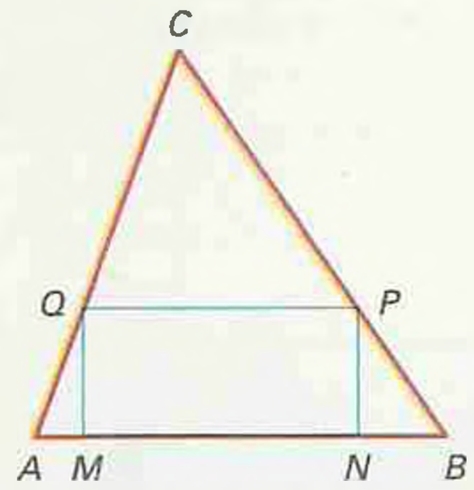


C.8 (UFAC) A figura representa um trapézio cujas bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ medem 6 dm e 10 dm. Sendo M e N pontos médios dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, conclui-se que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é:

a) 3 dm
b) 2 dm
c) 3,1 dm
d) 2,8 dm
e) 3,2 dm



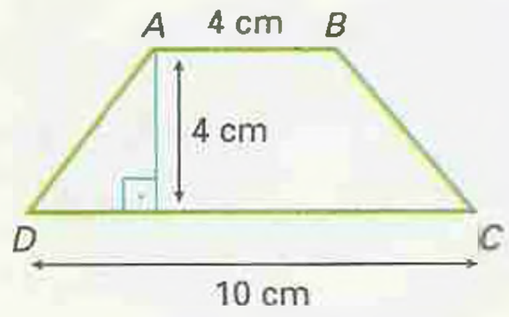
C.9 (Fuvest-SP) No triângulo acutângulo ABC, a base $\overline{AB}$ mede 4 cm e a altura relativa a essa base também mede 4 cm. $MNPQ$ é um retângulo cujos vértices M e N pertencem ao lado $\overline{AB}$, P pertence ao lado $\overline{BC}$ e Q ao lado $\overline{AC}$.



O perímetro desse retângulo, em cm, é:

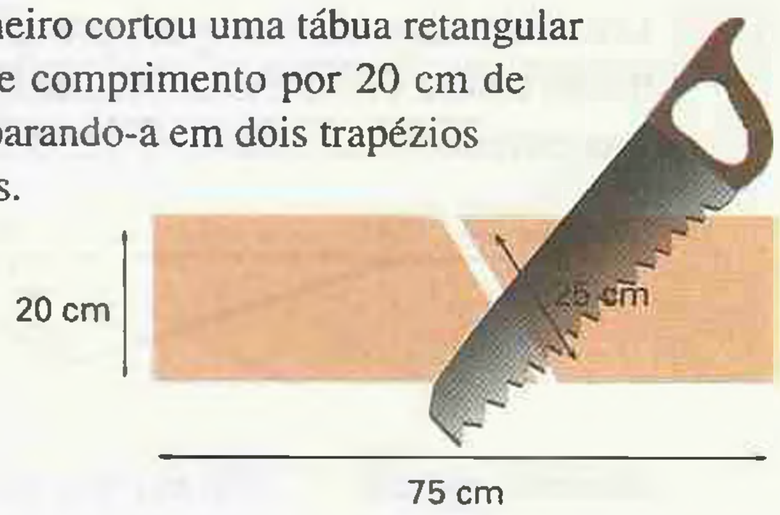
a) 8
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

C.10 Calcule o perímetro do trapézio isósceles $ABCD$ abaixo.



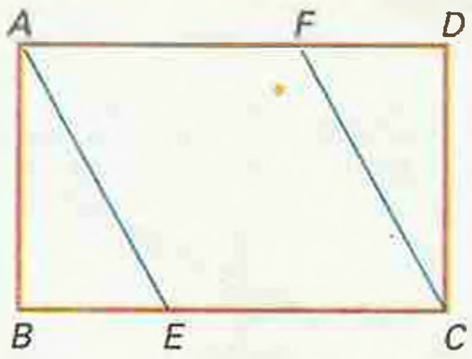
Nota
Um trapézio é isósceles quando tem dois lados não paralelos congruentes.

C.11 Um marceneiro cortou uma tábua retangular de 75 cm de comprimento por 20 cm de largura, separando-a em dois trapézios congruentes.



Sabendo que o comprimento do corte foi de 25 cm, calcule a medida da base menor de um dos trapézios.

C.12 (Fuvest-SP) A figura representa um retângulo $ABCD$ e um losango $AECF$ com E no lado $\overline{BC}$ e F no lado $\overline{AD}$.



Se $AB = 15$ cm e $BC = 25$ cm, então a medida, em centímetros, de um lado do losango é:

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

C.13 (UFMG) Em um triângulo ABC, retângulo em A, com $AB = 5$ cm e $AC = 12$ cm, um ponto P do cateto $\overline{AB}$ dista 3 cm da reta $\overline{BC}$. Calcule a distância entre os pontos A e P.

C.14 Os catetos de um triângulo retângulo medem 6 cm e 8 cm. Calcule a medida da mediana relativa à hipotenusa desse triângulo.

C.15 Em um triângulo ABC, retângulo em A, tem-se que $AB = 18$ cm e $AC = 24$ cm. Calcule a distância entre o lado $\overline{AC}$ e o baricentro G desse triângulo.

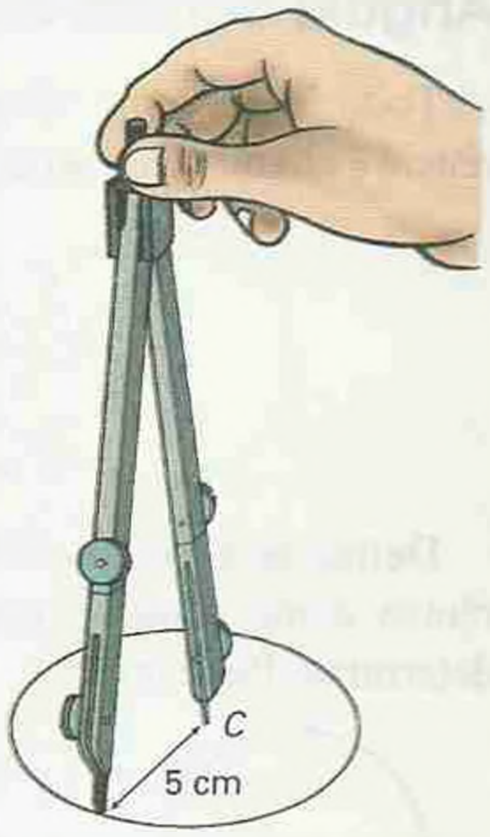
C.16 (PUC-RJ) Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1 cm em que O é o ponto de encontro das alturas. Quanto mede o segmento $\overline{AO}$?

Capítulo 9

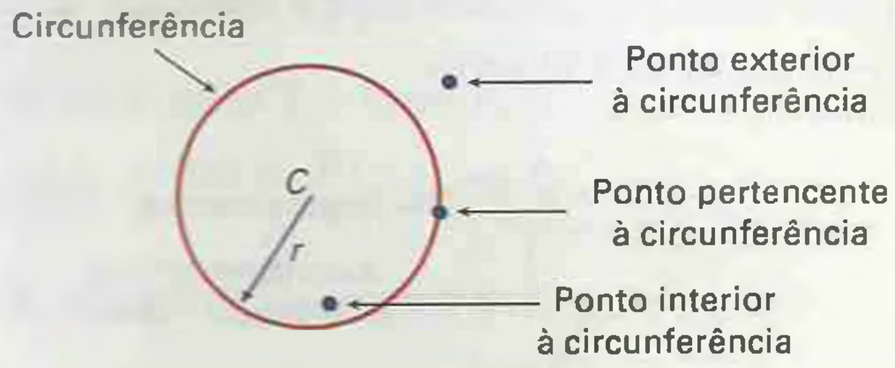
CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

1. CONCEITUAÇÃO

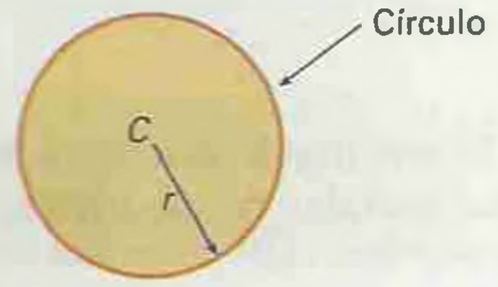
Consideremos uma abertura do compasso tal que a distância entre a ponta de grafite e a ponta seca seja 5 cm. Ao fixar a ponta seca em um ponto C da folha de caderno e desenhar uma linha com a ponta de grafite, fazendo-a girar uma volta completa em torno do ponto C, estamos marcando todos os pontos da folha que distam 5 cm de C. Essa linha é chamada de **circunferência** de **centro** C e **raio** 5 cm.



Sendo C um ponto de um plano α e r uma medida positiva, chama-se **circunferência** de centro C e raio r o conjunto dos pontos do plano α que distam de C a medida r.

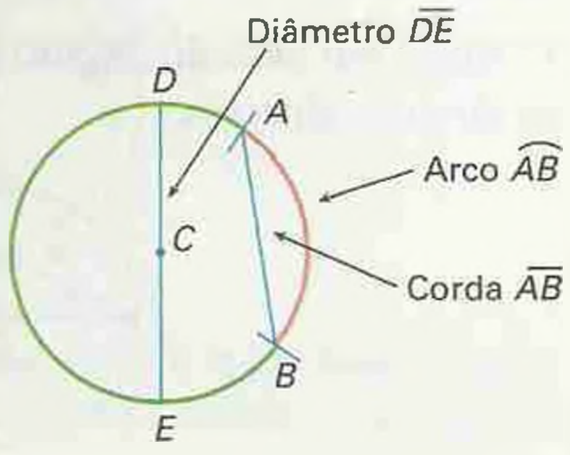


A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.



Arcos e cordas

Dois pontos A e B de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro C da circunferência é chamada de **diâmetro**.



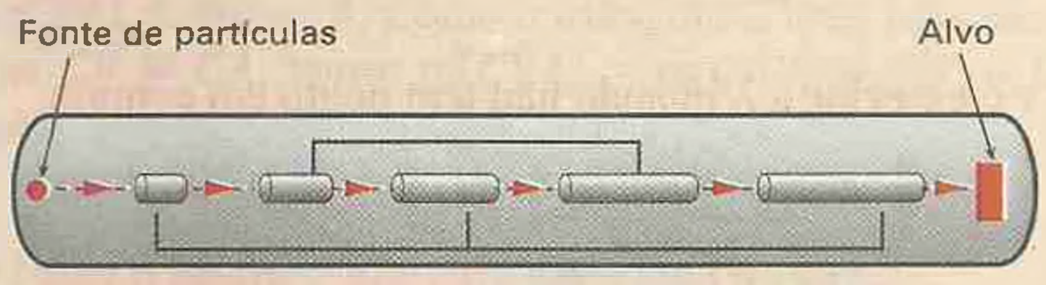
Circunferência: a curva que revolucionou o mundo

Sentado à beira do fogo, o homem pré-histórico vislumbrava a lua cheia e via em seu contorno uma grande circunferência. Algo que lembrava as figuras formadas pelas ondas provocadas na água quando atirava uma pedra no lago. A forma circular era tão presente que até nos olhos de seus companheiros lá estava ela, absolutamente perfeita.

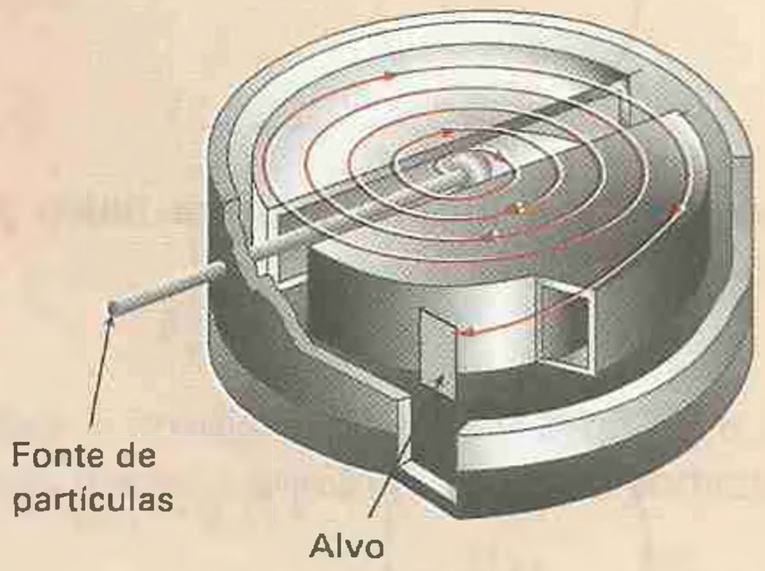
A adoção da circunferência no cotidiano da humanidade foi um passo natural: inventou-se a roda. A partir daí, mais e mais aplicações dessa forma geométrica vêm fazendo parte da nossa vida.

Observe à sua volta os círculos e circunferências presentes em quase todo tipo de máquina: automóveis, aviões, radares, relógios etc. Note os paralelos e meridianos utilizados para demarcar o nosso planeta. Enfim, procure e você encontrará circunferências em lugares inimagináveis.

Invenções espetaculares surgiram com a idéia de circunferência. Por exemplo, até o ano de 1930 os laboratórios de física nuclear dispunham de aceleradores de partículas apenas na forma linear. Esses aparelhos são compostos por uma seqüência de eletrodos ocos dispostos em linha reta, através dos quais partículas são aceleradas utilizando-se voltagem alternada. O inconveniente desse tipo de acelerador é que necessitam de uma extensão muito grande para se conseguir altas velocidades das partículas. Por volta de 1930, o físico americano Ernest O. Lawrence contornou essa dificuldade, inventando o **ciclotron**, no qual as partículas são aceleradas em trajetórias circulares.



Esquema de um acelerador linear de partículas.

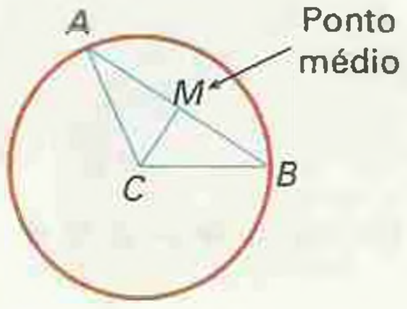


Esquema do ciclotron.

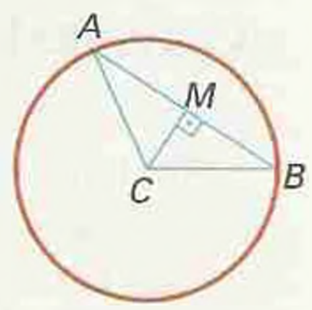
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Mostre que:

a) Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro ao ponto médio de uma corda é perpendicular a essa corda.
Sugestão. Na figura mostre que $\Delta AMC \cong \Delta BMC$.



b) Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro a uma corda, perpendicularmente, encontra-a no ponto médio.
Sugestão. Na figura mostre que $\Delta AMC \cong \Delta BMC$.



B.2 Em uma circunferência de centro C e raio 13 cm, uma corda $\overline{AB}$ mede 24 cm. Calcule a distância entre o centro C e a corda $\overline{AB}$.

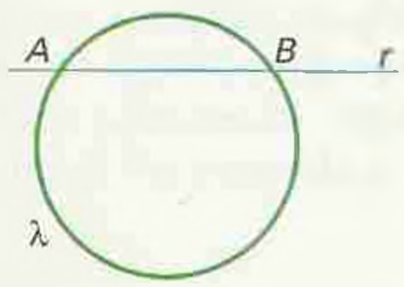
B.3 M é ponto médio de uma corda $\overline{AB}$ em uma circunferência de centro C e raio 6 cm. Calcule a medida dessa corda, sabendo que $CM = 3$ cm.

Exercícios complementares C.1 e C.2

2. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

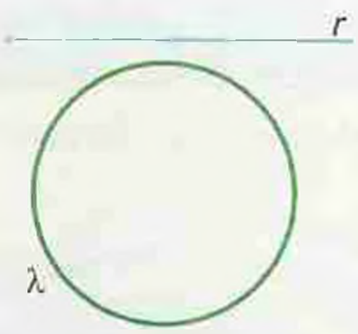
Uma reta r e uma circunferência λ, contidas em um mesmo plano, admitem as seguintes posições relativas:

- r é **secante** a λ quando têm em comum dois pontos distintos.



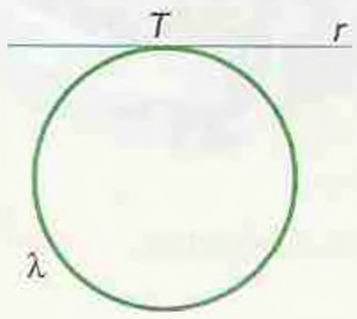
$r \cap \lambda = \{A, B\}$

- r é **exterior** a λ quando não têm ponto em comum.



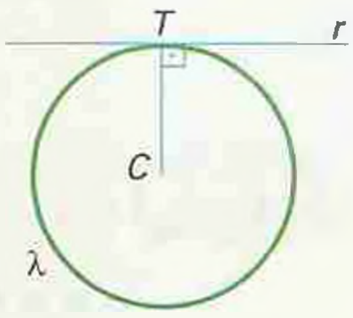
$r \cap \lambda = \varnothing$

- r é **tangente** a λ quando têm um único ponto em comum.



$r \cap \lambda = \{T\}$

Propriedade: a reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

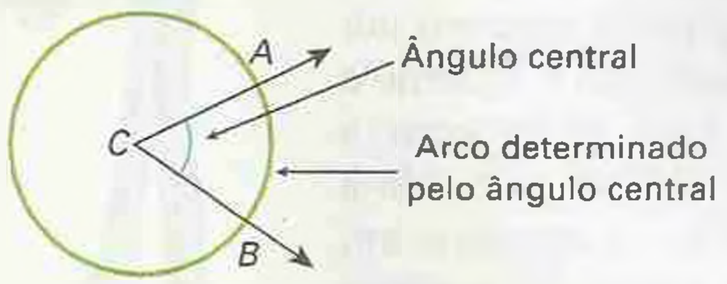


$r \cap \lambda = \{T\}$

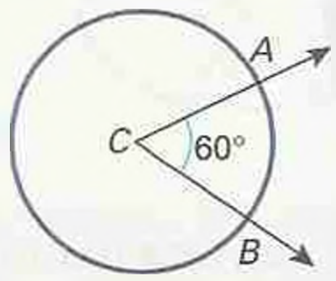
3. ÂNGULOS E CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo central de uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.



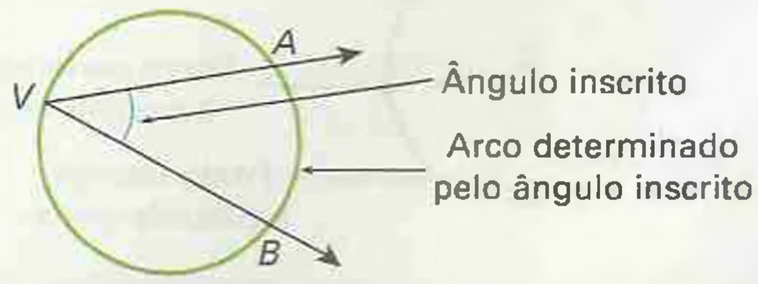
Define-se a medida, em graus, de um arco de circunferência como sendo a medida do ângulo central que o determina. Por exemplo:



$m(A\hat{C}B) = 60° \Leftrightarrow m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$

Ângulo inscrito em uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** nessa circunferência.



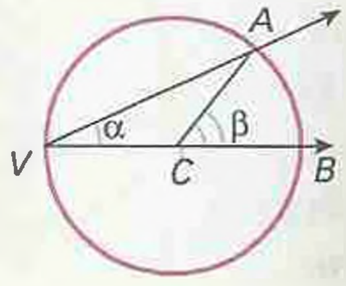
Um ângulo inscrito e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados ângulos **correspondentes** nessa circunferência.

Propriedade

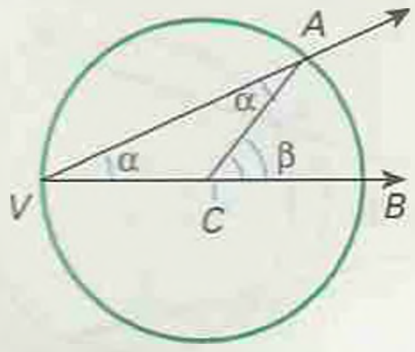
> A medida de um ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

Temos que justificar essa propriedade, separando-a em três casos.

1º caso: um lado do ângulo inscrito passa pelo centro C da circunferência.



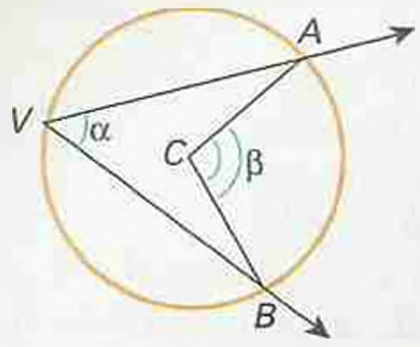
O triângulo VCA é isósceles, pois $\overline{CV} \cong \overline{CA}$.
Logo, $C\hat{V}A \cong C\hat{A}V$.



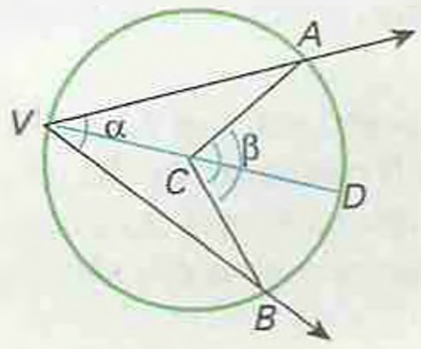
Como β é medida de um ângulo externo $A\hat{C}B$ do triângulo ACV, temos que:

$$\beta = 2\alpha \therefore \alpha = \frac{\beta}{2}$$

2º caso: o centro C é ponto interior ao ângulo inscrito:



Traçando o diâmetro $\overline{VD}$, temos:



Pelo primeiro caso, obtemos:

$$m(A\hat{V}D) = \frac{m(A\hat{C}D)}{2} \text{ e } m(B\hat{V}D) = \frac{m(B\hat{C}D)}{2}$$

mas, como, $m(A\hat{V}B) = m(A\hat{V}D) + m(B\hat{V}D)$

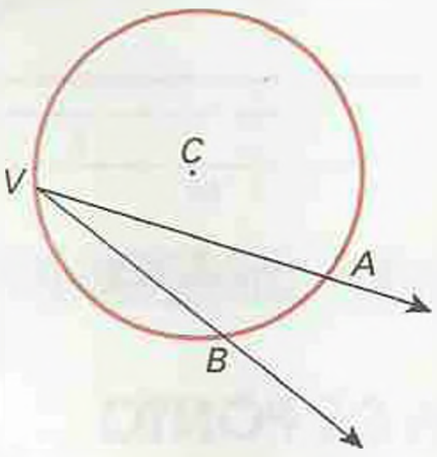
temos que: $m(A\hat{V}B) = \frac{m(A\hat{C}D)}{2} + \frac{m(B\hat{C}D)}{2}$

ou seja, $m(A\hat{V}B) = \frac{m(A\hat{C}D) + m(B\hat{C}D)}{2}$ e, como

$m(A\hat{C}B) = m(A\hat{C}D) + m(B\hat{C}D)$, concluímos que:

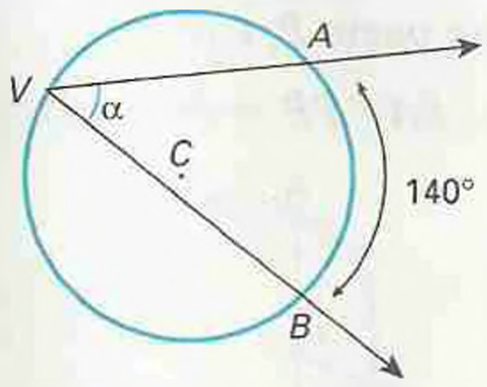
$m(A\hat{V}B) = \frac{m(A\hat{C}B)}{2}$, isto é, $\alpha = \frac{\beta}{2}$

3º caso: o centro C é exterior ao ângulo inscrito.



Faça como exercício a demonstração desse caso.
Sugestão. Trace o diâmetro $\overline{VD}$ e aplique o primeiro caso.

Exemplo

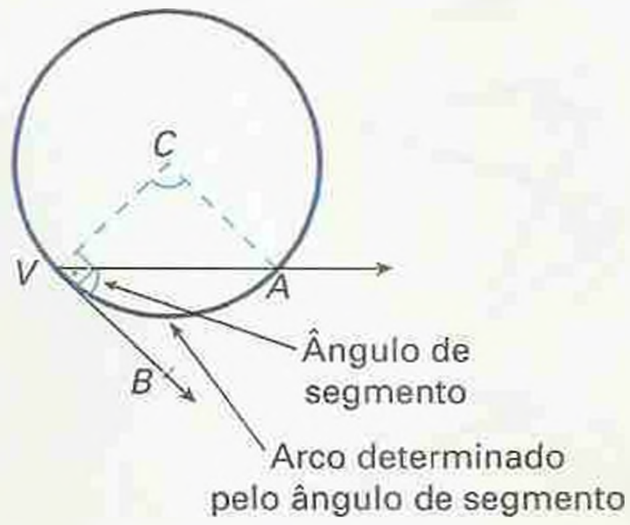


A medida do ângulo central $A\hat{C}B$ é igual à medida do arco que ele determina, isto é, 140°. Como a medida do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente, concluímos que:

$$\alpha = \frac{140°}{2} = 70°$$

Ângulo de segmento

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência, um lado é tangente e o outro é secante à circunferência, é chamado de **ângulo de segmento**.



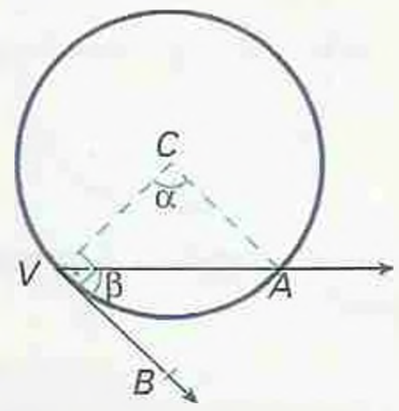
Um ângulo de segmento e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de ângulos **correspondentes** nessa circunferência.

Propriedade

> A medida de um ângulo de segmento é metade da medida do ângulo central correspondente.

Temos que justificar essa propriedade, separando-a em dois casos.

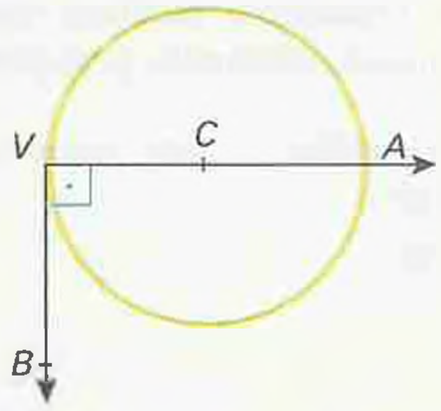
1º caso: o centro da circunferência não pertence a um lado do ângulo.



O ângulo $C\hat{V}A$ é complementar de $A\hat{V}B$, logo, $m(C\hat{V}A) = 90° - \beta$. Como o triângulo CVA é isósceles, pois $\overline{CV} \cong \overline{CA}$, temos $m(C\hat{V}A) = m(C\hat{A}V) = 90° - \beta$. Logo:

$$\alpha + 90° - \beta + 90° - \beta = 180° \therefore \beta = \frac{\alpha}{2}$$

2º caso: o centro C pertence a um lado do ângulo.



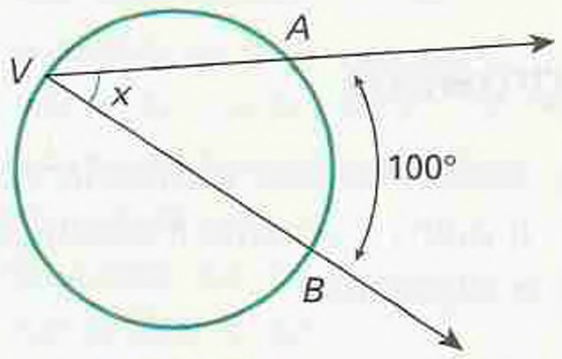
Esse caso é imediato, pois $A\hat{V}B$ é reto e o arco $\overset{\frown}{VA}$ determinado por esse ângulo mede 180°, portanto:

$$m(A\hat{V}B) = \frac{m(\overset{\frown}{VA})}{2}$$

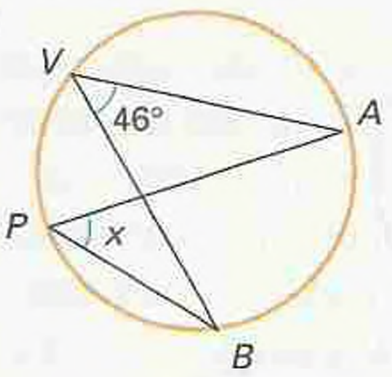
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.4 Determine a medida x, em graus, em cada uma das circunferências:

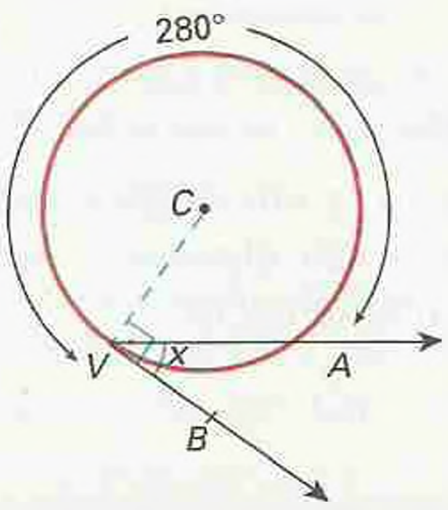
a)



b)

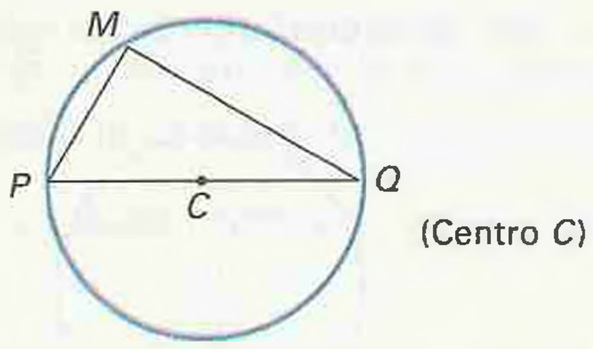


c)



B.5 Um triângulo se diz inscrito em uma semicircunferência quando seus três vértices pertencem a ela e um de seus lados passa pelo centro da semicircunferência.

a) Calcule a medida do ângulo $P\hat{M}Q$ no triângulo inscrito na semicircunferência abaixo.



(Centro C)

b) Que palavra completa a sentença abaixo tornando-a verdadeira?

> Todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é .....

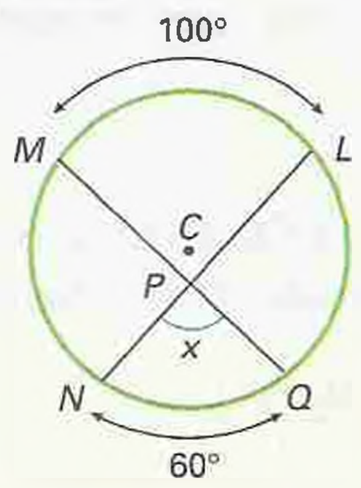
c) Justifique a proposição:

> Todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência.

Sugestão. Desenhe a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer.

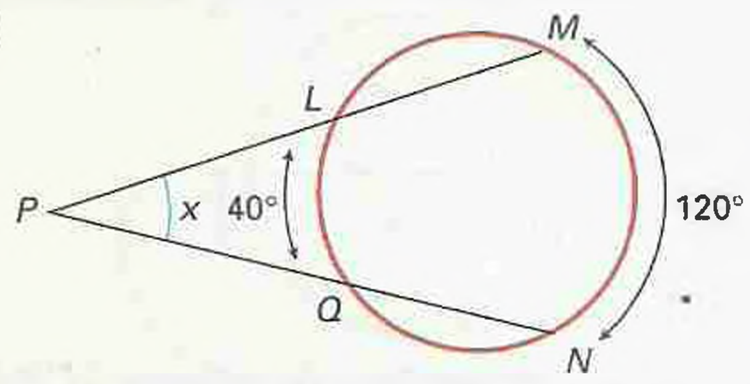
B.6 Determine a medida x, em graus, em cada uma das circunferências:

a)



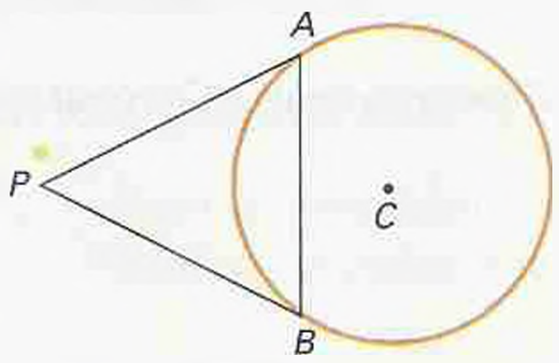
Sugestão. Trace o segmento $\overline{LQ}$ e observe que os ângulos $N\hat{L}Q$ e $M\hat{Q}L$ são inscritos.

b)



Sugestão. Trace o segmento $\overline{LN}$ e observe que os ângulos $L\hat{N}Q$ e $M\hat{L}N$ são inscritos.

B.7 Na figura os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência de centro C.



a) Que relação existe entre as medidas dos ângulos de segmento $P\hat{A}B$ e $P\hat{B}A$?

b) De acordo com sua conclusão no item a, qual é a classificação do triângulo PAB, quanto aos lados?

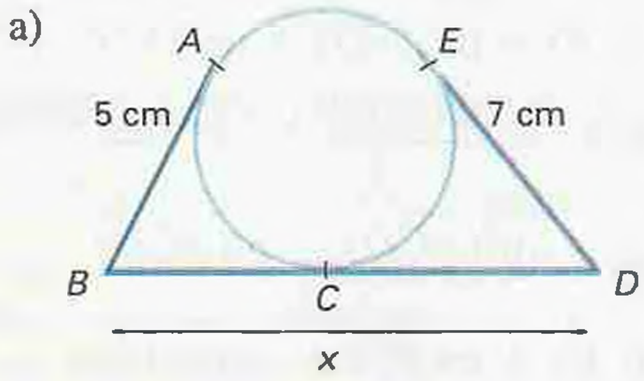
Nota

Desse exercício, concluímos a importante propriedade:

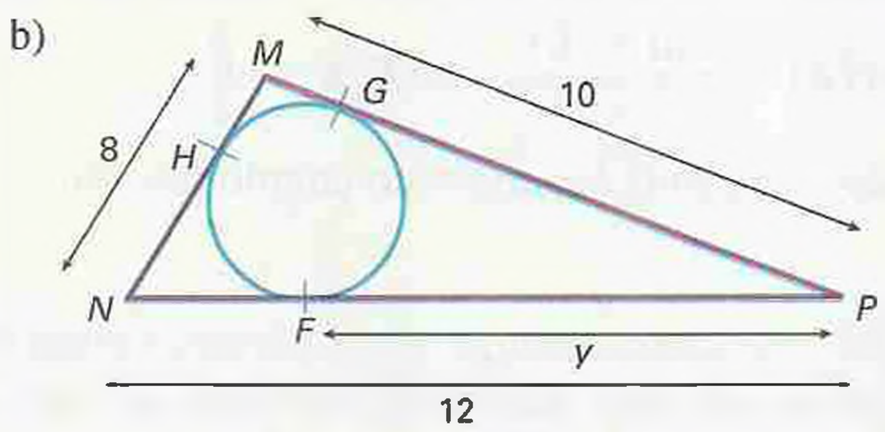
> Se P é ponto exterior a uma circunferência e os pontos A e B pertencem a ela, tal que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência, então as medidas desses segmentos são iguais.

B.8 Usando a propriedade deduzida no exercício anterior, determine as medidas x e y nas figuras abaixo, sabendo que A, C, E, F, G e H são pontos de tangência:

a)



b)



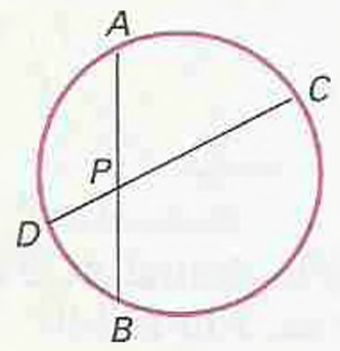
Exercícios complementares de C.3 a C.5

4. POTÊNCIA DE PONTO

Ponto interior à circunferência

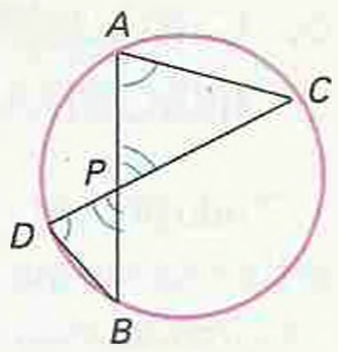
Se em uma circunferência duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ concorrem em um ponto P, então:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cada um dos produtos $PA \cdot PB$ e $PC \cdot PD$ é chamado de **potência** do ponto P. Para justificar que esses produtos são iguais, observe que os triângulos APC e DPB são semelhantes, pelo caso AA ($\hat{D} \cong \hat{A}$, pois são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco; e $D\hat{P}B \cong A\hat{P}C$, pois são opostos pelo vértice). Assim, temos a proporção:



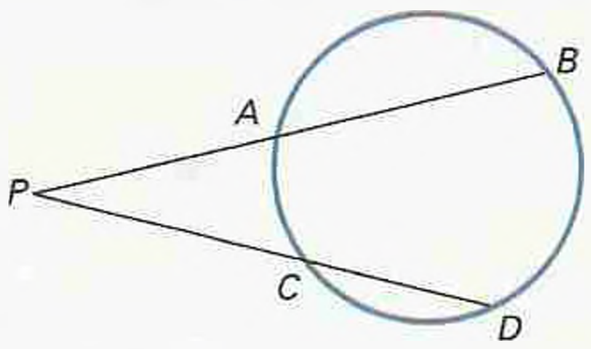
$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\therefore PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

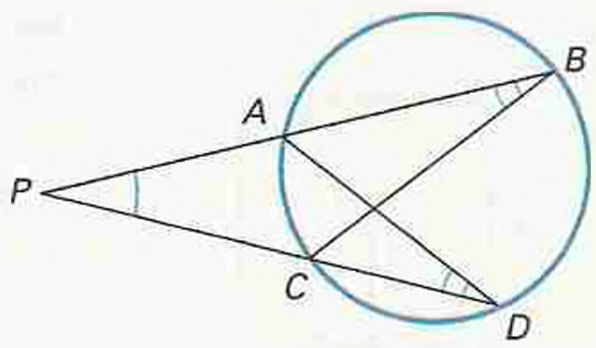
Ponto exterior à circunferência

Se duas retas secantes r e s, concorrentes em P, interceptam uma circunferência em A, B, C e D, conforme a figura abaixo, então:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Cada um dos produtos $PA \cdot PB$ e $PC \cdot PD$ é chamado de **potência** do ponto P. Para justificar que esses produtos são iguais, basta observar que os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pelo caso AA ($\hat{P}$ é ângulo comum aos dois triângulos e $\hat{B} \cong \hat{D}$ porque são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco). Assim, temos a proporção:



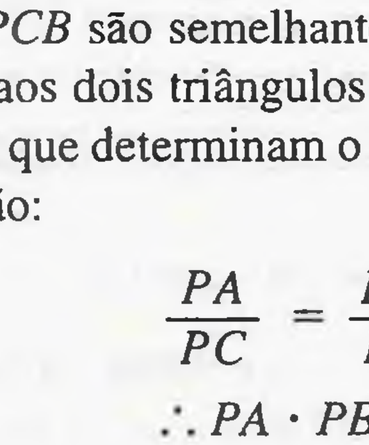
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

$$\therefore PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

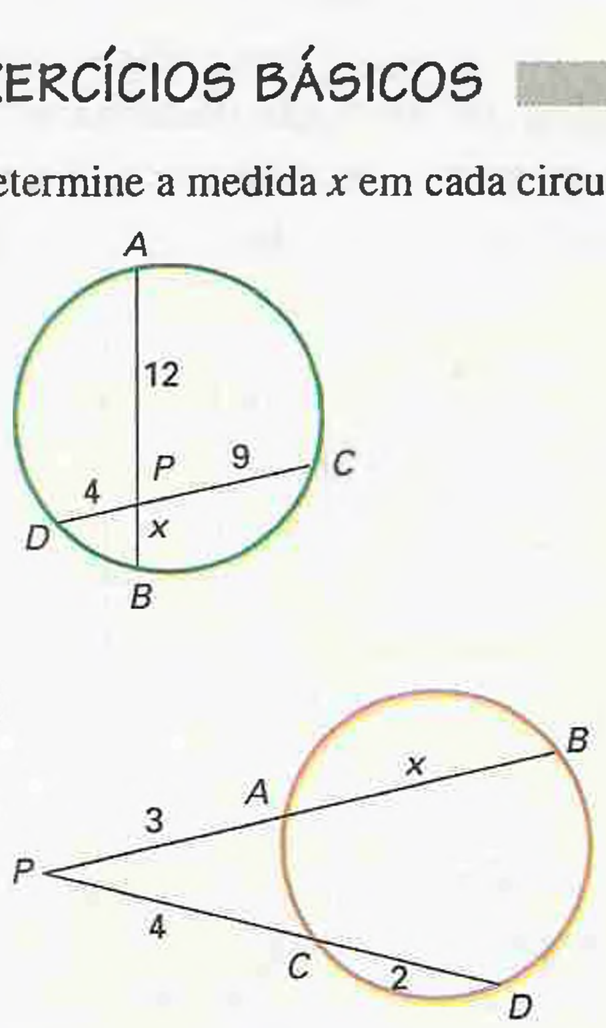
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Determine a medida x em cada circunferência:

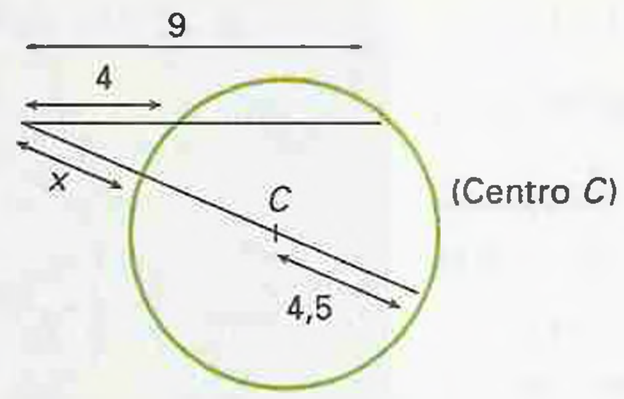
a)



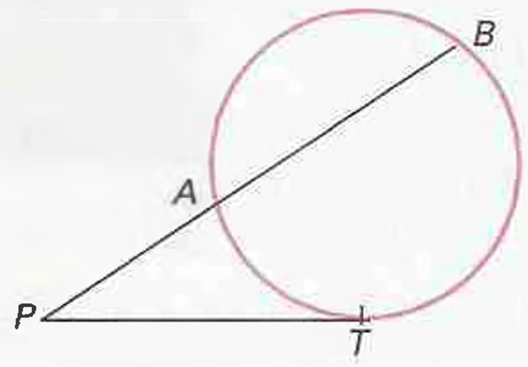
b)



c)



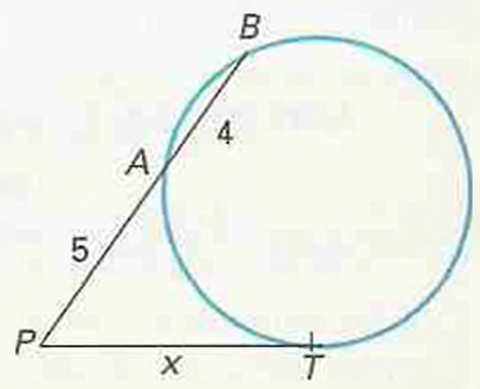
B.10 O segmento $\overline{PT}$ é tangente à circunferência abaixo:



Mostre que $(PT)^2 = PA \cdot PB$.

Sugestão. Trace os segmentos $\overline{TA}$ e $\overline{TB}$ e use a semelhança dos triângulos PTB e PAT.

B.11 Sabendo que $\overline{PT}$ é tangente à circunferência ao lado, determine a medida x. (Use a propriedade do exercício anterior.)



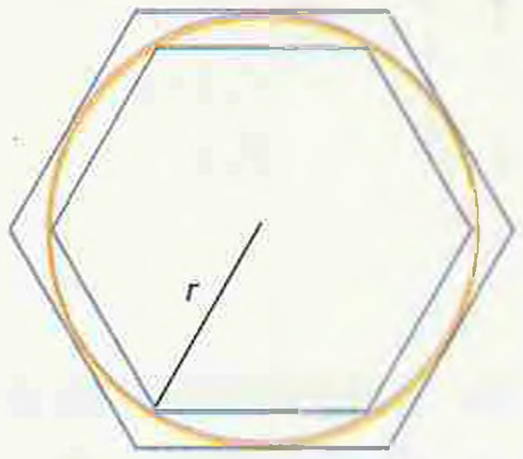
Exercícios complementares C.6 e C.7

5. PERÍMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA

Todas as circunferências são semelhantes entre si, por isso, a razão entre a medida c do comprimento (perímetro) de uma circunferência e a medida $2r$ de seu diâmetro é constante, isto é:

$$\frac{c}{2r} = \text{constante}$$

O matemático grego Arquimedes de Siracusa foi o primeiro homem a conseguir um método correto para a obtenção dessa constante. O sábio grego inscreveu e circunscreveu polígonos regulares a uma mesma circunferência e dividiu pelo diâmetro os perímetros do polígono inscrito e do polígono circunscrito. Por exemplo:



Perímetro da circunferência = c
Perímetro do polígono inscrito = $= 6r$
Perímetro do polígono circunscrito = $6{,}928r$

Assim, o matemático grego calculou:

$$\frac{6r}{2r} < \frac{c}{2r} < \frac{6{,}928r}{2r} \Leftrightarrow 3 < \frac{c}{2r} < 3{,}464$$

Arquimedes iniciou os cálculos com hexágonos regulares e foi dobrando o número de lados até chegar em 96 lados para os polígonos inscrito e circunscrito, obtendo:

$$\frac{c}{2r} \simeq 3{,}14$$

Modernamente, a constante $\frac{c}{2r}$ é simbolizada pela letra grega π (pi), e sabe-se, hoje, que essa constante é um número irracional, isto é, tem infinitas casas decimais e não é periódico:

$\pi = 3{,}14159265...$

OBRA DE JOSÉ DE RIBERA. MUSEU DO PRADO, MADRID

Arquimedes de Siracusa (287a.C.-212 a.C.).

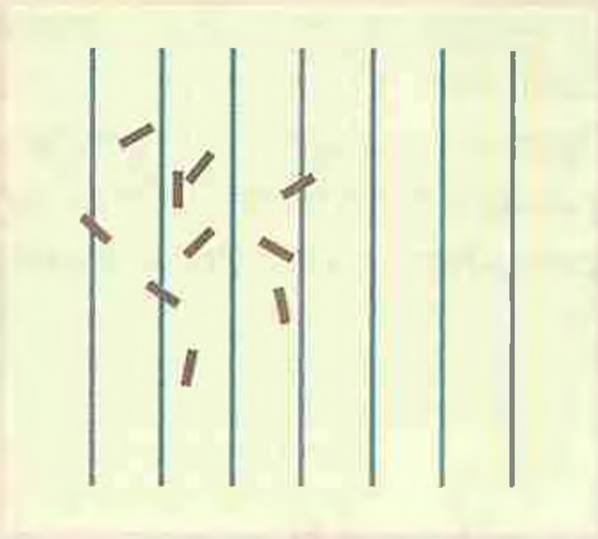
Da sentença $\frac{c}{2r} = \pi$, conclui-se que:

$$c = 2\pi r$$

isto é, o perímetro de uma circunferência é igual ao produto da medida do diâmetro por π.

Um modo curioso para o cálculo do número π

Vamos realizar uma experiência de resultado surpreendente. Desenhe em uma folha "grande" de papel uma série de retas paralelas de modo que a distância entre duas retas consecutivas seja 5 cm e corte dez palitos de comprimento 2,5 cm. De uma altura de 30 cm solte os dez palitos de uma vez sobre a folha e conte quantos deles tocam ou cruzam alguma das retas desenhadas. Repita essa experiência várias vezes. Dividindo o número total de palitos lançados pelo número de palitos que tocam ou cruzam alguma das retas obtém-se um número próximo de π. Por exemplo, se você realizar a experiência 20 vezes, terá lançado 200 palitos. Quanto maior o número de lançamentos, mais próximo de π você vai chegar. Tente!



3,14159...

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.12 Calcule o perímetro de uma circunferência de raio 5 cm.

B.13 Uma toalha redonda tem 4 m de diâmetro. No contorno dessa toalha será pregada uma fita de renda. Qual deve ser o comprimento dessa fita?

B.14 Um automóvel percorreu uma distância de 3.140 m. Quantas voltas girou cada pneu, sabendo que eles têm 0,5 m de raio? (Adote $\pi = 3{,}14$.)

Exercícios complementares de C.8 a C.10

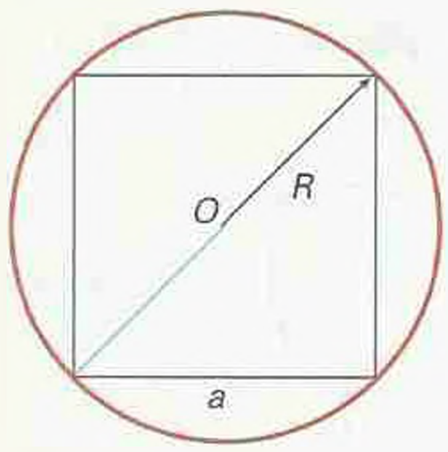
6. CIRCUNFERÊNCIAS CIRCUNSCRITA E INSCRITA EM POLÍGONOS REGULARES

Todo polígono regular admite a circunferência **circunscrita** (aquela que passa por todos os vértices do polígono) e a circunferência **inscrita** (aquela que tangencia todos os lados do polígono). Essas duas circunferência têm o mesmo centro O, chamado, também, de centro do polígono.

Nesse item vamos estudar o cálculo das medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita em alguns polígonos regulares. Ao raio da circunferência inscrita em um polígono regular, damos o nome de **apótema**.

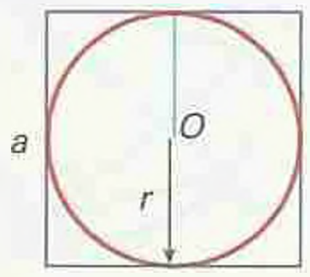
Quadrado

A medida da diagonal de um quadrado de lado a é $a\sqrt{2}$. Portanto, temos:



Raio R da circunferência circunscrita:

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



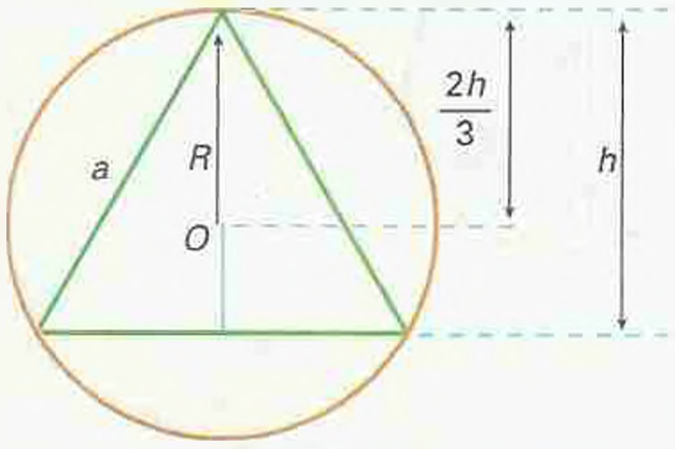
Raio r da circunferência inscrita (apótema):

$$r = \frac{a}{2}$$

Triângulo equilátero

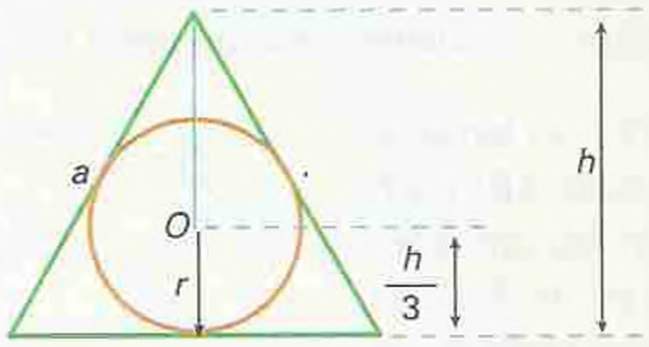
A medida da altura h de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Como no triângulo equilátero as alturas estão contidas nas mediatrizes e coincidem com as bissetrizes e medianas, temos que o ponto comum às alturas é circuncentro (centro da circunferência circunscrita); é, também, incentro (centro da circunferência inscrita); e também é baricentro (divide cada mediana na razão 2 para 1).

Raio R da circunferência circunscrita:



$$R = \frac{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

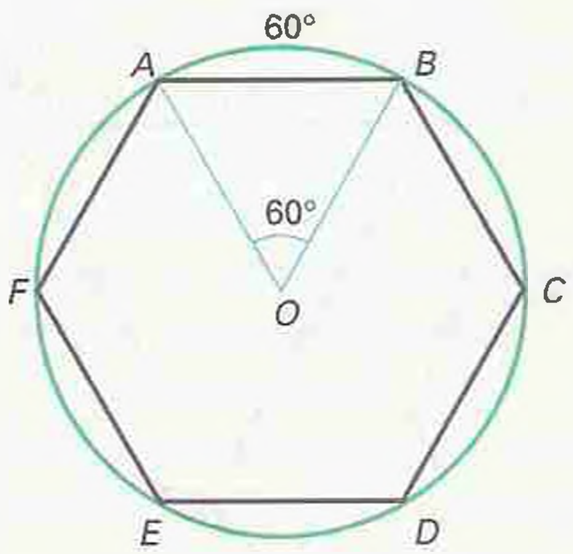
Raio r da circunferência inscrita (apótema):



$$r = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} \Leftrightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

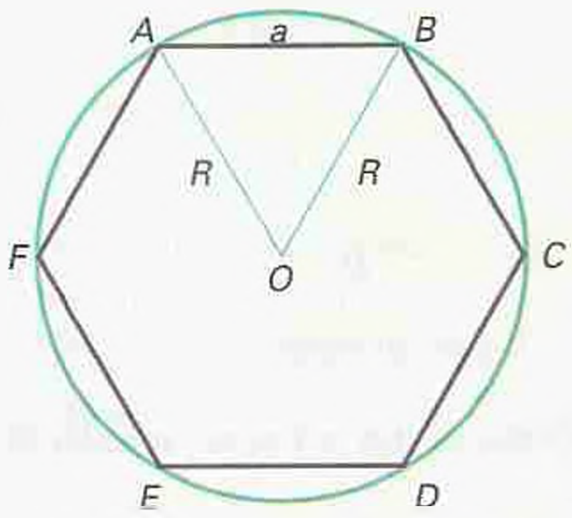
Hexágono regular

Os vértices de um hexágono regular dividem a circunferência circunscrita em seis arcos congruentes, logo, cada um desses arcos mede 60°. Assim, o ângulo central correspondente a cada um desses arcos também mede 60°.



Como $AO = OB$ e $m(A\hat{O}B) = 60°$, temos que $m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = 60°$ e, portanto, o triângulo AOB é equilátero. Sendo a a medida do lado desse hexágono, concluímos:

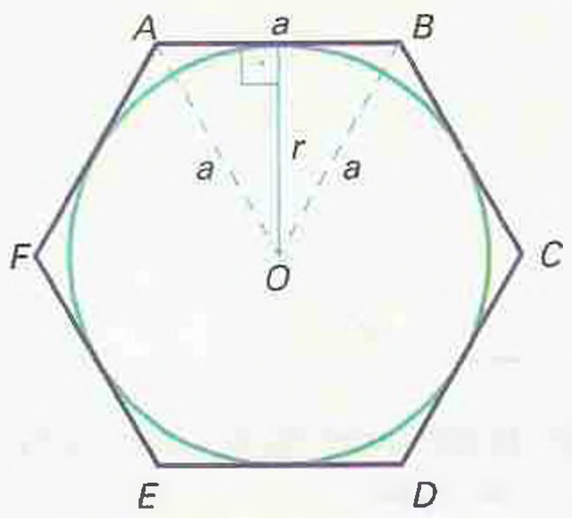
Raio R da circunferência circunscrita:



$$R = a$$

(Pois o triângulo AOB é equilátero.)

Raio r da circunferência inscrita (apótema):



$$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(Pois r é a medida da altura de um triângulo equilátero de lado a.)

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.15 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita e a do raio da circunferência inscrita em um quadrado de lado 4 cm.

B.16 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita e a do raio da circunferência inscrita em um triângulo equilátero de lado $12\sqrt{3}$ cm.

B.17 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita e a do raio da circunferência inscrita em um hexágono regular de lado 18 dm.

B.18 Qual é a razão entre as medidas dos lados dos quadrados inscrito e circunscrito a uma mesma circunferência?

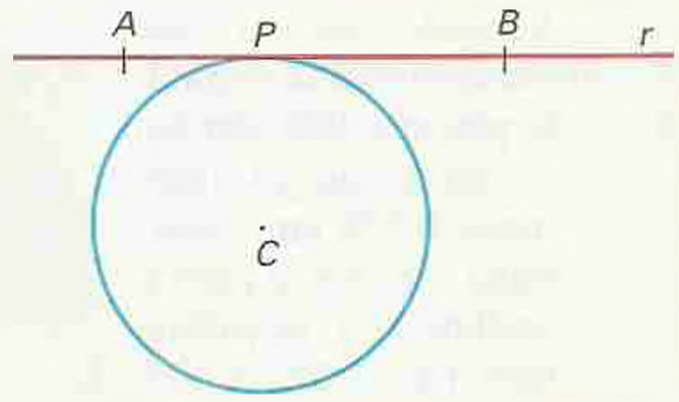
Nota
Dizer que um polígono está circunscrito a uma circunferência equivale a dizer que a circunferência está inscrita no polígono. Analogamente, dizer que um polígono está inscrito em uma circunferência equivale a dizer que a circunferência está circunscrita ao polígono.

Exercícios complementares de C.11 a C.16.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

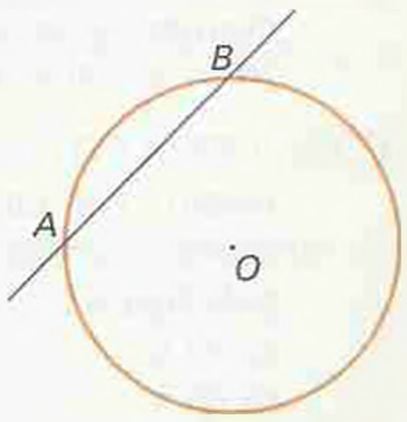
C.1 (UFCE) Na figura, a reta r tangencia, em P, a circunferência de centro C e raio 12 cm; e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ medem 5 cm e 16 cm, respectivamente. O perímetro do triângulo ABC é:

a) 54 cm
b) 48 cm
c) 46 cm
d) 52 cm
e) 30 cm



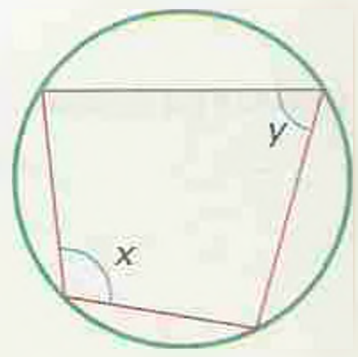
C.2 (PUC-MG) No círculo representado na figura, o raio mede 3 m e a corda $\overline{AB}$ dista 2 m do centro O. A medida da corda $\overline{AB}$, em metros, é:

a) $\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) 4
e) 5

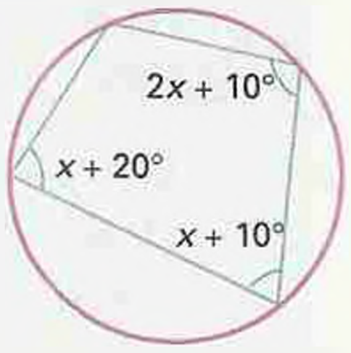


C.3 Mostre que: "Se um quadrilátero é inscritível em uma circunferência, então seus ângulos opostos são suplementares."

Sugestão. Desenhe um quadrilátero inscrito em uma circunferência, supondo que um ângulo interno mede x e seu oposto mede y. Observando que x e y são medidas de ângulos inscritos, obtenha as medidas dos arcos determinados por esses ângulos.

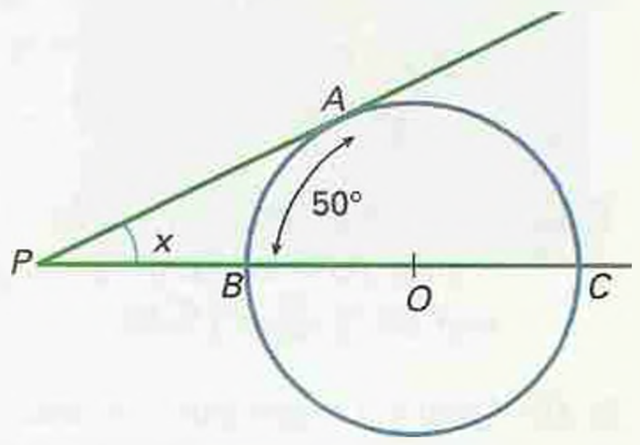


C.4 (Mackenzie-SP) A medida do maior ângulo interno do quadrilátero *ABCD* inscrito na circunferência da figura ao lado é:



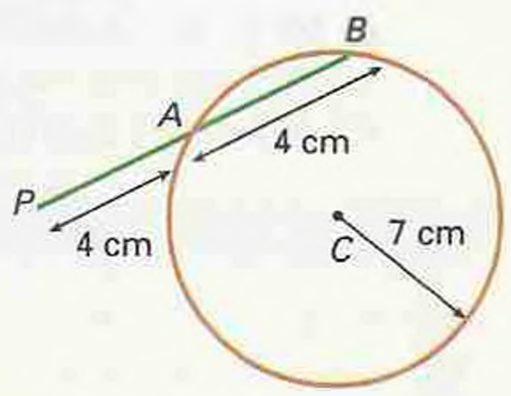
a) 140°
b) 130°
c) 120°
d) 110°
e) 100°

C.5 (Faap-SP) Na circunferência de centro *O*, ao lado, *A* é ponto de tangência. Calcule a medida *x* do ângulo $A\hat{P}C$.



C.6 Em uma circunferência de centro *C*, um ponto *P* de uma corda $\overline{AB}$ é tal que $PA = 9$ cm e $PB = 4$ cm. Calcule a medida do raio dessa circunferência sabendo que a distância entre *P* e *C* é 8 cm.

C.7 Calcule a distância entre o ponto *P* e a circunferência de centro *C* e raio 7 cm, ao lado.



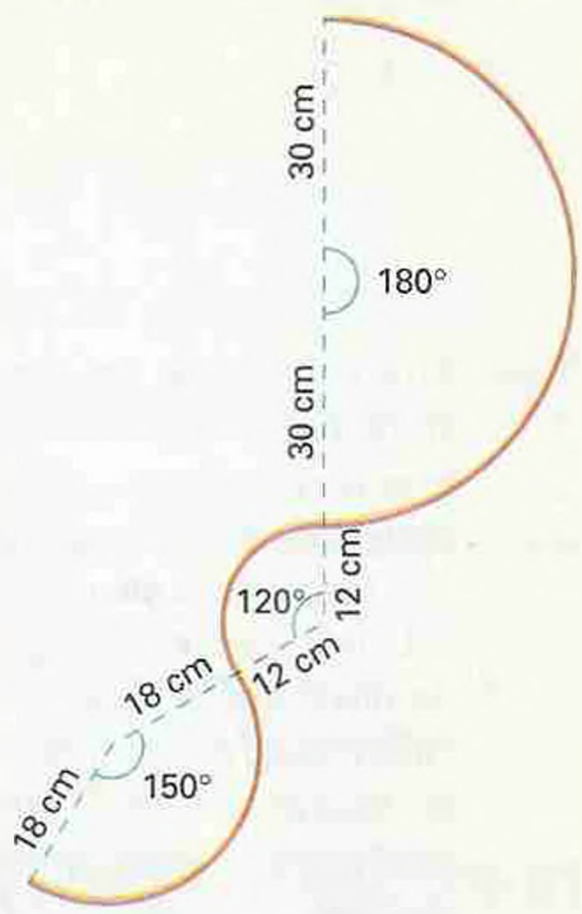
Nota
A distância entre um ponto e uma cricunferência é a medida do menor segmento de reta que liga o ponto à circunferência.

C.8 Um satélite artificial gira em órbita circular cujo centro coincide com o centro da Terra. Sabendo que em cada volta completa o satélite percorre 20.000π km e que o raio da Terra mede 6.370 km, determine a distância entre o satélite e a superfície terrestre. (Adote $\pi = 3{,}14$.)

C.9 Um míssil balístico foi lançado de um ponto *A* para atingir um ponto *B*, sendo sua trajetória uma semicircunferência de comprimento 2.500π m. Porém, do ponto *B* foi lançado em linha reta um míssil antibalístico que deve destruir o primeiro quando este atingir um ponto *P*, tal que $BP = 4.000$ m. Qual a medida do segmento de reta $\overline{AP}$?

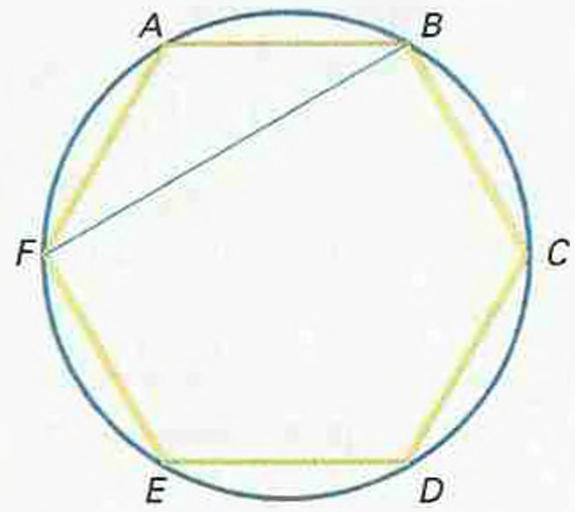
C.10 (UFMA) O comprimento, em cm, da curva representada pela figura é:

a) 53π
b) 60π
c) 120π
d) 43π
e) 96π



C.11 A diagonal de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $6\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência.

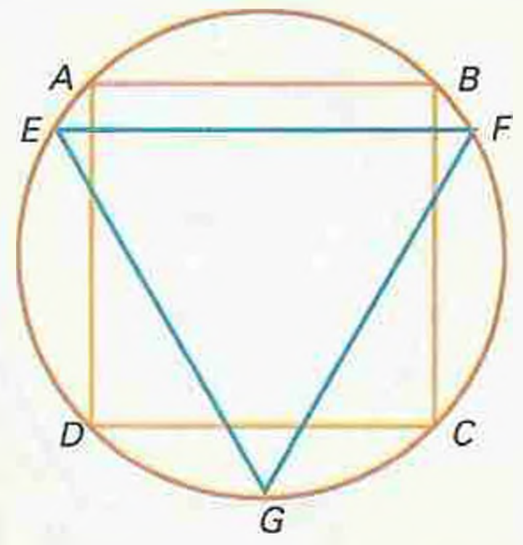
C.12 (UFMT) No hexágono regular *ABCDEF* inscrito na circunferência de raio 4 cm ao lado, a medida da diagonal $\overline{FB}$ é:



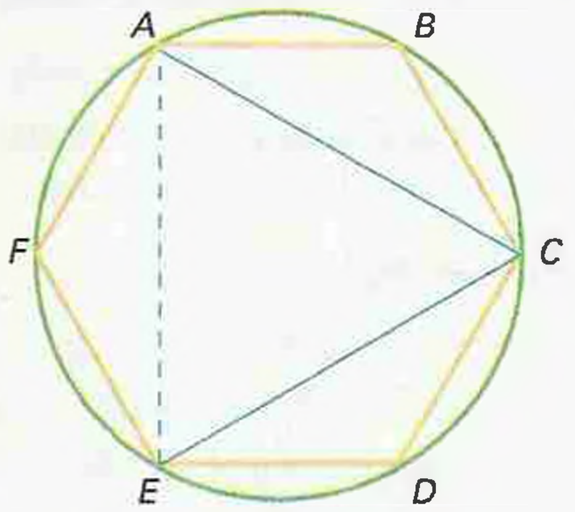
a) 6 cm
b) 6,8 cm
c) $4\sqrt{3}$ cm
d) $6\sqrt{2}$ cm
e) $\sqrt{15}$ cm

Sugestão. Desenhe o triângulo *FBC*.

C.13 Um quadrado *ABCD* e um triângulo equilátero *EFG* estão inscritos na mesma circunferência de raio $6\sqrt{2}$ cm tal que $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, conforme a figura. Calcule a distância entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$.



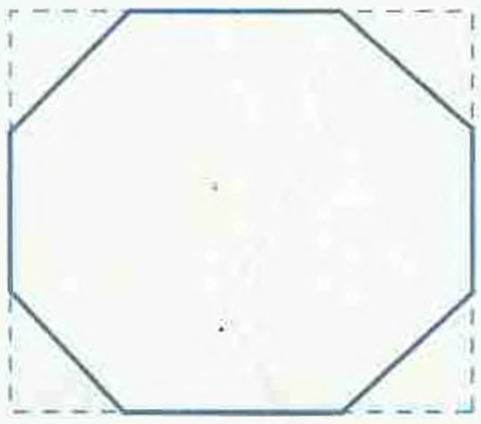
C.14 Um hexágono regular *ABCDEF* está inscrito em uma circunferência de raio $12\sqrt{3}$ cm. Calcule o perímetro do quadrilátero *ACEF*.



Sugestão. O triângulo *ACE* é equilátero.

C.15 Calcule a medida do apótema de um octógono regular de lado 2 m.

Sugestão. Prolongando-se os lados do octógono regular obtém-se um quadrado:



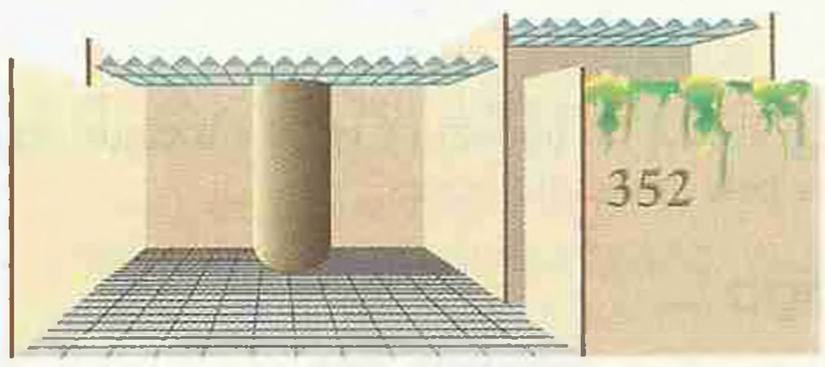
C.16 Calcule a medida do raio da circunferência circunscrita a um octógono regular de lado 2 m.

Capítulo 10

CÁLCULO DE ÁREAS

1. UNIDADES DE MEDIDA DE ÁREA

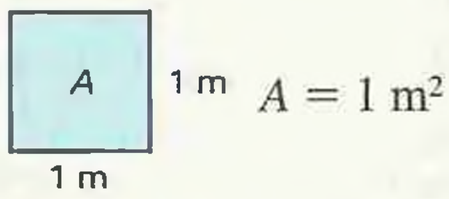
O piso de uma garagem foi completamente forrado com 220 lajotas de mesmo tamanho.



Considerando a superfície ocupada por uma lajota como uma unidade u de **área**, dizemos que a área do piso dessa garagem é 220 u.

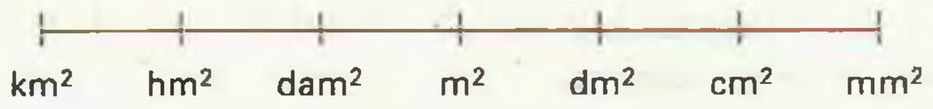
> Medir a área de uma superfície significa compará-la com uma superfície adotada como unidade.

A unidade fundamental de área é o metro quadrado, simbolizado por m^2, que é uma superfície quadrada com 1 m de lado:



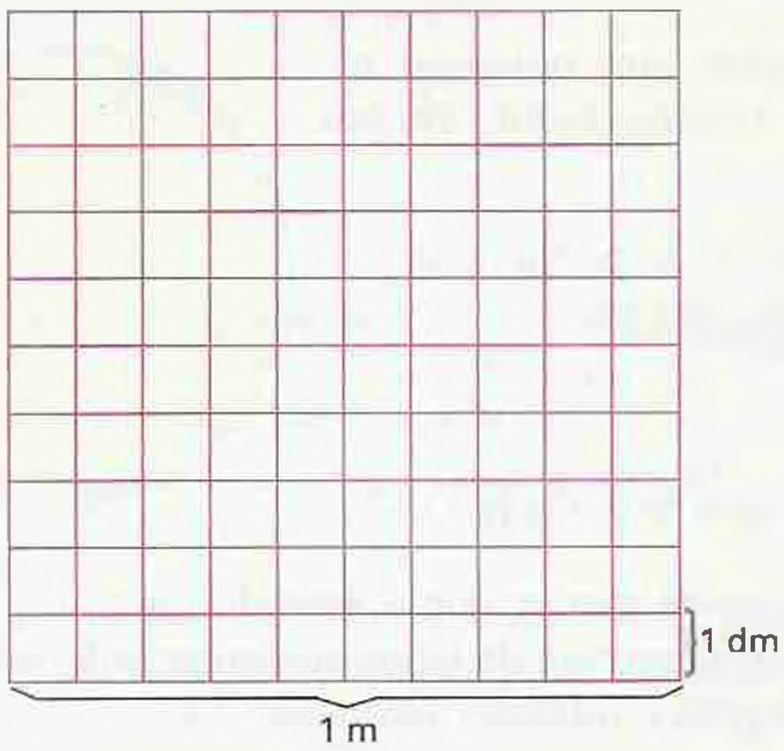
$A = 1\ m^2$

Analogamente definem-se: km^2, hm^2, dam^2, dm^2, cm^2 e mm^2 como sendo quadrados com lados de 1 km, 1 hm, 1 dam, 1 dm, 1 cm e 1 mm, respectivamente. Essas unidades de área podem ser apresentadas na escala abaixo:



Cada unidade dessa escala vale quantas vezes a unidade imediatamente inferior?

Para responder a essa pergunta vamos dividir um quadrado de 1 m de lado em quadradinhos de 1 dm de lado:



Note que dividimos o metro quadrado em 100 decímetros quadrados. Concluímos, então, que:

$$1\ m^2 = 100\ dm^2$$

Raciocinando de maneira análoga, concluímos também que:

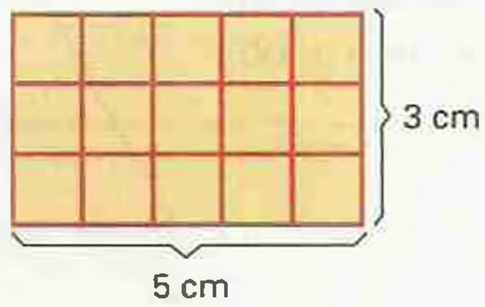
$$1\ km^2 = 100\ hm^2$$
$$1\ hm^2 = 100\ dam^2$$
$$1\ dam^2 = 100\ m^2$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2$$

isto é, na escalada de **unidades de área**, cada unidade vale 100 vezes a imediatamente inferior.

2. ÁREA DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS

Retângulo

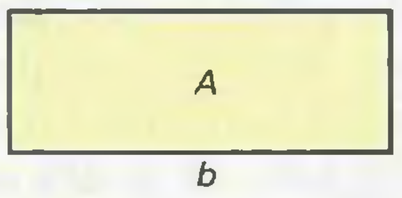
Consideremos um retângulo cuja base mede 5 cm e a altura mede 3 cm. Para calcular sua área em cm^2, vamos dividi-lo em quadradinhos de lado 1 cm, isto é:



Obtivemos 5 colunas com 3 quadradinhos em cada uma, logo, o número de quadradinhos é $5 \cdot 3$. Assim, a área A do retângulo é:

$$A = 15\ cm^2$$

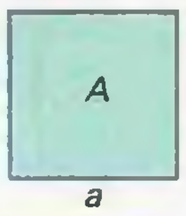
A área A de um retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura.



$A = b \cdot h$

Quadrado

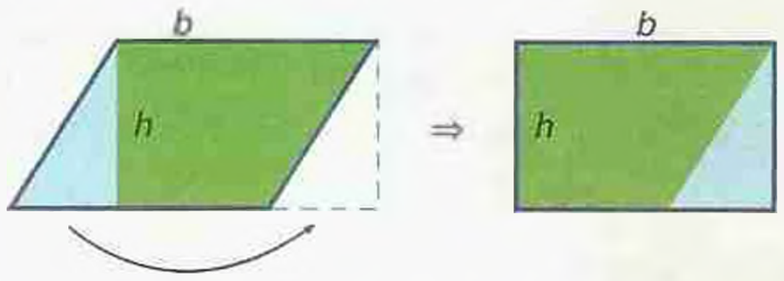
O quadrado é um retângulo, logo sua área A é produto da medida da base pela medida da altura.



$A = a^2$

Paralelogramo

A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual à área de um retângulo de base b e altura h. Observe:

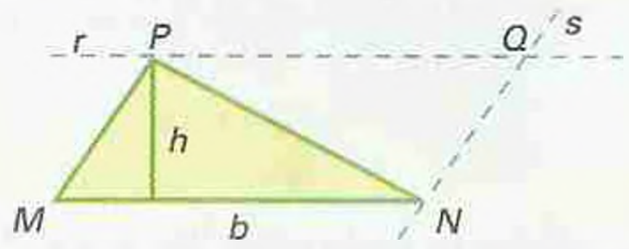


O triângulo azul no paralelogramo é congruente ao triângulo pontilhado; assim, se o colocarmos no lugar pontilhado, obteremos um retângulo de base b e altura h. Logo, a área A do paralelogramo é o produto da medida da base pela medida da altura.

$$A = b \cdot h$$

Triângulo

Consideremos um triângulo NMP cuja base $\overline{MN}$ mede b e a altura relativa a essa base mede h. Traçando por P a reta r paralela à base, e por N a reta s paralela ao lado $\overline{MP}$, obtemos o paralelogramo $NMPQ$ abaixo.



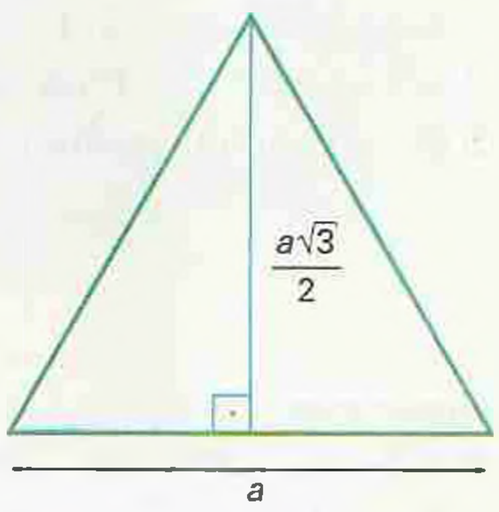
Como a área A do triângulo NMP é metade da área do paralelogramo, temos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

ou seja, a área do triângulo é metade do produto da medida da base pela medida da altura.

- **O triângulo equilátero**

No exercício **B.21** do **capítulo 8** você calculou a medida h da altura de um triângulo equilátero de lado a, obtendo $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

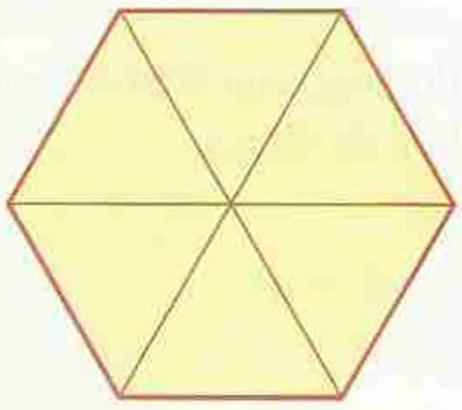


Logo, a área A desse triângulo é:

$$A = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \Leftrightarrow A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Hexágono regular

As diagonais que passam pelo centro de um hexágono regular dividem-no em seis triângulos equiláteros, conforme já estudamos no capítulo anterior. Assim, a área A de um hexágono regular de lado a é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado a.

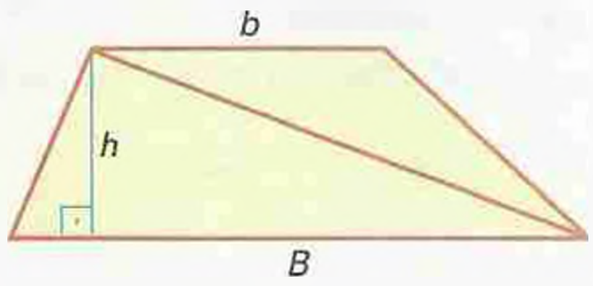


$$A = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Trapézio

Traçando uma diagonal de um trapézio de altura h e bases b e B, dividimo-lo em dois triângulos de altura h em relação às bases de medidas b e B. Observe a figura.



A área A do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\therefore A = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2}$$

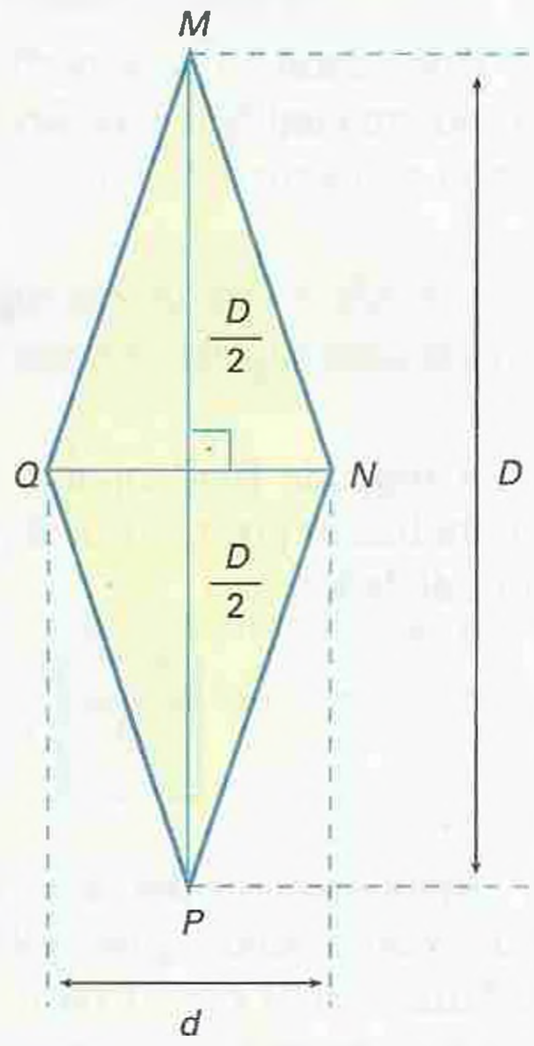
$$\therefore A = \frac{(B + b)h}{2}$$

ou seja, a área A do trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.

Losango

Consideremos um losango cujas diagonais medem D e d. Vimos, anteriormente, que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e o ponto em que elas concorrem é ponto médio de cada uma.

Observe, portanto, que a área A do losango é o dobro da área do triângulo de base d e altura $\frac{D}{2}$:



$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

$$\therefore A = \frac{d \cdot D}{2}$$

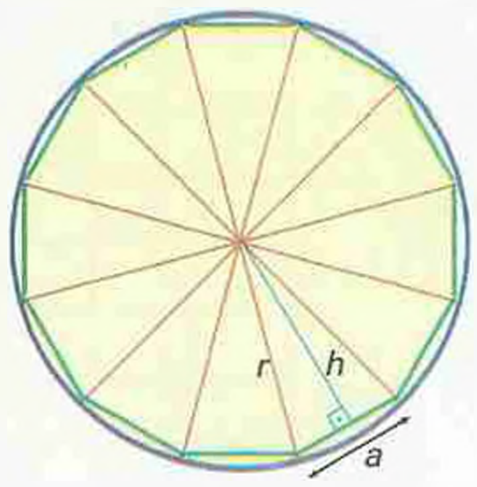
ou seja, a área A do losango é metade do produto das medidas das diagonais.

Nota

O losango também é paralelogramo, logo, sua área pode ser calculada como a área de um paralelogramo.

Círculo

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r:



A área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = (na) \cdot \frac{h}{2} =$$

$$= (\text{perímetro do polígono}) \cdot \frac{h}{2}$$

Essa área é menor que a área do círculo, porém, se fizermos o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), teremos:

- o perímero do polígono tenderá a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);
- a altura h de cada triângulo tenderá a se igualar ao raio r da circunferência;
- a área desse polígono tenderá a se igualar à área A do círculo,

ou seja, a expressão (perímetro do polígono) $\cdot \frac{h}{2}$ tenderá a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A do círculo:

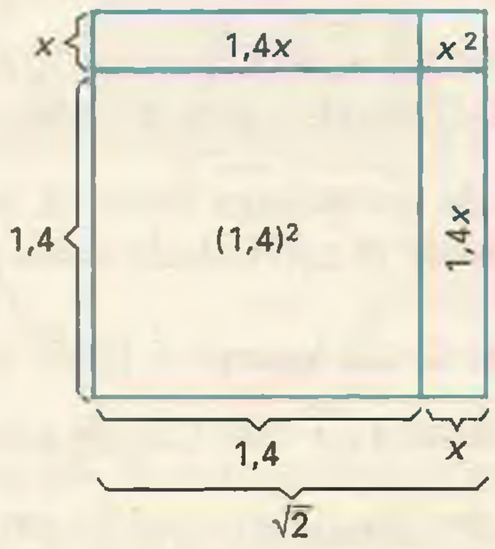
$$A = \pi r^2$$

Uma fusão da álgebra com a geometria

A álgebra e a geometria estão intimamente ligadas. Um exemplo fascinante dessa ligação é o cálculo de raízes através da geometria.

Por exemplo, o cálculo de $\sqrt{2}$ pode ser feito a partir de um valor cuja segunda potência seja menor do que 2. Tomemos esse valor como 1,4 (observando que $(1,4)^2 = 1,96$ e que $1,96 < 2$).

Consideremos um quadrado de área 2. Podemos garantir que seu lado mede $1,4 + x$, com $x > 0$.



A soma das áreas $(1,4)^2$; $1,4x$; $1,4x$ e x^2 é igual à área 2 do quadrado. Ou seja:

$$(1,4)^2 + 2,8x + x^2 = 2$$

Como $(1,4)^2 = 1,96$, temos que $x^2 < 0,04$. Assim, a área x^2 é "pequena" em relação à área 2 do quadrado original. Se desprezarmos x^2, obteremos uma aproximação para o valor x. Observe:

$$(1,4)^2 + 2,8x \simeq 2 \Rightarrow 1,96 + 2,8x \simeq 2$$

$$\therefore 2,8x \simeq 0,04 \therefore x \simeq \frac{0,04}{2,8} \therefore x \simeq 0,014$$

Assim, o lado do quadrado de área 2 mede aproximadamente $1,4 + 0,014 = 1,414$. Logo, temos:

$$\sqrt{2} \simeq 1,414$$

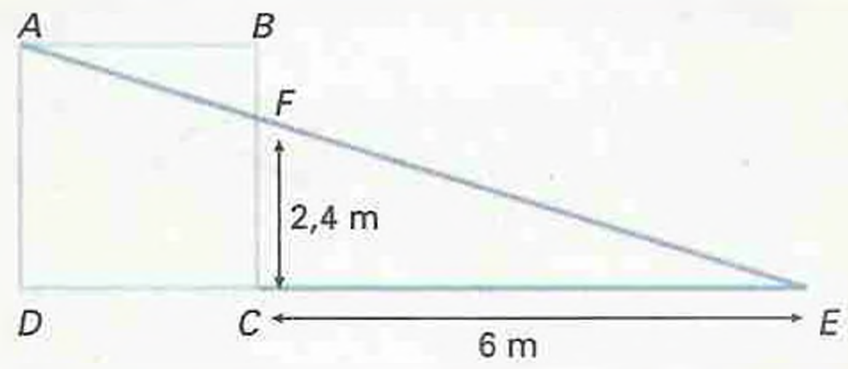
Se quisermos uma aproximação melhor para $\sqrt{2}$, consideramos um quadrado de área 2 cujo lado meça $1,414 + y$ $(y > 0)$ e repetimos o processo. Faça isto e você chegará a $\sqrt{2} \simeq 1,4142135$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 A base de um retângulo tem 3 cm a mais que a altura. Determine a área desse retângulo, sabendo que o seu perímetro é 26 cm.

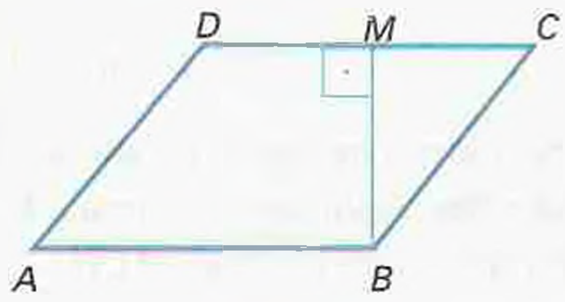
B.2 A base de um retângulo tem 1 cm a menos que o dobro da altura. Calcule o perímetro desse retângulo, sabendo que sua área é 15 cm².

B.3 Calcule a área do quadrado $ABCD$ da figura:

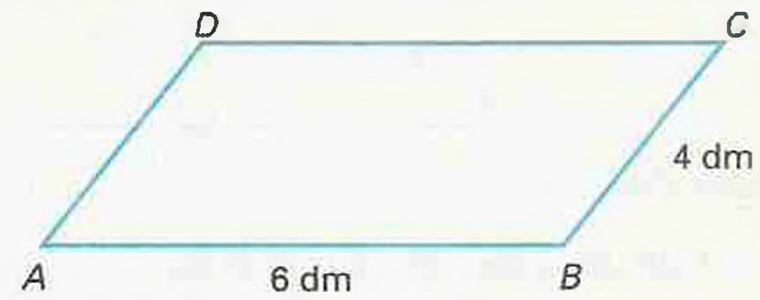


B.4 (UFPR) Uma circunferência de raio 5 cm tangencia um lado de um quadrado e passa pelos vértices que não pertencem a esse lado, conforme a figura. Calcule a área desse quadrado.

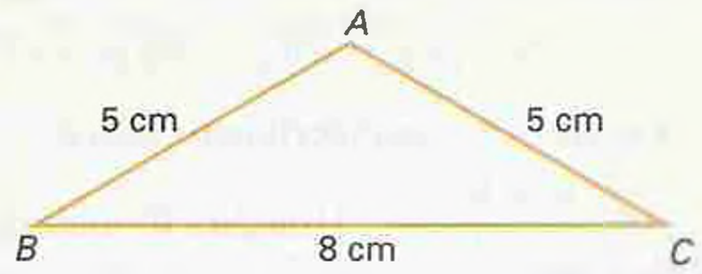
B.5 O paralelogramo $ABCD$, abaixo, tem perímetro 22 cm; M é ponto médio de $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$ tem 2 cm a mais que $\overline{DM}$. Calcule a área desse paralelogramo.



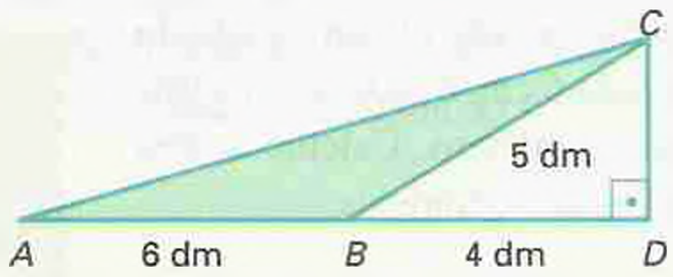
B.6 A medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do paralelogramo abaixo é 3 dm. Qual é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$?



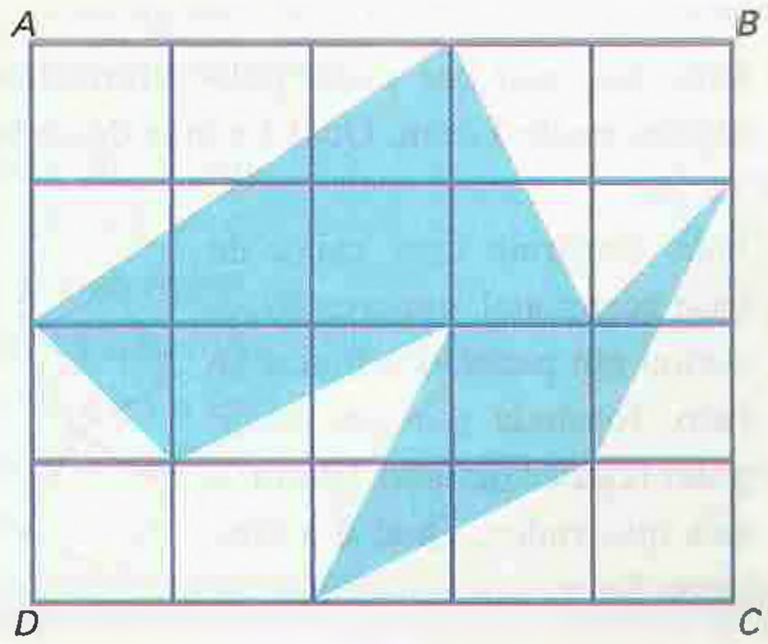
B.7 (UFMA-modificado) Calcule a área do triângulo isósceles abaixo:



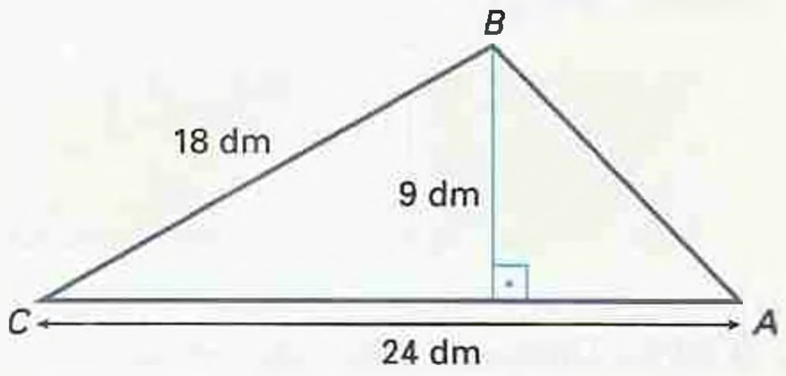
B.8 Calcule a área do triângulo ABC:



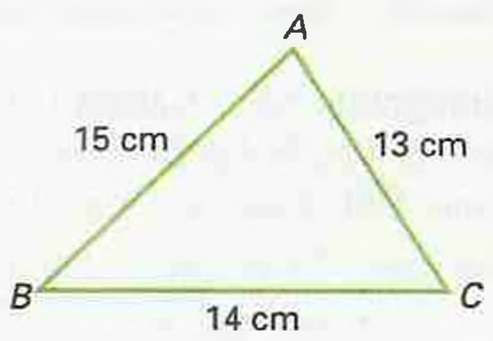
B.9 (Covest-PE) Na figura abaixo o retângulo $ABCD$ de lados 4 cm e 5 cm foi dividido em quadrados de lado 1 cm. Qual é a área da região colorida?



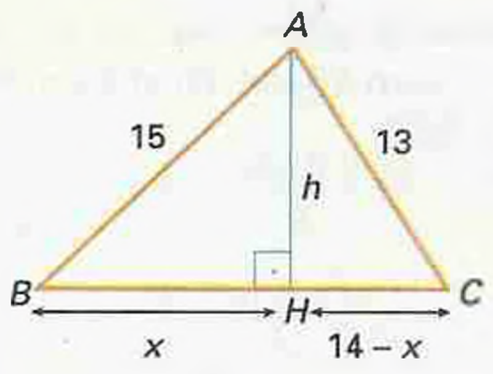
B.10 Calcule a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$ no triângulo abaixo:



B.11 Dado o triângulo ABC:



a) Determine a medida h da altura $\overline{AH}$.
Sugestão. Aplique o Teorema de Pitágoras no triângulo ABH e no triângulo ACH.



b) Calcule a área desse triângulo.

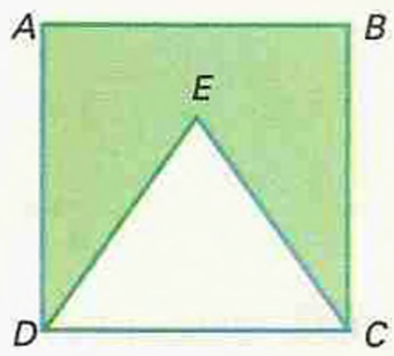
c) O sábio grego Heron que viveu em Alexandria no século I d.C. provou que a área A de um triângulo cujos lados medem a, b e c é dada por:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

em que p é o semiperímetro, isto é:

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Usando a fórmula de Heron, calcule a área do triângulo ABC.

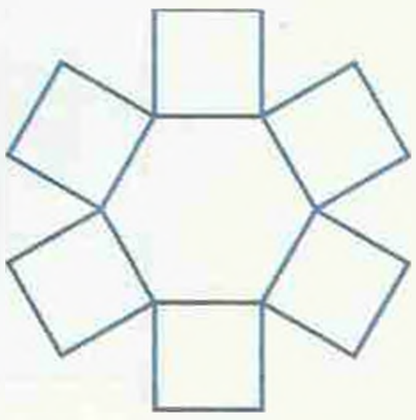
B.12 Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado 6 cm, e CDE é um triângulo equilátero. Calcule a área da região sombreada.



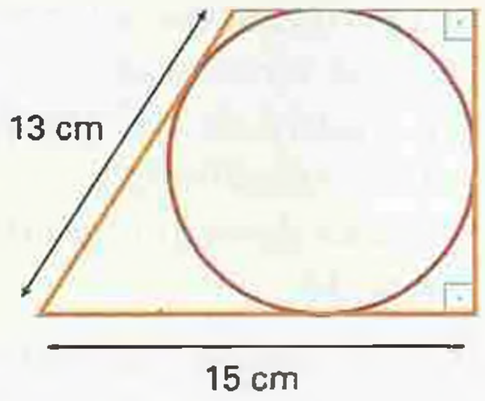
B.13 Calcule a área de um hexágono regular de lado 4 cm.

B.14 Uma diagonal que passa pelo centro de um hexágono regular mede 12 cm. Qual é a área desse hexágono?

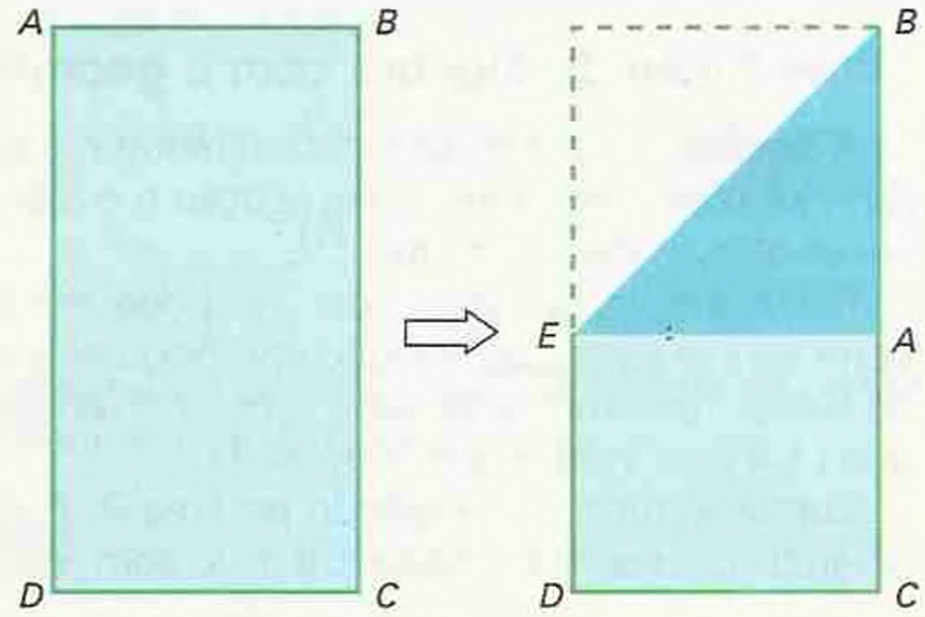
B.15 Para construir uma caixa de base hexagonal, um artesão recortou em papelão a figura ao lado, formada por um hexágono regular de lado 10 cm, e seis quadrados. Qual é a área dessa figura?



B.16 A figura ao lado mostra uma circunferência de raio 6 cm inscrita em um trapézio retângulo. Calcule a área desse trapézio.



B.17 Uma folha retangular $ABCD$ de cartolina é dobrada formando o vinco $\overline{BE}$, tal que o vértice A coincida com um ponto do lado $\overline{BC}$, conforme figura.



Sabendo que a área do trapézio $BCDE$ é 400 cm² e que $AB = 2 \cdot DE$, calcule a área do retângulo $ABCD$.

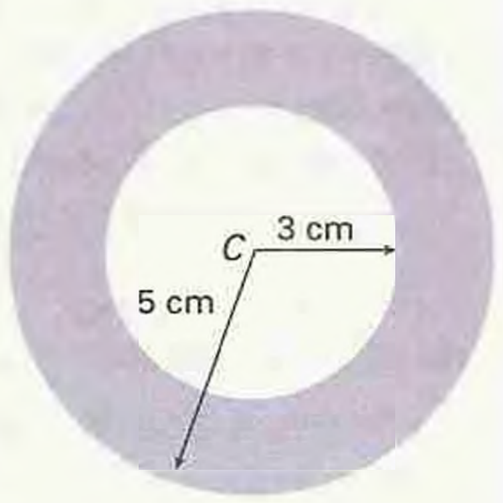
B.18 Cada lado de um losango mede 15 cm e uma de suas diagonais mede 18 cm. Calcule a área desse losango.

B.19 O perímetro de um losango é $12\sqrt{3}$ cm e uma de suas diagonais mede $3\sqrt{3}$ cm. Calcule a área desse losango.

B.20 Calcule a área do círculo inscrito em um quadrado de lado 6 cm.

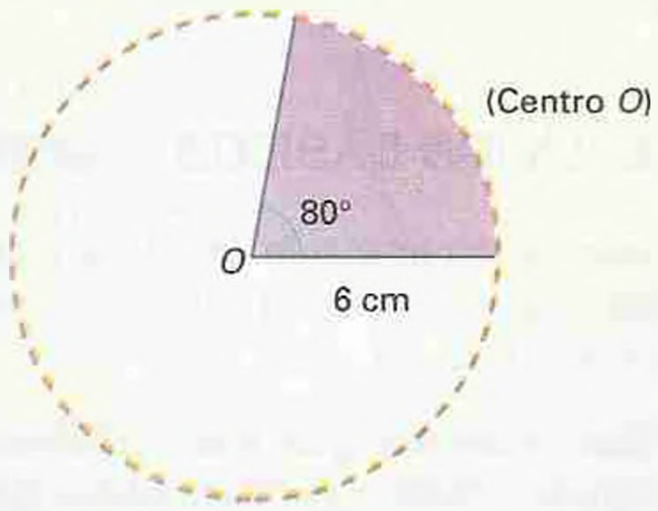
B.21 Calcule a área do círculo circunscrito a um quadrado de lado 6 cm.

B.22 A região do plano limitada por duas circunferências concêntricas (mesmo centro) e raios com medidas diferentes é chamada de **coroa circular**. Calcule a área da coroa circular ao lado.



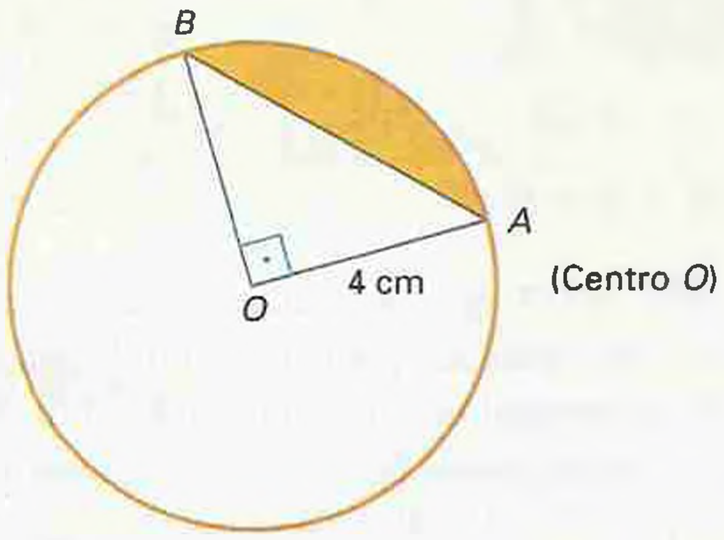
B.23 Calcule a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de lado 4 dm.

B.24 Em um círculo, a região limitada pelos lados de um ângulo central é chamada de **setor circular**. Calcule a área do setor circular abaixo:



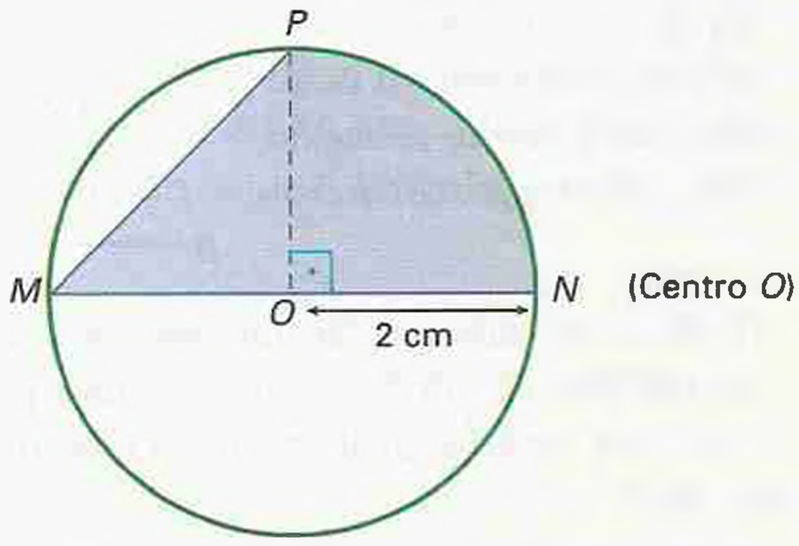
Sugestão. Use uma regra de três.

B.25 Toda corda de um círculo divide-o em duas partes chamadas de **segmentos circulares**. Calcule a área do segmento circular abaixo:



Sugestão. Subtraia da área do setor circular OAB a área do triângulo OAB.

B.26 Calcule a área da região sombreada no círculo abaixo:



B.27 (Mackenzie-SP) Quatro círculos de raio unitário, cujos centros são vértices de um quadrado, são tangentes exteriormente dois a dois, conforme figura. A área da região sombreada é:

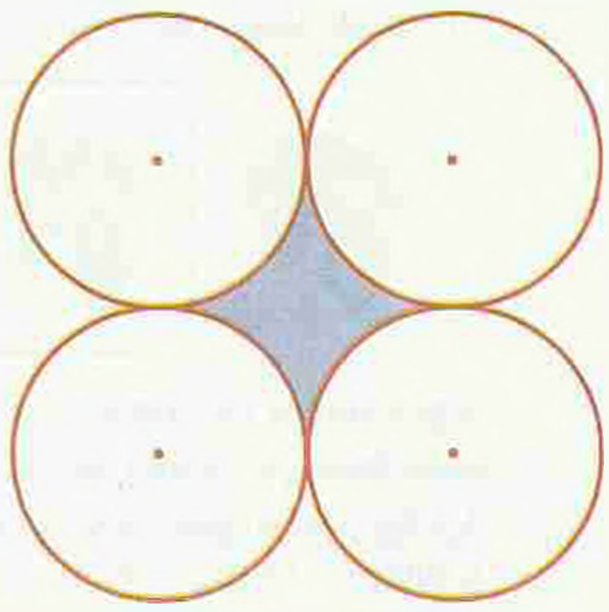
a) $2\sqrt{3} - \pi$

b) $3\sqrt{2} - \pi$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $4 - \pi$

e) $5 - \pi$



B.28 (Fuvest-SP) Na figura a seguir, ABC é um triângulo equilátero de lado 2. $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{NP}$ e $\overset{\frown}{MP}$ são arcos de circunferência com centros nos vértices A, B e C, respectivamente, e todos com raios iguais a 1. A área da região sombreada é:

a) $\sqrt{3} - \frac{3\pi}{4}$

b) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

c) $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

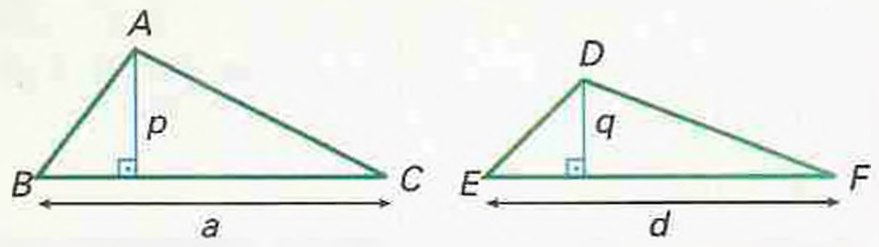
d) $4\sqrt{3} - 2\pi$

e) $8\sqrt{3} - 3\pi$

Exercícios complementares de C.1 a C.6.

3. RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

Consideremos os triângulos semelhantes ABC e DEF, tal que a razão de semelhança do primeiro para o segundo seja k:



$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k$$

Calculando a razão da área do primeiro para a área do segundo triângulo, temos:

$$\frac{A_{(ABC)}}{A_{(DEF)}} = \frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d} \cdot \frac{p}{q} = k \cdot k = k^2$$

Dessa maneira, deduzimos a importante propriedade:

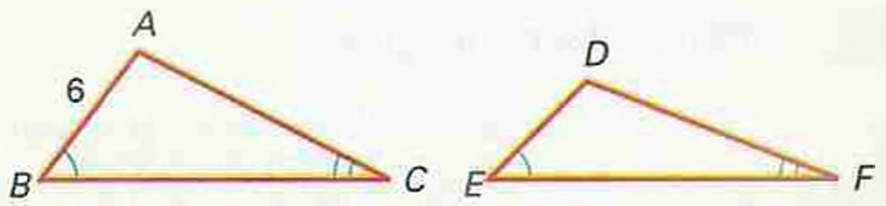
> A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Essa propriedade pode ser generalizada para quaisquer figuras semelhantes, isto é:

> A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras.

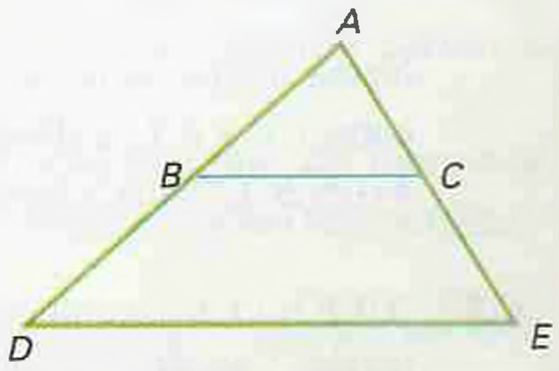
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.29 As áreas dos triângulos ABC e DEF, abaixo, são 45 cm² e 20 cm², respectivamente. Sabendo, ainda, que $\hat{B} \cong \hat{E}$, $\hat{C} \cong \hat{F}$ e $AB = 6$, calcule a medida do segmento $\overline{DE}$.



B.30 Dois decágonos regulares têm áreas iguais a 80 cm² e 20 cm². O decágono maior tem 30 cm de perímetro. Calcule o perímetro do menor.

B.31 Na figura, $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{DE}$, $AB = 4$ e $BD = 5$. Determine a razão da área do triângulo ADE para a área do triângulo ABC.

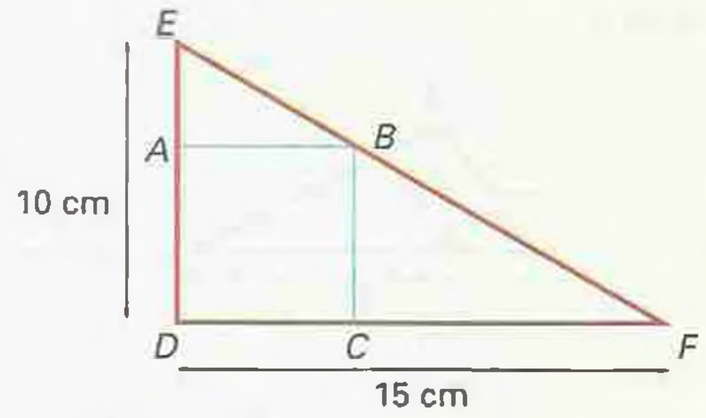


Exercícios complementares de C.7 a C.10

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFPI) A área do quadrado *ABCD* inscrito no triângulo retângulo *DEF*, abaixo, é:

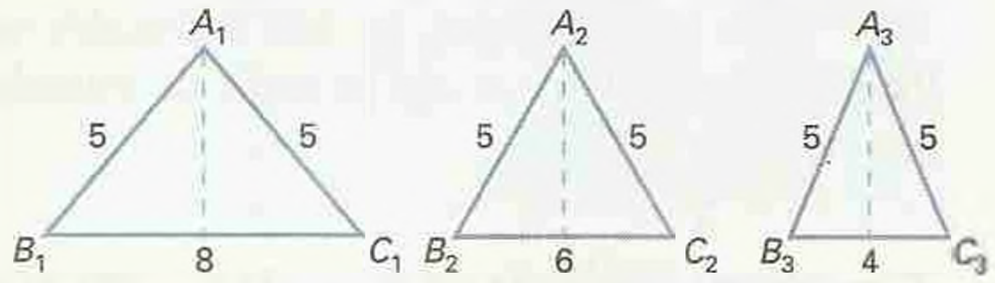
a) 42,25 cm²
b) 36 cm²
c) 46,24 cm²
d) 39,32 cm²
e) 49 cm²



C.2 (UFAMA) Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4 cm e 1 cm, respectivamente. A área desse triângulo mede:

a) 2 cm²
b) $5\sqrt{2}$ cm²
c) 4 cm²
d) 5 cm²
e) 10 cm²

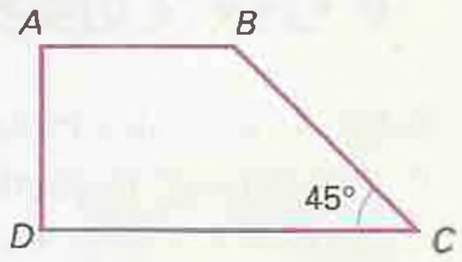
C.3 (UFAMA) Se S_1, S_2 e S_3, respectivamente, são as áreas dos triângulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$, da figura abaixo, então:



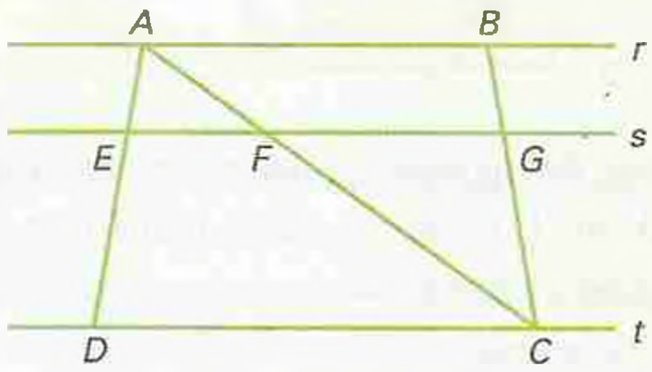
a) $S_1 > S_2 > S_3$
b) $S_1 = S_2 < S_3$
c) $S_1 < S_2 < S_3$
d) $S_1 = S_2 > S_3$
e) $S_1 < S_2 = S_3$

C.4 (PUC-MG) O trapézio da figura é retângulo (possui ângulos retos) e representa o contorno de um terreno plano na escala 1 : 1.000. Na figura, $AB = 4$ cm, $AD = 2$ cm e m($D\hat{C}B$) = 45°. A área do terreno, em metros quadrados, mede:

a) 10
b) 100
c) 1.000
d) 10.000
e) 100.000



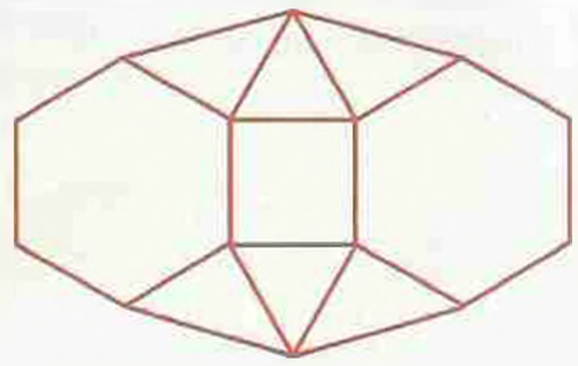
C.5 (UFMG) Observe a figura:



Nessa figura, as retas *r*, *s* e *t* são paralelas; a distância entre *r* e *s* é 1; a distância entre *s* e *t* é 3; $EF = 2$ e $FG = 5$. Calcule a área do quadrilátero *ABCD*.

C.6 (UERJ) O decágono da figura abaixo foi dividido em 9 partes: 1 quadrado, 2 hexágonos regulares e 2 triângulos equiláteros, todos com os lados congruentes aos lados do quadrado, e mais 4 outros triângulos. Sendo *T* a área de cada triângulo equilátero e *Q* a área do quadrado, pode-se concluir que a área do decágono é:

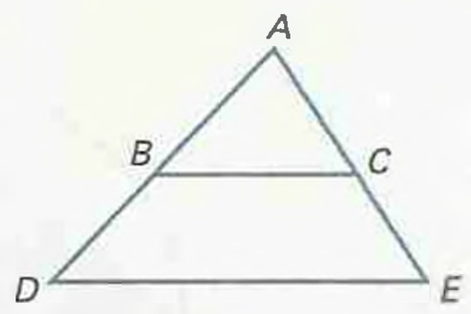
a) $14T + 3Q$
b) $14T + 2Q$
c) $18T + 3Q$
d) $18T + 2Q$



C.7 (PUC-RJ) Triplicando-se o raio de uma circunferência:

a) a área limitada por ela é multiplicada por 9π.
b) seu comprimento é multiplicado por 3π.
c) a área limitada por ela é multiplicada por 9 e seu comprimento é multiplicado por 3.
d) a área limitada por ela e seu comprimento são ambos multiplicados por 3.
e) a área limitada por ela é multiplicada por 3 e seu comprimento é multiplicado por 9.

C.8 (Fuvest-SP) Na figura, $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{DE}$, $AB = 4$ e $BD = 5$. Determine a razão entre as áreas do triângulo *ABC* e do trapézio *BCED*.



C.9 (UnB-DF-modificado) Em um mapa de escala 1 : 50.000, a superfície de um lago é representada por uma figura com 3 cm² de área. Qual é a área da superfície desse lago, em m²?

C.10 (UnB-DF) Para analisar a transpiração das plantas, os botânicos precisam conhecer a área de suas folhas. Essa área pode ser obtida pelo seguinte processo: coloca-se a folha da planta sobre uma cartolina e traça-se seu contorno. Na mesma cartolina, desenha-se um quadrado com 10 cm de lado, como mostram as figuras a seguir.

Após serem recortadas, as duas figuras são pesadas em uma balança de alta precisão, que indica uma massa de 1,44 g para o quadrado de cartolina. Desse modo, usando grandezas proporcionais, os botânicos podem determinar a área da folha.

Usando as informações do texto, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das seguintes afirmações:

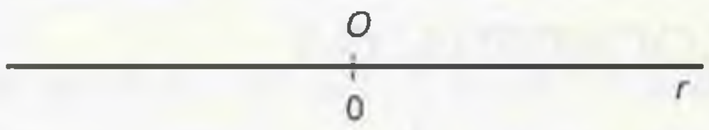
a) Se a figura da folha tem massa de 3.24 g, então a área da folha é de 225 cm².
b) Suponha que o mesmo processo descrito no texto tenha sido utilizado para estimar a área do estado de Minas Gerais da seguinte forma: em um mapa traçado com escala 1 : 5.000.000, a figura desse estado, recortado na mesma cartolina, apresentou massa de 3,30 g. Então, é correto concluir que a área do estado é maior que 580.000 km².
c) Um estudante utilizou, para determinar a área de uma folha, um processo diferente: contornou a folha com um barbante e, em seguida, formou com ele um retângulo. Dessa forma, o estudante estava certo ao concluir que, quaisquer que fossem as dimensões do retângulo, a sua área seria igual à área da folha.

Capítulo 11

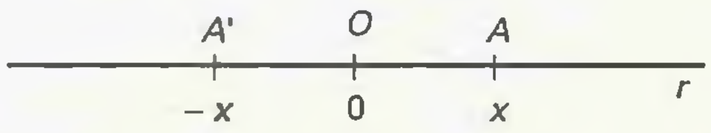
ASSOCIANDO NÚMEROS REAIS A PONTOS DE UMA RETA OU DE UM PLANO

1. O EIXO REAL

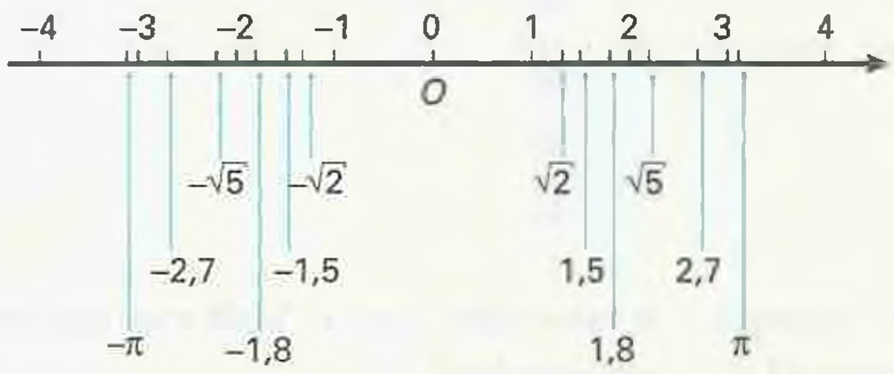
Consideremos uma reta r e associemos o número 0 (zero) a um ponto O de r.



O ponto O separa a reta r em duas semi-retas opostas de origem O. A cada ponto A, $A \neq O$, de uma dessas semi-retas, associemos um número real positivo x, que indica a distância de A até O, em uma certa unidade u. A cada ponto A', simétrico de A em relação a O, associemos o oposto de x.

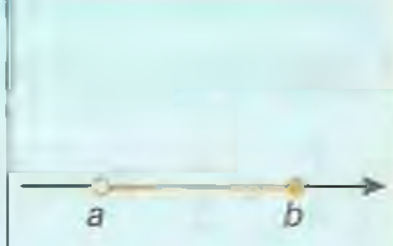


Dizemos que esse sistema é o **eixo real**, cuja origem é o ponto O e o sentido é o que concorda com o crescimento dos valores dos números. Assim, temos:



Intervalos reais

Sejam a e b números reais tais que $a < b$. Chamam-se intervalos reais os subconjuntos de $\mathbb{R}$ mostrados na tabela:

Subconjuntos de $\mathbb{R}$	Símbolo	Nome	Representação no eixo real
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo fechado de extremos a e b.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$]a, b[$	Intervalo aberto de extremos a e b.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b[$	Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos a e b.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$]a, b]$	Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos a e b.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty[$	Intervalo incomensurável fechado à esquerda em a.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$]a, +\infty[$	Intervalo incomensurável aberto à esquerda em a.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$]-\infty, a]$	Intervalo incomensurável fechado à direita em a.	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$]-\infty, a[$	Intervalo incomensurável aberto à direita em a.	
$\mathbb{R}$	$]-\infty, +\infty[$	Intervalo incomensurável de $-\infty$ a $+\infty$.	

Notas

1. O símbolo ∞ deve ser lido "infinito".
2. A palavra "incomensurável" significa "que não se pode medir".

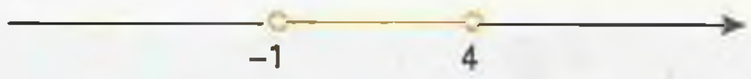
Convenções

1. A bolinha cheia (●) em um extremo do intervalo indica que o número associado a esse extremo pertence ao intervalo.
2. A bolinha vazia (○) em um extremo do intervalo indica que o número associado a esse extremo não pertence ao intervalo.
3. Usaremos sempre a denominação "aberto" no $+\infty$ e no $-\infty$.

Exemplos

a) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$ é o intervalo fechado de extremos 3 e 5, ou seja, [3, 5]. Sua representação no eixo real é:

b) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\}$ é o intervalo aberto de extremos -1 e 4, ou seja, $]-1, 4[$. Sua representação no eixo real é:



c) O conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ é o intervalo aberto à esquerda e fechado à direita, de extremos $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, isto é, $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Sua representação no eixo real é:

d) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$ é o intervalo incomensurável fechado à esquerda em 2, ou seja, $[2, +\infty[$. Sua representação no eixo real é:

e) O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ é o intervalo incomensurável aberto à direita em 5, isto é, $]-\infty, 5[$. Sua representação no eixo real é:

Notas

1. O intervalo [3, 3] é o conjunto {3}.
2. Os intervalos]3, 3[,]3, 3] e [3, 3[são vazios.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Represente no eixo real cada um dos intervalos:

a) [5, 9] d)]0, 5] g) $]-\infty, 2]$
b) $]-3, 5[$ e) $[4, +\infty[$ h) $]-\infty, 4[$
c) [1, 8[f) $]3, +\infty[$

B.2 Represente no eixo real cada um dos conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leqslant 7\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 8\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 6\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

B.3 Dados os intervalos $A =]-3, 10]$ e $B = [5, 13]$, determine:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

B.4 Sendo $A = [2, +\infty[$ e $B =]-\infty, 5[$, efetue:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

B.5 Considerando os intervalos $A = [-1, +\infty[$ e $B =]0, 7[$, obtenha:

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

B.6 Dados os intervalos $A =]1, 4]$, $B =]2, 8[$ e $C = [4, 10]$, determine:

a) $A \cup B \cup C$ b) $A \cap B \cap C$

B.7 Resolva em $\mathbb{R}$ o sistema de inequações:

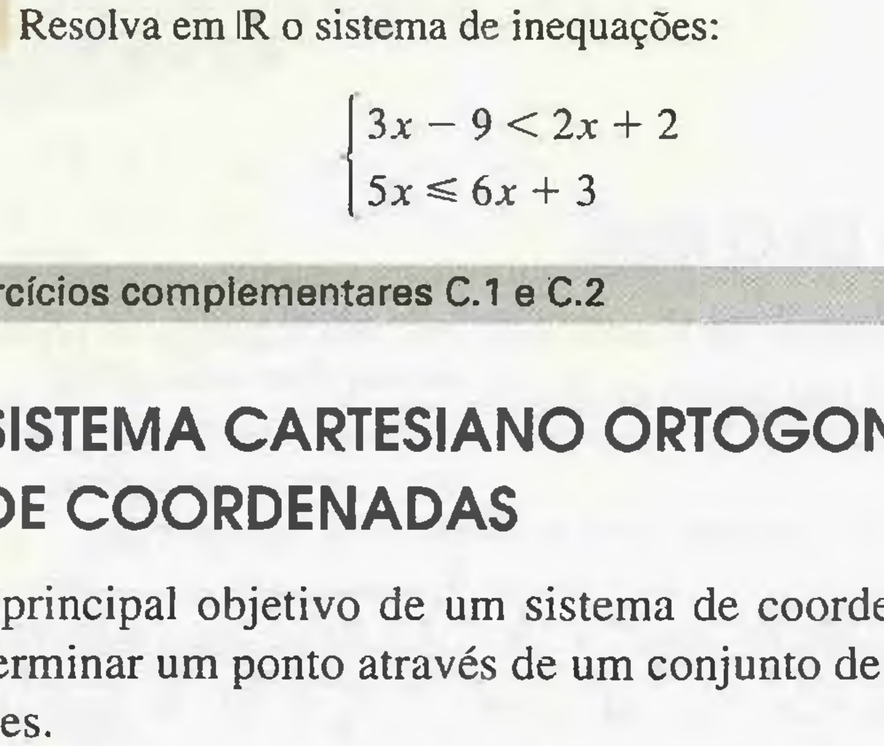
$$\begin{cases} 3x - 9 < 2x + 2 \\ 5x \leqslant 6x + 3 \end{cases}$$

Exercícios complementares C.1 e C.2

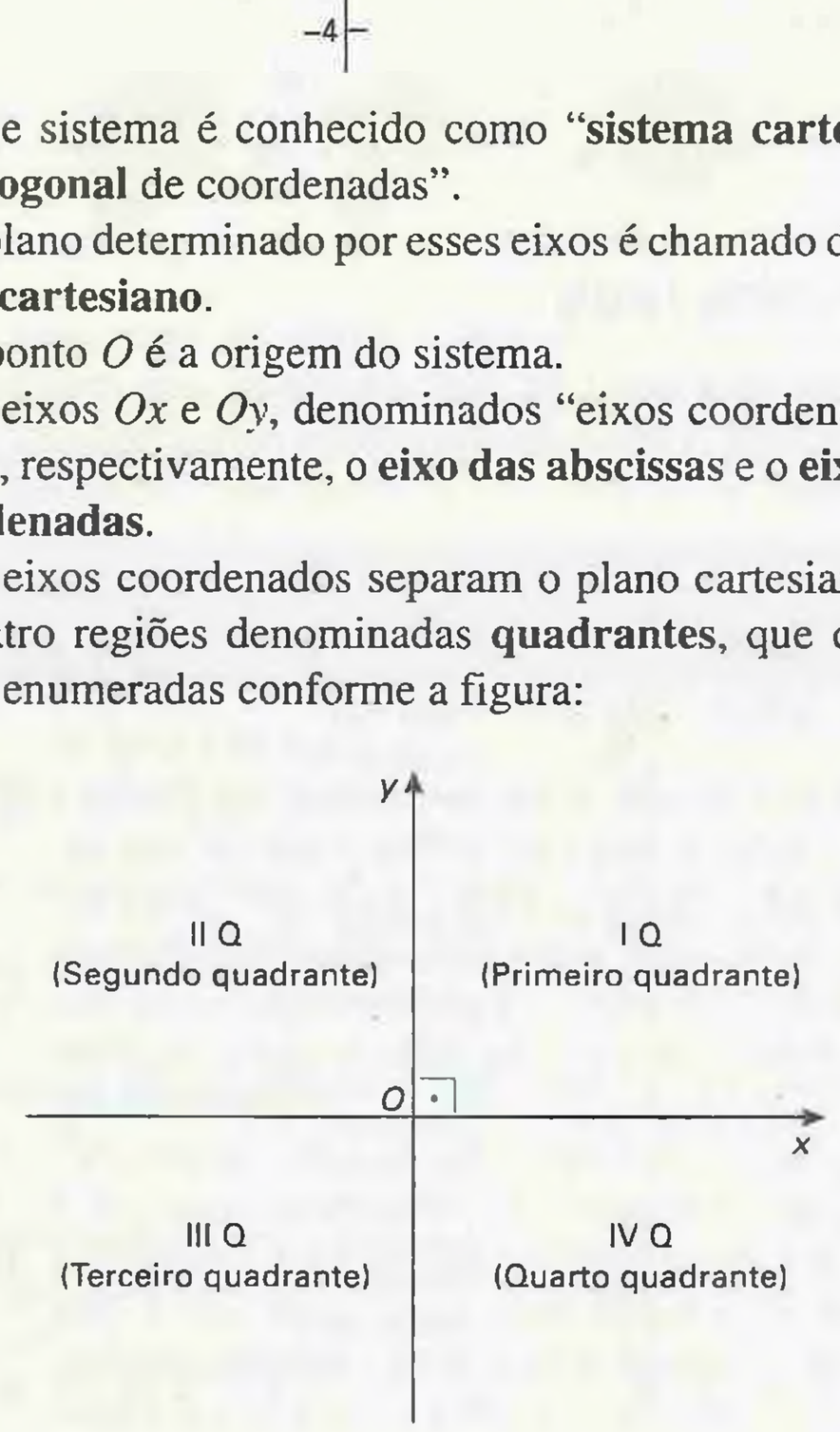
2. SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL DE COORDENADAS

O principal objetivo de um sistema de coordenadas é determinar um ponto através de um conjunto de informações.

Para determinar um ponto de um plano, podemos fixar nesse plano dois eixos reais Ox e Oy, perpendiculares entre si no ponto O.



- Esse sistema é conhecido como "**sistema cartesiano ortogonal** de coordenadas".
- O plano determinado por esses eixos é chamado de **plano cartesiano**.
- O ponto O é a origem do sistema.
- Os eixos Ox e Oy, denominados "eixos coordenados", são, respectivamente, o **eixo das abscissas** e o **eixo das ordenadas**.
- Os eixos coordenados separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser enumeradas conforme a figura:



Nota

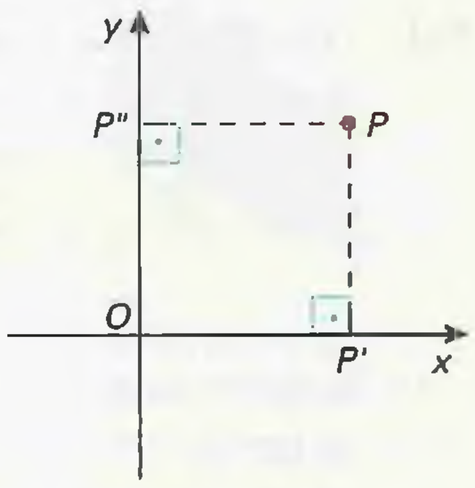
Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum dos quadrantes.

OBRA DE FRANZ HALS. MUS. DO LOUVRE, PARIS

René Descartes (1596-1650) formalizou o conceito de sistema de coordenadas em sua obra *Géométrie* (1637). Embora esse conceito esteja associado ao nome de Descartes, outros matemáticos já o haviam utilizado, como Apolônio de Perga (?262-?190 a.C.).

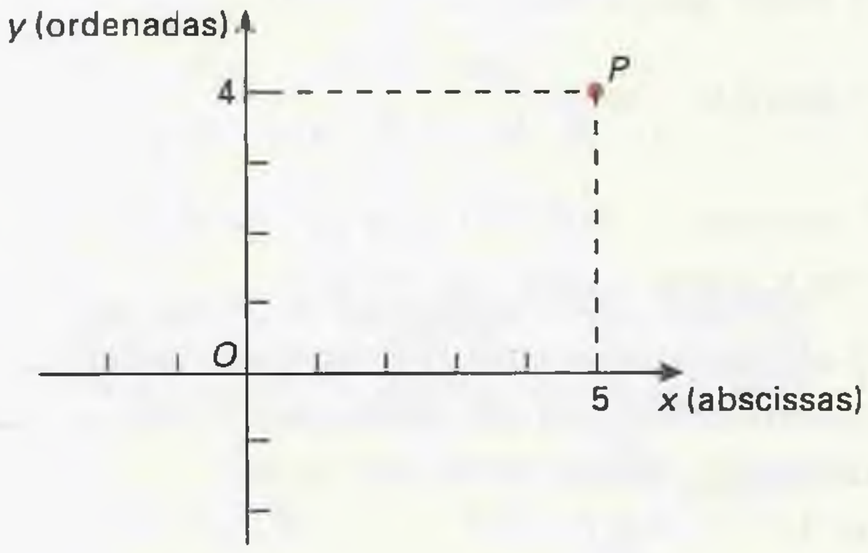
Coordenadas de um ponto no plano cartesiano

Dado um ponto P do plano cartesiano, chamamos de "projeção ortogonal de P sobre um dos eixos Ox ou Oy" a intersecção desse eixo com a reta perpendicular a ele, traçada por P.



- P' é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox.
- P'' é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Oy.
- Dizemos que as **coordenadas** do ponto P são os números associados a P' e P'' nos eixos Ox e Oy, respectivamente.

Exemplo



As **coordenadas** do ponto P são 5 e 4. A **abscissa** é 5; e a **ordenada** é 4. Indicamos esse fato por $P(5, 4)$.

O símbolo (5, 4) é chamado de "**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4".

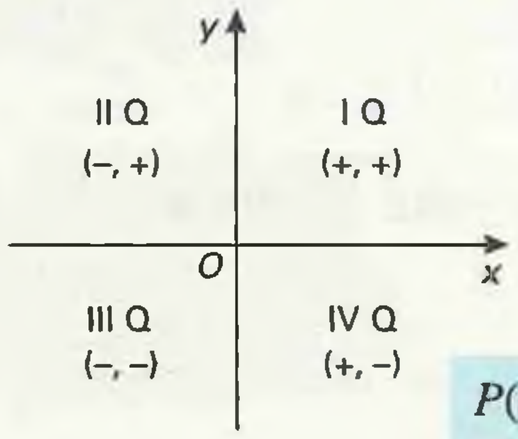
Notas

1. Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é, $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

Exemplo

$(a, 8) = (7, y) \Leftrightarrow a = 7$ e $y = 8$

2. Indicando por I Q, II Q, III Q e IV Q os quadrantes, temos:



$P(a, b) \in \text{I Q} \Leftrightarrow a > 0$ e $b > 0$
$P(a, b) \in \text{II Q} \Leftrightarrow a < 0$ e $b > 0$
$P(a, b) \in \text{III Q} \Leftrightarrow a < 0$ e $b < 0$
$P(a, b) \in \text{IV Q} \Leftrightarrow a > 0$ e $b < 0$

Exemplos

$(4, 2) \in \text{I Q}$; $\left(-\frac{1}{2}, 9\right) \in \text{II Q}$; $(-3, -5) \in \text{III Q}$ e $\left(\frac{3}{4}, -1\right) \in \text{IV Q}$.

3. Todo ponto de abscissa nula pertence ao eixo Oy e todo ponto de ordenada nula pertence ao eixo Ox.

Exemplos

$(0, -2) \in Oy$ e $(5, 0) \in Ox$

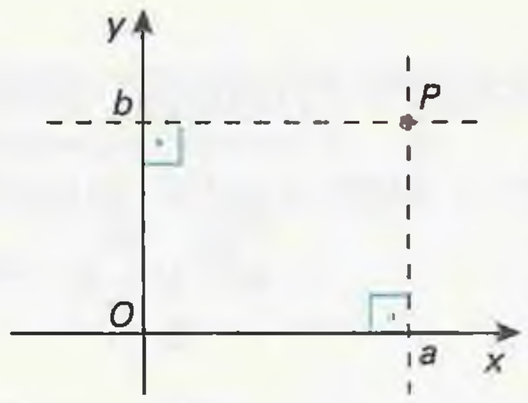
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Representar no plano cartesiano os seguintes pontos:

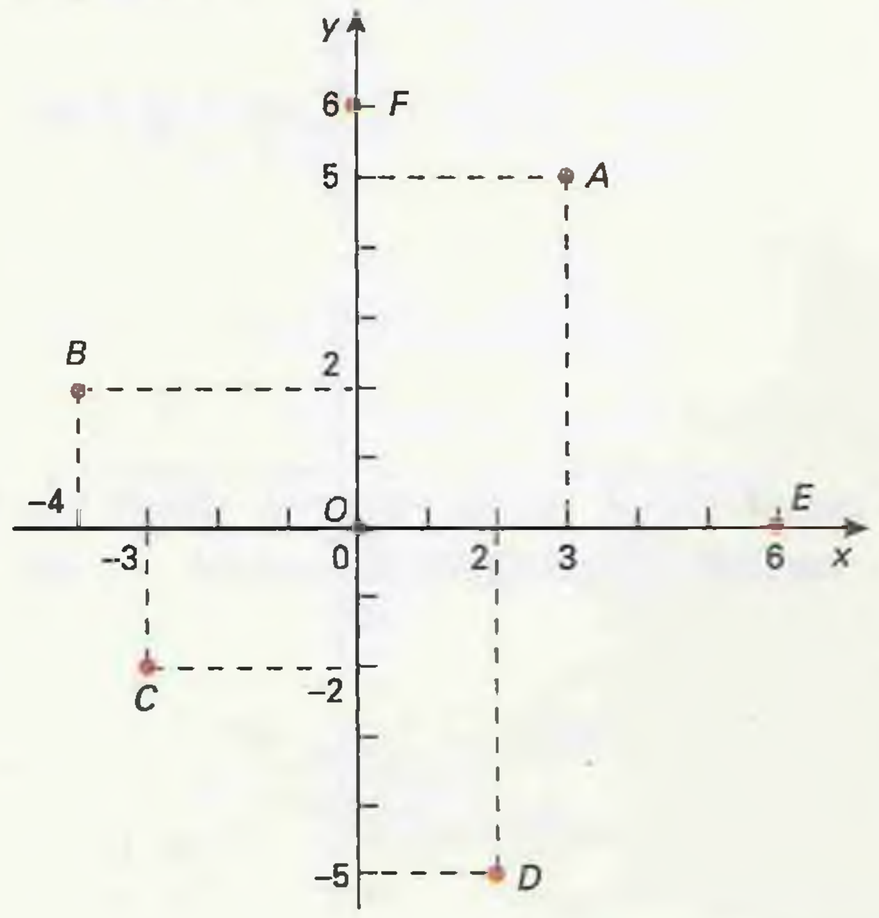
a) $A(3, 5)$; d) $D(2, -5)$; g) $O(0, 0)$.
b) $B(-4, 2)$; e) $E(6, 0)$;
c) $C(-3, -2)$; f) $F(0, 6)$;

Resolução

Para representar no plano cartesiano o ponto $P(a, b)$, traçamos pelo ponto de abscissa a do eixo Ox a reta perpendicular a esse eixo e, pelo ponto de ordenada b do eixo Oy, traçamos a reta perpendicular a esse eixo. A intersecção das retas traçadas é o ponto P, conforme se observa na figura.



Assim, temos:



R.2 Determinar k de modo que o ponto $P(k + 5, 8)$ pertença ao eixo Oy.

Resolução

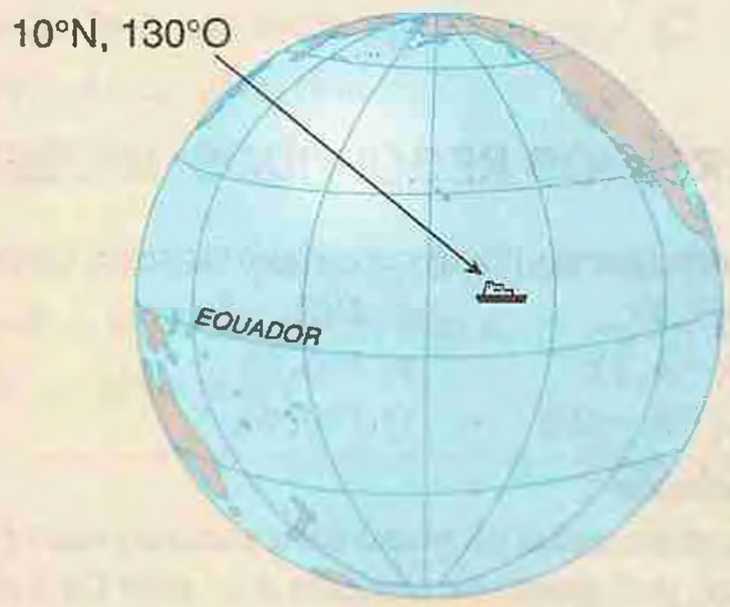
$$P \in Oy \Leftrightarrow k + 5 = 0 \therefore k = -5$$

Os sistemas de coordenadas do dia-a-dia

Ao fornecer o seu endereço você está dando as coordenadas do ponto onde mora. As informações capazes de localizar um ponto são as coordenadas desse ponto.

Um motorista que necessita de um mecânico para consertar seu automóvel em plena estrada, ao telefonar pedindo ajuda, deve fornecer a coordenada do ponto na estrada, ou seja, a marca quilométrica.

Um ponto sobre a superfície terrestre é determinado por um par de medidas em graus chamadas de **latitude** e **longitude**. A **latitude** de um ponto P é a medida em graus do menor arco possível sobre um meridiano, ligando o ponto P à linha do equador; a **longitude** é a medida em graus do menor arco possível sobre um paralelo, ligando o ponto P ao meridiano de Greenwich. Por exemplo, se através do rádio um navio, à deriva, fornece sua posição por 10°N, 130°O, isto significa 10° de latitude norte e 130° de longitude oeste.

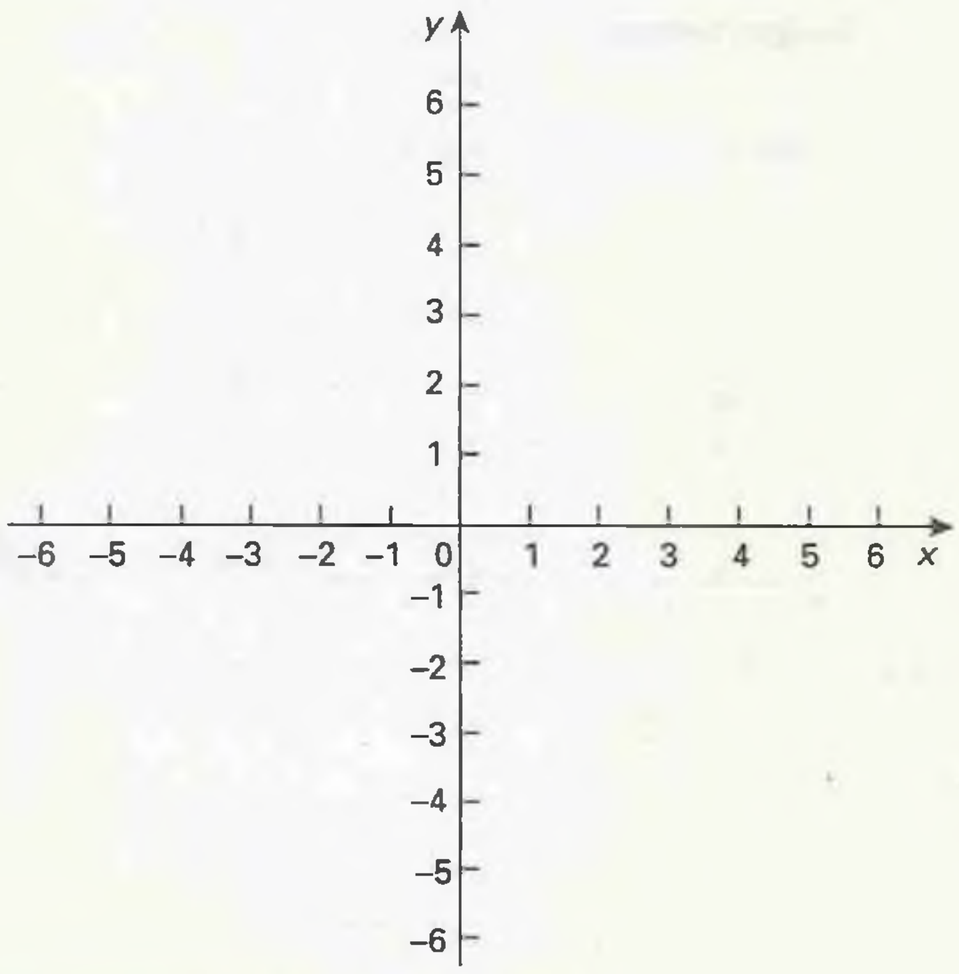


Dê outros exemplos de sistemas de coordenadas no nosso cotidiano.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.8 Represente no plano cartesiano os seguintes pontos:

$A(4, 2)$	$D(5, -2)$	$G(-6, 0)$
$B(2, 4)$	$E(-4, -1)$	$H(0, -6)$
$C(-2, 5)$	$F(-1, 4)$	$I(0, 0)$



B.9 Para que valores reais de x o ponto $P(5x - 8, x + 2)$ pertence ao 2º quadrante? Basta impor que $\begin{cases} 5x - 8 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$

B.10 Determine os valores reais de x para que o ponto $P(3x + 6, 2x - 4)$ pertença ao 4º quadrante.

B.11 Para que valores reais de x o ponto $P(x^2 - 9, 5)$ pertence ao eixo das ordenadas?

B.12 Determine os valores reais de x para que o ponto $P(3, x^2 - 5x + 4)$ pertença ao eixo das abscissas.

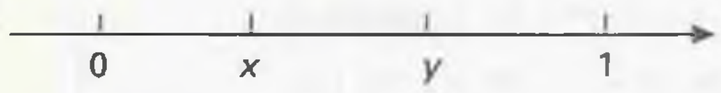
B.13 Determine os números reais a e b de modo que:

$$(3a - 2b, a + b) = (10, 11)$$

Exercícios complementares de C.3 a C.6

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Fuvest-SP) Na figura estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1. Qual a posição do número xy?



a) À esquerda de 0.
b) Entre 0 e x.
c) Entre x e y.
d) Entre y e 1.
e) À direita de 1.

C.2 (UFPI) Se $x \in \mathbb{R}$ e $8x + 2 \leqslant 4x + 9 < 6x + 8$, então:

a) $2 \leqslant x < \frac{9}{2}$
b) $\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{7}{4}$
c) $-1 \leqslant x < 5$
d) $-\frac{1}{2} \leqslant x < 1$
e) $-2 \leqslant x < 4$

Sugestão.

A dupla desigualdade $8x + 2 \leqslant 4x + 9 < 6x + 8$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} 8x + 2 \leqslant 4x + 9 \\ 4x + 9 < 6x + 8 \end{cases}$

C.3 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o ponto $P(x^2 - 9, x + 3)$ seja a origem do sistema cartesiano.

C.4 (Cesgranrio) Em um sistema cartesiano ortogonal, os pontos $A(a, b)$ e $B(c, d)$ são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Assim sendo, tem-se que:

a) $a = -c$ e $b = -d$
b) $a = -c$ e $b = d$
c) $a = c$ e $b = -d$
d) $a = c$ e $b = d$
e) $a = d$ e $b = c$

C.5 Sendo a e b números reais tais que $(5a - 1, 2a + 1) = (2b + 4, a - 2b + 7)$, a que quadrante pertence o ponto $P(a, b)$?

C.6 (PUC-SP) Em relação a um sistema cartesiano ortogonal, o ponto $A(3x + 1, 2x - 5)$ pertence ao 4º quadrante se, e somente se:

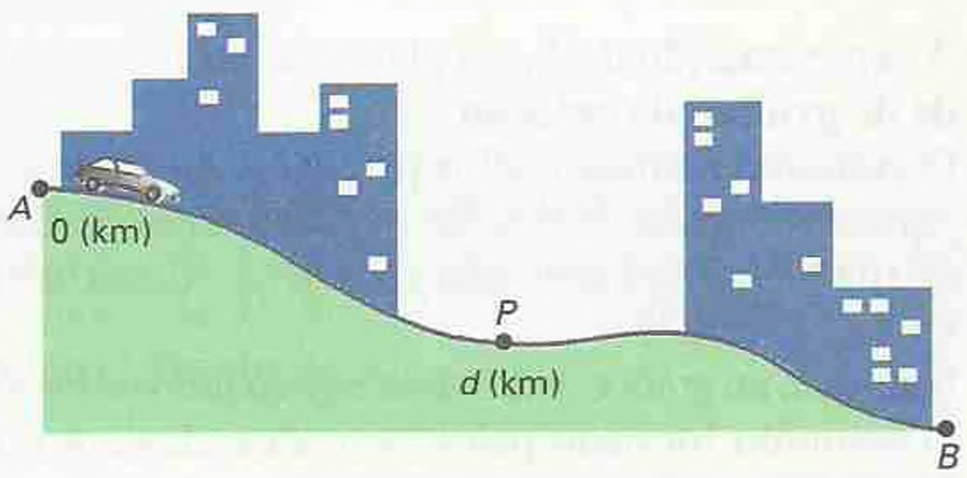
a) $-\frac{1}{3} < x < \frac{5}{2}$
b) $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$
c) $x > \frac{5}{2}$
d) $x < -\frac{1}{3}$
e) $1 < x < 2$

Capítulo 12

FUNÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Suponha que um automóvel percorra um trecho AB de uma estrada a uma velocidade constante de 80 km/h.



Consideremos A como ponto de partida e associemos a ele a marca 0 km. A cada ponto P, do trecho AB, associemos a marca d km, que é a distância de P até A, medida ao longo da trajetória.

Que distância terá percorrido o automóvel após duas horas da partida?

Como a velocidade do automóvel é constante, 80 km/h, após duas horas a distância d percorrida, em km, será:

$$d = 80 \cdot 2 \therefore d = 160 \text{ km}$$

Raciocinando de maneira análoga, podemos construir a tabela a seguir, descrevendo a distância d percorrida em vários pontos após t horas da partida.

t (horas)	d (quilômetros)
2	160
3	240
4	320
⋮	⋮

Note que para cada valor de t se associa um **único** valor de d. Por isso dizemos que a distância d é dada em **função** do tempo t. Podemos expressar a distância em **função** do tempo pela seguinte equação: $d = 80t$. Essa equação substitui, com vantagens, a tabela anterior.

Se quisermos a distância d, em km, após 4 horas da partida, basta fazermos $t = 4$ e teremos:

$$d = 80 \cdot 4 \therefore d = 320 \text{ km}$$

Conhecendo a distância de B até A, 400 km, se quisermos o tempo necessário para o automóvel percorrer o trecho AB, basta fazermos $d = 400$ km e teremos:

$$400 = 80t \therefore t = 5 \text{ h}$$

Do mesmo modo como relacionamos as grandezas d e t, podemos relacionar muitas outras grandezas.

Exemplos

a) Em um termômetro, a temperatura é dada em **função** do comprimento da coluna (de mercúrio ou de álcool), ou seja, para cada comprimento ℓ da coluna está associada uma única medida T da temperatura.

b) O preço de uma peça de tecido é dado em **função** da metragem desse tecido, ou seja, para cada metragem de pano associa-se um **único** preço.

Procure você mesmo outros exemplos em que duas grandezas estejam relacionadas de modo que a cada valor de uma se associa um **único** valor da outra.

2. FORMALIZAÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Produto cartesiano

Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Chama-se **produto cartesiano** de A por B, e indica-se por $A \times B$, o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$.

Em símbolos, sendo $A \neq \varnothing$ e $B \neq \varnothing$, temos:

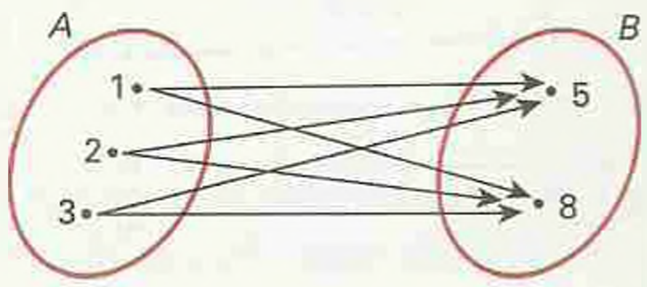
$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo

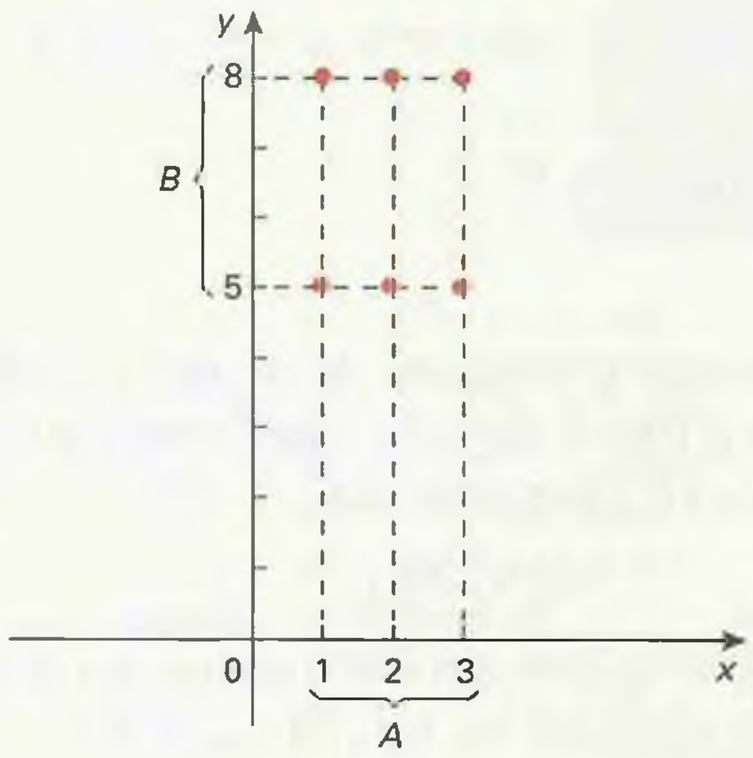
Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 8\}$, temos:

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 8), (2, 5), (2, 8), (3, 5), (3, 8)\}$$

Tal produto pode ser apresentado sob a forma do diagrama abaixo, chamado de **diagrama de flechas**.



Pode-se ainda representar o produto cartesiano no plano cartesiano. O conjunto de pontos determinado pelos pares ordenados de $A \times B$ é chamado de **gráfico cartesiano** do produto $A \times B$.



Notas

1. Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, define-se $A \times B = \varnothing$. Por exemplo: $\varnothing \times \{1, 4, 6\} = \varnothing$.
2. O produto cartesiano $A \times A$ será indicado por A^2, ou seja:

$$A \times A = A^2$$

3. Se A e B são conjuntos tais que $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$.

Relação entre dois conjuntos

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **relação** R de A em B todo subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Se $(x, y) \in R$, então dizemos que x e y estão associados (ou relacionados) através de R.

Exemplos

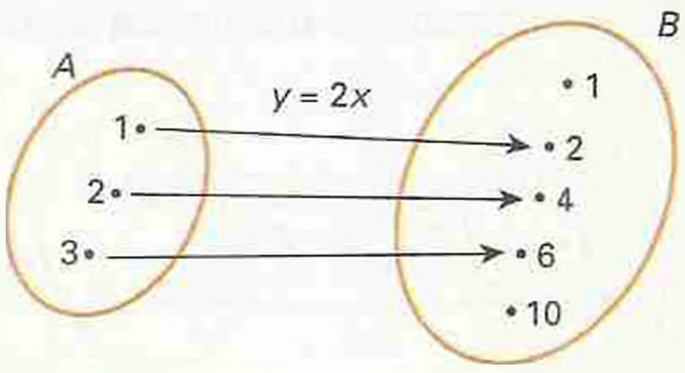
Considerando os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 4, 6, 10\}$, temos que:

$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 10), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 10), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 10)\}$

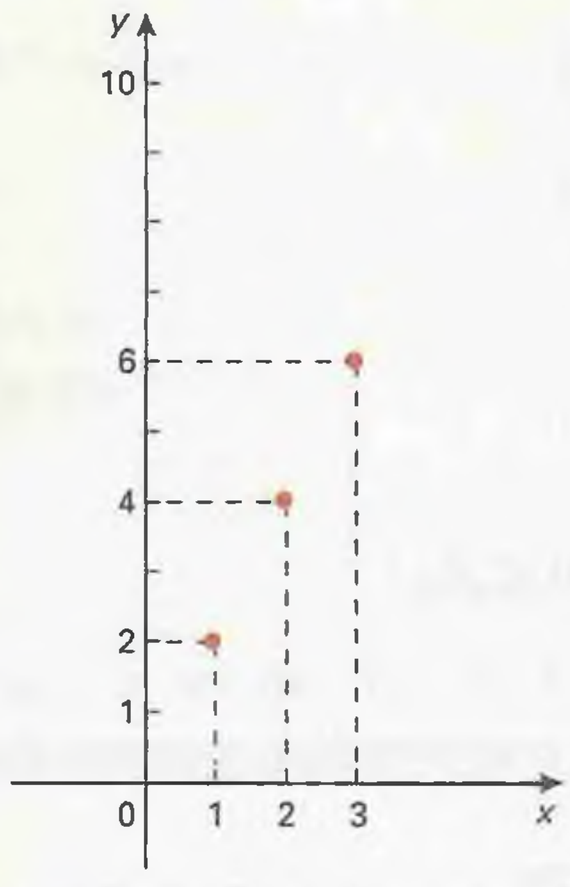
a) A relação $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ é o subconjunto de $A \times B$ formado pelos pares ordenados em que o segundo elemento (y) de cada par é o dobro do primeiro elemento (x). Assim:

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

Representando R_1 em diagrama de flechas, temos:



Representando R_1 no plano cartesiano, temos:



- A representação de R_1 no plano cartesiano é chamada de **gráfico da relação**.
- O conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados da relação R_1 é chamado de **Domínio** da relação e é indicado por $D(R_1)$. Assim, temos: $D(R_1) = \{1, 2, 3\}$.
  Note que, no gráfico, o domínio está contido no eixo Ox.
- O conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados da relação R_1 é chamado de **Imagem** da relação e é indicado por $Im(R_1)$. Assim, temos:

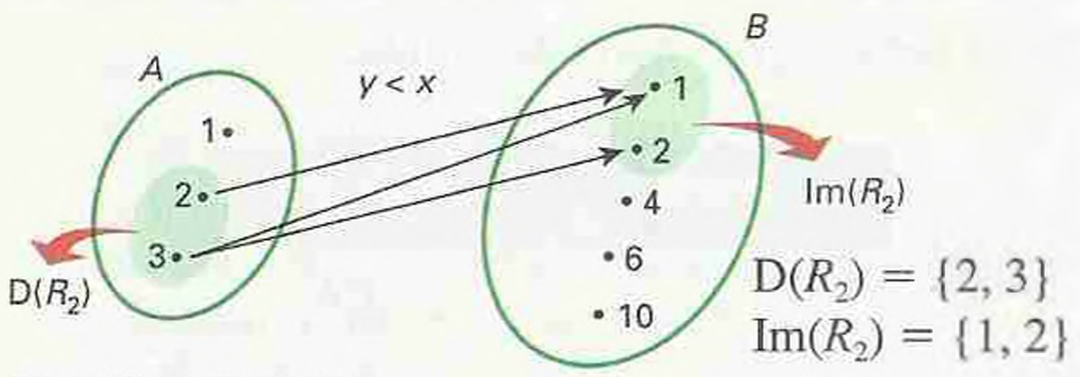
$$Im(R_1) = \{2, 4, 6\}$$

  Note que, no gráfico, o conjunto imagem está contido no eixo Oy.
- Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **conjunto de partida** e **conjunto de chegada** (ou **contradomínio**) da relação R_1.

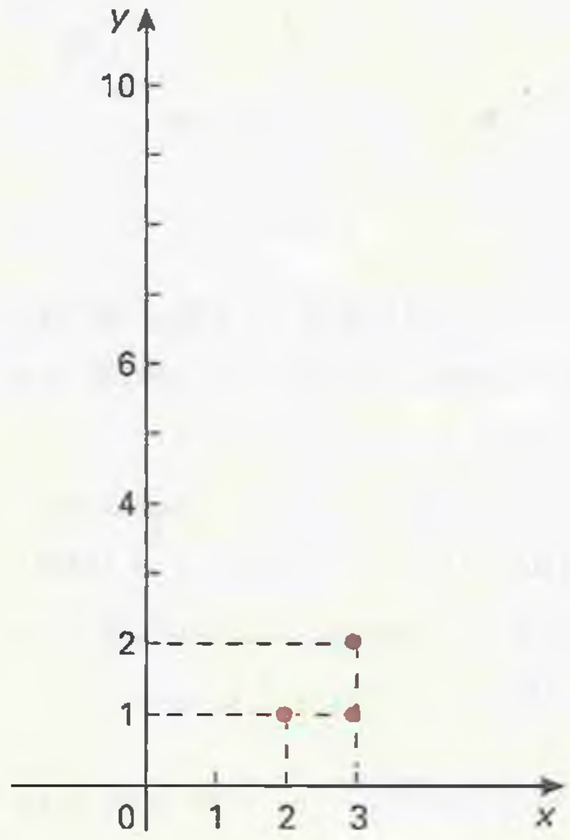
b) A relação $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$ é o subconjunto de $A \times B$ formado pelos pares ordenados em que o segundo elemento (y) de cada par é menor que o primeiro elemento (x). Assim, temos:

$$R_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

Representando R_2 em diagrama de flechas, temos:



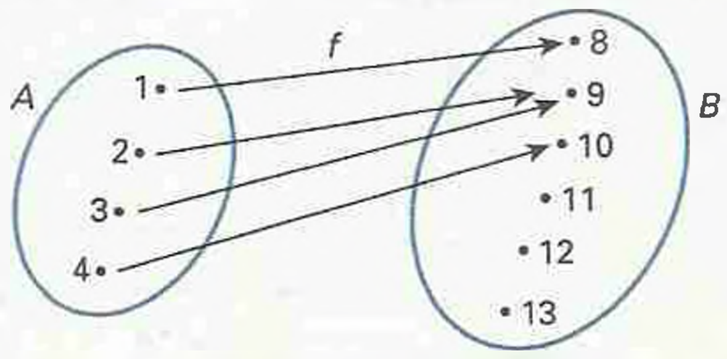
O gráfico de R_2 é:



Função

Estudaremos agora um tipo particular de relação entre conjuntos. Esse tipo de relação, por possuir uma propriedade especial, será chamado de **função**.

Consideremos a relação f de A em B, descrita pelo diagrama abaixo.



Note que **todo** elemento de A está associado, através de f, a um **único** elemento de B. Essa propriedade caracteriza uma **função** e por isso dizemos que f é uma função de A em B.

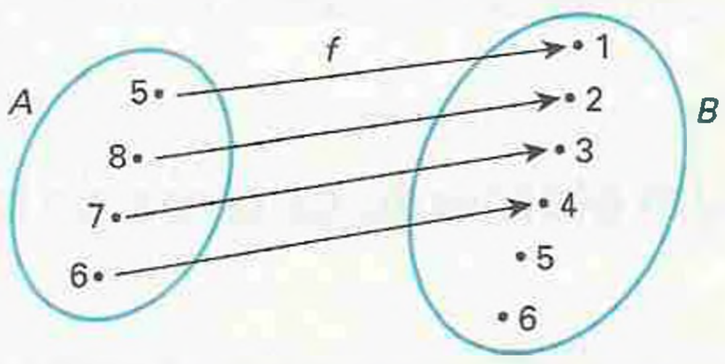
Definição

> Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma relação f de A em B é função se, e somente se, **todo** elemento de A estiver associado, através de f, a um **único** elemento de B.

Usaremos a notação $f: A \to B$ para indicar que f é função de A em B.

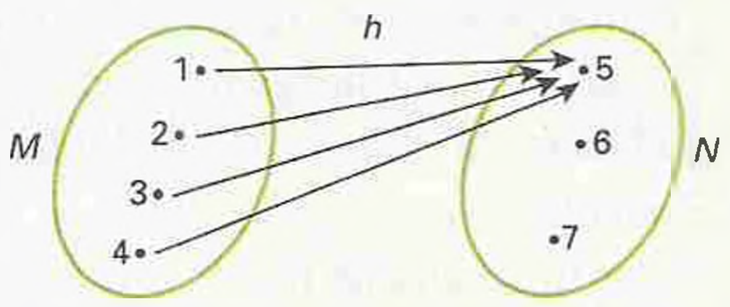
Exemplos

a)



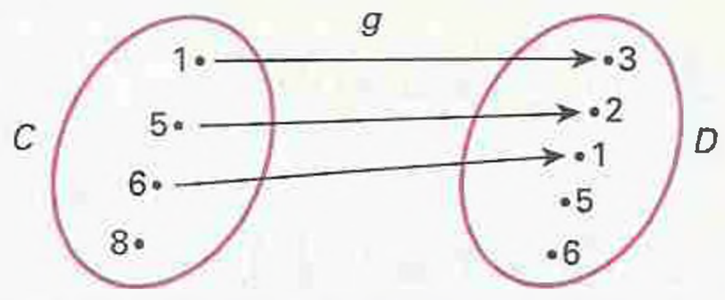
f é função de A em B, pois todo elemento de A está associado, através de f, a um único elemento de B

b)



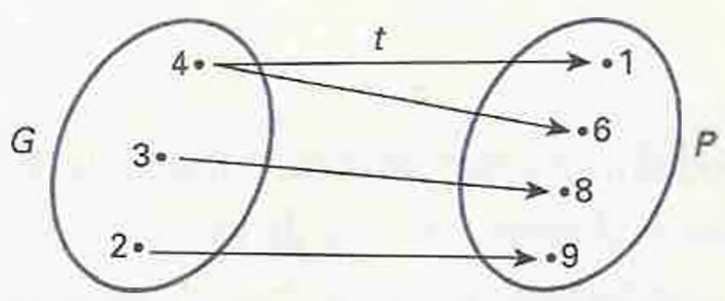
h é função de M em N, pois todo elemento de M está associado, através de h, a um único elemento de N.

c)



g não é função de C em D, pois existe elemento em C (o elemento 8) que não está associado, através de f, a elemento algum de D.

d)



t não é função de G em P, pois o elemento 4 está associado, através de t, a mais de um elemento de P.

Nota

Uma função f de A em B é uma relação, e por isso os conceitos de domínio (D), contradomínio (CD) e conjunto imagem (Im) continuam válidos. No exemplo (a) anterior, temos:

$D(f) = A = \{5, 8, 7, 6\}$; $CD(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Dados os conjuntos $A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$ e $B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$, quais das relações seguintes são funções de A em B?

a) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x^2\}$

b) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$

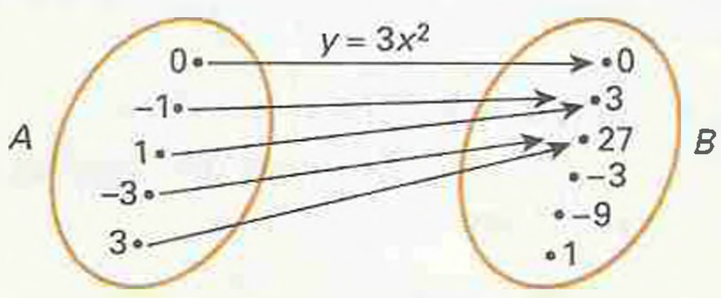
c) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid x > y + 3\}$

d) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3\}$

Resolução

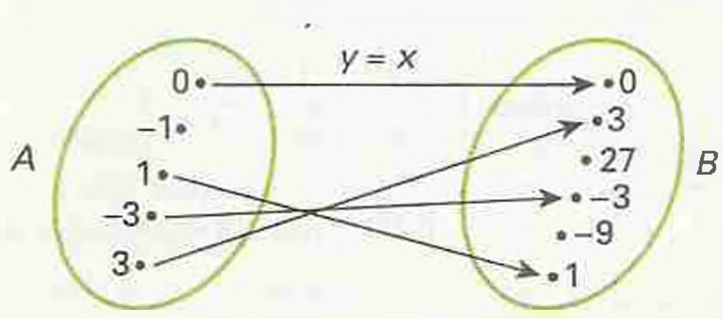
Representando cada uma das relações em diagrama de flechas, temos:

a)



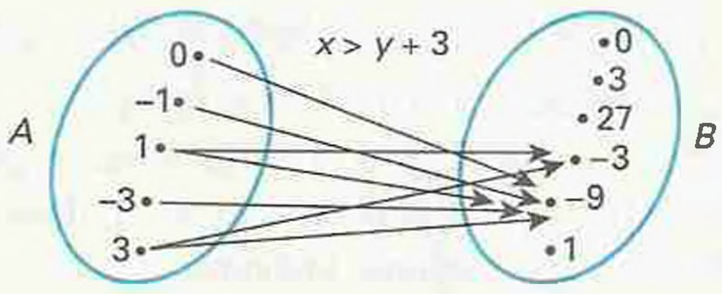
f é função, pois **todo** elemento de A está associado, através de f, a um **único** elemento de B.

b)



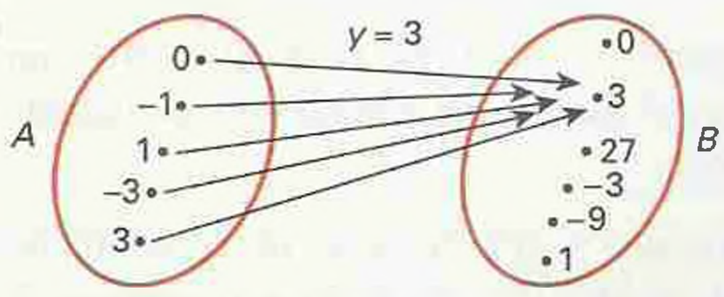
g **não** é função, pois o elemento -1 pertencente a A não está associado, através de g, a nenhum elemento de B.

c)



h **não** é função, pois existe elemento pertencente a A, 1 e 3, associado, através de h, a mais de um elemento de B.

d)

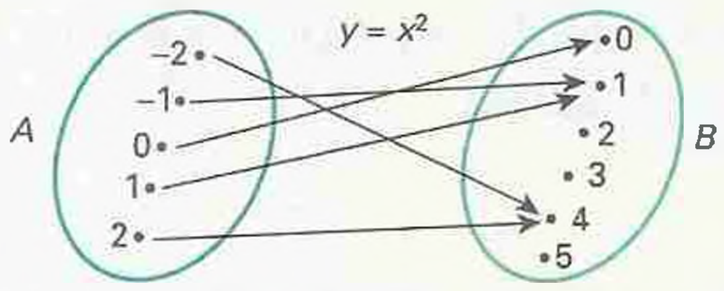


R é função, pois **todo** elemento de A está associado, através de R, a um único elemento de B.

R.2 Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$.

Resolução

Representamos a função em diagrama de flechas:



Assim, temos:

$$D(f) = A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$
$$CD(f) = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$Im(f) = \{0, 1, 4\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{-5, 5\}$, determine:

a) o produto cartesiano $A \times B$, representando-o em diagrama de flechas e no plano cartesiano;

b) o produto cartesiano $B \times A$;

c) o produto cartesiano $A \times A = A^2$.

B.2 Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 8\}$, quais das relações seguintes são funções de A em B?

a) $R = \left\{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{1}{x}\right\}$

b) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2 + 1\}$

c) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y^2 = x^2\}$

d) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^3\}$

B.3 Dados os conjuntos $A = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right\}$ e

$B = \left\{3, 2, 4, \frac{5}{2}\right\}$, quais das relações seguintes são funções de A em B?

a) $R = \left\{(x, y) \in A \times B \mid y = \frac{3}{x}\right\}$

b) $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 4 - x\}$

c) $g = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2\}$

d) $h = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{N}\}$

B.4 Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11\}$, construa o gráfico da função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x + 2\}$, determinando seu domínio e seu conjunto imagem.

B.5 Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 3, 4, 5, 12\}$, construa o gráfico da função $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 3x^2\}$, determinando seu domínio e seu conjunto imagem.

B.6 O conjunto $f = \{(1, 2), (4, 5), (6, 8), (3, 9)\}$ é uma função de A em B. Determine o domínio e o conjunto imagem da função.

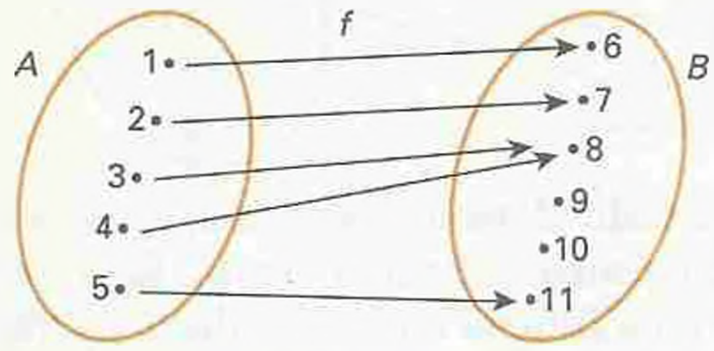
B.7 O conjunto $f = \{(3, 2), (8, 5), (6, x)\}$ é uma função cujo domínio é $D(f) = \{3, 8, 6\}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = \{2, 5\}$. Quais são os possíveis valores de x?

Exercícios complementares de C.1 a C.5

3. IMAGEM DE UM ELEMENTO ATRAVÉS DE UMA FUNÇÃO

Imagem de um elemento através do diagrama de flechas

Consideremos a função descrita pelo diagrama.



Se um elemento y de B estiver associado a um elemento x de A, através de f, então diremos que y é imagem de x, através de f, e indicaremos esse fato por $y = f(x)$ (lê-se "y é igual a f de x" ou "y é imagem de x através de f"). Assim, temos:

- $6 = f(1)$ (6 é imagem de 1 através de f);
- $7 = f(2)$ (7 é imagem de 2 através de f);
- $8 = f(3)$ (8 é imagem de 3 através de f);
- $8 = f(4)$ (8 é imagem de 4 através de f);
- $11 = f(5)$ (11 é imagem de 5 através de f).

Imagem de um elemento através da lei $y = f(x)$

Consideremos os conjuntos $A = [-3, 8]$, $B = [-10, 20]$ e a função $f: A \to B$, onde cada x, $x \in A$, é associado a um único $f(x)$, $f(x) \in B$, através da lei $f(x) = 2x + 1$.

A lei $f(x) = 2x + 1$ nos diz que a imagem de cada x do domínio de f é o número $2x + 1$ do contradomínio. Assim, temos, por exemplo:

- a imagem do elemento 4, através de f, é:

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 \Rightarrow f(4) = 9; \text{ logo, } (4, 9) \in f$$

- a imagem do elemento $\frac{1}{2}$, através de f, é:

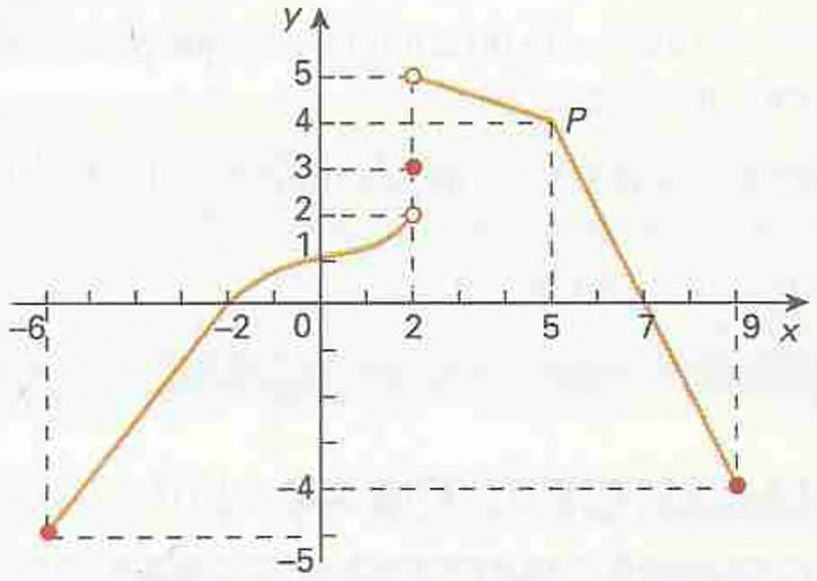
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2;$$

$$\text{logo, } \left(\frac{1}{2}, 2\right) \in f$$

Note que o símbolo $f(x)$ representa a ordenada do ponto de abscissa x. Assim, em vez de escrevermos $f(x) = 2x + 1$, podemos escrever $y = 2x + 1$, ou seja, o símbolo $f(x)$ pode ser substituído por y e vice-versa.

Imagem de um elemento através do gráfico de uma função

Consideremos o gráfico de uma função $y = f(x)$.



Cada ponto (x, y) do gráfico de f deve ser interpretado como $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através de f. Por exemplo, o ponto $P(5, 4)$ pertence ao gráfico, portanto $f(5) = 4$. Analogamente, temos:

- $(-6, -5)$ é ponto do gráfico; logo $f(-6) = -5$;
- $(-2, 0)$ é ponto do gráfico; logo $f(-2) = 0$;
- $(2, 3)$ é ponto do gráfico; logo $f(2) = 3$;
- $(0, 1)$ é ponto do gráfico; logo $f(0) = 1$; etc.

4. ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO

Sendo f uma função de domínio D, dizemos que:

- f é positiva para um elemento x, $x \in D$, se, e somente se, $f(x) > 0$;
- f é negativa para um elemento x, $x \in D$, se, e somente se, $f(x) < 0$;
- f se anula para um elemento x, $x \in D$, se, e somente se, $f(x) = 0$.

Note, portanto, que **o sinal da função para um elemento x, $x \in D$, é o sinal de $f(x)$, e não o sinal de x.**

Exemplo

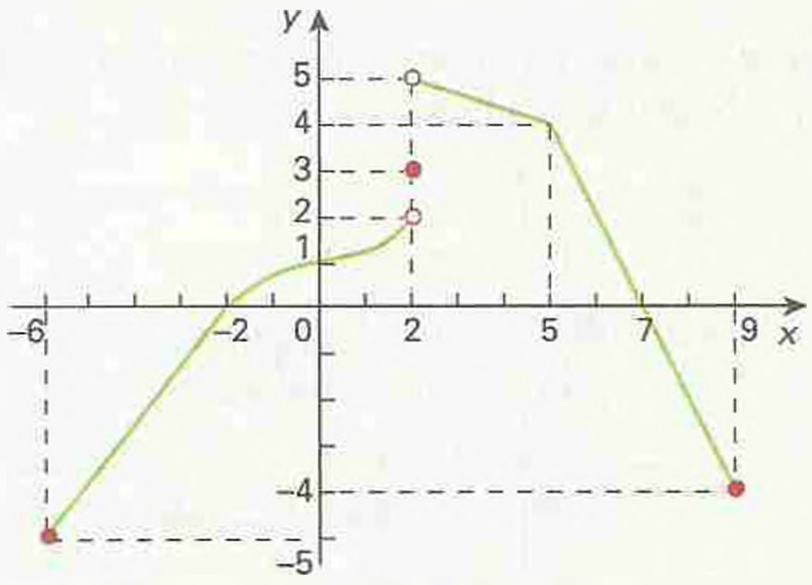
Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 9$, temos:

- a função é positiva para $x = -4$, pois $f(-4)$ é positivo: $f(-4) = (-4)^2 - 9 = 7$;
- a função é negativa para $x = -2$, pois $f(-2)$ é negativo: $f(-2) = (-2)^2 - 9 = -5$;
- a função se anula para $x = 3$, pois $f(3)$ é zero: $f(3) = 3^2 - 9 = 0$.

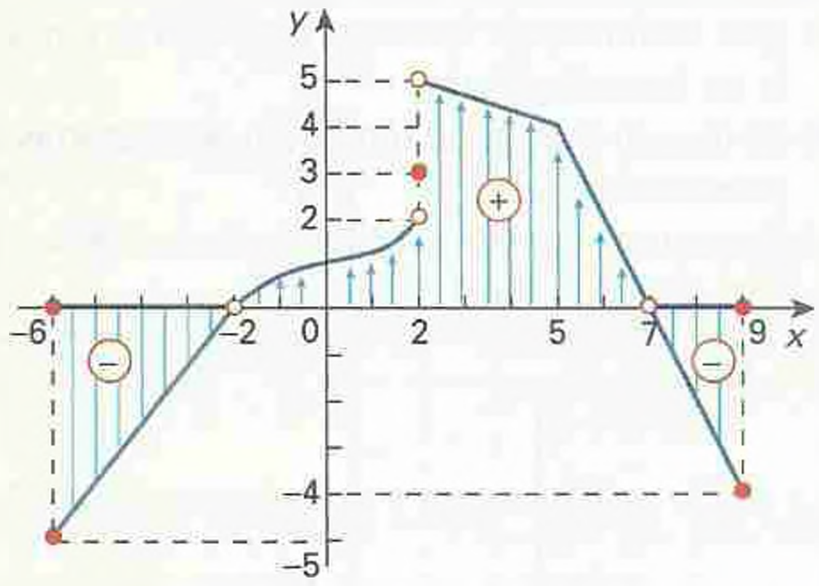
Através do conceito estudado no item 3, podemos discutir a variação de sinal de uma função f através do gráfico.

Exemplo

Seja o gráfico da função $y = f(x)$:



- Para todo x, $-2 < x < 7$, tem-se que $f(x) > 0$; por isso, dizemos que a função f é positiva para $-2 < x < 7$.
- Para todo x, $-6 \leq x < -2$ ou $7 < x \leq 9$, tem-se que $f(x) < 0$; por isso, dizemos que f é negativa para $-6 \leq x < -2$ ou $7 < x \leq 9$.



- Para $x = -2$ ou $x = 7$, a função se anula, ou seja, $f(-2) = 0$ e $f(7) = 0$.

Note que as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox são os valores de x para os quais a função se anula.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.8 Dada a função $f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f(x) = 3x + 40\}$, calcule:

a) $f(-10)$ c) $f(0)$

b) $f(2)$ d) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

B.9 Dada a função $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + x\}$, calcule:

a) $f(-1)$ c) $f(-4)$ e) $f(0)$

b) $f(2)$ d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

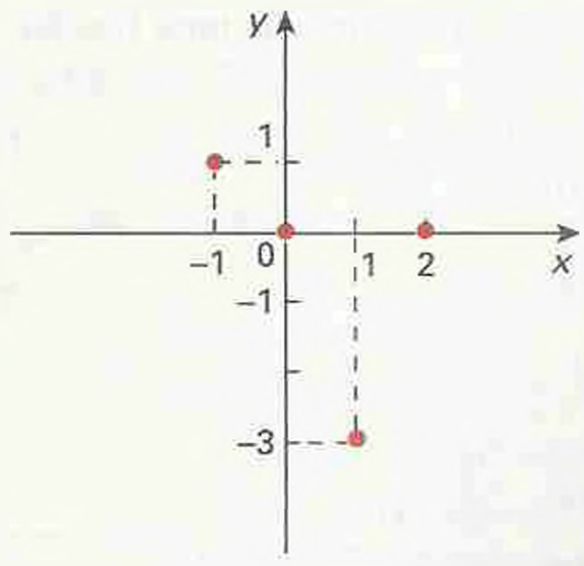
B.10 O consumo C de água, em m^3, pela população de uma cidade em função do tempo t, em segundos, é dado pela equação $C = 2.000\,t$.

a) Qual é o consumo de água dessa população em 10 segundos?

b) Qual é o consumo de água dessa população em 10 horas?

c) Em quantos segundos essa população consome 48.000 m^3 de água?

B.11 Observe o gráfico de uma função $f: A \to B$, onde $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-3, -1, 0, 1\}$.



Determine:

a) $f(-1)$ d) $f(2)$

b) $f(0)$ e) $\dfrac{3f(1)}{f(2) + f(-1)}$

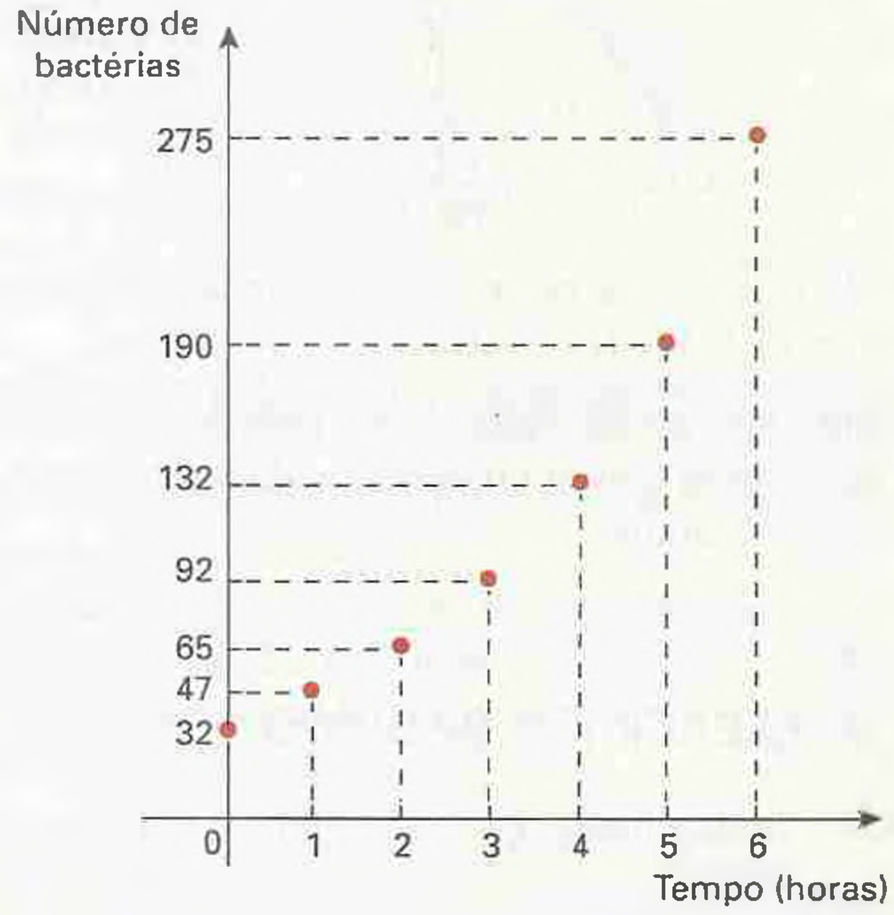
c) $f(1)$

B.12 Um biólogo, ao estudar uma cultura bacteriológica, contou o número de bactérias num determinado instante ao qual chamou de instante zero; e ao final de cada uma das seis horas seguintes fez nova contagem das bactérias. Os resultados dessa experiência são descritos pelo gráfico a seguir. Observando o gráfico, responda:

a) qual o número de bactérias no início da contagem, isto é, no instante zero?

b) de quanto aumentou o número de bactérias da quinta para a sexta hora?

c) de quanto aumentou o número de bactérias da terceira para a quinta hora?



B.13 Observando o gráfico da função f, abaixo, classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $(5, 8) \in f$

b) O ponto de f de abscissa 7 é o ponto (7, 0).

c) O ponto de f de abscissa 4 tem ordenada menor que 8.

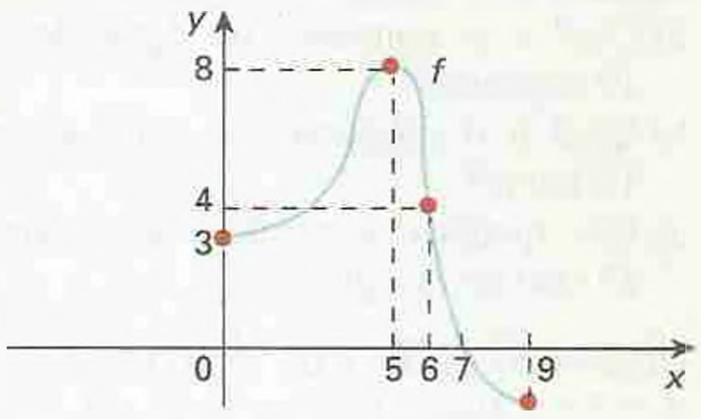
d) Existe apenas um ponto de f com ordenada 4.

e) Não existe nenhum ponto de f com ordenada negativa.

f) Existe um único ponto de f com ordenada 2.

g) Se $5 < x < 6$ e $(x, y) \in f$, então $4 < y < 8$.

h) Se $7 < x < 9$ e $(x, y) \in f$, então $y > 0$.



B.14 O gráfico a seguir é de uma função f de $[-3, 5]$ em $\mathbb{R}$. Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $f(-3) = 7$

b) $f(0) = 0$

c) $f(4) = 0$

d) $f(5) = 0$

e) $f\left(\frac{9}{2}\right) < 0$

f) $f(3) < 0$

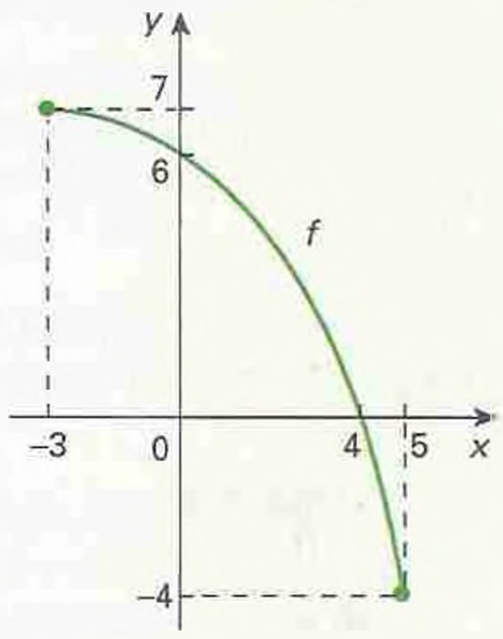
g) $f(5) - f(-3) = -11$

h) Para todo x, $-3 \leqslant x < 4$ tem-se que $f(x) > 0$.

i) Para todo x, $-3 \leqslant x \leqslant 4$ tem-se que $f(x) > 0$.

j) $f(x) < 0 \Leftrightarrow 4 < x \leqslant 5$

k) $f(x) < 0 \Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant 5$



B.15 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ é tal que $f(4) = 2$, $f(9) = 3$ e $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:

a) $f(36)$ b) $f(81)$ c) $f(2)$ d) $f(1)$

B.16 Seja f uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{3x + 2}{3}$.

Qual é o elemento do domínio de f que possui como imagem o número 1?

B.17 Sendo f uma função de domínio $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e contradomínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x^2 - 1$, determine o conjunto imagem de f.

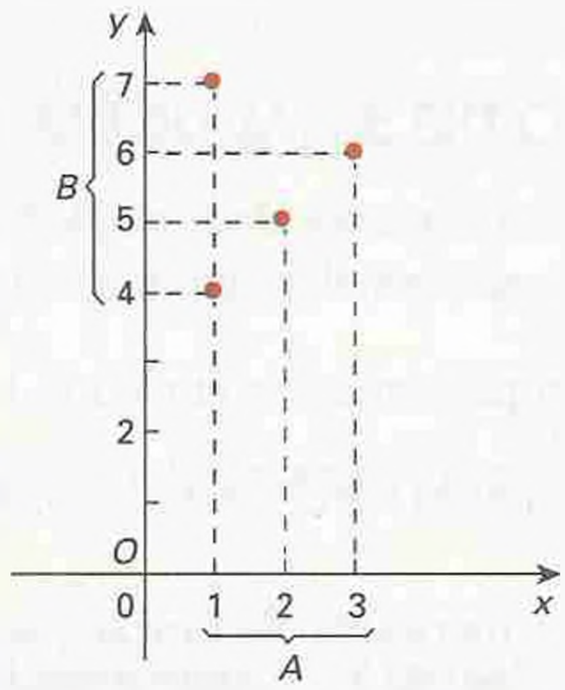
Exercícios complementares de C.6 a C.18

5. ANÁLISE GRÁFICA — RECONHECIMENTO DE UMA FUNÇÃO

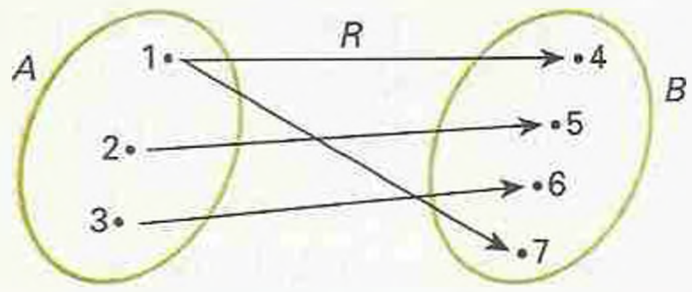
Através do gráfico, podemos verificar se uma **relação** é ou não uma **função**.

Exemplos

a) Considere o gráfico a seguir, de uma relação R de $A = \{1, 2, 3\}$ em $B = \{4, 5, 6, 7\}$:



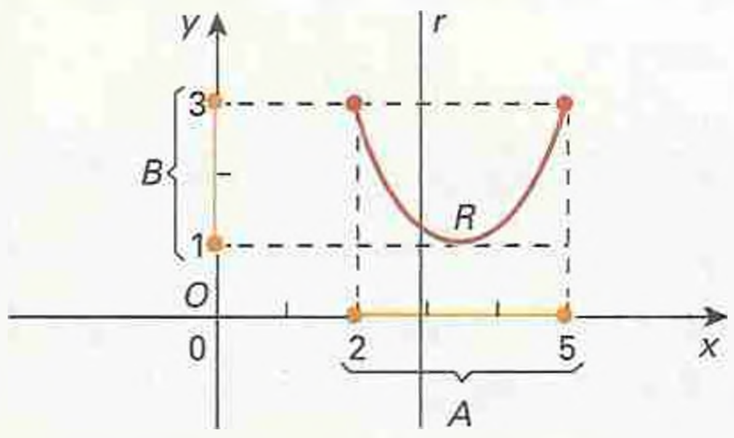
Analisando o gráfico, percebemos que a relação R **não** é função de A em B, pois (1, 4) e (1, 7) pertencem a R, ou seja, o elemento 1 do conjunto de partida está associado, através de R, a dois elementos do contradomínio: 4 e 7. Representando R em diagrama de flechas, temos:



Podemos generalizar:

Se uma reta paralela ao eixo Oy interceptar o gráfico de uma relação R em mais de um ponto, então R não é função.

b) Observe o gráfico a seguir, de uma relação R de $A = [2, 5]$ em $B = [1, 3]$:



Note que qualquer reta r paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, $x \in A$, intercepta o gráfico num único ponto. Isso significa que qualquer x, $x \in A$, está associado, através de R, a um único y, $y \in B$. Logo, R é função de A em B.
Podemos generalizar:

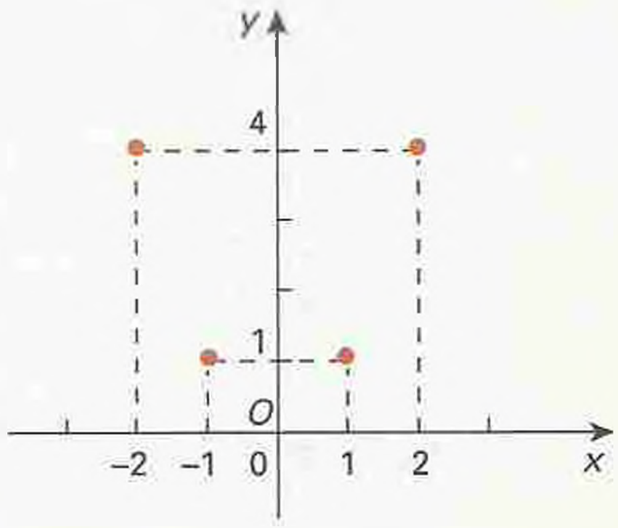
> Um gráfico representará uma função de A em B se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto qualquer de abscissa x, $x \in A$, interceptar o gráfico num único ponto.

6. DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO E DO CONJUNTO IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

A partir do gráfico de uma função f, podemos determinar o domínio e o conjunto imagem de f.

Exemplos

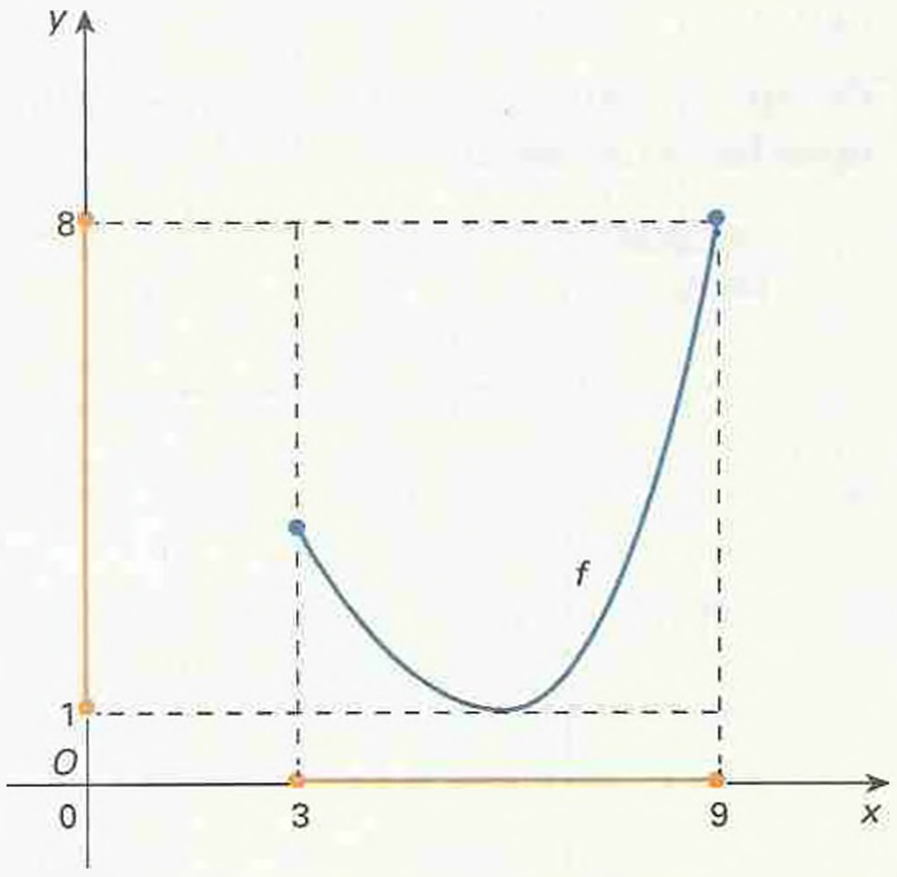
a) Considere o gráfico de uma função f, representado a seguir.



O domínio da função é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, isto é, $D(f) = \{-2, -1, 1, 2\}$.

O conjunto imagem da função é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, isto é, $Im(f) = \{1, 4\}$.

b) Considere o gráfico de uma função f, representado abaixo.

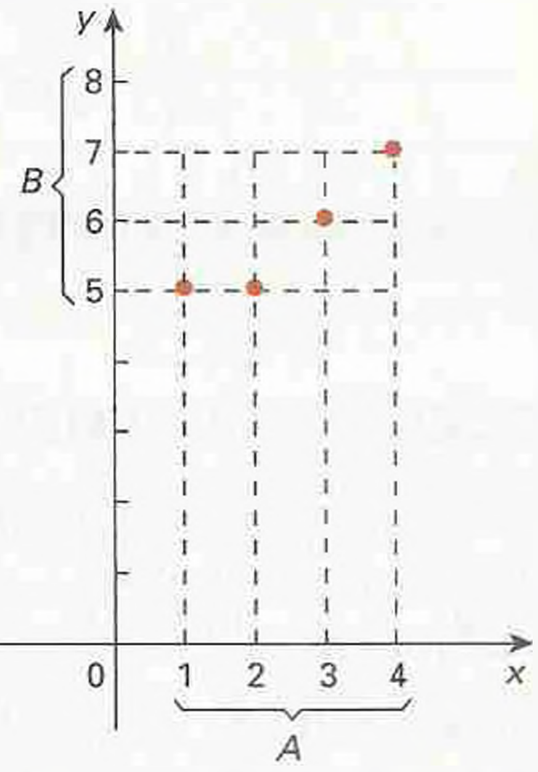


O domínio da função é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, isto é, $D(f) = [3, 9]$.

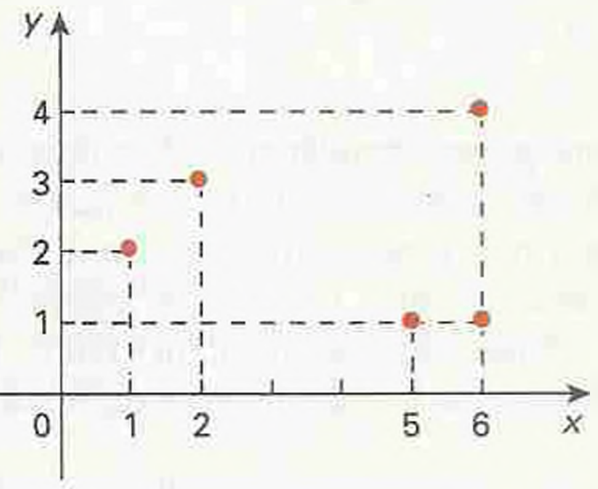
O conjunto imagem da função é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, isto é, $Im(f) = [1, 8]$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.18 O gráfico representa uma relação R de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{5, 6, 7, 8\}$. R é função de A em B? Por quê?

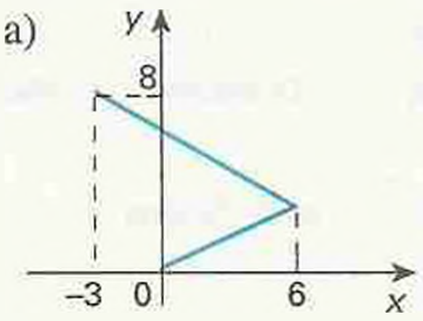


B.19 O gráfico representa uma relação R de $A = \{1, 2, 5, 6\}$ em $B = \{1, 2, 3, 4\}$. R é função de A em B? Por quê?

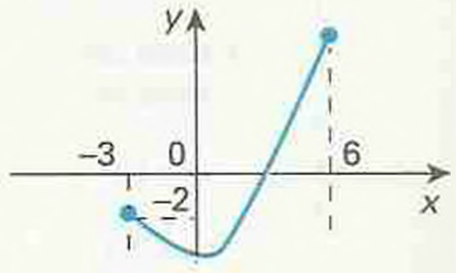


B.20 Qual dos gráficos abaixo representa uma função de $A = [-3, 6]$ em $\mathbb{R}$? Por quê?

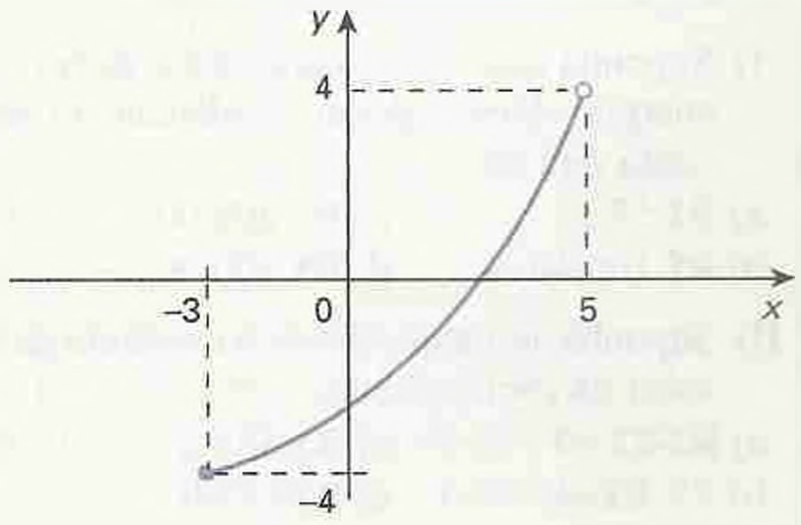
a)



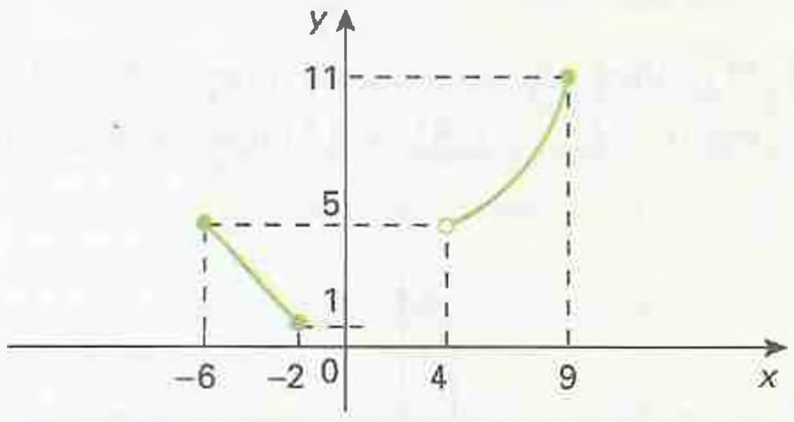
b)



B.21 Determine o domínio e o conjunto imagem da função f cujo gráfico é dado a seguir.



B.22 Determine o domínio e o conjunto imagem da função f cujo gráfico é dado a seguir.



Exercícios complementares de C.19 a C.24

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Dados os conjuntos $A = [-3, 2]$ e $B = \{4\}$, represente no plano cartesiano o gráfico de:
a) $A \times B$ b) $B \times A$ c) A^2

C.2 O conjunto $f = \{(2, 5), (3, 5), (6, 8), (4, 2)\}$ é uma relação de $A = \{2, 3, 6, 4\}$ num conjunto B. Essa relação é função de A em B? Por quê?

C.3 O conjunto $f = \{(1, 2), (x, 3), (5, 8), (6, 4)\}$ é uma função de $A = \{1, 5, 6, 9\}$ num conjunto B. Nessas condições, qual é o valor de x?

C.4 Dados os conjuntos $A = [3, 6]$ e $B = \{8\}$, a relação $f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 8\}$ é uma função de A em B? Por quê?

C.5 (Enem) No quadro abaixo estão as contas de luz e água de uma mesma residência. Além do valor a pagar, cada conta mostra como calculá-lo, em função do consumo de água (em m^3) e de eletricidade (em kWh). Observe que, na conta de luz, o valor a pagar é igual ao consumo multiplicado por um certo fator. Já na conta de água, existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de Eletricidade

Fornecimento	Valor - R$
401 KWH × 0,13276000	53,23

Companhia de Saneamento

TARIFAS DE ÁGUA/M^3

Faixas de consumo	Tarifa	Consumo	Valor - R$
até 10	5,50	tarifa mínima	5,50
11 a 20	0,85	7	5,95
21 a 30	2,13		
31 a 50	2,13		
acima de 50	2,36		
		Total	11,45

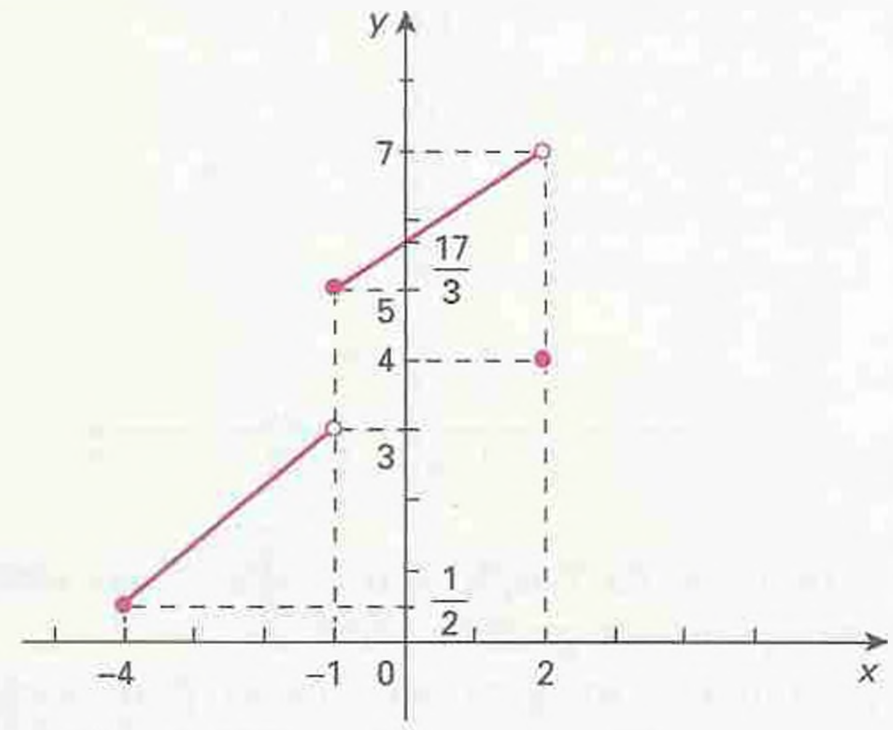
I) Suponha que, no próximo mês, dobre o consumo de energia elétrica dessa residência. O novo valor da conta será de:
a) R$ 55,23 c) R$ 802,00 e) R$ 22,90
b) R$ 106,46 d) R$ 100,00

II) Suponha agora que dobre o consumo de água. O novo valor da conta será de:
a) R$ 22,90 c) R$ 43,82 e) R$ 22,52
b) R$ 106,46 d) R$ 17,40

C.6 Considerando a função $f = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2 - 3x\}$, classifique como V ou F cada uma das afirmações:
a) $(3, 0) \in f$
b) $(0, 0) \in f$
c) $(4, 4) \in f$
d) $(3, 5) \in f$
e) $(1, -2) \in f$
f) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right) \in f$
g) Existem dois valores de x de modo que $(x, 4) \in f$.

C.7 Um fazendeiro estabelece o preço da saca de café em função da quantidade de sacas adquiridas pelo comprador através da equação $P = 50 + \frac{200}{x}$, em que P é o preço em dólares e x é o número de sacas vendidas.
a) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir cem sacas?
b) Quanto deve pagar, por saca, um comprador que adquirir duzentas sacas?
c) Sabendo que um comprador pagou 54 dólares por saca, quantas sacas comprou?

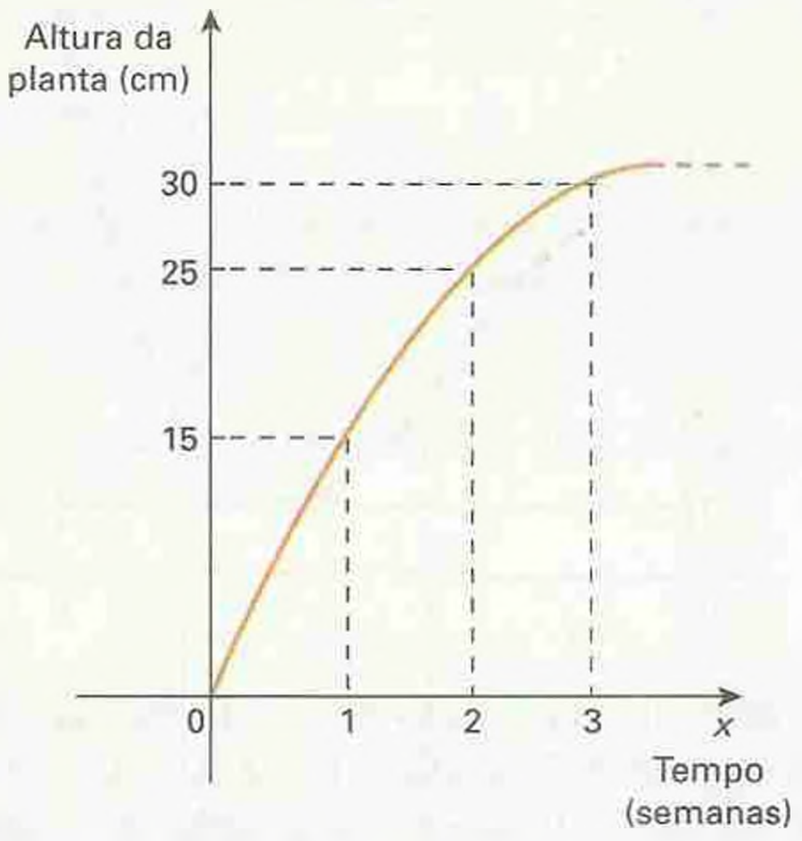
C.8 O gráfico a seguir representa uma função f de $[-4, 2]$ em $\mathbb{R}$.



Determine:
a) $f(-4)$ b) $f(-1)$ c) $f(2)$ d) $f(0)$

C.9 Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é tal que $f(2) = 1$ e $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, $\forall \{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Calcule:
a) $f(4)$ b) $f(8)$ c) $f(1)$ d) $f(\sqrt{2})$

C.10 O gráfico a seguir representa o crescimento de uma planta em função do tempo:



Analisando o gráfico, responda:
a) Qual a altura da planta ao final da terceira semana?

b) Qual foi o crescimento da planta durante a terceira semana?
c) Em qual das três semanas registradas houve o maior desenvolvimento da planta?

C.11 (UFMG) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Se $x \neq 0$, uma expressão para $f\left(\frac{1}{x}\right)$ é:

a) $x^2 + 1$

b) $\frac{x^2 + 1}{x^2}$

c) $\frac{1}{x^2 + 1}$

d) $\frac{x^2}{x^2 + 1}$

e) n.d.a.

C.12 (UECE) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função tal que $f(1) = 4$ e $f(x + 1) = 4 \cdot f(x)$ para todo x real. Nestas condições, $f(10)$ é igual a:

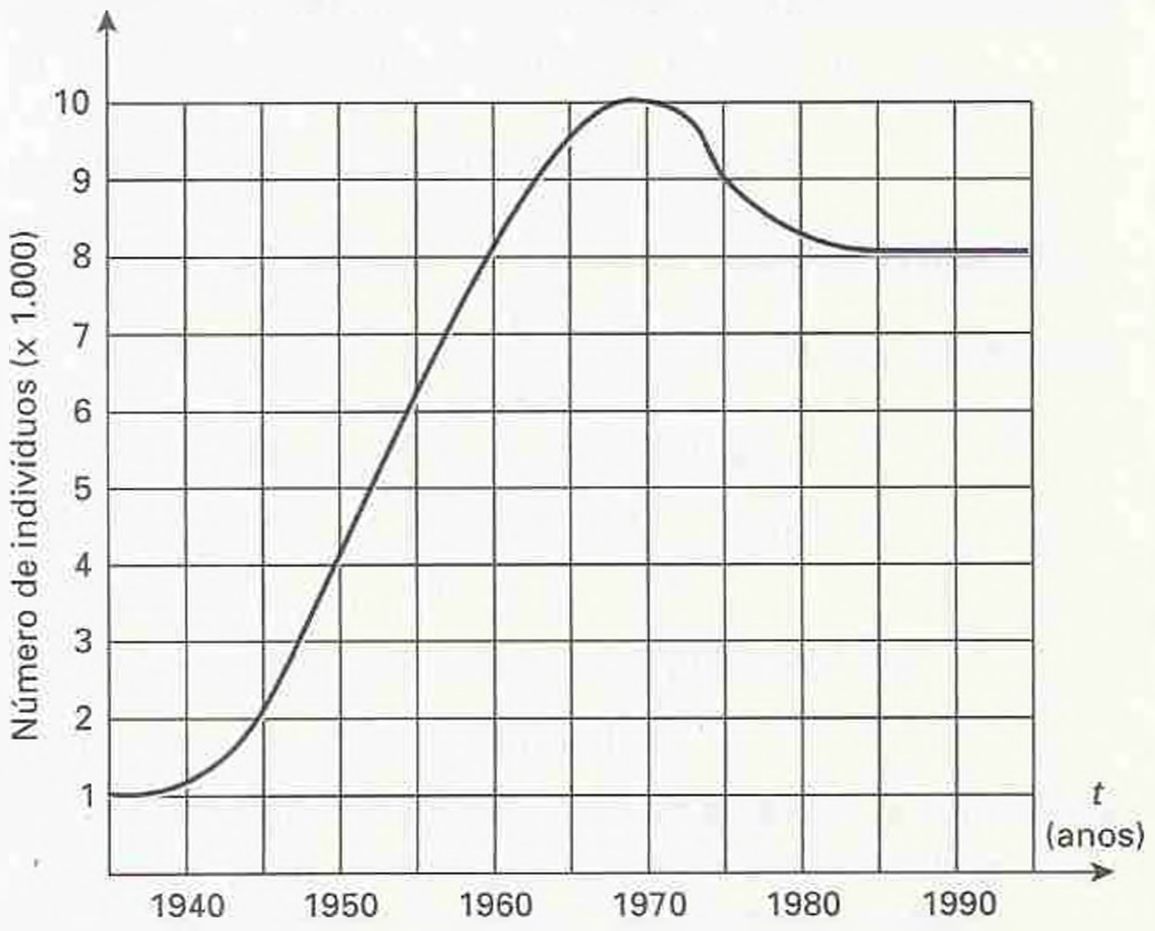
a) 2^{-10} c) 2^{10}
b) 4^{-10} d) 4^{10}

C.13 (Fatec-SP) Seja a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tal que $f(n + 1) = (n + 1) \cdot f(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Se $x = \frac{f(8) - f(7)}{f(7)}$, então:

a) $x = 8$ c) $x = 6$ e) n.d.a
b) $x = 7$ d) $x = 5$

C.14 (Enem) O número de indivíduos de certa população é representado pelo gráfico abaixo.

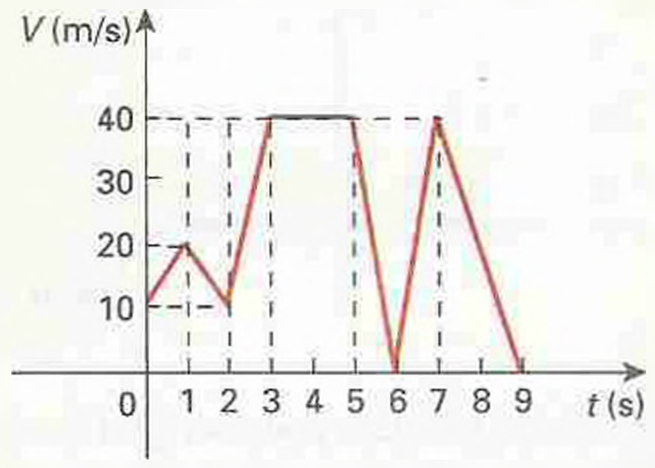


Em 1975, a população tinha um tamanho aproximadamente igual ao de:

a) 1960
b) 1963
c) 1967
d) 1970
e) 1980

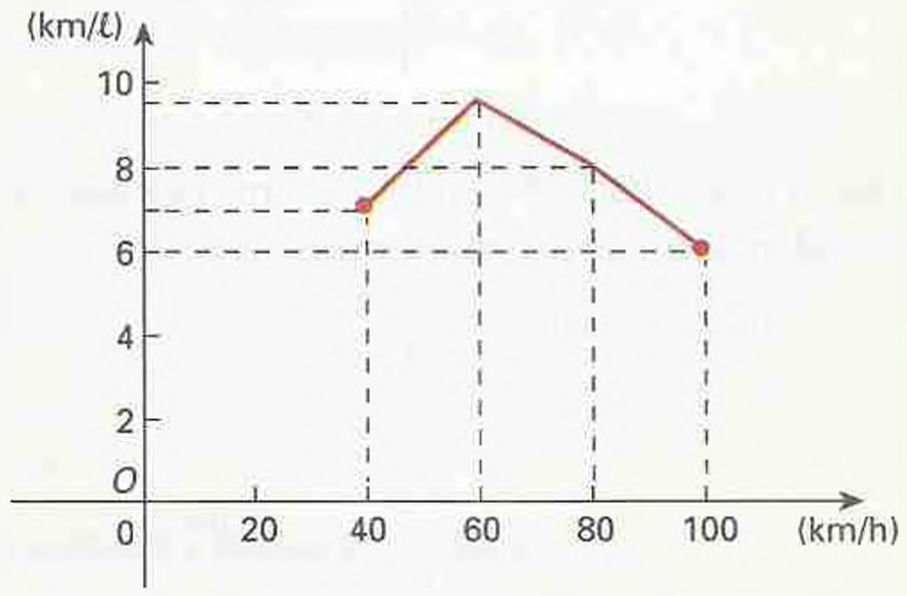
C.15 (Fuvest-SP) Se $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, quanto vale $f(\sqrt[4]{7})$?

C.16 (Univali-SC) Um móvel movimenta-se de acordo com o gráfico abaixo. A distância percorrida pelo móvel, entre os instantes 3 s e 5 s, é:



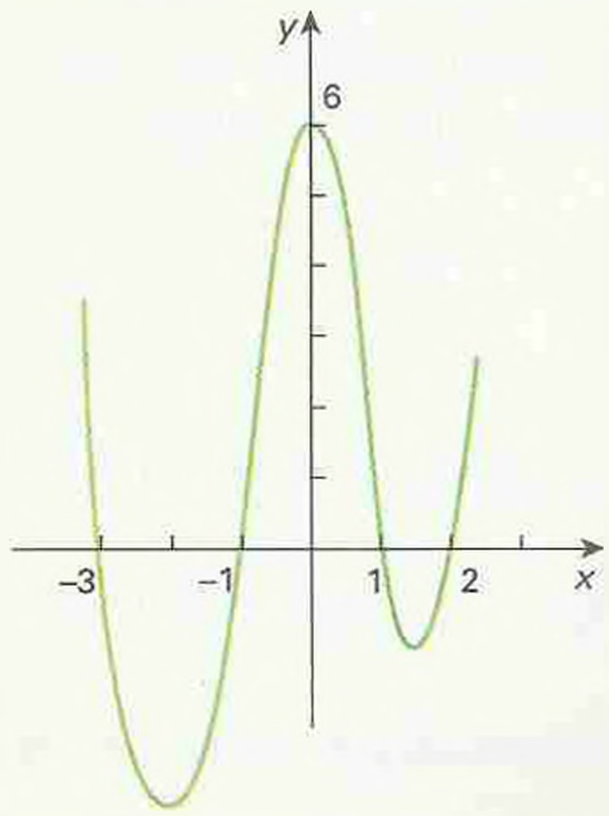
a) 80 m c) 600 m e) 8 m
b) 800 m d) 1.880 m

C.17 (Unisinos-RS) O consumo de combustível de um automóvel é medido pelo número de quilômetros que percorre, gastando 1 ℓ de combustível.
O consumo depende, entre outros fatores, da velocidade desenvolvida. O gráfico (da revista *Quatro Rodas*) a seguir indica o consumo, na dependência da velocidade, de certo automóvel.



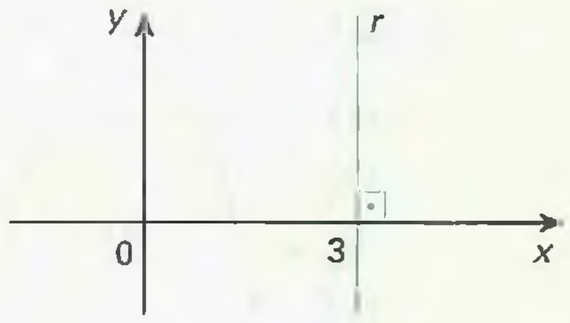
A análise do gráfico mostra que:
a) o maior consumo se dá aos 60 km/h.
b) a partir de 40 km/h, quanto maior a velocidade, maior é o consumo.
c) o consumo é diretamente proporcional à velocidade.
d) o menor consumo se dá aos 60 km/h.
e) o consumo é inversamente proporcional à velocidade.

C.18 (UFPB) O gráfico da função polinomial $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ está representado na figura abaixo. O conjunto solução da inequação $p(x) \leqslant 0$ é:



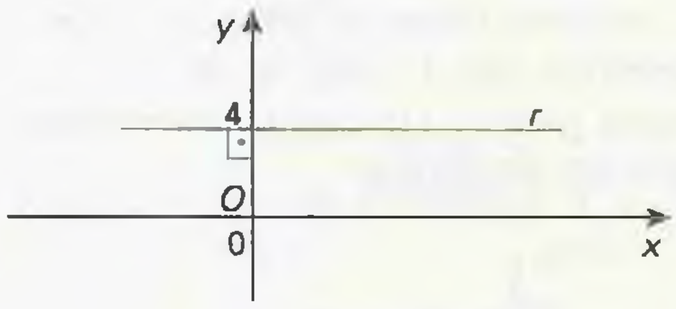
a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -1 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$

C.19 A reta r é o gráfico de uma relação R cujo domínio é $D(R) = \{3\}$. A relação R é função? Por quê?

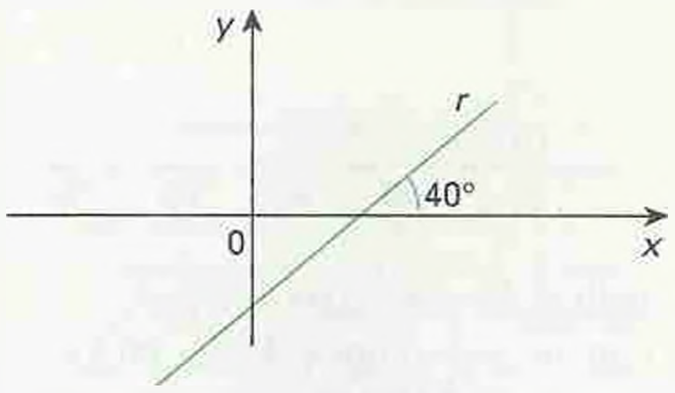


C.20 Uma circunferência pode ser gráfico de uma função cujos domínio e imagem são intervalos reais? Por quê?

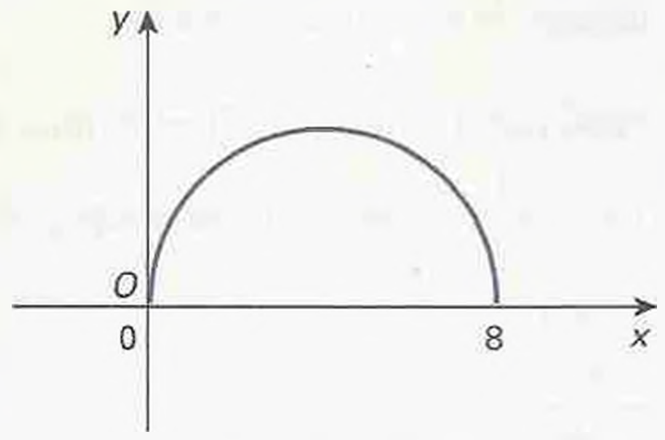
C.21 A reta r é o gráfico de uma função f. Determine o domínio e o conjunto imagem de f.



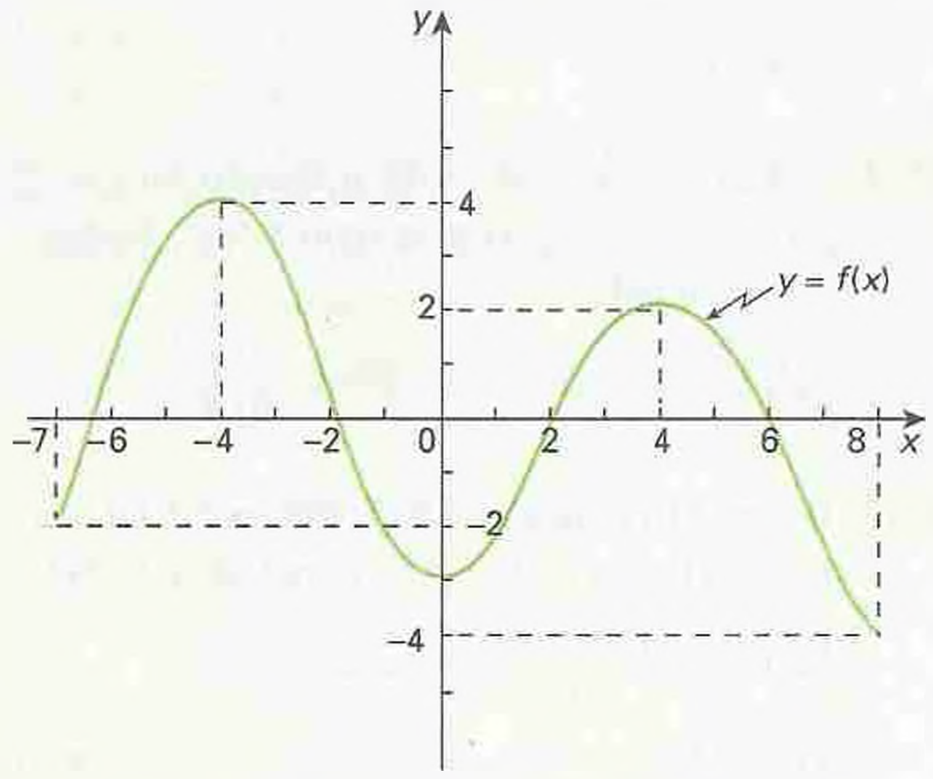
C.22 A reta r abaixo é o gráfico de uma função f. Determine o domínio e o conjunto imagem de f.



C.23 Determine o domínio e o conjunto imagem da função f cujo gráfico é a semicircunferência a seguir:



C.24 (UFPB) Considerando a função $y = f(x)$, com $-7 \leqslant x \leqslant 8$, representada na figura, é correto afirmar que:



a) $f(-4) + f(4) = 0$
b) $f(0) = 0$
c) $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$
d) $f(2) \neq 0$
e) O conjunto imagem de f é o intervalo $[-2, 2]$.

Capítulo 13

FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

1. CONCEITUAÇÃO

Toda função f em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ denomina-se **função real de variável real**.

Para que uma função f esteja completamente definida, é necessário que sejam dados todos os seus pares ordenados ou o seu domínio, o seu contradomínio e a lei de associação $y = f(x)$. Porém, para facilitar o estudo das funções reais de variável real, foi convencionado:

Se o domínio de uma função f for o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ onde f pode ser definida, e o contradomínio de f for $\mathbb{R}$, então essa função pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$.

Assim sendo, ao apresentarmos a função $y = f(x)$, ficam subentendidos como domínio e contradomínio de f os conjuntos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \text{ e } CD(f) = \mathbb{R}$$

Exemplos

a) Ao apresentarmos a função f, através da lei:

$f(x) = \frac{1}{x}$, fica subentendido:

- como domínio de f o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{1}{x}$ também seja real; temos que $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$; logo, $D(f) = \mathbb{R}^*$
- como contradomínio de f o conjunto dos números reais, $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) Ao apresentarmos a função f, através da lei

$f(x) = \sqrt{x}$, fica subentendido:

- como domínio de f o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\sqrt{x}$ também seja real; temos que $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$; logo, $D(f) = \mathbb{R}_+$
- como contradomínio de f o conjunto dos números reais $CD(f) = \mathbb{R}$.

c) Ao apresentarmos a função f, através da lei:

$f(x) = 3x + 5$, fica subentendido:

- como domínio de f o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $3x + 5$ também seja real; temos que $3x + 5 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, isto é, $3x + 5$ é real para todo x real; logo, $D(f) = \mathbb{R}$;
- como contradomínio de f o conjunto dos números reais $CD(f) = \mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Determinar o domínio da função $f(x) = \frac{1}{x - 8}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{1}{x - 8}$ também seja real. Temos que $\frac{1}{x - 8} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 8 \neq 0$ (ou seja, $x \neq 8$).

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 8\}$.

R.2 Determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{x - 5}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\sqrt{x - 5}$ também seja real. Temos que $\sqrt{x - 5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 5 \geqslant 0$ (ou seja, $x \geqslant 5$).

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

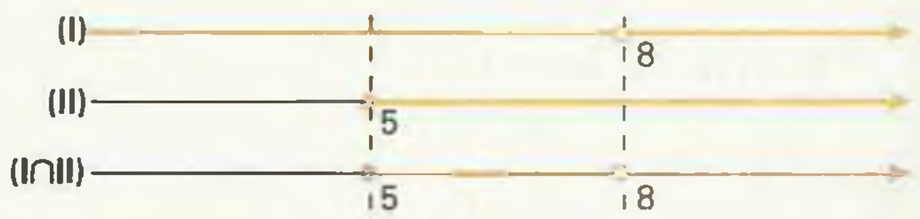
R.3 Determinar o domínio da função

$f(x) = \frac{1}{x - 8} + \sqrt{x - 5}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{1}{x - 8} + \sqrt{x - 5}$ também seja real. Temos que $\frac{1}{x - 8} + \sqrt{x - 5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x - 8 \neq 0}_{\text{(I)}}$ e $\underbrace{x - 5 \geqslant 0}_{\text{(II)}}$.

Lembrando que o conectivo "e" indica a intersecção das soluções das inequações (I) e (II), temos:



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5 \text{ e } x \neq 8\}$.

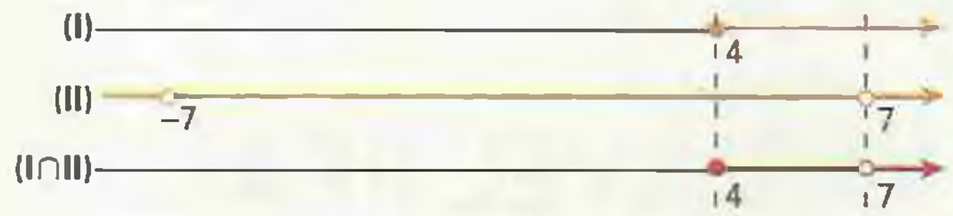
R.4 Determinar o domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{x - 4}}{x^2 - 49}$.

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números x, reais, de modo que $\frac{\sqrt{x - 4}}{x^2 - 49}$ também seja real. Temos que:

$\frac{\sqrt{x - 4}}{x^2 - 49} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{x - 4 \geqslant 0}_{\text{(I)}}$ e $\underbrace{x^2 - 49 \neq 0}_{\text{(II)}}$

Resolvendo a inequação (I), encontramos $x \geq 4$, e resolvendo (II), encontramos $x \neq -7$ e $x \neq 7$.
Fazendo a intersecção das soluções de (I) e (II), temos:



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ e } x \neq 7\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

e) $f(x) = x + 2$

f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

i) $f(x) = x^2 - 8x + 12$

j) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$

k) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

B.2 Determine o domínio de cada uma das funções, representando-o no eixo real:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x-3} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-25}$

d) $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x-1}$

e) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[4]{x-2}$

B.3 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x^3-8}$

b) $f(x) = \sqrt{4x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-1}}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^4-10x^2+9}$

e) $f(x) = \dfrac{6}{(x-1)(2x-1)(4x-5)}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^5-32} + \sqrt{2x-1}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x+2}} - \dfrac{1}{x^6-1}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} - \dfrac{1}{x^4-1}$

i) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1} + \dfrac{2}{\sqrt{x^4+5}}$

j) $f(x) = \dfrac{4}{x^2-2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

k) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2} + \dfrac{x}{x-3}$

B.4 Determine o domínio de cada uma das funções, representando-o no eixo real:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2-4} + \sqrt{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^4-16} + \dfrac{1}{x^2-9} - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{(x^2-5x+4)(x^3-8)}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}} + x$

Exercícios complementares de C.1 a C.4

2. RAIZ DE UMA FUNÇÃO

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 9$.

Note que $f(3) = 3^2 - 9 = 0$ e $f(-3) = (-3)^2 - 9 = 0$. Ou seja, para $x = 3$ ou $x = -3$, a função $f(x) = x^2 - 9$ se anula. Por isso, os números 3 e -3 são chamados de **raízes** (ou de **zeros**) **da função** f.

Definição

Chama-se **raiz** (ou **zero**) **de uma função real de variável real**, $y = f(x)$, todo número r, do domínio de f, tal que $f(r) = 0$.

Exemplos

a) As raízes da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ são todos os valores reais x tais que $f(x) = 0$, isto é, $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$. Logo, as raízes de f são 2 e 3.

b) A raiz da função $g(x) = 2x - 3$ é obtida fazendo-se $g(x) = 0$, isto é, $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$. Logo, a raiz de g é $\dfrac{3}{2}$.

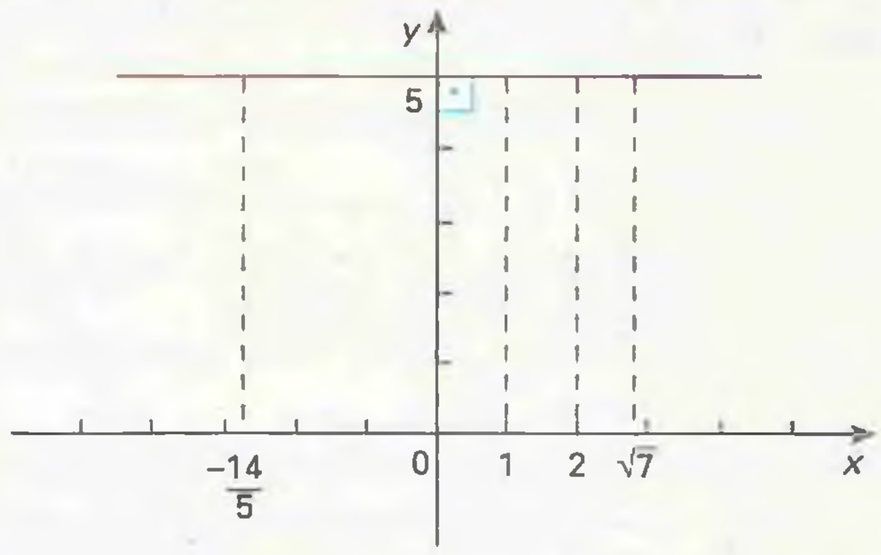
c) A função $h(x) = x^2 + 9$ não possui raiz no domínio $\mathbb{R}$, pois $x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -9$. Não há número real cujo quadrado seja igual a -9.

3. FUNÇÃO CONSTANTE

Consideremos a função real, de variável real $f(x) = 5$, ou seja, a imagem de qualquer número real x é o número 5. Por exemplo:

$f(2) = 5$
$f(\sqrt{7}) = 5$
$f(1) = 5$
$f\left(-\dfrac{14}{5}\right) = 5$
⋮

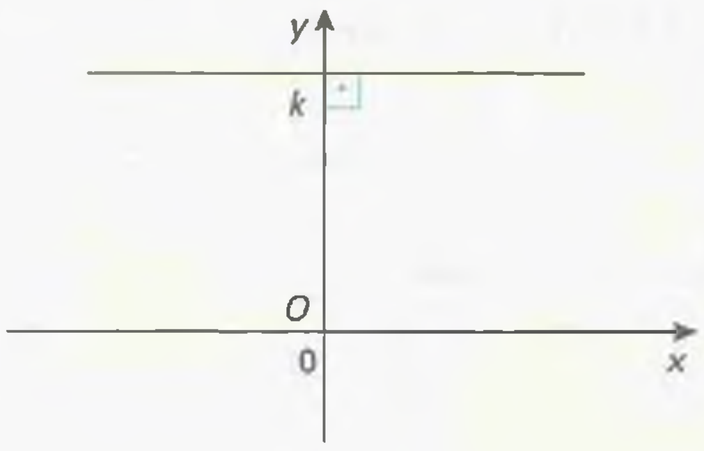
Seu gráfico é:



Tal função é denominada **função constante.**

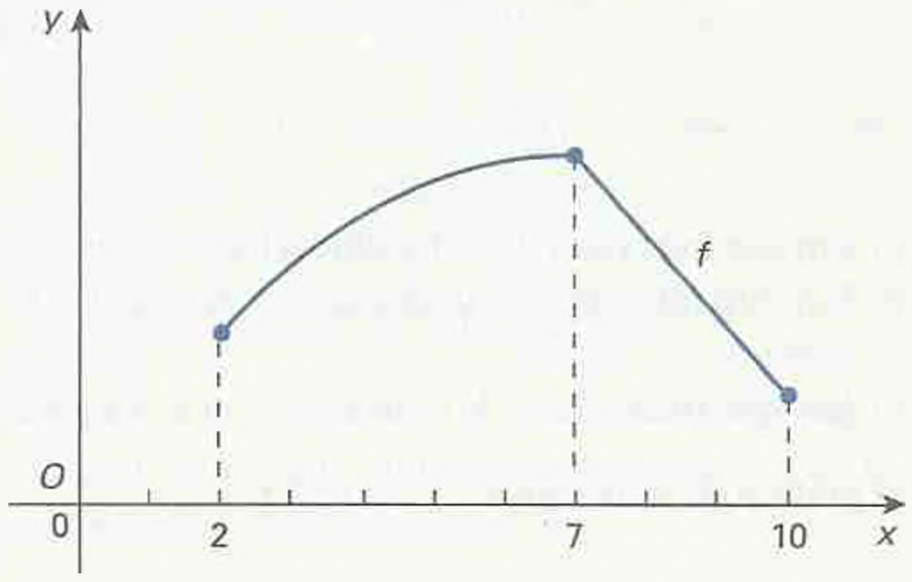
Chama-se **função constante** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = k$ (k, constante real).

O gráfico da função constante $f(x) = k$ é a reta paralela ao eixo Ox pelo ponto $(0, k)$.



4. FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

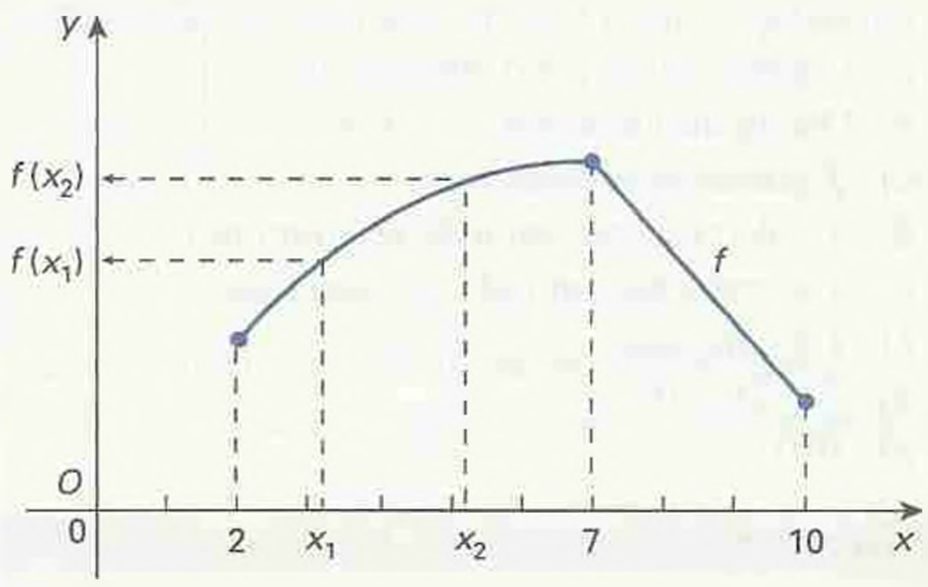
Considere o gráfico de uma função f:



Note que no intervalo $[2, 7] \subset D(f)$, se considerarmos dois números quaisquer x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, teremos que a imagem de x_2 será **maior** que a imagem de x_1, isto é:

$$\{x_1, x_2\} \subset [2, 7] \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

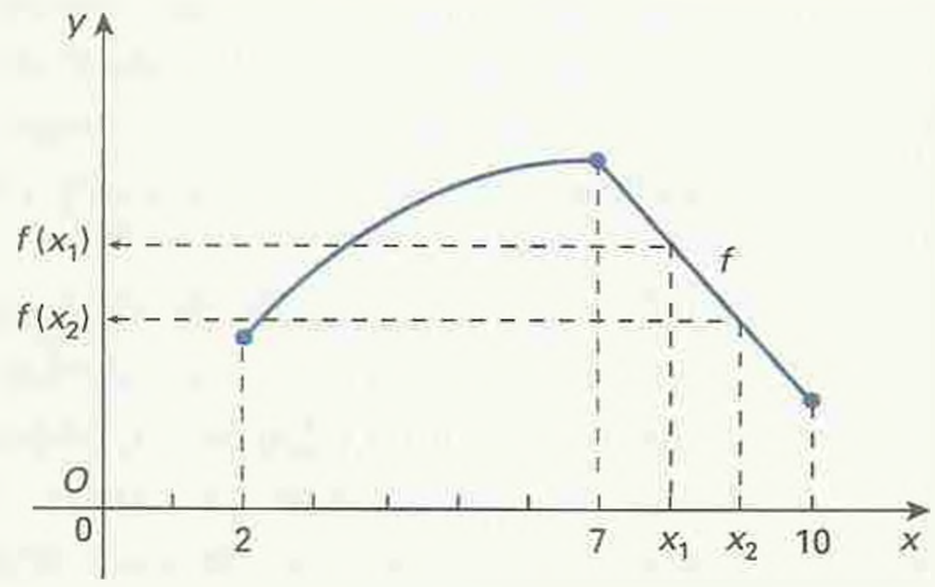
Por isso, dizemos que a função f é **crescente** no intervalo [2, 7]. Observe:



Note também que, se considerarmos no intervalo [7, 10] dois números quaisquer x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, teremos que a imagem de x_2 será **menor** que a imagem de x_1, isto é:

$$\{x_1, x_2\} \subset [7, 10] \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Por isso, dizemos que a função f é **decrescente** no intervalo [7, 10]. Observe:



Assim, podemos definir:

Uma função f, real de variável real, é **crescente** em A, $A \subset D(f)$, se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 do conjunto A, ocorre:

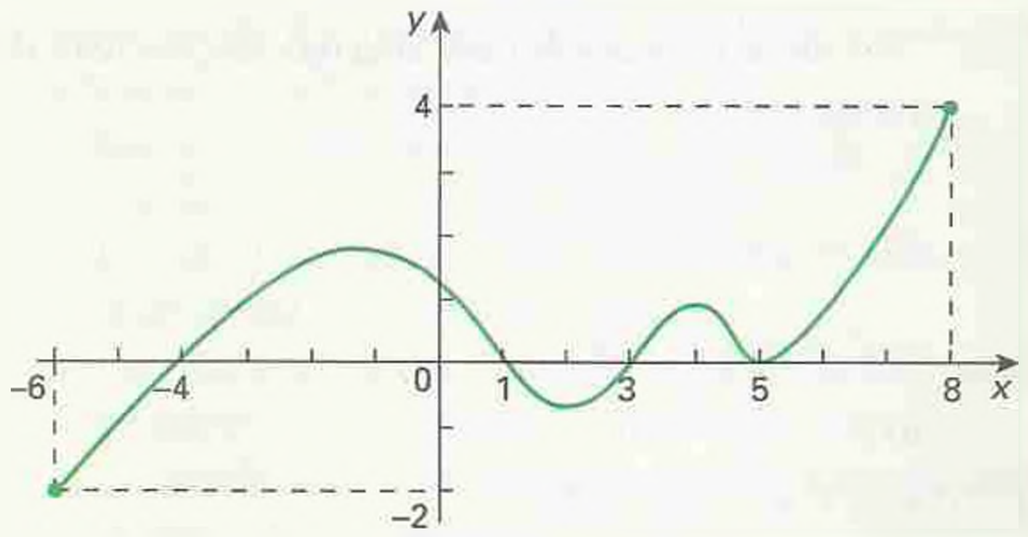
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Uma função f, real de variável real, é **decrescente** em A, $A \subset D(f)$, se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 do conjunto A, ocorre:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 O gráfico de uma função f é dado a seguir. Quais são as raízes de f?



Resolução

Note que $f(-4) = 0, f(1) = 0, f(3) = 0$ e $f(5) = 0$.
Logo, as raízes de f são -4, 1, 3 e 5.

As raízes de uma função f são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

Prática pode aumentar capacidade da memória

(...) O ponto de vista padrão, repetido em quase todos os textos de psicologia, é de que o limite comum para a memória a curto prazo é de cerca de sete bits de informação — a extensão de um número de telefone. Mais do que isso, em geral, os números não podem ser retidos confiavelmente pela memória a curto prazo a menos que as unidades separadas sejam repartidas em "porções", como os números de um prefixo telefônico que são lembrados como se fossem uma única unidade.

(...) numa surpreendente demonstração do poder absoluto do treino para romper barreiras na habilidade da mente para lidar com a informação, Anders Ericson, psicólogo da Universidade do Estado da Flórida, em Tallahassee, que escreveu recentemente um artigo sobre o papel da prática deliberada para performances espetaculares, na revista *American Psychologist*, e seus colegas da Universidade Carnegie-Mellon estimulam seus estudantes universitários a escutar uma lista de até 102 dígitos e recitá-los corretamente.

Após 50 horas de prática, com diferentes grupos de dígitos, quatro estudantes conseguiram lembrar de até 20 dígitos após ouvirem uma única vez. Um estudante, um executivo sem talento especial para matemática, conseguiu se lembrar de 102 dígitos; esse feito exigiu 400 horas de prática. (...)

O Estado de S. Paulo, 22 out. 1994.

Para ler o texto na íntegra consulte o site **Estadão na escola** (www.estadao-escola.com.br), clicando em "Pesquisa", "Temas transversais" e "Ciência e meio ambiente" com as palavras-chaves "capacidade" e "memória".

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.5 Determine as raízes de cada uma das funções reais de variável real:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $y = 5x + 3$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $f(x) = x^4 - 4x^2$

e) $y = x^4 - 3x^2 + 2$

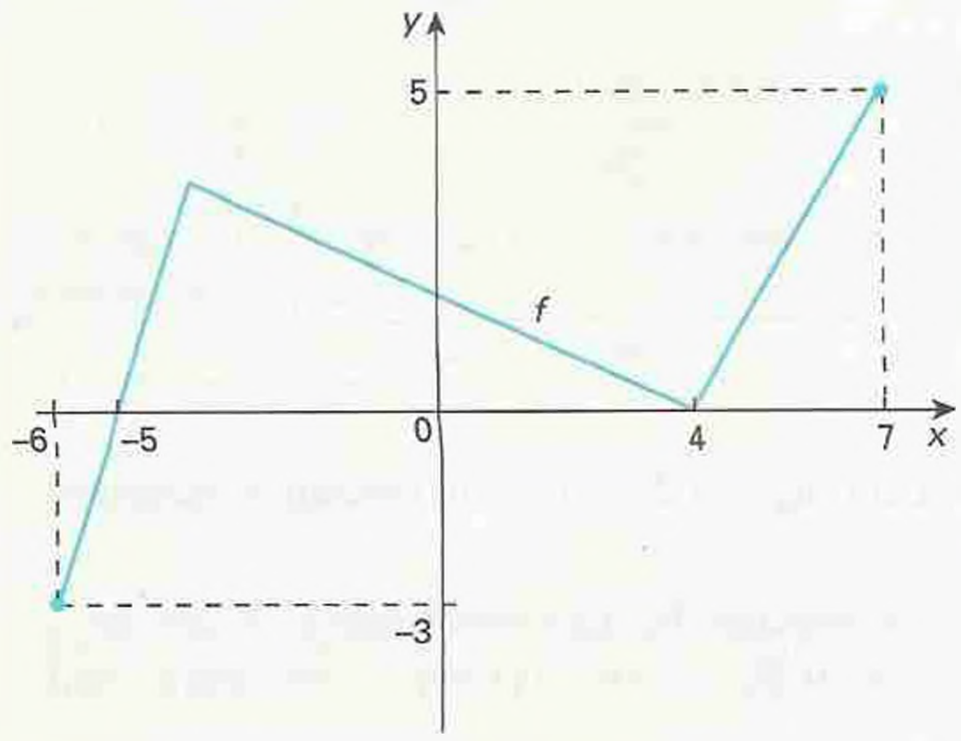
f) $y = x^2 + 1$

g) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

h) $y = \frac{x+1}{2} - \frac{5x+3}{4}$

i) $f(x) = \frac{x+6}{x} - 2x$

B.6 O gráfico de uma função f é dado abaixo. Determine as raízes da função f.



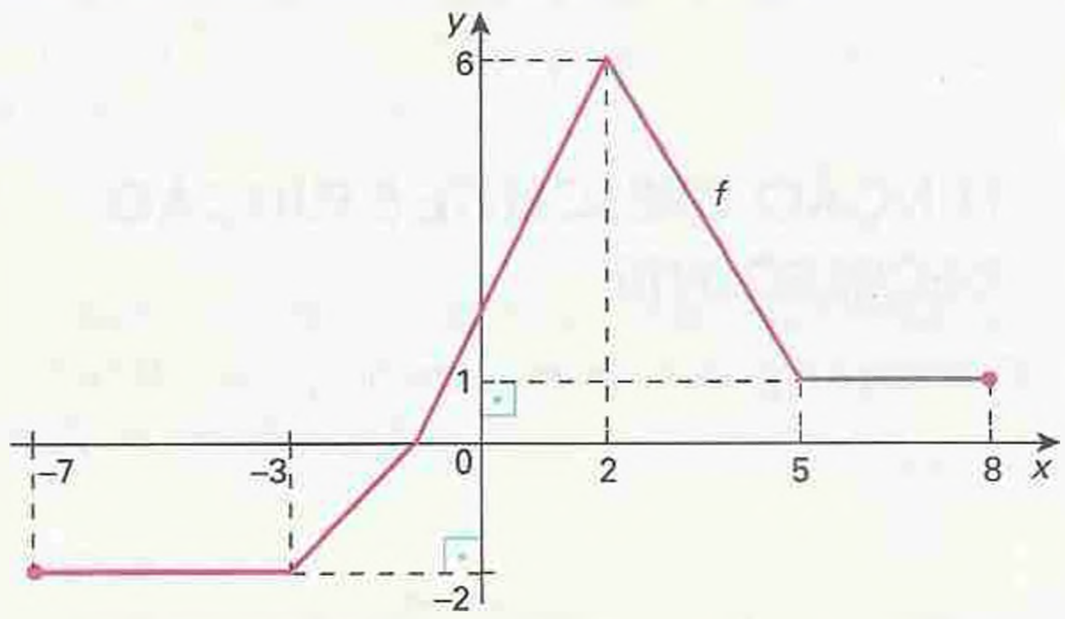
B.7 Construa o gráfico de cada uma das funções:

a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = -1$ c) $y = \sqrt{2}$

B.8 Dê o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:

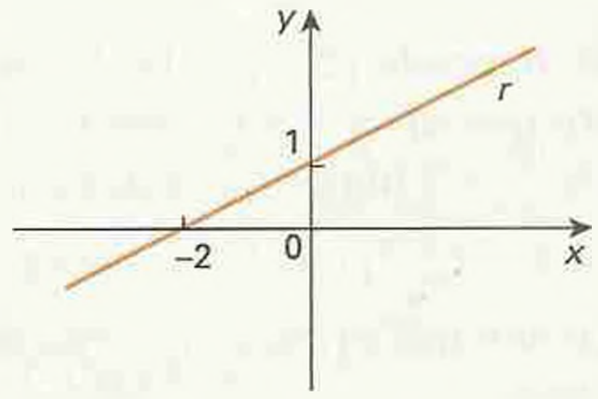
a) $f(x) = 5$ b) $f(x) = \frac{1}{2}$

B.9 O gráfico de uma função f é:



a) Em que intervalo(s) do domínio a função f é crescente?
b) Em que intervalo(s) do domínio a função f é decrescente?
c) Em que intervalo(s) do domínio a função f é constante?

B.10 O gráfico de uma função f é a reta r:



Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) O domínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$.
b) O conjunto imagem de f é $\mathbb{R}$.
c) f possui uma única raiz.
d) f é decrescente em todo seu domínio.
e) f é crescente em todo seu domínio.
f) f é constante.
g) $f(-2) = 0$
h) $f(0) = 3$

Exercícios complementares de C.5 a C.12

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x^3}$

e) $f(x) = \sqrt{-x^3}$

C.2 (Faap-SP) Determine o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-1}$.

C.3 (Cesgranrio) Sendo $x \geq 4$, o conjunto imagem da função $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-4}$ é dado por:

a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

b) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$

c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$

d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$

e) n.d.a.

C.4 (UFMG) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(x) = 2 + \sqrt{x^2+1}$. Pode-se afirmar que o conjunto imagem de f é:

a) $\{y \in \mathbb{R}: y \geq -1\}$

b) $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\}$

c) $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 2\}$

d) $\{y \in \mathbb{R}: y \geq 3\}$

e) $\mathbb{R}$

C.5 Determine as raízes de cada uma das funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2x-2} - \dfrac{2}{x-1}$

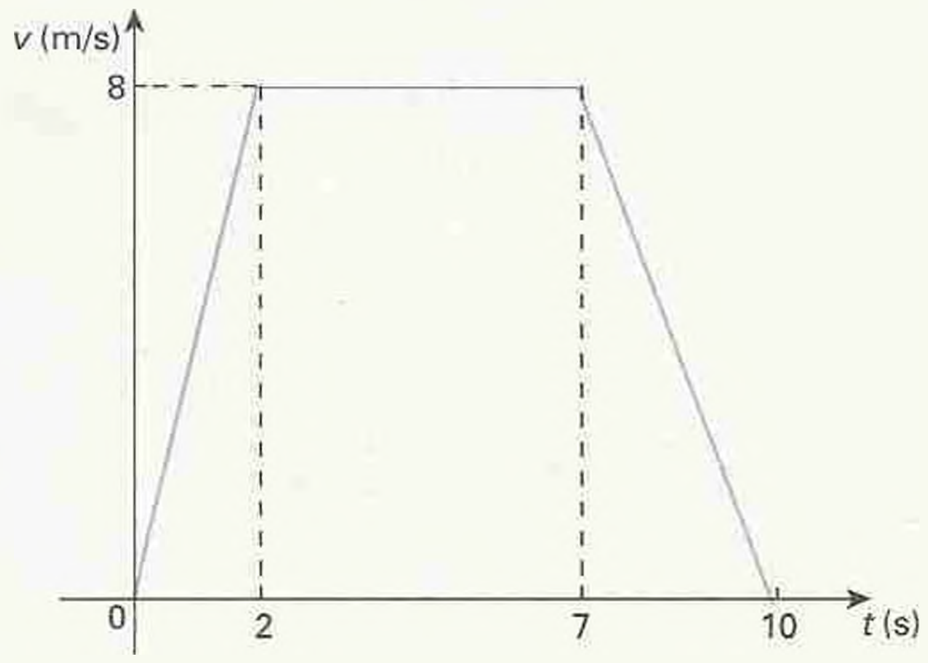
c) $f(x) = \sqrt{x^2-3} - 2x$

d) $f(x) = \sqrt{x+5} - x + 1$

C.6 As raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + 4$ são 1 e 2. Determine os valores de a e b.

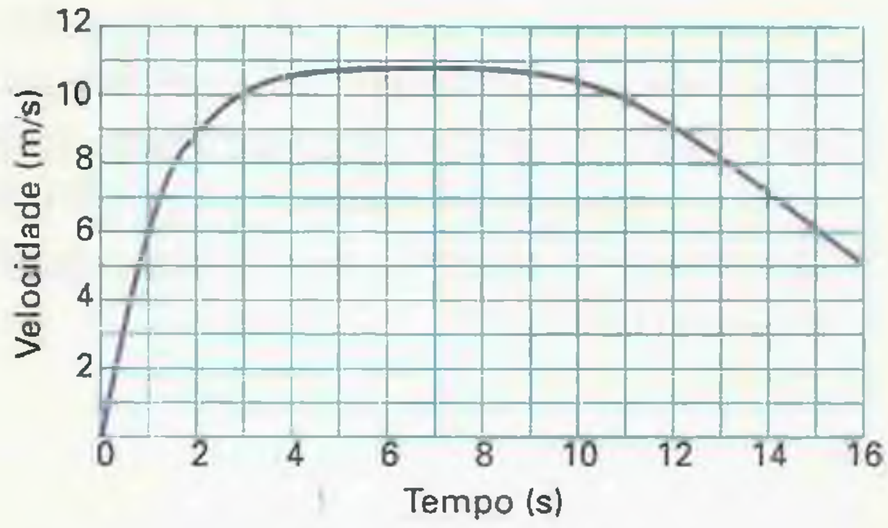
C.7 Construa o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{x}$.

C.8 O gráfico a seguir mostra a velocidade (v) de um automóvel em função do tempo (t):



a) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é crescente?
b) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é decrescente?
c) Em que intervalo(s) de tempo a velocidade é constante?

C.9 (Enem) Em uma prova de 100 m rasos, o desempenho típico de um corredor padrão é representado pelo gráfico a seguir:



Baseado no gráfico, em que intervalo de tempo a *velocidade* do corredor é aproximadamente constante?

a) Entre 0 e 1 segundo.
b) Entre 1 e 5 segundos.
c) Entre 5 e 8 segundos.
d) Entre 8 e 11 segundos.
e) Entre 12 e 15 segundos.

C.10 Um economista, para fazer uma análise da variação da taxa de inflação num determinado ano, num determinado país, enumerou os meses de 1 a 12 e associou a cada mês a inflação correspondente, obtendo assim a tabela abaixo

Governo divulga balanço anual da inflação

Mês	Taxa de inflação (%)
1	6
2	8
3	9
4	7
5	6
6	9
7	9
8	9
9	8
10	6
11	5
12	9

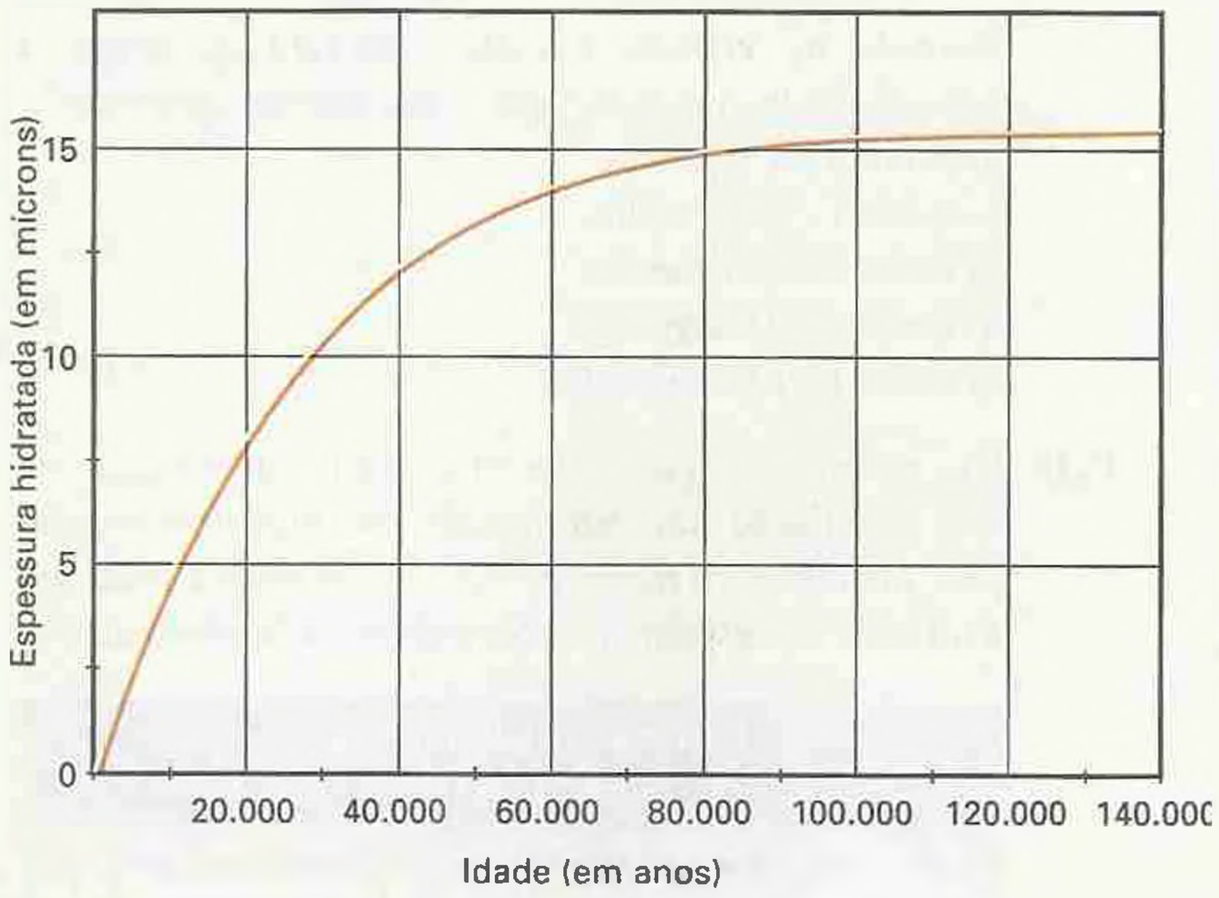
Considere a relação R do conjunto dos meses $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ no conjunto das taxas, em %, $B = \{6, 8, 9, 7, 5\}$, associando a cada mês a taxa de inflação correspondente.

Construa o gráfico da relação R e, observando o gráfico, responda:

a) Do mês 1 ao mês 3, a taxa de inflação foi crescente, decrescente ou constante?
b) Do mês 6 ao mês 8, a taxa de inflação foi crescente, decrescente ou constante?
c) Do mês 9 ao mês 11, a taxa de inflação foi crescente, decrescente ou constante?
d) Qual a variação da taxa de inflação do mês 7 ao mês 8?

Note pelo gráfico que, do mês 1 ao mês 2, a taxa de inflação **cresceu** 2%; por isso dizemos que do mês 1 ao 2 a variação da taxa de inflação foi +2%. Note ainda, pelo gráfico, que, do mês 4 ao mês 5, a taxa de inflação **decresceu** 1%; por isso dizemos que a variação da taxa de inflação do mês 4 ao 5 foi de −1%.

C.11 (Enem) A obsidiana é uma pedra de origem vulcânica que, em contato com a umidade do ar, fixa água em sua superfície formando uma camada hidratada. A espessura da camada hidratada aumenta de acordo com o tempo de permanência no ar, propriedade que pode ser utilizada para medir sua idade. O gráfico abaixo mostra como varia a espessura da camada hidratada, em mícrons (1 mícron = 1 milésimo de milímetro) em função da idade da obsidiana.



Com base no gráfico, pode-se concluir que a espessura da camada hidratada de uma obsidiana:

a) é diretamente proporcional à sua idade.

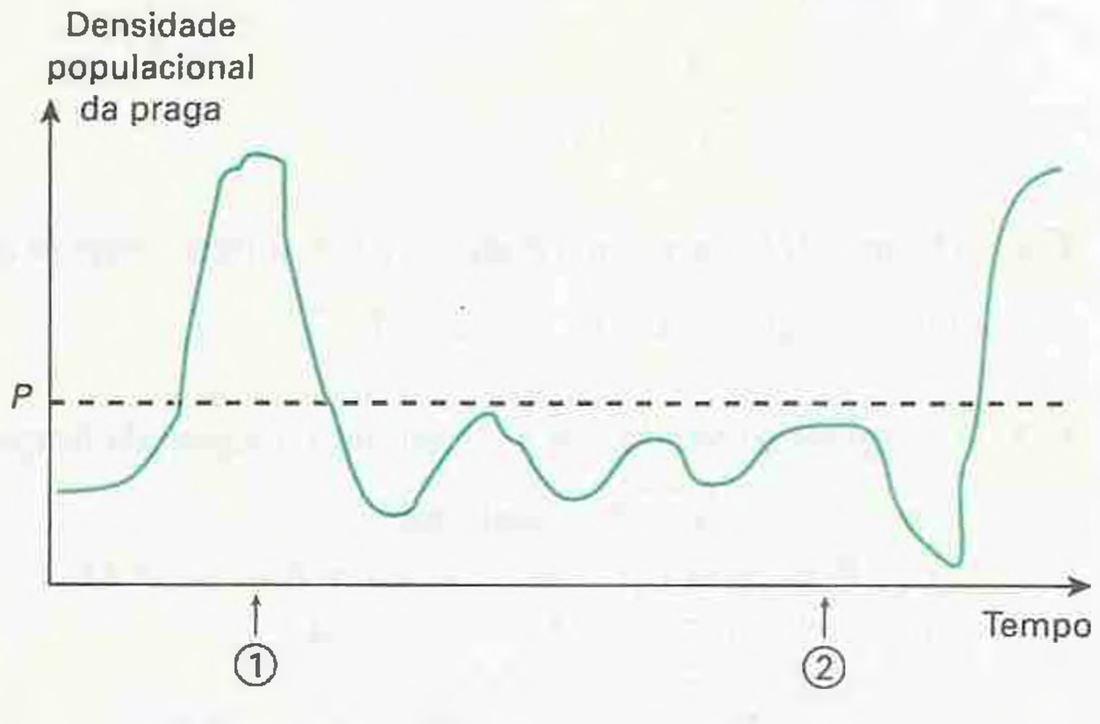
b) dobra a cada 10.000 anos.

c) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais jovem.

d) aumenta mais rapidamente quando a pedra é mais velha.

e) a partir de 100.000 anos não aumenta mais.

C.12 (Enem) O crescimento da população de uma praga agrícola está representado em função do tempo, no gráfico abaixo, onde a densidade populacional superior a *P* causa prejuízo à lavoura.



No momento apontado pela seta ①, um agricultor introduziu uma espécie de inseto que é inimigo natural da praga, na tentativa de controlá-la biologicamente.

No momento indicado pela seta ②, o agricultor aplicou grande quantidade de inseticida, na tentativa de eliminar totalmente a praga.

A análise do gráfico permite concluir que:

a) se o inseticida tivesse sido usado no momento marcado pela seta ①, a praga teria sido controlada definitivamente, sem necessidade de um tratamento posterior.

b) se não tivesse sido usado o inseticida no momento marcado pela seta ②, a população de praga continuaria aumentando rapidamente e causaria grandes danos à lavoura.

c) o uso do inseticida tornou-se necessário, uma vez que o controle biológico aplicado no momento ① não resultou na diminuição da densidade da população da praga.

d) o inseticida atacou tanto as pragas quanto os seus predadores; entretanto, a população de pragas recuperou-se mais rápido, voltando a causar dano à lavoura.

e) o controle de pragas por meio do uso de inseticidas é muito mais eficaz que o controle biológico, pois os seus efeitos são muito mais rápidos e têm maior durabilidade.

Capítulo 14

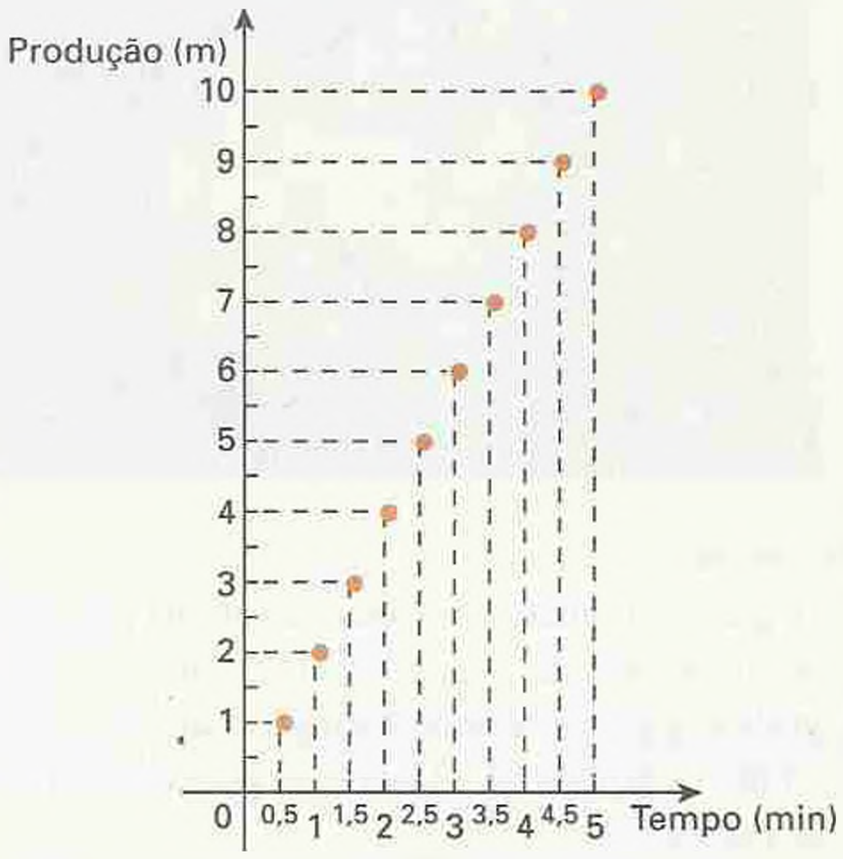
FUNÇÃO AFIM OU DO 1º GRAU

1. CONCEITUAÇÃO

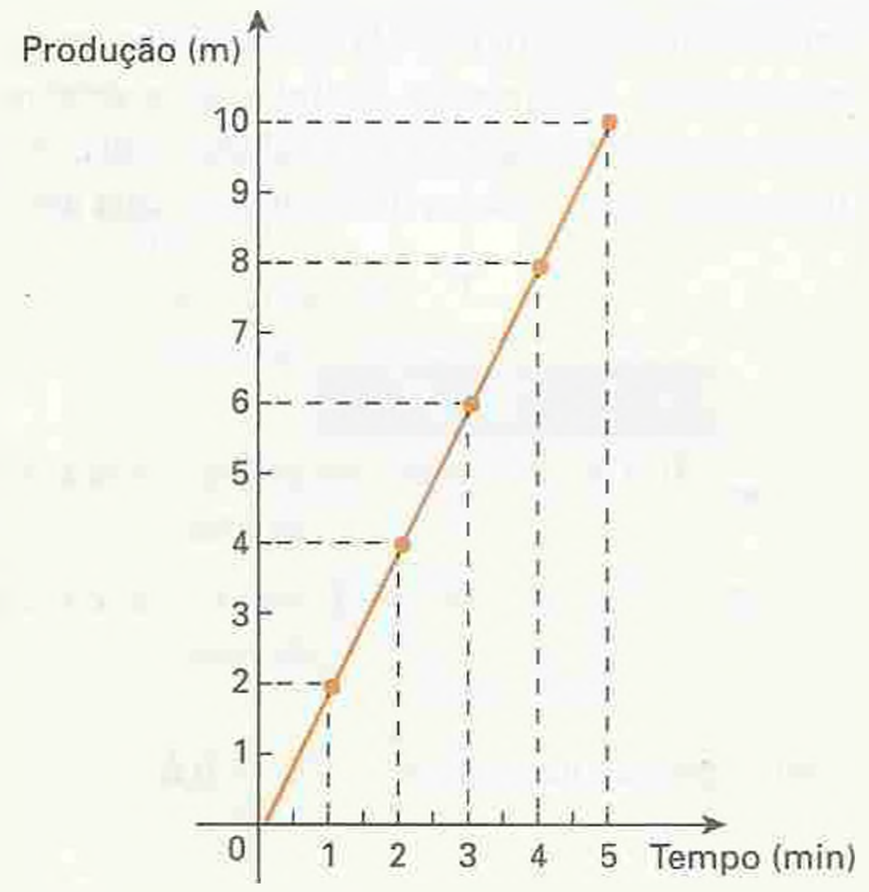
Uma máquina fabrica 2 m de corda por minuto. A tabela abaixo descreve a produção dessa máquina em função do tempo.

Tempo (min)	Produção (III)
0,5	1
1,0	2
1,5	3
2,0	4
2,5	5
3,0	6
3,5	7
4,0	8
4,5	9
5,0	10

O gráfico correspondente a essa tabela é:



Se diminuirmos mais e mais o intervalo entre as medições, ou seja, $\frac{1}{4}$ min, $\frac{1}{8}$ min, etc., obteremos mais e mais pontos, e todos numa mesma reta. Podemos então dizer que o gráfico abaixo descreve a produção dessa máquina em função do tempo. Indicando por x o tempo, em minutos, e por y a produção, em metros, temos que a lei que associa x e y é $y = 2x$.



Neste capítulo vamos estudar funções como a desse exemplo, isto é, funções do tipo $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Definição

Toda função do tipo $f(x) = ax + b$ com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é denominada **função do 1º grau** ou **função afim**.

Exemplos

a) $y = 3x + 1$

b) $y = x - 5$

c) $y = 4x$

d) $y = \frac{x}{3} + 1$

Nota

Toda função do 1º grau $y = ax + b$ em que $b = 0$ recebe o nome particular de **função linear**. São lineares as funções $y = 2x$, $y = \frac{x}{5}$, $y = x$, etc.

2. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Demonstra-se que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta.

Um importante postulado da geometria diz: "Dois pontos distintos determinam uma reta". De acordo com esse postulado, a construção do gráfico de uma função do 1º grau é feita obtendo-se dois de seus pontos distintos e traçando-se a reta determinada por eles.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Construir o gráfico da função $y = 3x - 6$.

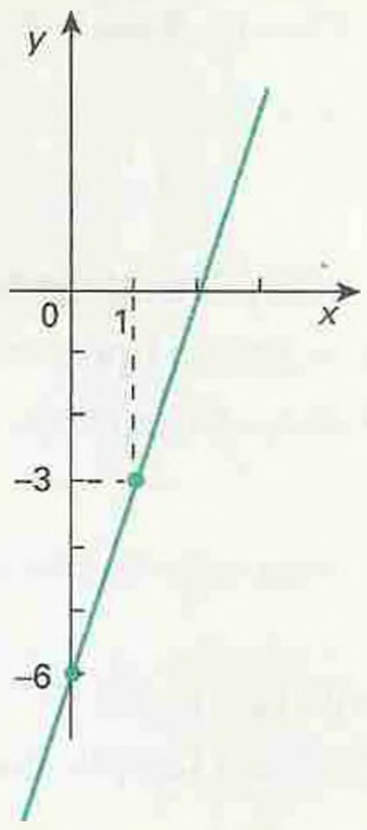
Resolução

O gráfico da função $y = 3x - 6$ é uma reta. Logo, precisamos de dois pontos distintos para determiná-la. Para isso, atribuímos a x dois valores reais, distintos, **quaisquer** e calculamos a imagem y de cada um deles:

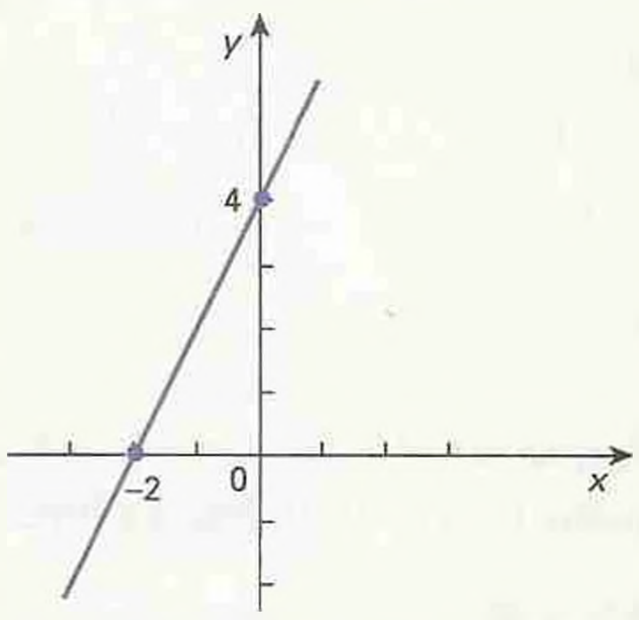
x	y	
0	$3 \cdot 0 - 6 = -6$	$\Rightarrow (0, -6)$ é um ponto da reta.
1	$3 \cdot 1 - 6 = -3$	$\Rightarrow (1, -3)$ é um ponto da reta.

Valores arbitrários

Assim, o gráfico da função $y = 3x - 6$ é:



R.2 O gráfico da função $y = ax + b$ é:



Determinar os valores de a e b.

Resolução

Como o ponto (0, 4) pertence ao gráfico, temos que a sentença $y = ax + b$ deve tornar-se verdadeira para $x = 0$ e $y = 4$, isto é, $4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$.

Analogamente, o ponto $(-2, 0)$ pertence ao gráfico; então devemos ter $0 = a \cdot (-2) + b$.

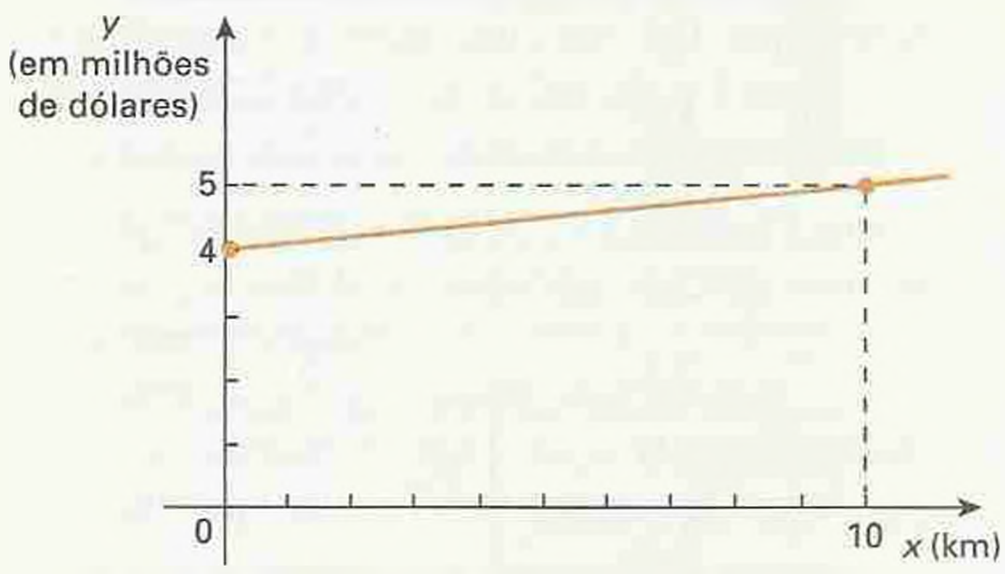
Como $b = 4$, temos $0 = a \cdot (-2) + 4 \Rightarrow a = 2$.

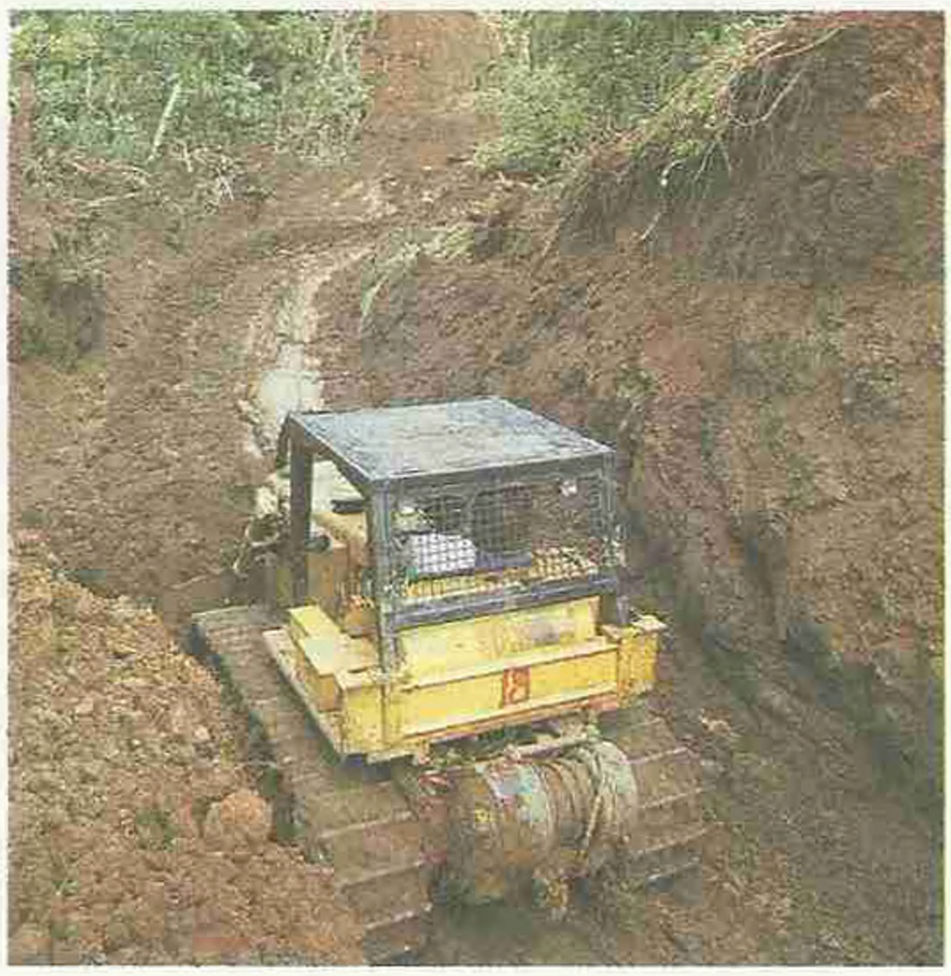
R.3 Uma empresa, para construir uma estrada, cobra uma taxa fixa mais uma taxa que varia de acordo com o número de quilômetros de estrada construída. O gráfico descreve o custo da obra, em milhões de dólares, em função do número de quilômetros construídos.

a) Obtenha a lei $y = f(x)$, para $x \geqslant 0$, que determina esse gráfico.

b) Determine a taxa fixa cobrada pela empresa para a construção da estrada.

c) Qual será o custo total da obra, sabendo que a estrada terá 50 km de extensão?





CID

Resolução

a) O gráfico é uma semi-reta contida na reta que passa pelos pontos (0, 4) e (10, 5). A lei $y = f(x)$, cujo gráfico é essa reta, é da forma $y = ax + b$.

Como os pontos (0, 4) e (10, 5) pertencem a essa reta, devemos ter:

$4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$ **(I)** e $5 = a \cdot 10 + b$ **(II)**

Substituindo (I) em (II), temos:

$$5 = a \cdot 10 + 4 \Rightarrow a = \frac{1}{10}$$

Assim, a lei que determina esse gráfico para $x \geqslant 0$ é

$$y = \frac{x}{10} + 4.$$

Nota

Devemos supor $x \geq 0$, pois x é o número de quilômetros de estrada construída; logo, não há sentido em atribuirmos valores negativos a x.

b) A taxa fixa é obtida fazendo $x = 0$, ou seja, o início da obra:

$$y = \frac{0}{10} + 4 \Rightarrow y = 4$$

Logo, essa taxa é de 4 milhões de dólares.

c) Para calcularmos o custo total da obra, basta fazermos $x = 50$, ou seja, o término da obra:

$$y = \frac{50}{10} + 4 \Rightarrow y = 9$$

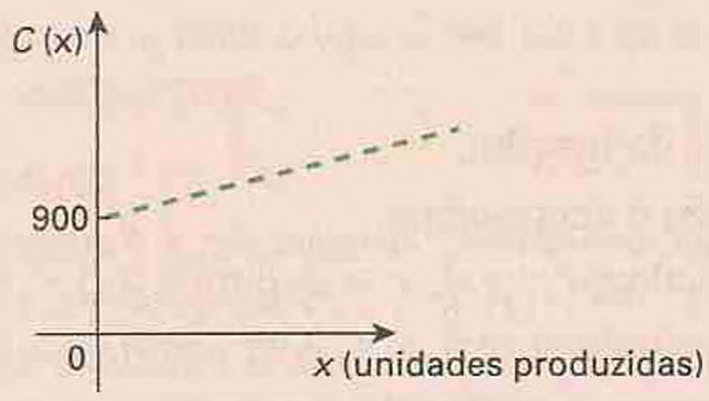
Logo, o custo total da obra será de 9 milhões de dólares.

A função do primeiro grau na economia

Suponha que um fabricante gastou R$ 900,00 em moldes para a confecção de frascos de vidro e que, além disso, o custo de produção de cada frasco seja de R$ 0,05. Assim, o custo total, em reais, para a produção de x frascos é dado por:

$$C(x) = 900 + 0{,}05x$$

Em economia $C(x)$ é chamada de **função custo**, em que a parcela 900 é chamada de **custo fixo**, pois não depende da quantidade produzida; e a parcela $0{,}05x$ é chamada de **custo variável**, por depender do número de unidades produzidas. Essa função do primeiro grau é crescente e seu gráfico é formado por pontos de uma semi-reta de origem no ponto (0,900):



Note que o gráfico é formado por pontos "isolados" porque a variável x só pode assumir valores naturais.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Construa o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = 2x - 4$

b) $y = -2x - 4$

c) $y = 5x$

d) $y = -5x$

e) $y = 2x - 3$

f) $y = \frac{x}{3} + 1$

g) $y = \frac{3x}{2}$

B.2 Construa o gráfico de cada uma das funções a seguir. Determine os pontos de intersecção de cada gráfico com os eixos coordenados Ox e Oy.

a) $y = 5x - 10$

b) $y = -x - 1$

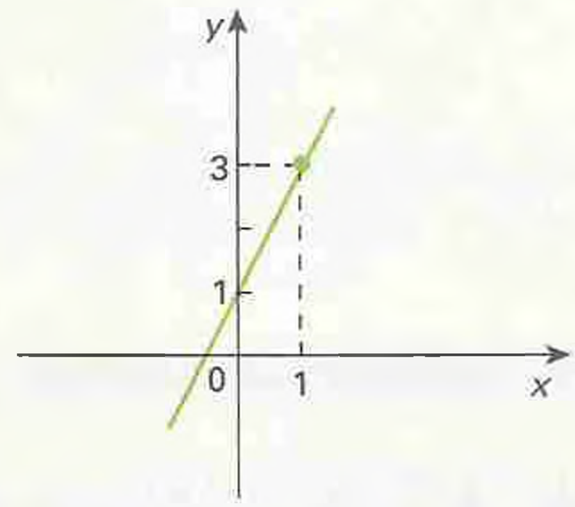
c) $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

d) $y = \frac{2x}{5} - 3$

e) $y = -3x + 2$

f) $y = 2x$

B.3 O gráfico da função $y = ax + b$ é:

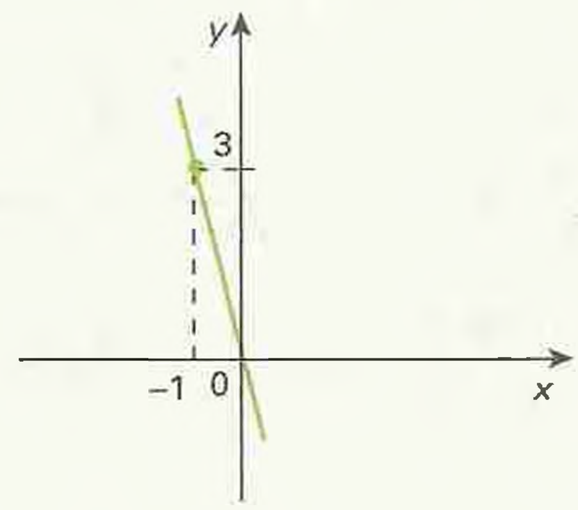


Determine:

a) os valores de a e b;

b) a raiz da função.

B.4 O gráfico da função $y = ax + b$ é:



Determine os valores de a e b.

B.5 (UECE) Toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$, com $a \neq 0$, é chamada de **função linear**. Pode-se afirmar que:

a) toda função linear é crescente em todo seu domínio.

b) toda função linear é decrescente em todo seu domínio.

c) o gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas.

d) existem funções lineares com raiz positiva.

e) existem funções lineares com raiz negativa.

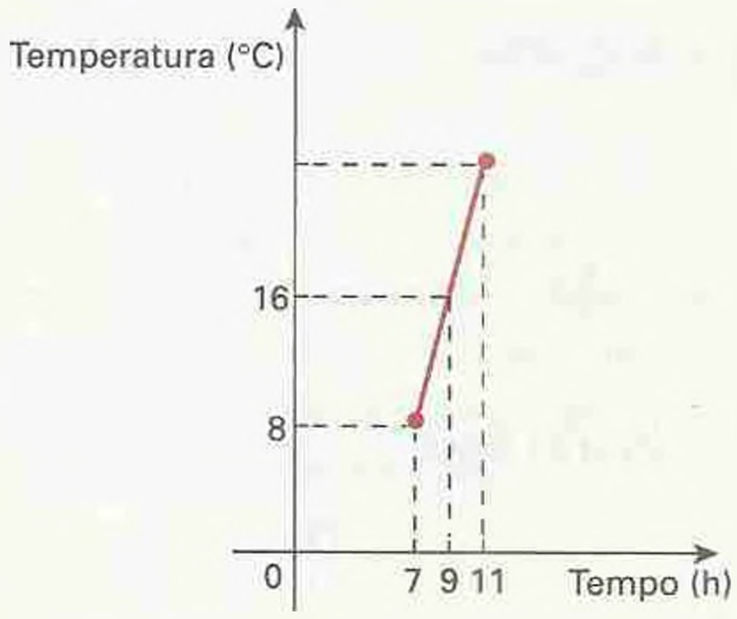
B.6 Chama-se **função identidade** a função linear $f(x) = x$. Construa o gráfico da função identidade determinando seu domínio e seu conjunto imagem.

B.7 Um vendedor recebe a título de rendimento mensal um valor fixo de R$ 160,00 e mais um adicional de 2% das vendas por ele efetuadas no mês. Com base nisso, responda:

a) Qual o rendimento deste vendedor em um mês no qual o total de vendas feitas por ele foi de R$ 8.350.00?

b) Qual a função que expressa o valor do seu rendimento mensal em função de sua venda mensal?

B.8 O gráfico seguinte mostra a temperatura de uma região da cidade de São Paulo desde as 7 h até as 11 h em um dia de inverno.

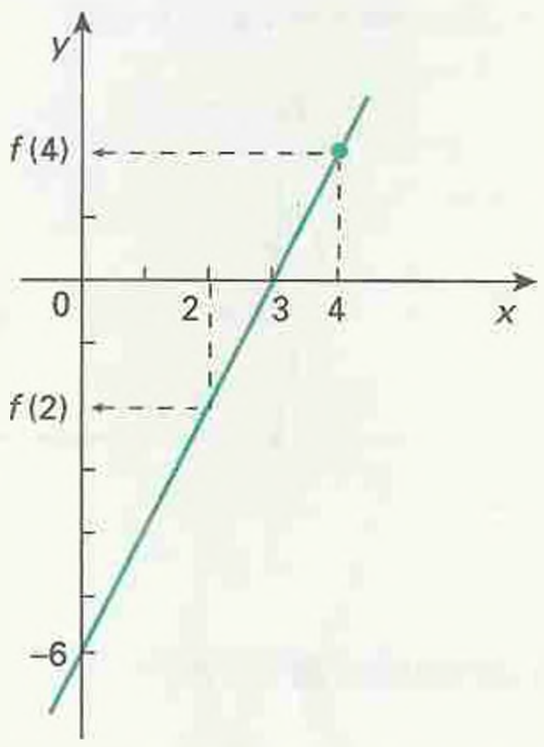


a) Qual a temperatura máxima nesse período?
b) Qual foi a variação da temperatura desde as 9 h até as 11 h?

Exercícios complementares de C.1 a C.3

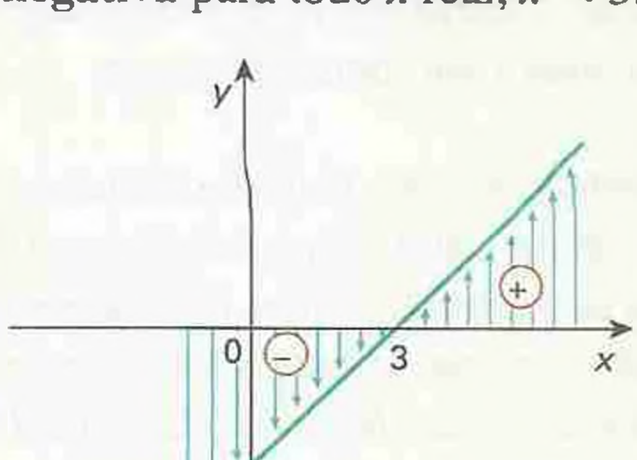
3. VARIAÇÃO DE SINAL DA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Considere a função do 1º grau $f(x) = 2x - 6$, cujo gráfico é dado a seguir.

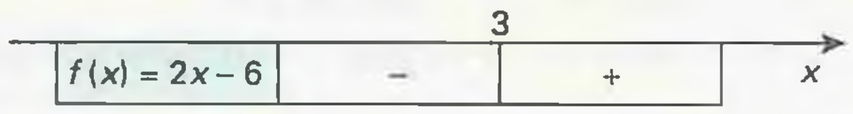


Note que:
- 3 é raiz da função;
- a função é crescente;
- para qualquer x real, $x > 3$, temos $f(x) > 0$; por exemplo, $f(4) > 0$;
- para qualquer x real, $x < 3$, temos $f(x) < 0$; por exemplo, $f(2) < 0$.

Por isso, dizemos que:
- a **função se anula** para $x = 3$;
- a **função é positiva** para todo x real, $x > 3$;
- a **função é negativa** para todo x real, $x < 3$.

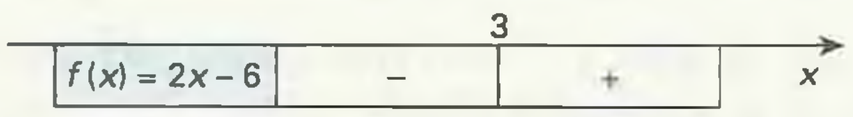


Representando esquematicamente a variação de sinal da função, temos:



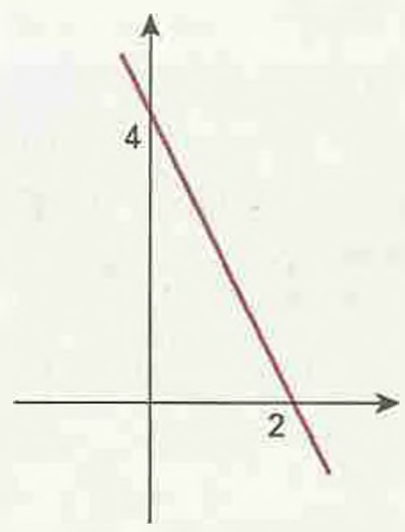
O estudo da variação de sinal da função $f(x) = 2x - 6$ pode ser feito também algebricamente, sem o auxílio do gráfico. Observe que:
- a raiz da função f é a raiz da equação $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$;
- os valores de x para os quais $f(x)$ é positivo ($f(x) > 0$) são as soluções da inequação $2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$;
- os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo ($f(x) < 0$) são as soluções da inequação $2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$.

Logo, temos:



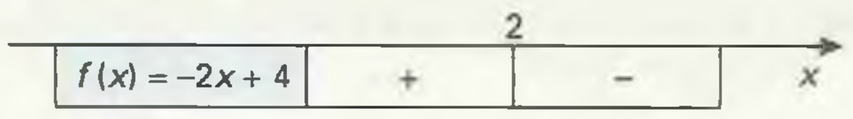
Como outro exemplo, vamos estudar o sinal da função $f(x) = -2x + 4$.

I) Graficamente:



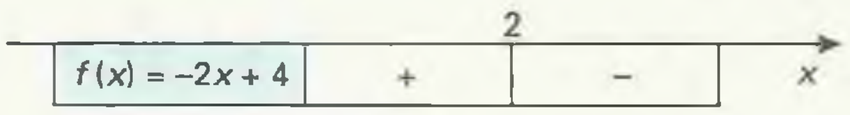
- 2 é raiz da função;
- a função é decrescente;
- para qualquer x real, $x > 2$, temos $f(x) < 0$;
- para qualquer x real, $x < 2$, temos $f(x) > 0$.

Assim, esquematicamente, temos:



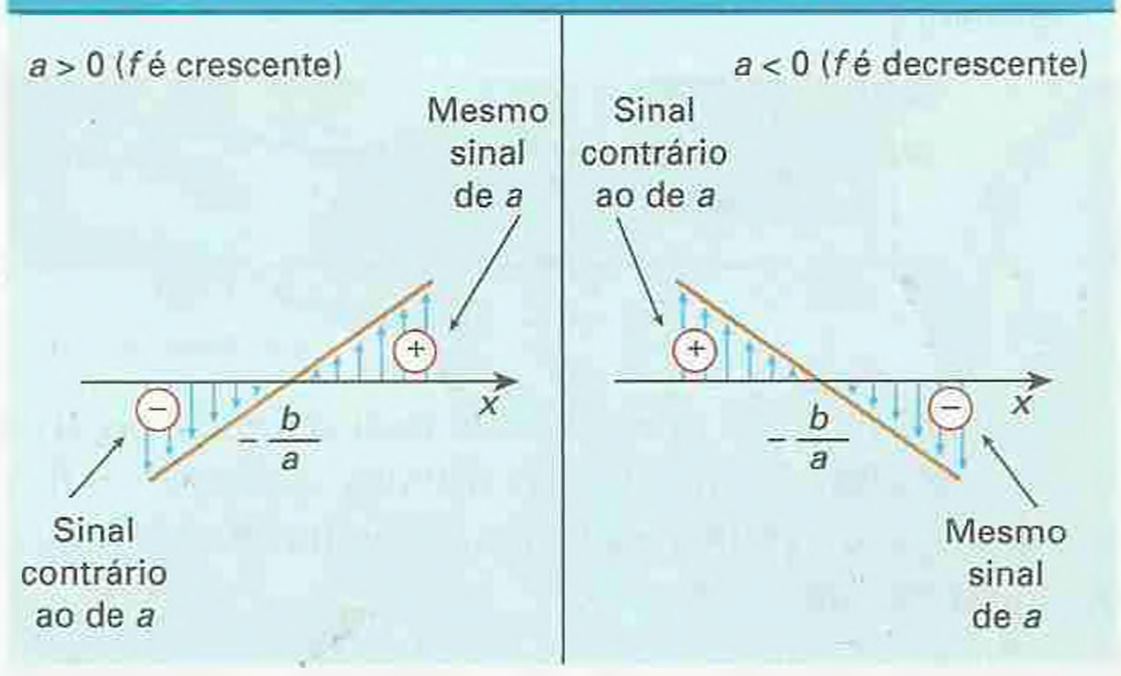
II) Algebricamente:
- a raiz da função f é a raiz da equação $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$;
- os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo ($f(x) < 0$) são as soluções da inequação $-2x + 4 < 0 \Rightarrow x > 2$;
- os valores de x para os quais $f(x)$ é positivo ($f(x) > 0$) são as soluções da inequação $-2x + 4 > 0 \Rightarrow x < 2$.

Logo, temos:



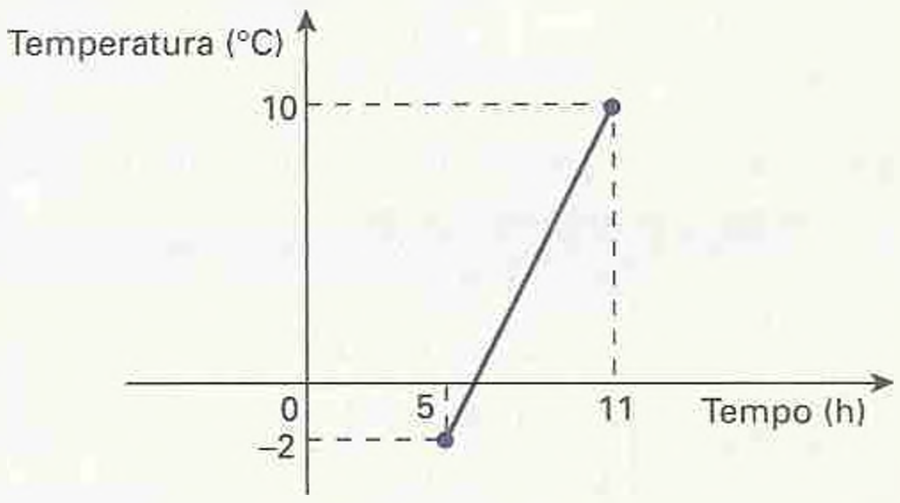
Resumo

Variação de sinal da função $f(x) = ax + b$



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 O gráfico mostra a temperatura de uma região do Rio Grande do Sul desde as 5 h até as 11 h.



a) Em que horário desse período a temperatura atingiu 0°C?

b) Durante quanto tempo desse período a temperatura esteve negativa?

c) Durante quanto tempo desse período a temperatura esteve positiva?

Resolução

a) O gráfico é um segmento de reta contido na reta que passa pelos pontos (5, −2) e (11, 10). A lei $y = f(x)$ que tem como gráfico essa reta é da forma $y = ax + b$. Como os pontos (5, −2) e (11, 10) pertencem a essa reta, temos:

$$\begin{cases} -2 = a \cdot 5 + b & \text{(I)} \\ 10 = a \cdot 11 + b & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (I) e (II):

$$-12 = -6a \Rightarrow a = 2$$

Substituindo $a = 2$ em (I):

$$-2 = 2 \cdot 5 + b \Rightarrow b = -12$$

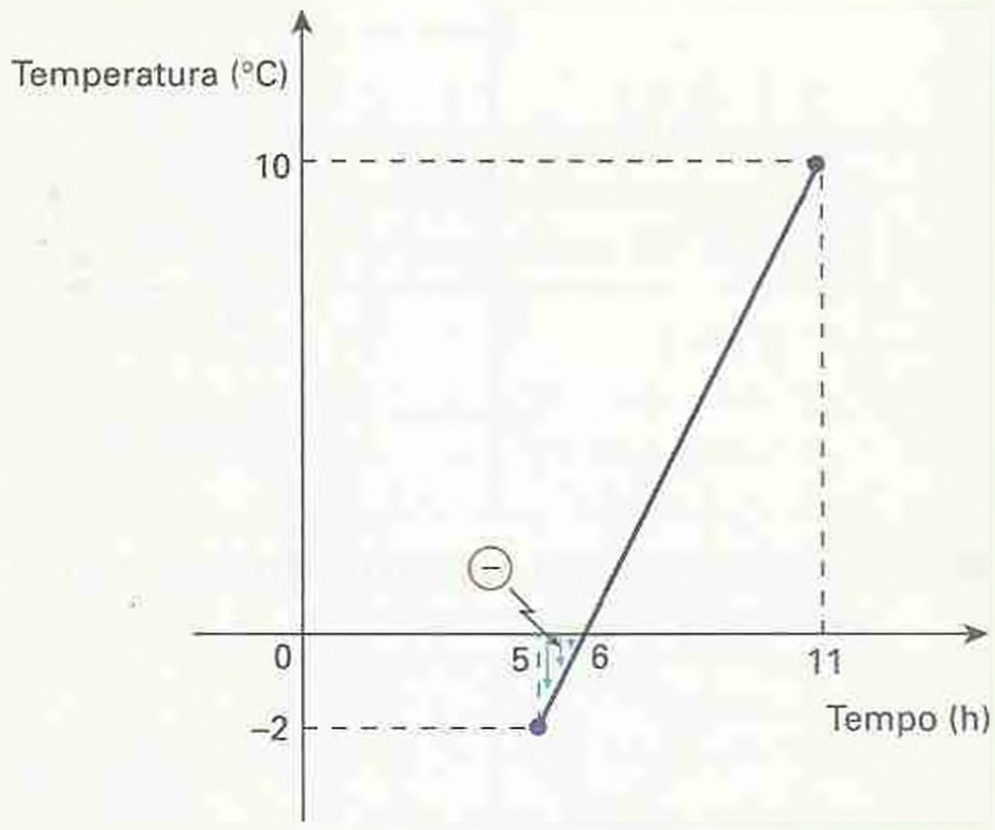
Logo, o gráfico em questão é dado por $y = 2x - 12$, com $5 \leqslant x \leqslant 11$.

Para sabermos o instante em que a temperatura chegou a 0 °C, basta fazer $y = 0$, ou seja:

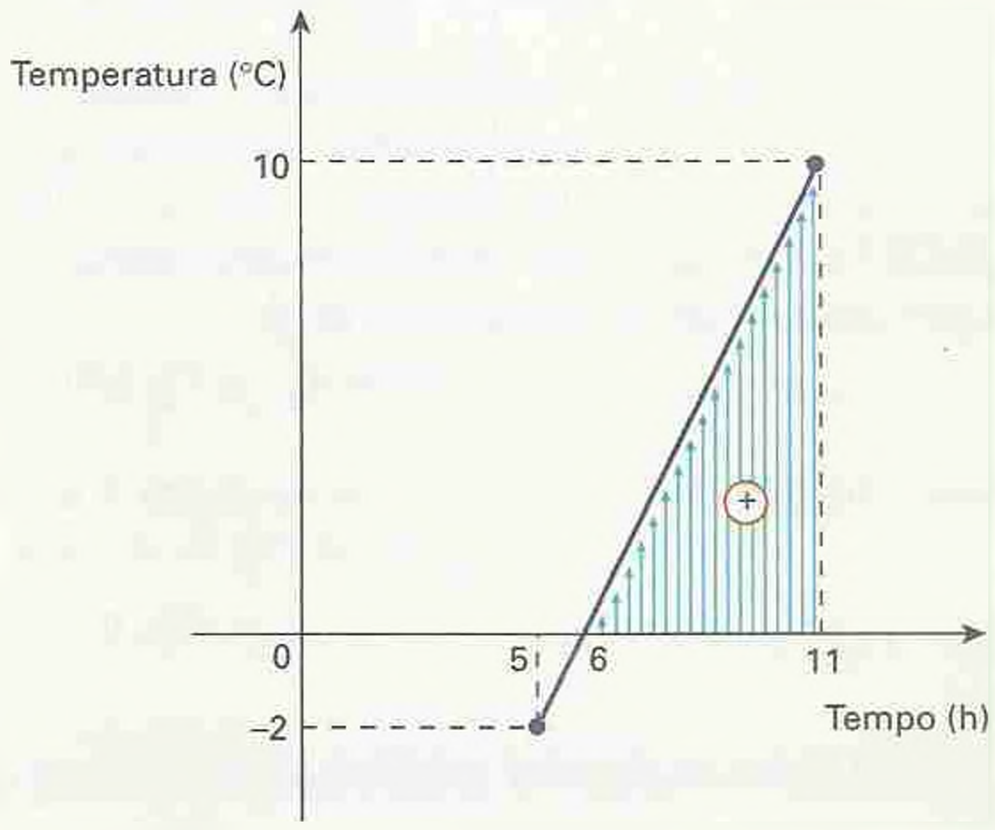
$$0 = 2x - 12 \Rightarrow x = 6$$

Portanto, a temperatura 0 °C deu-se às 6 h.

b) Analisando o gráfico, constatamos que, nesse período, a temperatura esteve negativa para $5 \leqslant x < 6$, ou seja, durante 1 h.



c) Analisando o gráfico, constatamos que, nesse período, a temperatura esteve positiva para $6 < x \leqslant 11$, ou seja, durante 5 h.



EXERCÍCIOS BÁSICOS

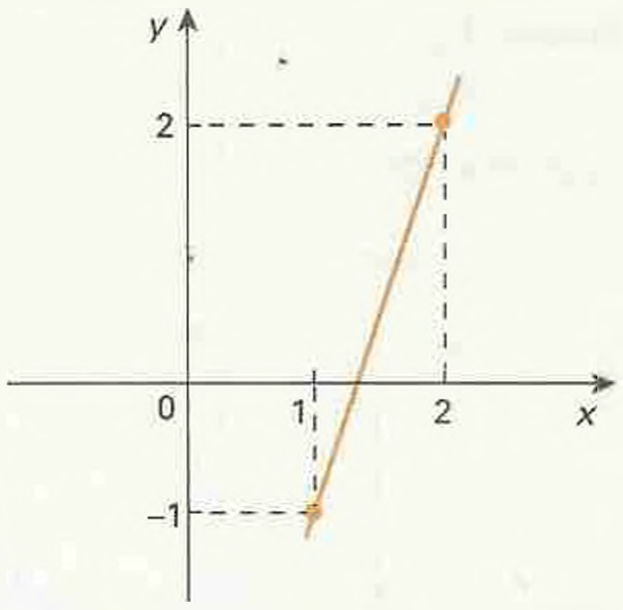
B.9 Discuta, através de gráfico, a variação de sinal de cada uma das funções:

a) $f(x) = 5x - 10$
b) $f(x) = -5x - 10$
c) $f(x) = 3x + 1$
d) $y = -3x + 1$
e) $y = 5x$
f) $y = -5x$
g) $y = x - 2$
h) $y = -x - 2$
i) $f(x) = 4x + 1$
j) $f(x) = -4x + 1$
k) $f(x) = x$
l) $f(x) = -x$

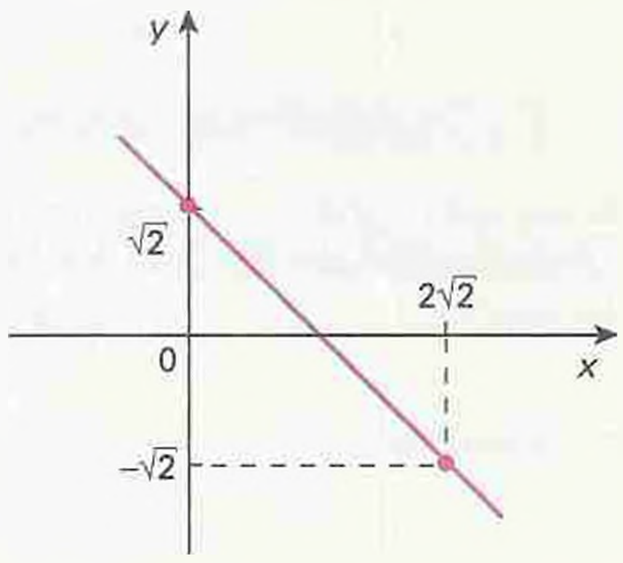
B.10 Discuta, algebricamente, a variação de sinal de cada uma das funções:

a) $f(x) = 2x - 5$
b) $f(x) = -2x - 5$
c) $y = 4x + 2$
d) $y = -4x + 2$
e) $f(x) = \frac{x}{3} + 1$
f) $f(x) = -\frac{x}{3} + 1$
g) $f(x) = \sqrt{2}\,x - \sqrt{6}$
h) $y = -\sqrt{2}\,x - \sqrt{6}$

B.11 Discuta a variação de sinal da função $y = ax + b$, cujo gráfico é a reta:



B.12 Discuta a variação de sinal da função $y = ax + b$, cujo gráfico é a reta:



B.13 Uma função linear f é decrescente. Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $f(1) > 0$ d) $f(-1) < 0$

b) $f(2) < 0$ e) $f(-1) > 0$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ f) $f(0) = 0$

Exercícios complementares de C.4 a C.8

4. FUNÇÃO DEFINIDA POR MAIS DE UMA SENTENÇA

Um elevador é construído segundo as seguintes especificações:

- para carga de massa menor ou igual a 1.000 kg, são usados cabos de aço de 20 mm de diâmetro;
- para carga de massa x kg, com $x > 1.000$, são usados cabos de aço de $\frac{x}{50}$ mm de diâmetro.

A função seguinte mostra o diâmetro $f(x)$ de cada cabo, em função da massa x, sendo $f(x)$ em mm e x em kg:

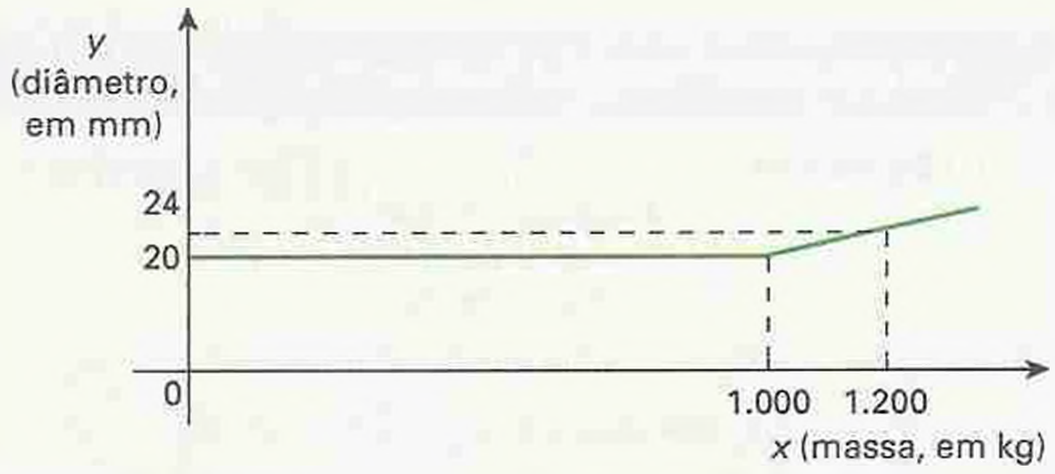
$$f(x) = \begin{cases} 20, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1.000 \\ \frac{x}{50}, \text{ se } x > 1.000 \end{cases}$$

Note que essa função é definida por duas sentenças:

$$f(x) = 20, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1.000$$

$$f(x) = \frac{x}{50}, \text{ se } x > 1.000$$

O gráfico de f é:



Perceba, por esse exemplo, que nem sempre é possível definir uma função através de uma única sentença $y = f(x)$. Por isso estudaremos neste capítulo as funções definidas por duas ou mais sentenças.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.14 (Faap-SP) Seja $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é racional} \\ -1, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$

A expressão $E = \frac{f(0) + f(1) - f(\sqrt{2})}{f(\pi)}$ é igual a:

a) -2 c) -1 e) -3

b) 2 d) 1

B.15 Construa o gráfico de cada uma das funções e dê seu domínio e conjunto imagem:

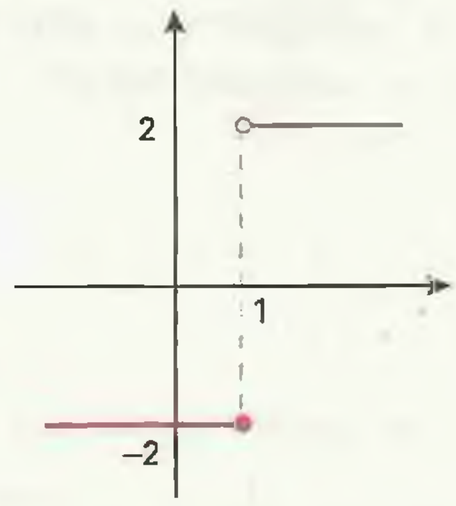
a) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x \leqslant 5 \\ x - 2, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 4, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \leqslant 4 \\ x + 3, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 \\ x - 1, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

B.16 Convenciona-se usar a "bolinha vazia" para se excluir um ponto de um gráfico, por exemplo, o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ é:



De acordo com essa idéia, construa os gráficos:

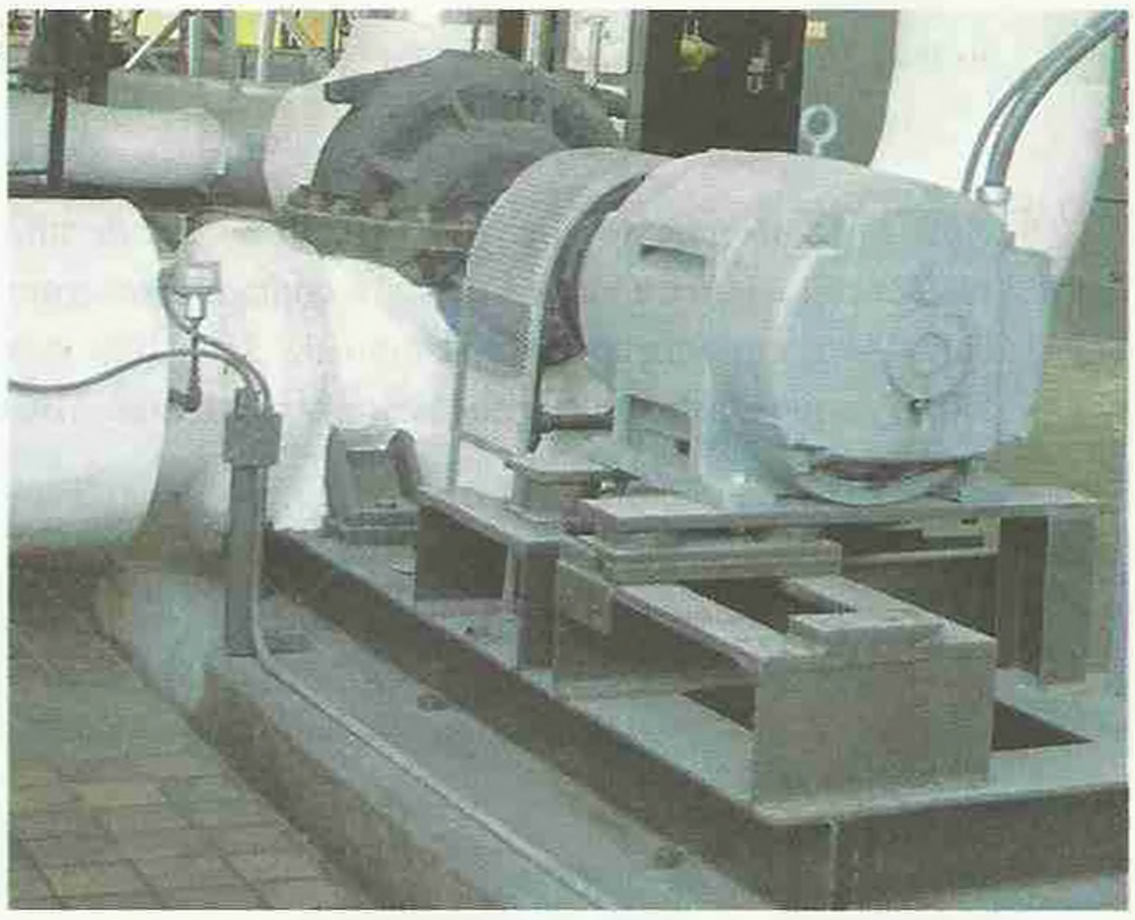
a) $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x + 2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x + 2, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -x + 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 \\ x - 1, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

B.17 A temperatura de uma caldeira varia linearmente de 0 °C a 300 °C no intervalo de 0 min a 10 min e, a partir daí, sua temperatura permanece constante.

CID



a) Qual é a lei que expressa a temperatura da caldeira em função do tempo?
b) Construa o gráfico da temperatura da caldeira em função do tempo.

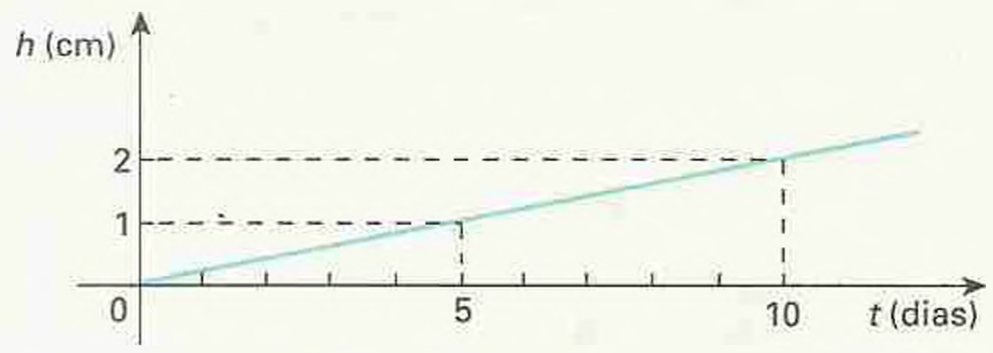
Exercícios complementares C.9 e C.10

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Construa o gráfico da função $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

C.2 (Vunesp) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos colocados por ele num gráfico, resulta a figura abaixo. Se for mantida sempre essa relação entre tempo (t) e altura (h), a planta terá, no trigésimo dia, uma altura igual a:

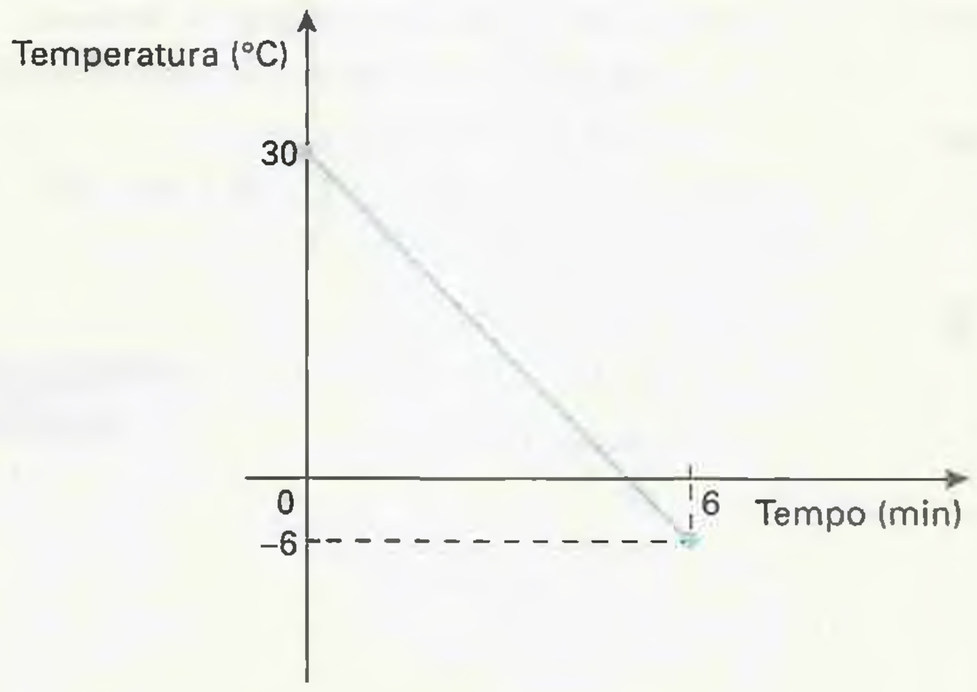
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 3 cm
d) 15 cm
e) 30 cm



C.3 (U. Católica de Salvador-BA) Em um certo país, as pessoas maiores de 21 anos pagam um imposto progressivo sobre os rendimentos. Esse imposto corresponde a 10% sobre as primeiras 1.000 unidades monetárias recebidas e 20% sobre os ganhos que ultrapassam esse valor. Nessas condições, indicando por i o valor do imposto e por r uma renda superior a 1.000, tem-se:

a) $i = 0{,}2r - 100$
b) $i = 100 + 0{,}2r$
c) $i = 0{,}3r$
d) $i = 100 + 0{,}3r$
e) $i = r - 100$

C.4 Uma barra de ferro foi aquecida até uma temperatura de 30 °C e a seguir foi resfriada até a temperatura de −6 °C. O gráfico mostra a temperatura da barra em função do tempo.



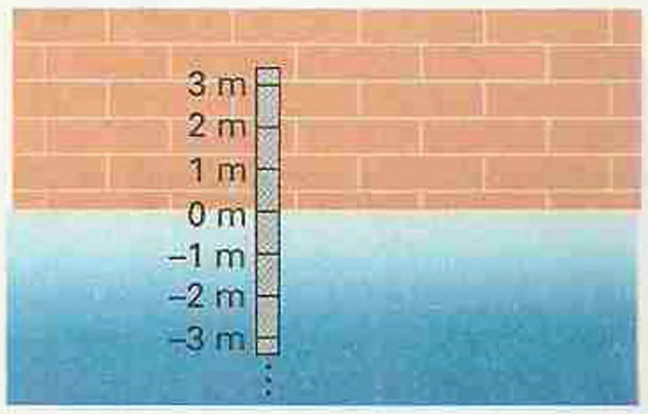
a) Depois de quanto tempo, após o início do resfriamento, a temperatura da barra atingiu 0 °C?
b) De 0 a 6 min, em que intervalo de tempo a temperatura da barra esteve positiva?
c) De 0 a 6 min, em que intervalo de tempo a temperatura da barra esteve negativa?

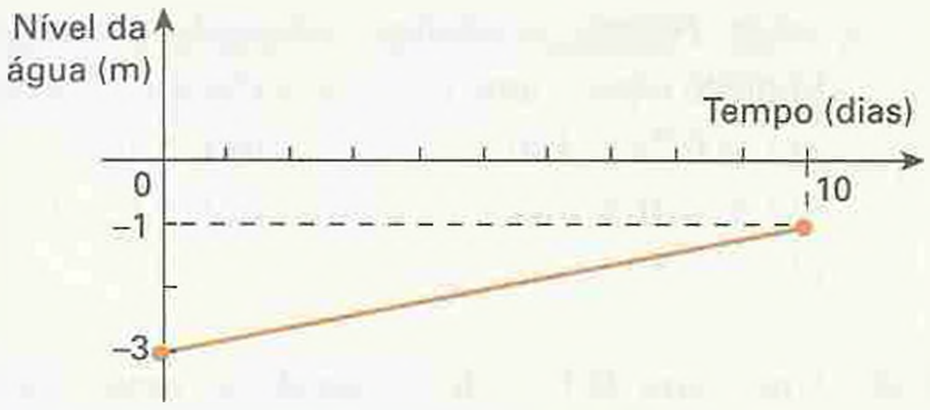
C.5 Um banco paga as contas de um cliente. As contas vencem, no mês de abril, segundo a função

$y = -\frac{2x}{3} + 18$, em que $x \in \{1, 2, 3, ..., 30\}$ e y é o saldo do cliente em milhares de reais, no dia x de abril.

a) Em que dia do mês de abril o saldo do cliente chega a R$ 0,00?
b) Em que intervalo de tempo, no mês de abril, o saldo é positivo?
c) Em que intervalo de tempo, no mês de abril, o saldo é negativo?

C.6 A água que usamos em nossas casas vem de grandes represas que devem ser conservadas sempre limpas. Suas margens não devem ser povoadas, para que esgotos não sejam despejados em suas águas.
Suponha que numa dessas represas o medidor do nível da água consista de uma barra graduada, perpendicular à superfície da água, conforme a figura, sendo 0 m o nível mínimo para abastecimento da região servida pela represa. O gráfico mostra o nível dessa represa em função do tempo, nos dez primeiros dias do mês de maio.





Supondo que o gráfico em todo o mês de maio seja um segmento de reta, responda:

a) Em que dia do mês de maio o nível da água atingirá o mínimo necessário para o abastecimento da região?
b) Durante quanto tempo no mês de maio o nível da água se apresentará negativo?
c) Durante quanto tempo no mês de maio o nível da água se apresentará positivo?

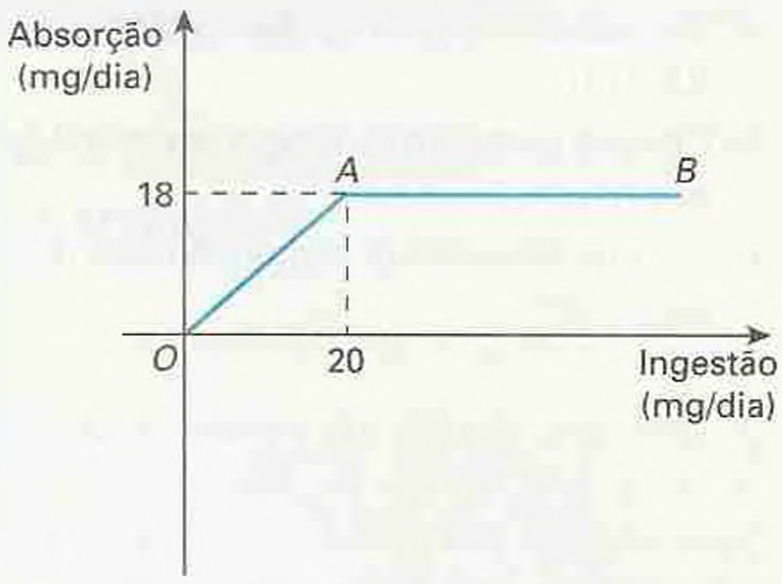
C.7 (Unicamp-SP) O gráfico da função $y = mx + n$ passa pelos pontos $A(1, 3)$ e $B(2, 8)$. Pode-se afirmar que:

a) a única raiz da função é 4.
b) $f(3) = 10$
c) $f(4) = 12$
d) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 3$
e) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$

C.8 (UFCE) A função $f(x) = ax + b$ é tal que $f(3) = 0$ e $f(4) > 0$. Pode-se afirmar que:

a) $a < 0$
b) f é crescente em todo seu domínio.
c) $f(0) = 3$
d) f é constante.
e) $f(2) > 0$

C.9 (UFMG) Observe o gráfico, em que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas. Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia.



A única afirmativa *falsa* relativa ao gráfico é:

a) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
b) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.
c) Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
d) Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

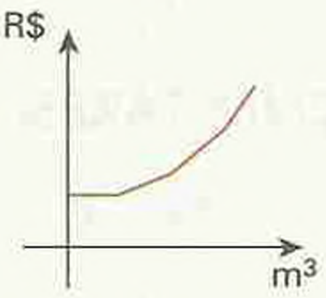
C.10 (Enem) O documento abaixo é a conta de luz de uma residência. Além do valor a pagar, a conta mostra como calculá-lo, em função do consumo de água (em m^3). Observe que existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

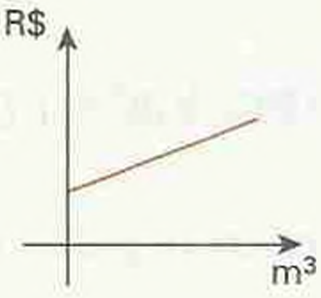
Companhia de Saneamento

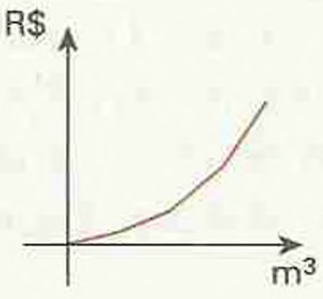
Tarifas de água/m^3

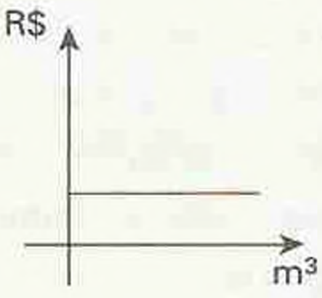
Faixas de consumo	Tarifa	Consumo	Valor - R$
até 10	5,50	tarifa mínima	5,50
11 a 20	0,85	7	5,95
21 a 30	2,13		
31 a 50	2,13		
acima de 50	2,36		
		Total	11,45

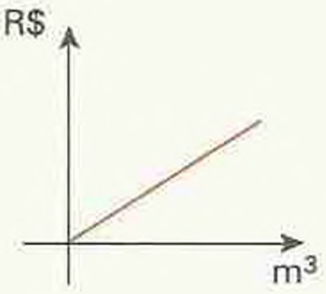
Dos gráficos abaixo, o que melhor representa o valor da conta de água, de acordo com o consumo, é:

a) R$ 

d) R$ 

b) R$ 

e) R$ 

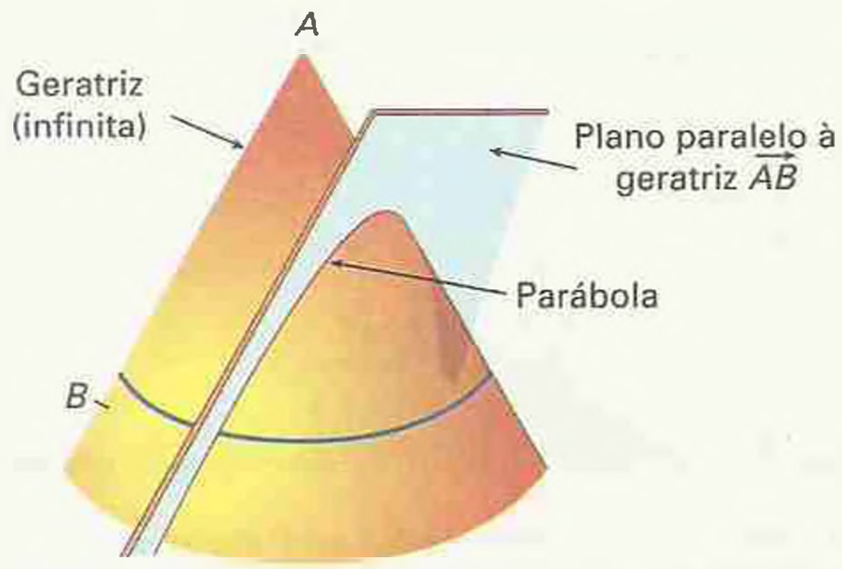
c) R$ 

Capítulo 15

FUNÇÃO QUADRÁTICA OU DO 2º GRAU

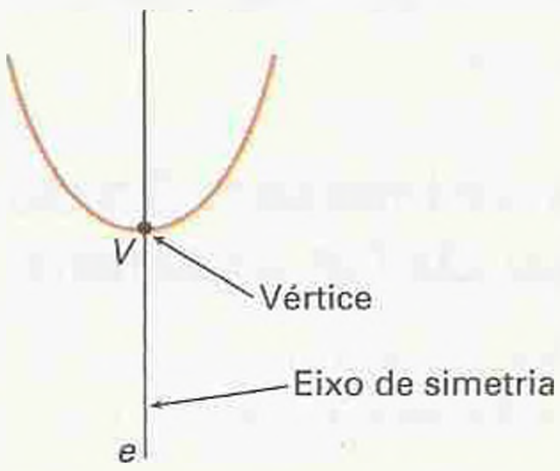
1. A PARÁBOLA

Para o estudo da função do 2º grau é necessário o conhecimento de uma curva plana denominada **parábola**. Essa curva é a intersecção da superfície de um cone com um plano paralelo a uma das geratrizes desse cone.



Nomenclatura

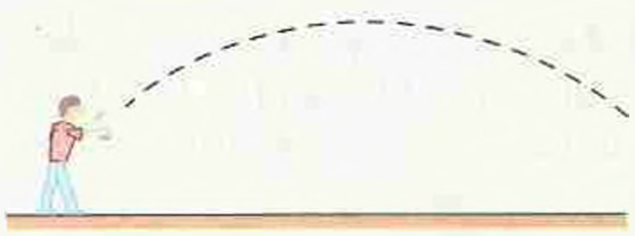
A parábola é composta por dois ramos simétricos em relação a uma reta *e* chamada de **eixo de simetria**. O ponto *V* da parábola que pertence ao eixo de simetria é chamado de **vértice da parábola**.



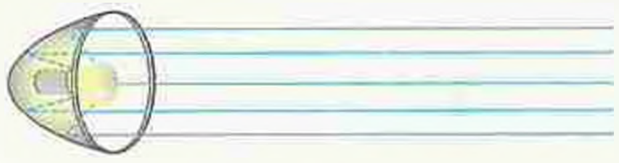
Em várias situações do dia-a-dia pode-se perceber a presença da parábola.

Exemplos

a) Quando lançamos uma pedra obliquamente para cima, sua trajetória é **parabólica**.



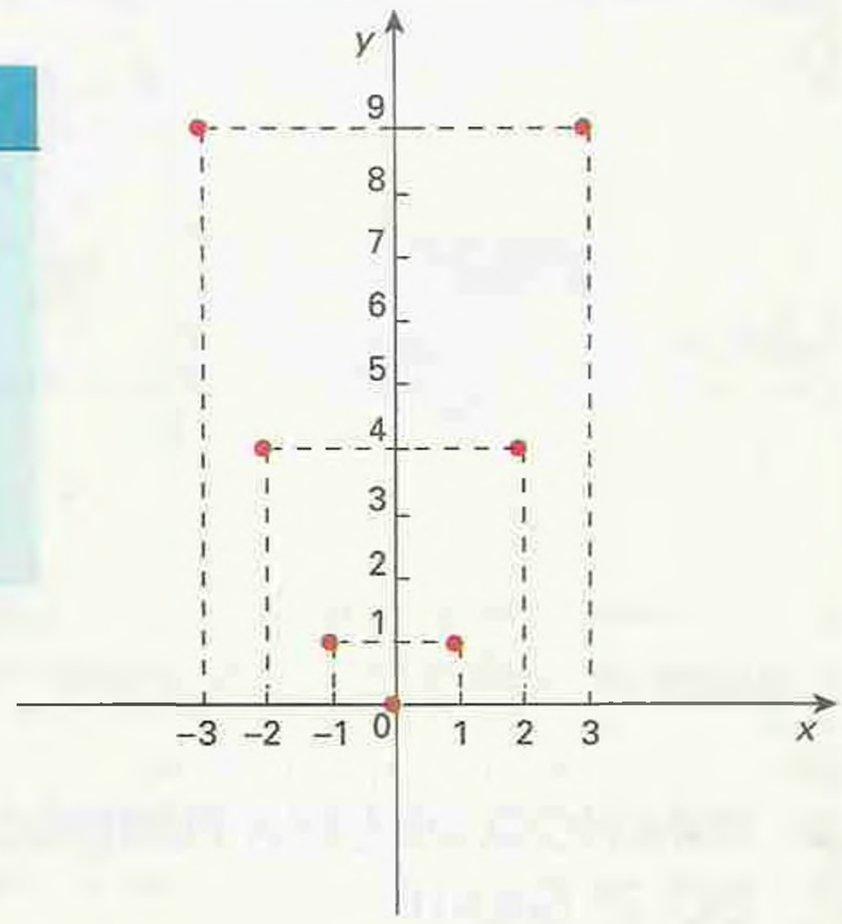
b) Quando acendemos o farol do carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada, incidem num espelho **parabólico** e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria.



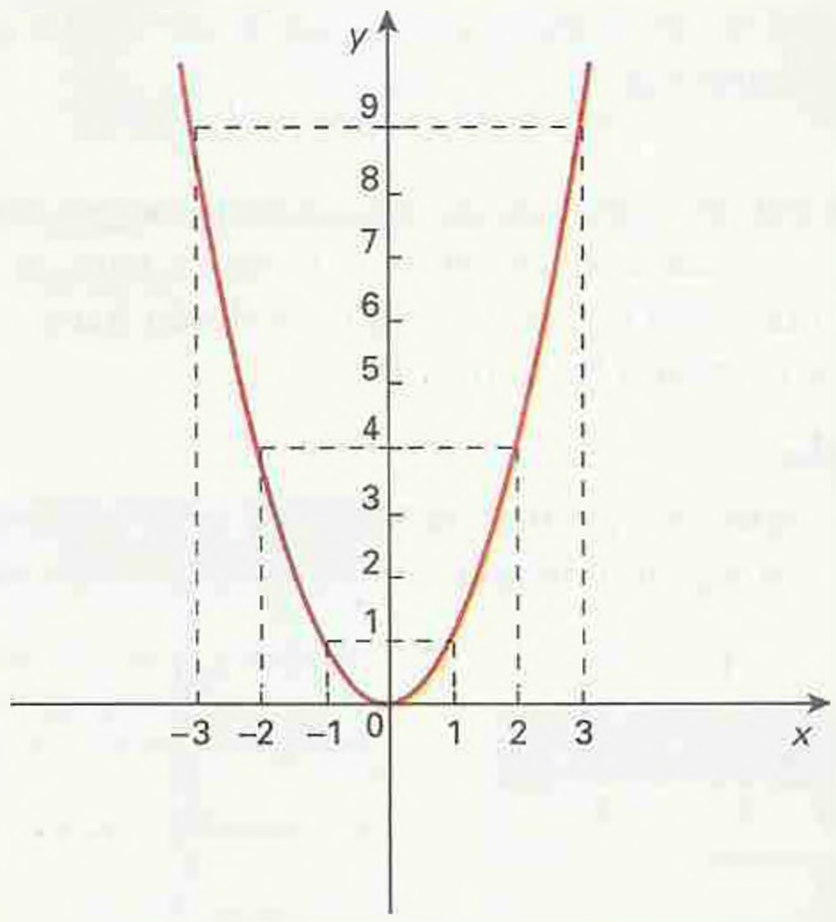
Como você vê, embora poucos saibam o nome dessa curva, ela faz parte do nosso cotidiano.

A parábola está intimamente ligada ao estudo das funções. Observe, por exemplo, alguns pontos do gráfico da função $f(x) = x^2$:

x	$f(x)$
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



Se atribuirmos a x os infinitos valores reais, obteremos a parábola:



Neste capítulo, vamos estudar funções como a desse exemplo, isto é, funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Definição

Toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada de **função quadrática** ou **função do 2º grau**.

Exemplos

a) $y = 3x^2 - x - 2$

b) $f(x) = 4x^2 - 2$

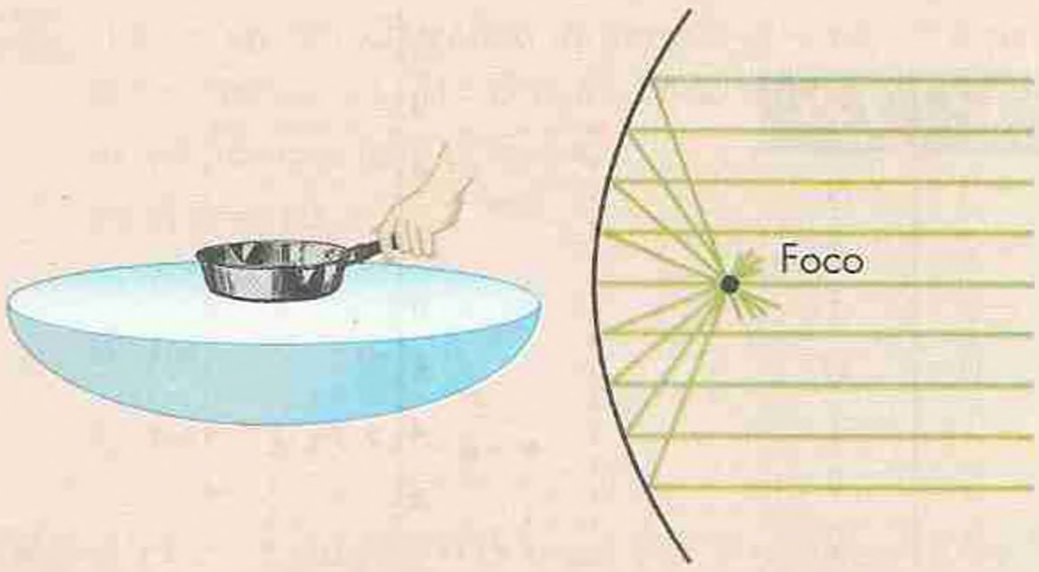
c) $f(x) = \frac{5x^2}{3} - \frac{x}{2}$

d) $y = x^2$

Fogões solares

É possível utilizar a radiação solar para fins domésticos, por exemplo, para cozinhar alimentos. Para isso deve-se concentrar essa radiação em pequenas regiões, utilizando-se lentes ou espelhos.

Os fogões solares usam espelhos **parabólicos** para a concentração de calor. Os raios solares incidem na superfície do espelho e ao se refletirem passam pelo foco do espelho. O calor concentrado nesse ponto é suficiente para cozinhar alimentos.



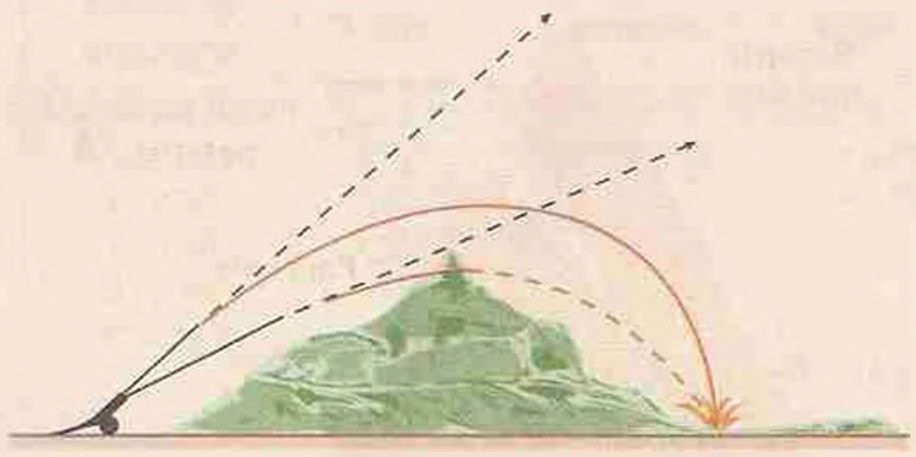
As recepções de ondas eletromagnéticas através de antenas parabólicas ocorrem de maneira semelhante.

Como sabemos que o gráfico de uma função do 2º grau é uma parábola, marcamos no plano cartesiano os pontos obtidos pela tabela e a seguir unimos esses pontos desenhando uma parábola.

Balística

As funções do segundo grau são fundamentais nos estudos de **balística**, ciência que se ocupa do movimento de projéteis. Conhecidas as velocidades do projétil e o ângulo de elevação, é possível determinar a equação da trajetória que é um arco de parábola.

Para uma distância dada, sempre existem dois ângulos de elevação que enviarão um projétil ao lugar desejado. Na prática, pode ser necessária a mais alta das duas trajetórias para superar um obstáculo. Exceção: o ângulo de 45° é o maior alcance possível e é único.



As linhas pretas representam o percurso que seguiriam os projéteis se não existisse a força da gravidade. As linhas vermelhas indicam as trajetórias reais dos projéteis.

2. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU

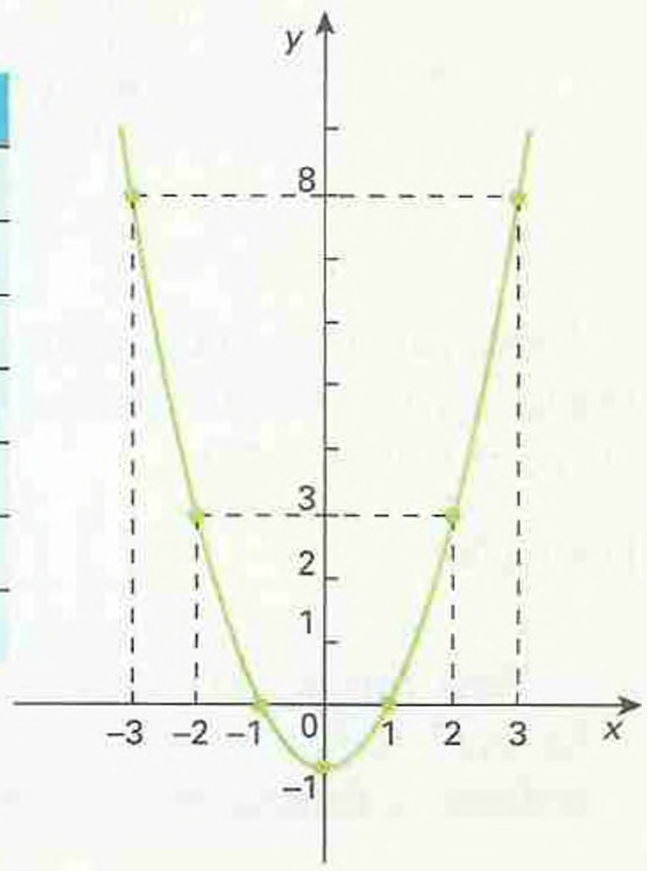
Demonstra-se que o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é uma parábola.

Essa parábola tem o eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox e sua concavidade é voltada para o sentido positivo do eixo Oy, se $a > 0$, ou voltada para o sentido negativo do eixo Oy, se $a < 0$.

Exemplo

Para esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 1$, podemos construir a seguinte tabela:

x	y $x^2 - 1$
−3	8
−2	3
−1	0
0	−1
1	0
2	3
3	8



3. PONTOS NOTÁVEIS DA PARÁBOLA

Alguns pontos da parábola, por facilitarem a construção do gráfico da função do 2º grau, merecem destaque. Vejamos quais são eles.

Os pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox* (se existirem)

Para obtê-los, a partir de $y = ax^2 + bx + c$, basta atribuirmos o valor **zero** à variável y e resolver a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{(I)}$$

Para resolvê-la, utilizamos a fórmula de Bhaskara, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Se a equação (I) tiver $\Delta > 0$, então terá duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$. Assim, os pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox são $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

Resumindo:

$\Delta > 0$

$a > 0$ (concavidade para cima)	$a < 0$ (concavidade para baixo)

Exemplo

Dada a função do 2º grau $y = 2x^2 - x - 1$, para obtermos os pontos de intersecção de seu gráfico com o eixo Ox, atribuímos o valor zero à variável y e resolvemos a equação $2x^2 - x - 1 = 0$.

Temos $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$.

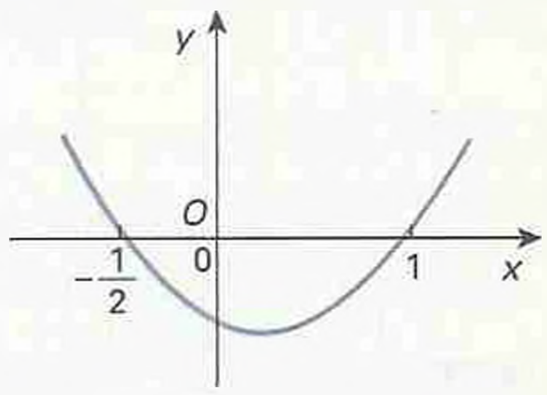
Como $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, em que x_1 e x_2 são raízes da equação.

Determinando x_1 e x_2, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2}$$

$$\therefore\ x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$$

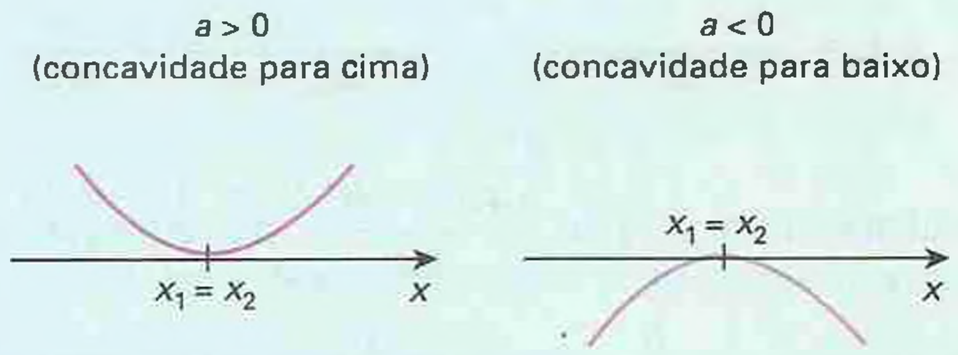
Temos ainda que o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$); logo, a parábola tem a concavidade voltada para cima:



- Se a equação (I) tiver $\Delta = 0$, então terá duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$. Assim, a parábola será tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.

Resumindo:

$\Delta = 0$



Exemplo

Na função $f(x) = -4x^2 - 12x - 9$, fazendo $f(x) = 0$, obtemos as raízes de f, ou seja:

$$-4x^2 - 12x - 9 = 0$$

Temos $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(-4)(-9) = 0$.

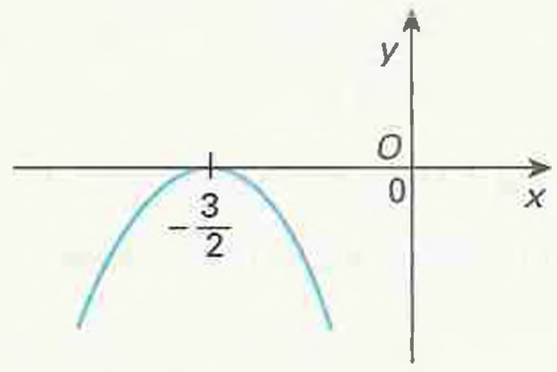
Como $\Delta = 0$, temos duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$); portanto a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.

Determinando essas raízes, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2(-4)}$$

$$\therefore\ x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$$

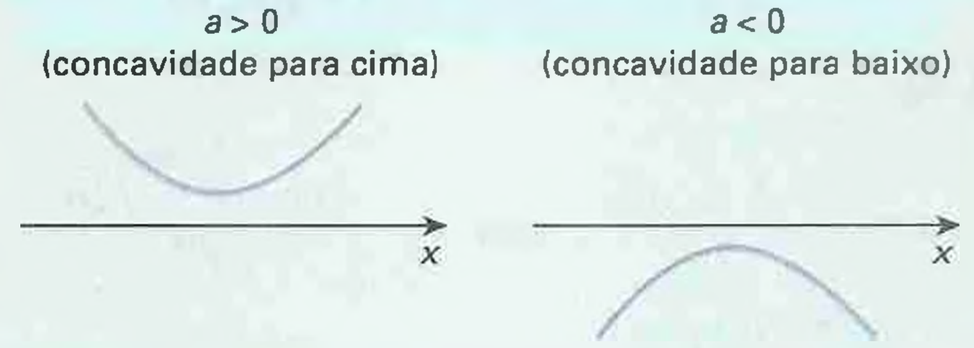
O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a parábola tem a concavidade voltada para baixo:



- Se a equação (I) tiver $\Delta < 0$, então não terá raízes reais. Assim, a parábola não terá ponto em comum com o eixo Ox.

Resumindo:

$\Delta < 0$

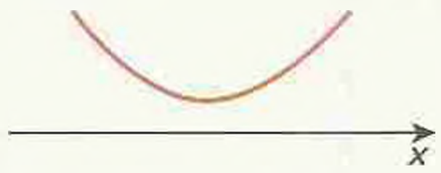


Exemplo

Seja $y = 2x^2 + x + 1$. Fazendo $y = 0$, temos $2x^2 + x + 1 = 0$.

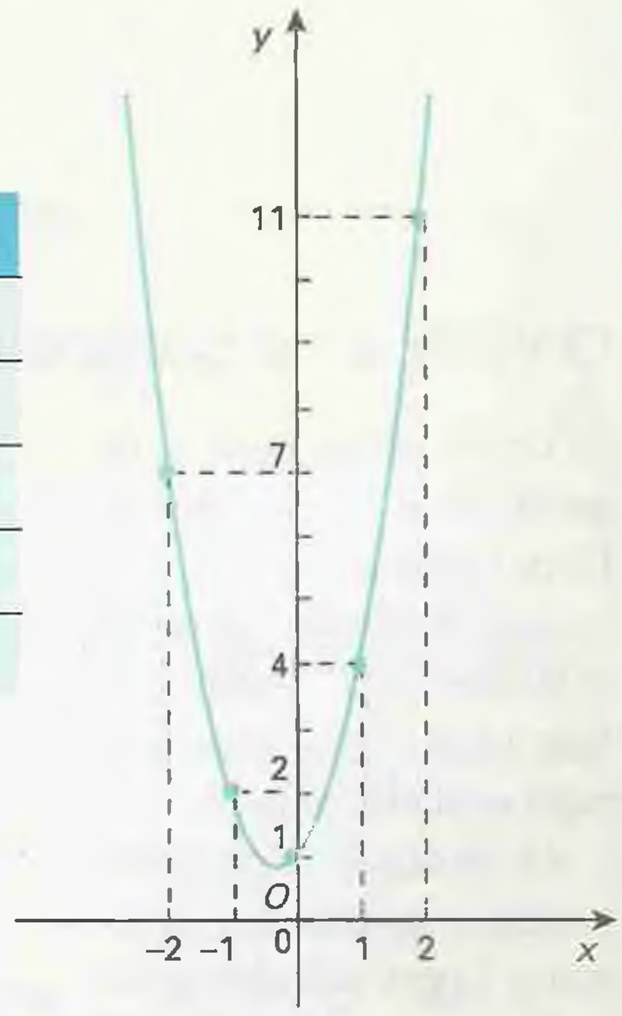
$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7$$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais. Isso significa que a parábola correspondente ao gráfico da função não tem ponto em comum com o eixo Ox. Sabemos ainda que o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$); logo, a concavidade é voltada para cima.



Para determinarmos a posição dessa parábola, podemos construir uma tabela:

x	$y = 2x^2 + x + 1$
−2	7
−1	2
0	1
1	4
2	11



Nos subitens seguintes, estudaremos alguns pontos notáveis da parábola que dispensarão a construção dessa tabela.

O ponto de intersecção da parábola com o eixo *Oy*

Para obtê-lo, a partir de $y = ax^2 + bx + c$, basta atribuirmos o valor **zero** à variável x:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$$

Assim, o ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy é $(0, c)$.

Exemplo

Para esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$, vamos obter os pontos de intersecção da parábola com os eixos Ox e Oy.

Fazendo $y = 0$, temos $x^2 - 6x + 5 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$\therefore x_1 = 5,\ x_2 = 1$$

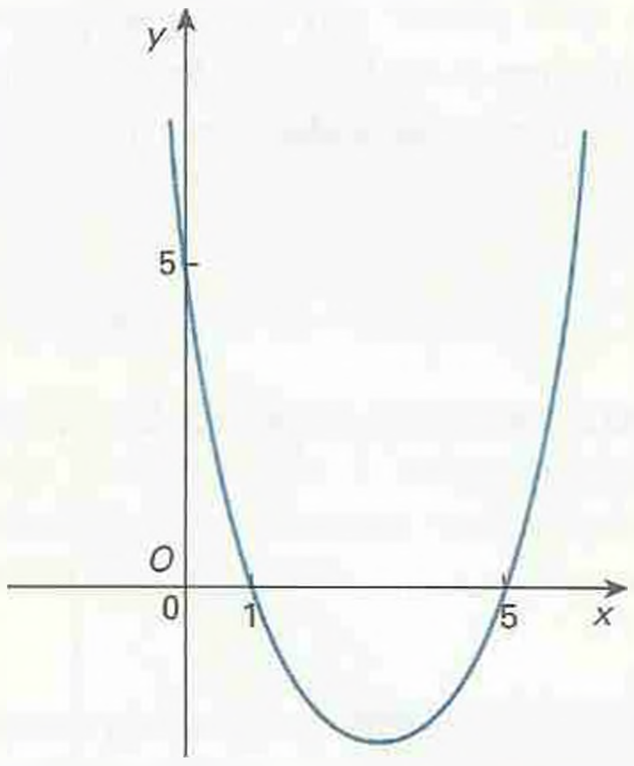
Portanto, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $(1, 0)$ e $(5, 0)$.

Fazendo $x = 0$, temos:

$$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5$$

Então, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.

O esboço do gráfico é:

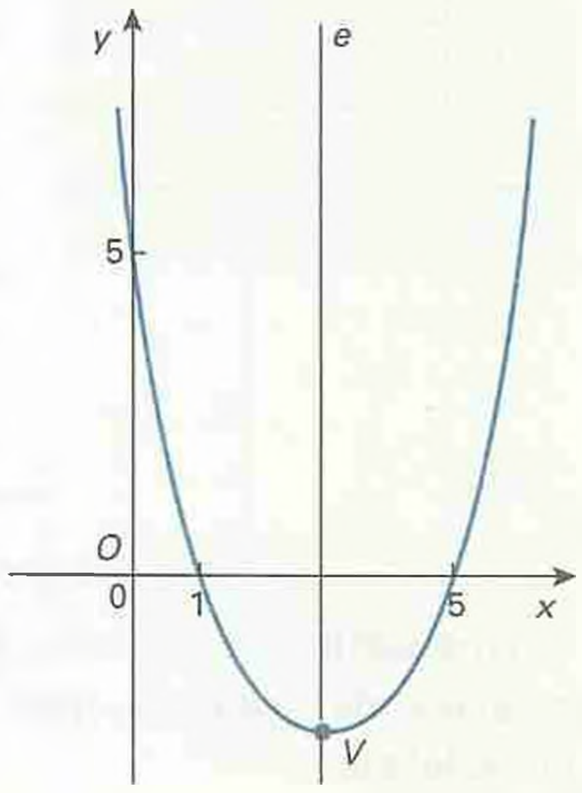


O vértice da parábola

Outro ponto notável da parábola é o seu vértice. Como obtê-lo?

No exemplo anterior esboçamos o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$, representado ao lado.

O vértice V da parábola pertence ao eixo de simetria e. Logo, sua abscissa é a do ponto médio do segmento de extremos $(1, 0)$ e $(5, 0)$, ou seja, $x = 3$.

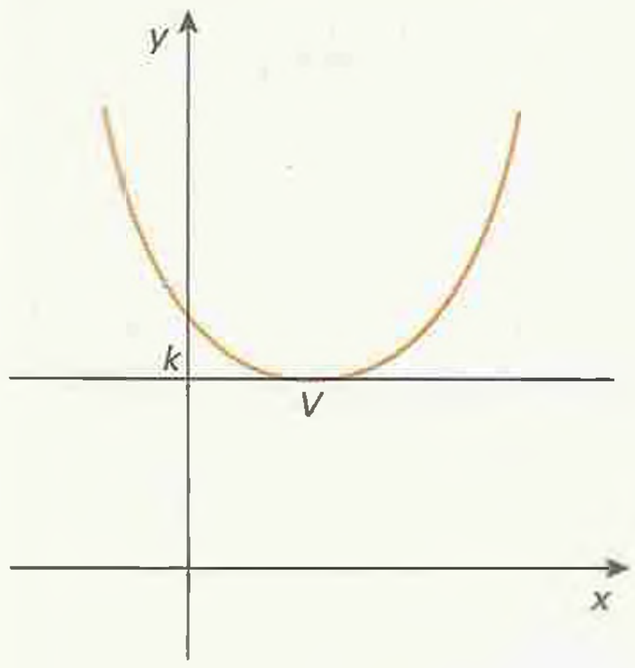


Substituindo x por 3 em $y = x^2 - 6x + 5$, obtemos a ordenada do vértice:

$$y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 \Rightarrow y = -4$$

Portanto o vértice da parábola é o ponto $V(3, -4)$.

Para determinar, genericamente, as coordenadas do vértice V da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, vamos supor que a ordenada de V seja o número k. A reta de equação $y = k$ possui apenas o ponto V em comum com a parábola:



(É claro que o gráfico pode estar em uma posição diferente dessa. A ilustração é só para facilitar o raciocínio.)

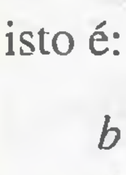
Portanto o sistema $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & \text{(I)} \\ y = k & \text{(II)} \end{cases}$

tem uma única solução. Substituindo (II) em (I), obtemos $ax^2 + bx + c = k$, ou seja, $ax^2 + bx + c - k = 0$ (III). Como essa equação deve ter raízes reais e iguais (pois o sistema tem uma única solução), impomos que $\Delta = 0$, isto é:

$$b^2 - 4a(c - k) = 0$$
$$\therefore b^2 - 4ac + 4ak = 0$$
$$\therefore k = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Substituindo k por $\frac{4ac - b^2}{4a}$ na equação (III), obtém-se $x = -\frac{b}{2a}$. (Faça você mesmo as contas.)

Concluímos, então, que o vértice da parábola é o ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Esboçar o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$, dando seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Fazendo $y = 0$, temos $-x^2 + 4x - 5 = 0$.

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)(-5) \therefore \Delta = -4$$

Como $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais; portanto a parábola não intercepta o eixo Ox.

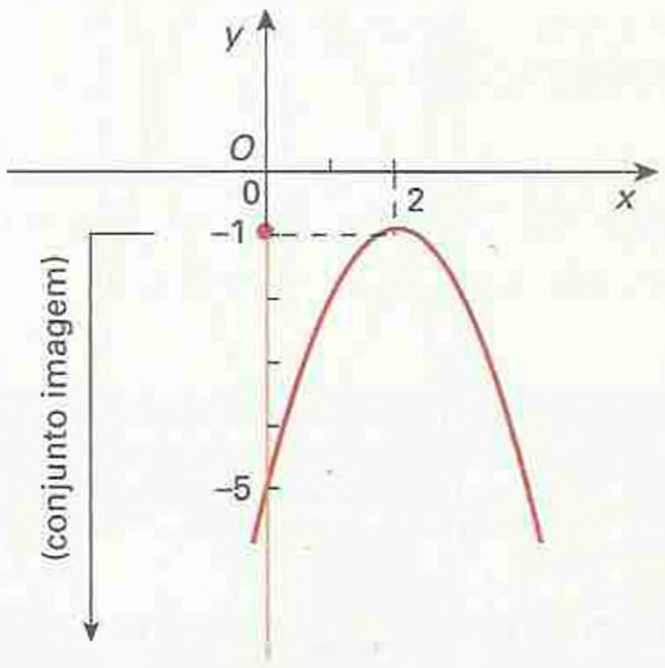
Fazendo $x = 0$, temos $y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 5 \Rightarrow y = -5$.

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -5)$.
Para determinarmos o vértice $V(x_V, y_V)$, vamos usar as fórmulas:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} \Rightarrow x_V = 2$$

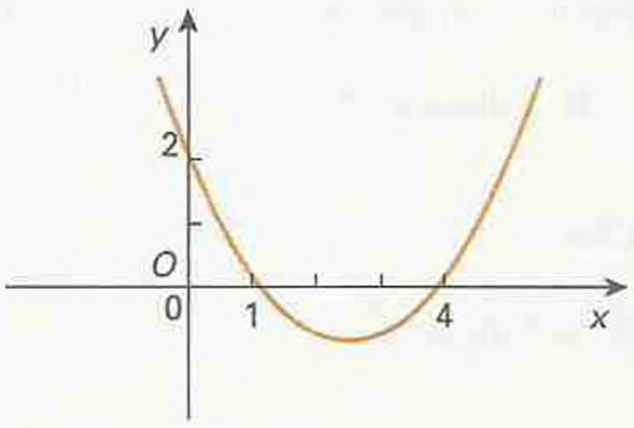
$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4(-1)} \Rightarrow y_V = -1$$

Temos, então, que $V(2, -1)$.
O esboço do gráfico é:



O domínio da função é $\mathbb{R}$.
O conjunto imagem é $\text{Im} =]-\infty, -1]$.

R.2 Observe o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Determinar a, b e c.



Resolução

$(0, 2) \in f \Rightarrow 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$(1, 0) \in f \Rightarrow 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$(4, 0) \in f \Rightarrow 0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$

Assim, para determinar a, b e c, basta resolvermos o sistema $\begin{cases} c = 2 & \text{(I)} \\ a + b + c = 0 & \text{(II)} \\ 16a + 4b + c = 0 & \text{(III)} \end{cases}$

Substituindo c por 2 em (II) e (III), e, a seguir, multiplicando por -4 ambos os membros de (II), temos:

$$\begin{cases} a + b + 2 = 0 \cdot (-4) \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - 4b - 8 = 0 \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases}$$

Somando, membro a membro, essas duas últimas equações, temos $12a - 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Substituindo, em (II), a por $\frac{1}{2}$ e c por 2, obtemos:

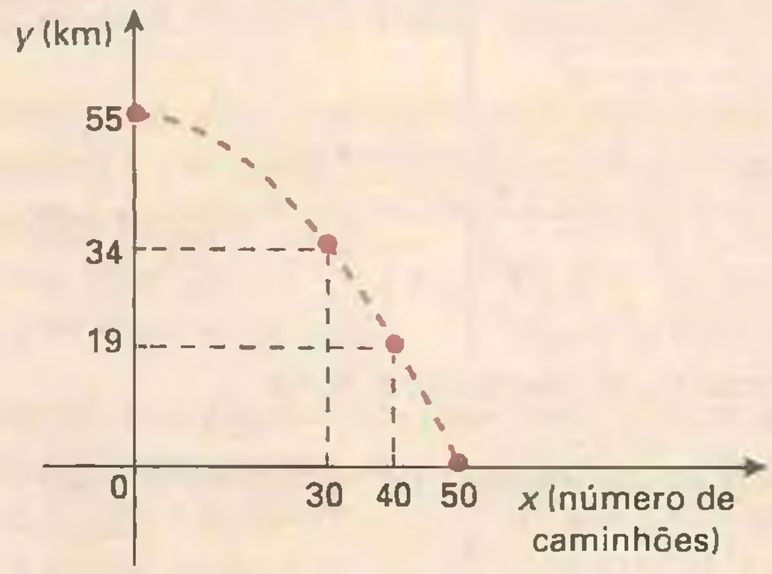
$$\frac{1}{2} + b + 2 = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{2}$$

Temos, então, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$ e $c = 2$.

A função do segundo grau na economia

Imagine que a Petrobrás destine determinada verba para a construção de oleodutos ou compra de caminhões. O dinheiro pode ser empregado apenas na compra de caminhões, ou apenas na construção de oleodutos, ou ainda, uma parte na compra de caminhões e a outra na construção de oleodutos. Algumas das possibilidades estão descritas na tabela e no gráfico abaixo:

Número de caminhões	km de oleodutos
50	0
0	55
40	19
30	34



Em economia, esse gráfico é chamado de **curva de possibilidade de produção**. Essa curva pode ser aproximada por uma função do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$. Para obter os valores de a, b e c, substituem-se x e y pelas coordenadas de cada um de três pontos escolhidos na tabela, por exemplo, (50, 0), (0, 55) e (40, 19), obtendo-se o sistema:

$$\begin{cases} a \cdot 50^2 + b \cdot 50 + c = 0 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 55 \\ a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 19 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -\frac{1}{50}$, $b = -\frac{1}{10}$ e $c = 55$. Assim, a função do segundo grau que aproxima esse gráfico é:

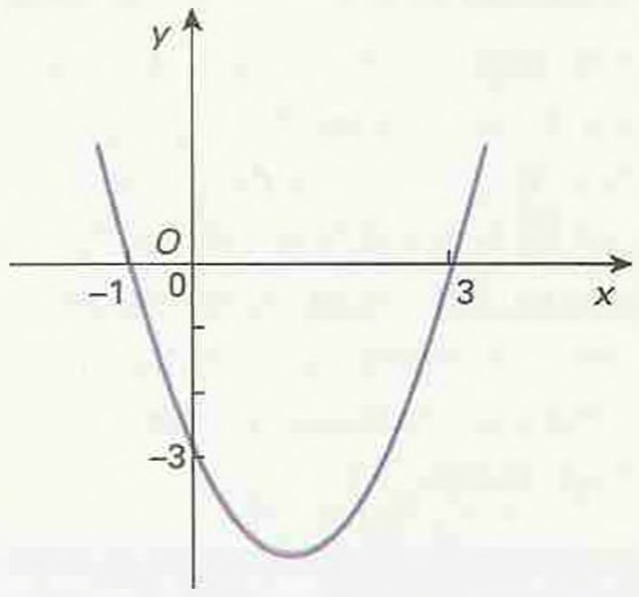
$$y = -\frac{x^2}{50} - \frac{x}{10} + 55$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções, dando seu domínio e conjunto imagem:

a) $y = x^2 - 8x + 12$
b) $y = x^2 - 4x - 5$
c) $y = -4x^2 + 3x$
d) $y = -x^2 + 9$
e) $y = 4x^2 + 8x$
f) $y = 2x^2 - 2x + 1$
g) $y = -5x^2 + 2x - 1$
h) $y = x^2 - 6x + 9$
i) $y = -x^2 - 4x - 4$
j) $y = 3x^2$
k) $y = -5x^2$

B.2 O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ é:

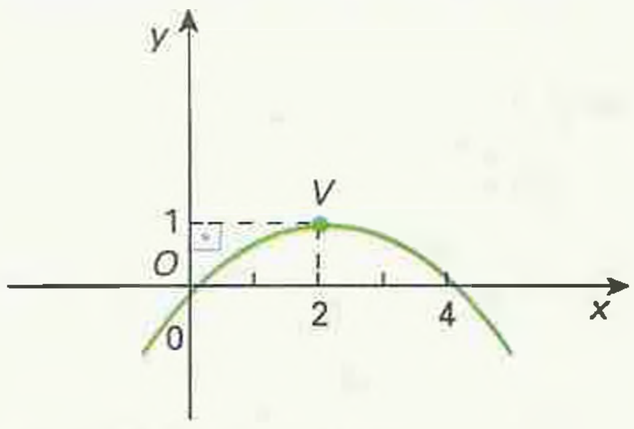


Determine:

a) os valores de a, b e c;

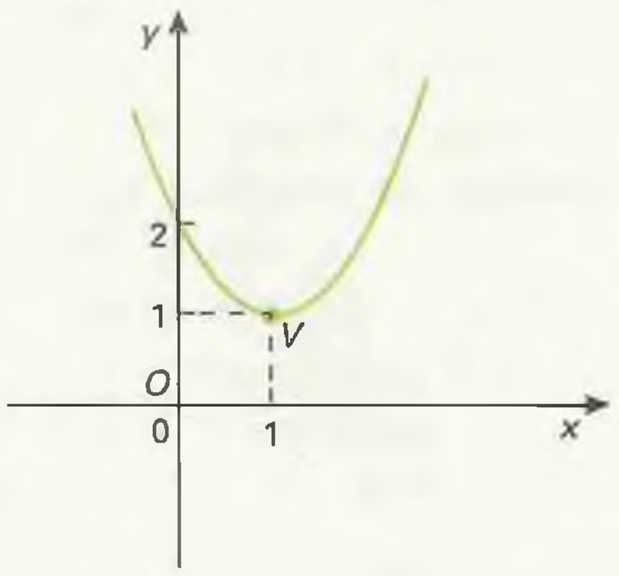
b) o conjunto imagem dessa função.

B.3 O gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ é:



Determine os valores de a, b e c.

B.4 O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:



a) Determine os valores de a, b e c.

b) Calcule $f(4)$.

B.5 Para que valores reais de m a função $f(x) = mx^2 + 3x + 1$ possui duas raízes reais e distintas?

B.6 Para que valores reais de m a função $f(x) = x^2 + mx + m - 1$ admite duas raízes reais e iguais?

B.7 Para que valores reais de m a função $f(x) = (m - 2)x^2 + 2mx + m + 3$ não admite raízes reais?

B.8 Construa o gráfico de cada uma das funções e dê seu domínio e conjunto imagem:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, \text{ se } x \leq 3 \\ 6, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leq 2 \\ -x + 4, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

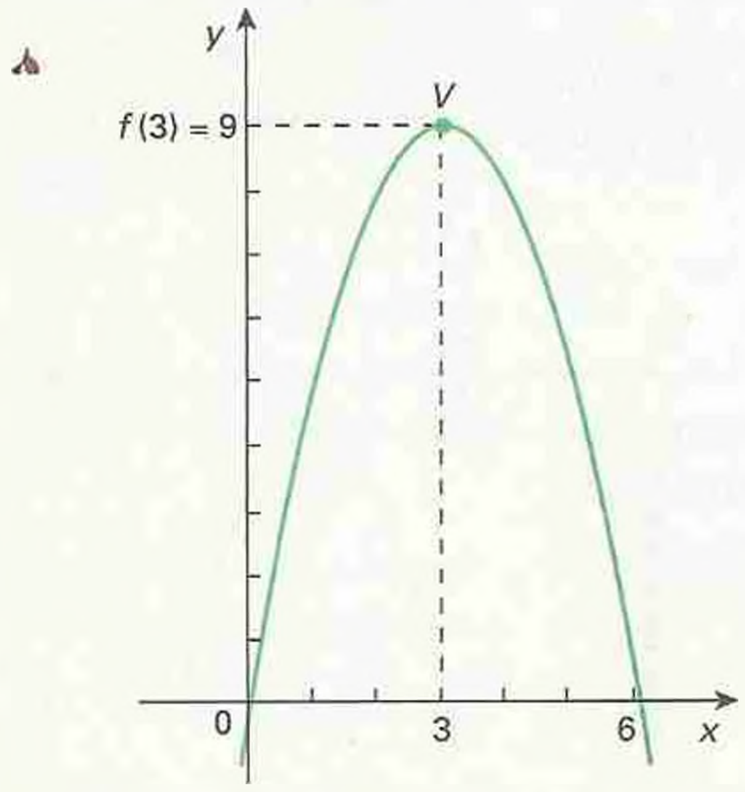
c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leq 2 \\ -x^2 + 5x - 6, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

Exercícios complementares de C.1 a C.11

4. MÁXIMO (MÍNIMO) DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU

Valor máximo de uma função do 2º grau

Seja a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico é:



Note que $f(3) \geqslant f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$. Por isso dizemos que:

- $f(3) = 9$ é o **valor máximo** da função f;
- 3 é o **ponto de máximo** da função f.

Generalizando

Se o ponto V é vértice da parábola que representa graficamente a função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, então a abscissa de V, $-\frac{b}{2a}$, é **ponto de máximo** e a ordenada de V, $-\frac{\Delta}{4a}$, é o **valor máximo** da função f.

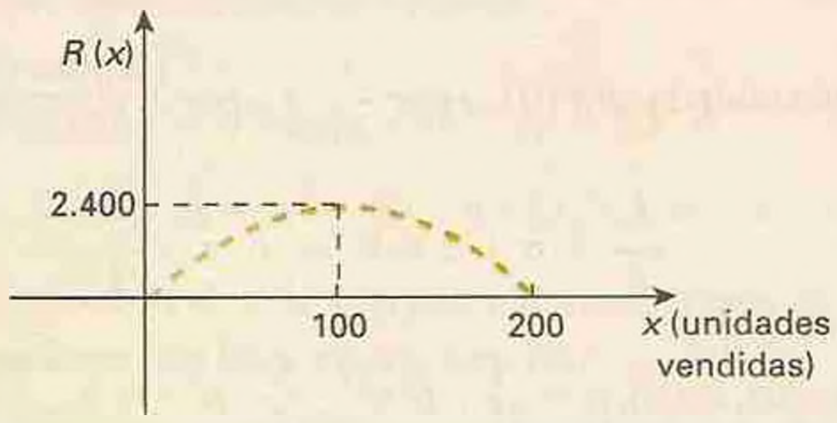
A receita máxima

Suponha que uma empresa venda seus produtos de modo que o preço unitário dependa da quantidade de unidades adquiridas pelo comprador. Por exemplo, se, sob determinadas restrições, para cada x unidades vendidas o preço unitário é $40 - \frac{x}{5}$ reais, então a receita (total bruto recebido pela venda) é dada por:

$R(x) = x\left(40 - \frac{x}{5}\right)$, ou ainda, $R(x) = -\frac{x^2}{5} + 40x$

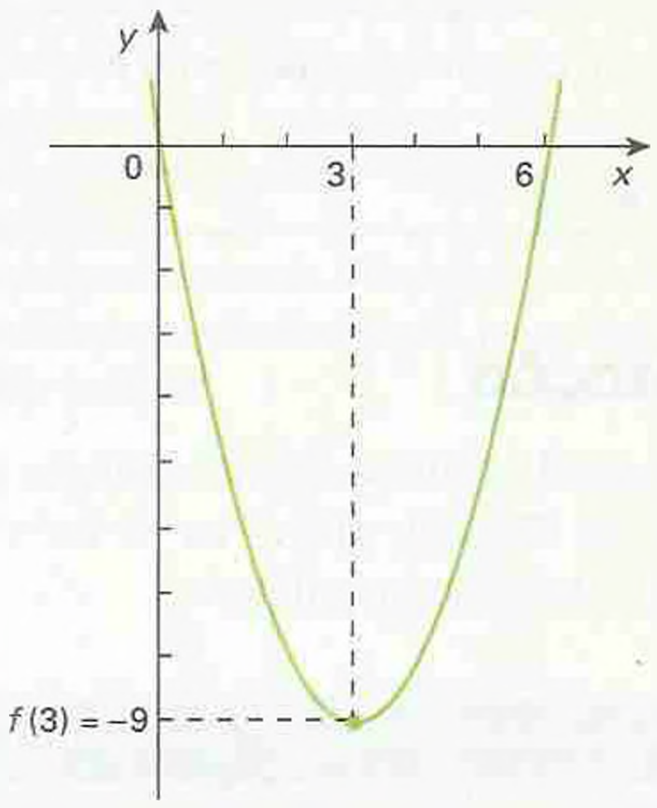
Em economia $R(x)$ é chamada de **função receita**.

Uma análise da função receita nos permite tomar decisões acertadas no sentido de otimizar a lucratividade da empresa. Por exemplo, na função $R(x)$ acima, podemos concluir que a receita máxima é R$ 2.400,00 e é obtida com a venda de 100 unidades do produto. Observe:



Valor mínimo de uma função do 2º grau

Seja a função $f(x) = x^2 - 6x$, cujo gráfico é:



Note que $f(3) \leqslant f(x)$, $\forall x, x \in D(f)$. Por isso dizemos que:

- $f(3) = -9$ é o **valor mínimo** da função f;
- 3 é o **ponto de mínimo** da função f.

Generalizando

Se o ponto V é vértice da parábola que representa graficamente a função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, então a abscissa de V, $-\frac{b}{2a}$, é **ponto de mínimo** e a ordenada de V, $-\frac{\Delta}{4a}$, é o **valor mínimo** da função f.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Esboçar o gráfico da função $y = 2x^2 + 2x + 1$ e determinar seu **valor mínimo** e seu **ponto de mínimo**.

Resolução

Fazendo $y = 0$, temos $2x^2 + 2x + 1 = 0$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$
$$\Delta = -4$$

Como $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo Ox.

Fazendo $x = 0$, temos $y = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1$.

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, 1)$.

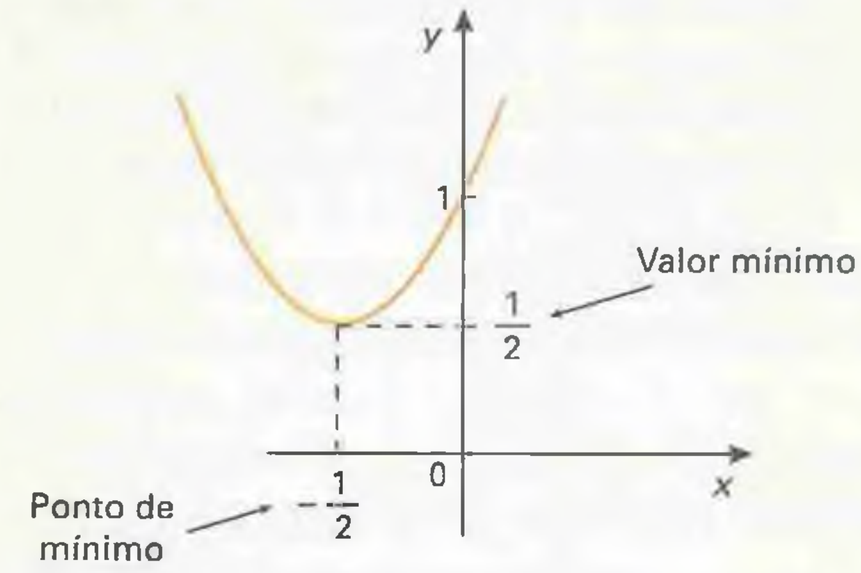
Para a determinação do vértice $V(x_V, y_V)$, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{2}{2 \cdot 2} \therefore x_V = -\frac{1}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-(-4)}{4 \cdot 2} \therefore y_V = \frac{1}{2}$$

Assim, temos $V\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

O esboço do gráfico é:



O valor mínimo da função é $\frac{1}{2}$.

O ponto de mínimo da função é $-\frac{1}{2}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Esboce o gráfico e determine o valor máximo (ou o mínimo) e o ponto de máximo (ou o de mínimo) de cada uma das funções:

a) $y = x^2 - 8x + 7$
b) $y = -2x^2 + 2x - 3$
c) $y = -x^2 + 2x + 8$
d) $y = 3x^2 - 2x + 1$

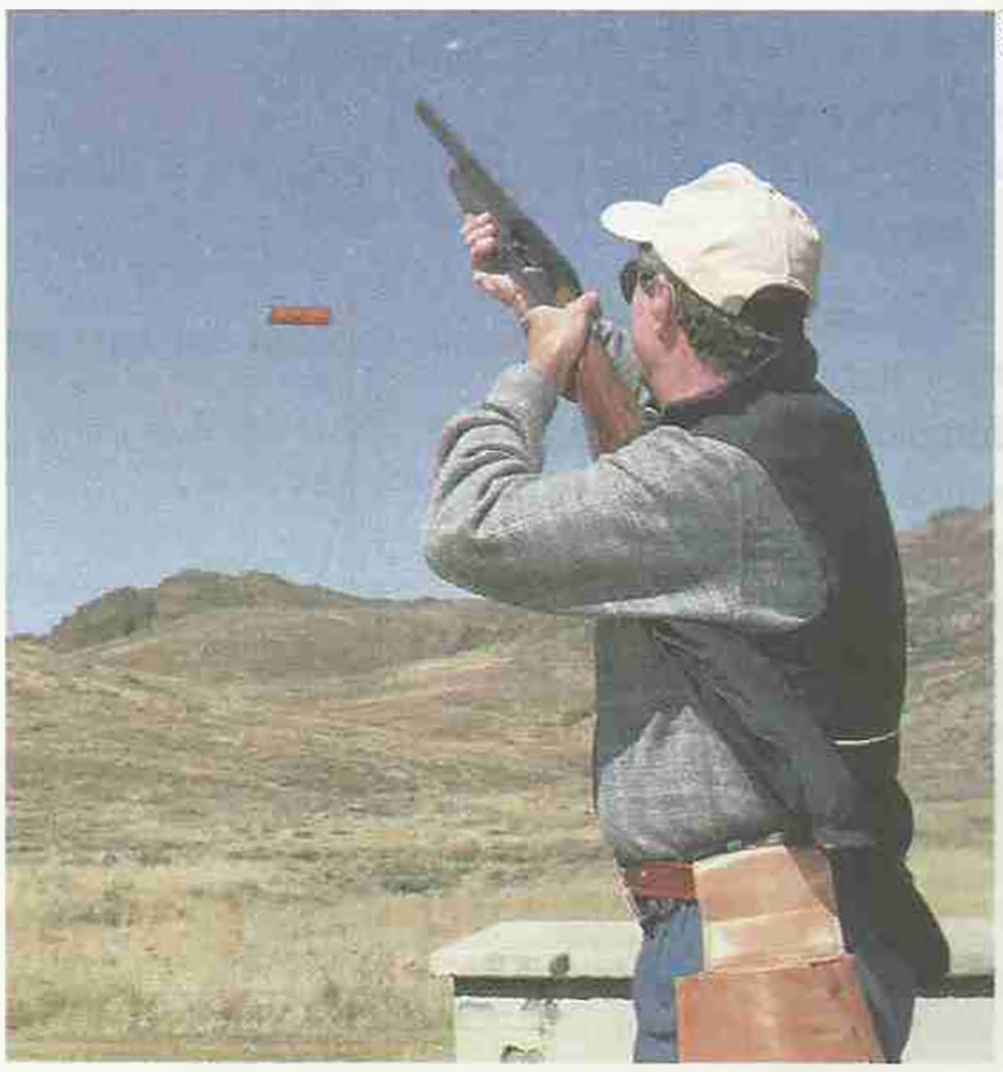
B.10 Determine o valor máximo (mínimo) e o ponto de máximo (mínimo) de cada uma das funções:

a) $y = 2x^2 - 12x + 10$
b) $y = -x^2 + 4x + 5$
c) $y = x^2 - 9$
d) $y = -x^2 + 16$
e) $y = 3x^2$
f) $y = x^2 - 2x + 4$
g) $y = -x^2 + 3x - 5$
h) $y = x^2 + 9x$
i) $y = -x^2 - 4x$

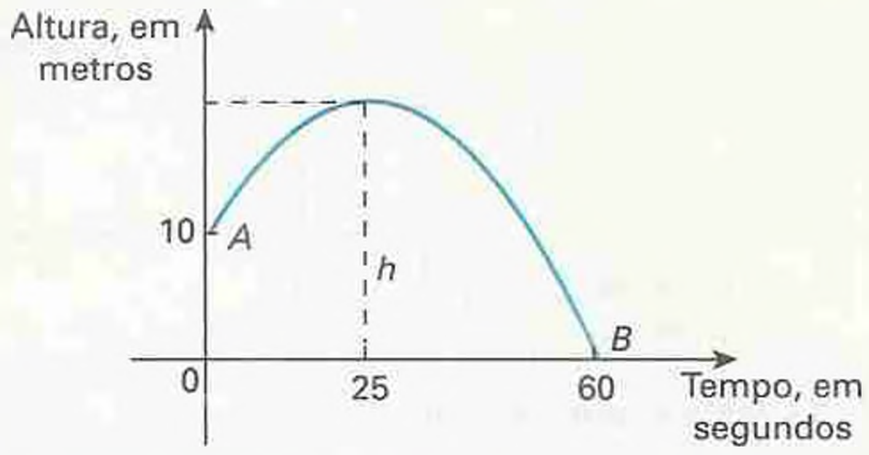
B.11 Determine m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o valor máximo da função $f(x) = -x^2 + 4x + m$ seja 1.

B.12 Calcule o valor de m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o valor mínimo da função $f(x) = x^2 + mx - m - 6$ seja -9.

B.13 Sabe-se que, sob um certo ângulo de tiro, a altura atingida por uma bala, em metros, em função do tempo, em segundos, é dada por $h(t) = -20t^2 + 200t$. Qual a altura máxima atingida pela bala? Em quanto tempo, após o tiro, a bala atinge a altura máxima?


CID

B.14 (Unifor-CE) Num certo instante, uma pedra é lançada de uma altura de 10 m em relação ao solo e atinge o chão após 60 segundos. A altura da pedra em relação ao solo, em função do tempo, pode ser representada por uma função do segundo grau, cujo gráfico está representado abaixo.



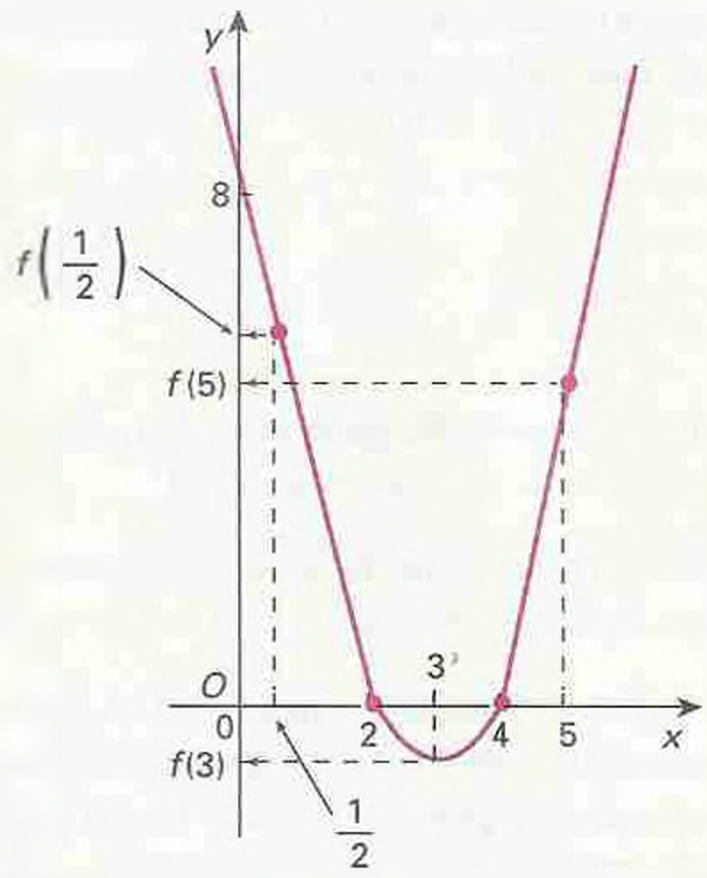
A altura máxima h, atingida pela pedra, é de aproximadamente:

a) 20,4 m c) 21,5 m e) 22,4 m
b) 21 m d) 22 m

Exercícios complementares de C.12 a C.18

5. VARIAÇÃO DE SINAL DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU

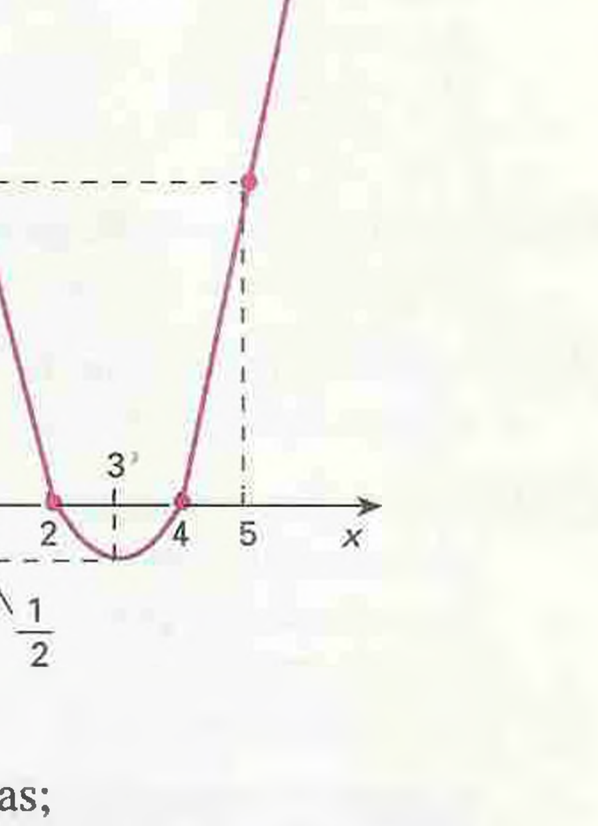
Consideremos a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, cujo gráfico é:



Observe que:

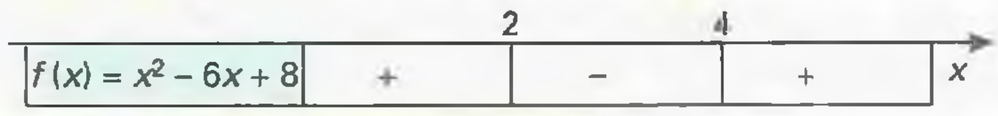
- $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(5)$ são positivas;
- $f(3)$ é negativa;
- $f(2)$ e $f(4)$ são iguais a zero, pois 2 e 4 são raízes da função.

Lembremos que discutir a variação de sinal da função f significa determinar os valores x, do domínio de f, para os quais $f(x)$ é positiva, $f(x)$ é negativa ou $f(x)$ é igual a zero. Analisemos o gráfico ao lado:



- se $x = 2$ ou $x = 4$, então $f(x) = 0$
- se $x < 2$ ou $x > 4$, então $f(x) > 0$
- se $2 < x < 4$, então $f(x) < 0$

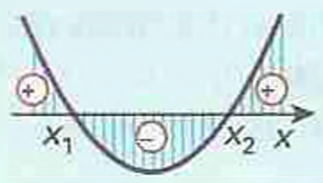
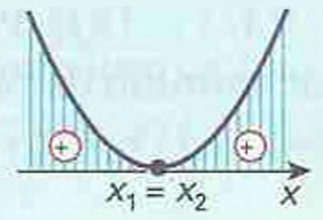
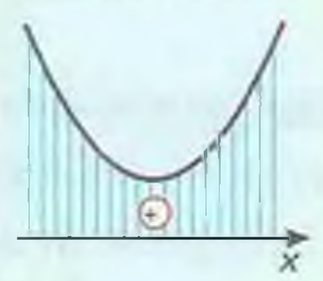
Esse resumo é a variação de sinal da função f, que pode ser representada esquematicamente no eixo real por:



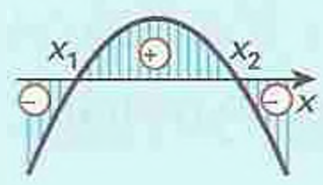
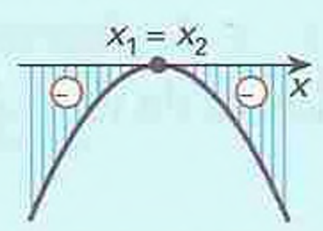
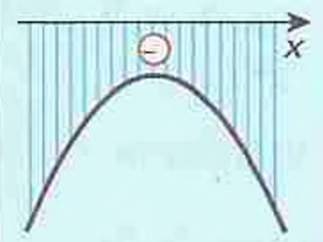
Generalização

De modo geral, a discussão da variação de sinal de uma função do 2º grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, recairá sempre em um dos casos seguintes:

$a < 0$ (concavidade para cima)

$\Delta > 0$ (duas raízes reais e distintas, $x_1 \neq x_2$)	$\Delta = 0$ (duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$)	$\Delta < 0$ ($\nexists$ raiz real)
		

$a < 0$ (concavidade para baixo)

$\Delta > 0$ (duas raízes reais e distintas, $x_1 \neq x_2$)	$\Delta = 0$ (duas raízes reais e iguais, $x_1 = x_2$)	$\Delta < 0$ ($\nexists$ raiz real)
		

6. INEQUAÇÃO DO 2º GRAU

Chama-se **inequação do 2º grau** toda inequação que pode ser representada numa das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geqslant 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leqslant 0$$
$$ax^2 + bx + c \neq 0$$

com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

A resolução desse tipo de inequação é fundamentada no estudo da variação de sinal da função do 2º grau, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Resolução

Uma boa maneira de se resolver uma inequação do 2º grau é através do gráfico.

- Raízes da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1(-3) = 16$

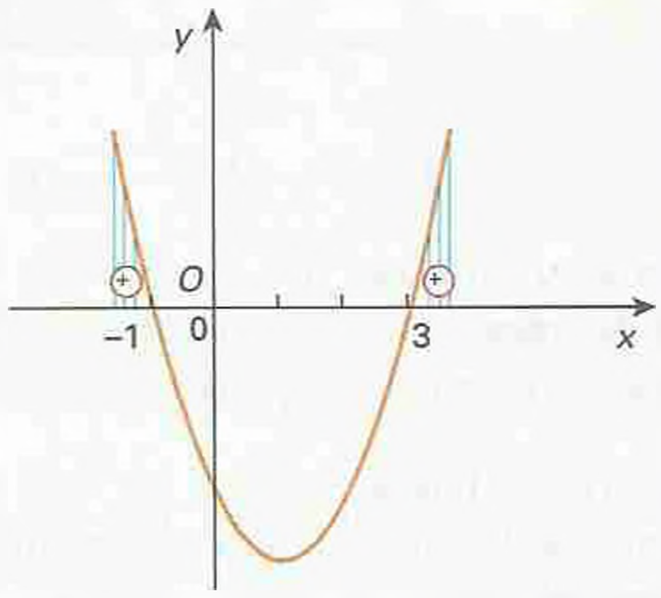
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$\therefore x_1 = 3, x_2 = -1$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$.

- Gráfico de f

Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola possui a concavidade voltada para cima, conforme o gráfico a seguir.



A inequação pede os valores de x para os quais $f(x) > 0$, ou seja, $x^2 - 2x - 3 > 0$. Essa desigualdade ocorre se, e somente se, $x < -1$ ou $x > 3$. Logo, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 3\}$$

R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Resolução

- Raízes da função $f(x) = x^2 - 7x + 6$

$x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$

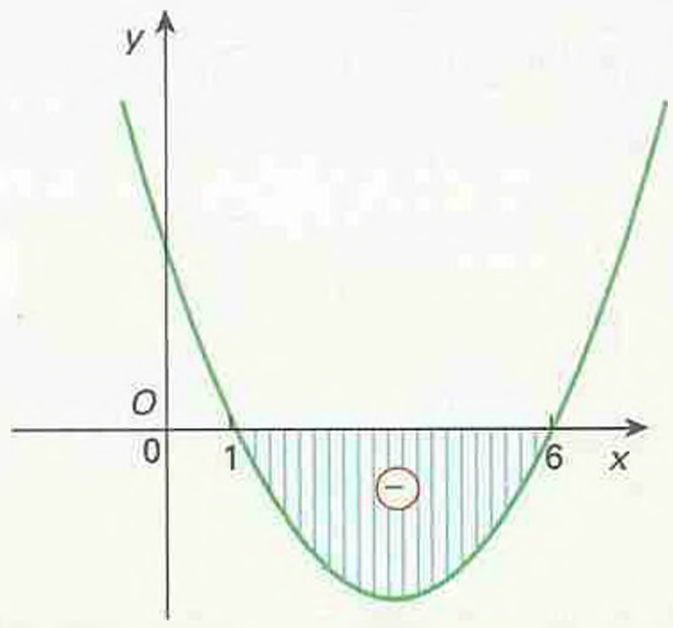
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$\therefore x_1 = 6, x_2 = 1$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissa $x_1 = 6$ e $x_2 = 1$.

- Gráfico de f

Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), a parábola possui a concavidade voltada para cima, conforme o gráfico a seguir.



A inequação pede os valores de x para os quais $f(x) \leqslant 0$, ou seja, $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$. Isso acontece se, e somente se, $1 \leqslant x \leqslant 6$. Logo, o conjunto solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}$$

R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $-x^2 + 2x - 5 > 0$.

Resolução

- Raízes da função $f(x) = -x^2 + 2x - 5$

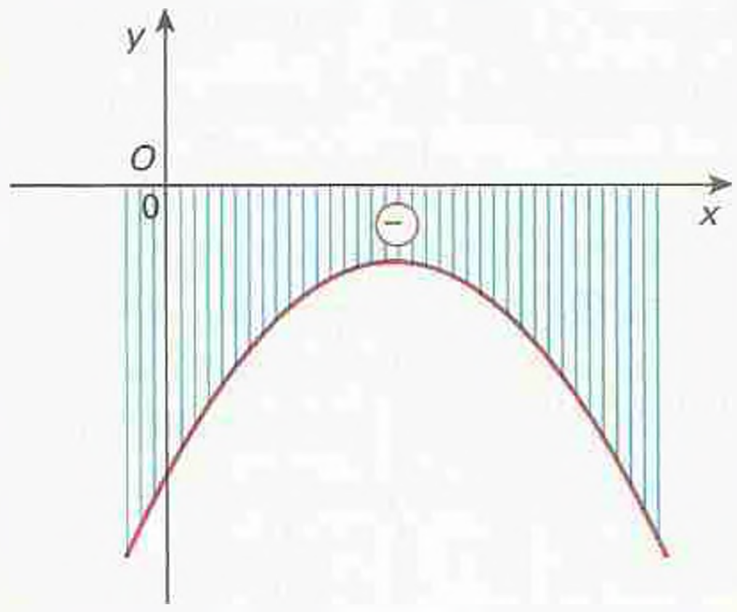
$-x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4(-1)(-5) = -16$

Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais; portanto a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.

- Gráfico de f

O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a parábola possui a concavidade voltada para baixo, conforme o gráfico a seguir.



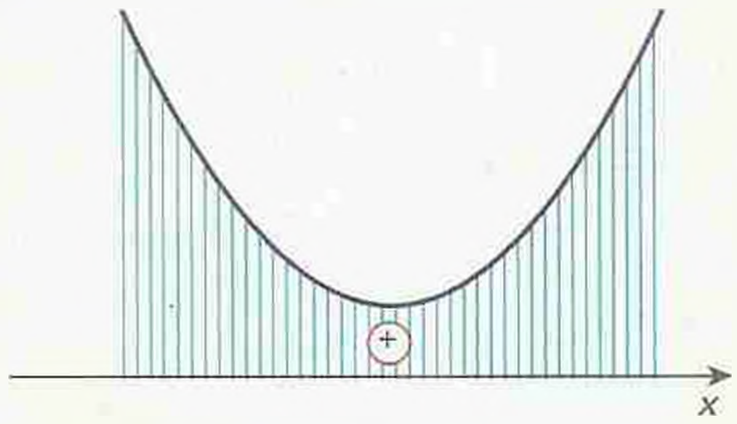
A inequação pede os valores de x para os quais $f(x) > 0$, ou seja, $-x^2 + 2x - 5 > 0$.

Note que essa desigualdade não ocorre para valor algum de x, pois $f(x)$ é negativa para todo x real. Logo, não existe x que satisfaça a inequação e, portanto, $S = \varnothing$.

R.7 Para que valores reais de m a função $f(x) = x^2 - 3x + m$ é positiva para qualquer x real?

Resolução

O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima ($a > 0$). Para que essa função seja positiva para todo x real, a parábola não pode ter ponto em comum com o eixo Ox.



Para que isso ocorra, devemos ter $\Delta < 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1m$

$\therefore \Delta = 9 - 4m$

Impondo $\Delta < 0$, temos:

$9 - 4m < 0 \ \therefore -4m < -9$

$$\therefore 4m > 9 \ \therefore m > \frac{9}{4}$$

Assim, a função f será positiva para todo x real se, e somente se, $m > \frac{9}{4}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.15 Discuta a variação de sinal de cada uma das funções:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

b) $y = -x^2 + x + 2$

c) $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

e) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

f) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x - \frac{4}{3}$

g) $y = x^2 - 9x + 20$

h) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

i) $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$

j) $y = -3x^2 + 2x - \frac{1}{3}$

k) $f(x) = 5x^2 - x + 1$

l) $f(x) = -\frac{x^2}{3} + x - \frac{4}{3}$

B.16 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações do 2º grau:

a) $x^2 - 3x - 4 > 0$

b) $3x^2 - 2x \leqslant 0$

c) $-x^2 + x + 12 > 0$

d) $x^2 - 2x + 1 < 0$

e) $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$

f) $x^2 - x + 6 > 0$

g) $-\frac{3x^2}{2} + x - \frac{1}{2} \geqslant 0$

h) $x^2 - 7x + 10 \geqslant 0$

i) $-x^2 - 2x + 8 \geqslant 0$

j) $3x^2 - 2x < 0$

k) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

l) $-3x^2 + 4x - \frac{4}{3} \geqslant 0$

m) $2x^2 + 5x + 1 < 0$

n) $-\frac{2x^2}{5} + x - \frac{6}{5} < 0$

o) $x^2 < 9$

p) $x^2 < x$

q) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x}{2} > \frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} - 2$

r) $\frac{x^2 - 1}{7} - \frac{x^2 - 1}{35} + 2 < x$

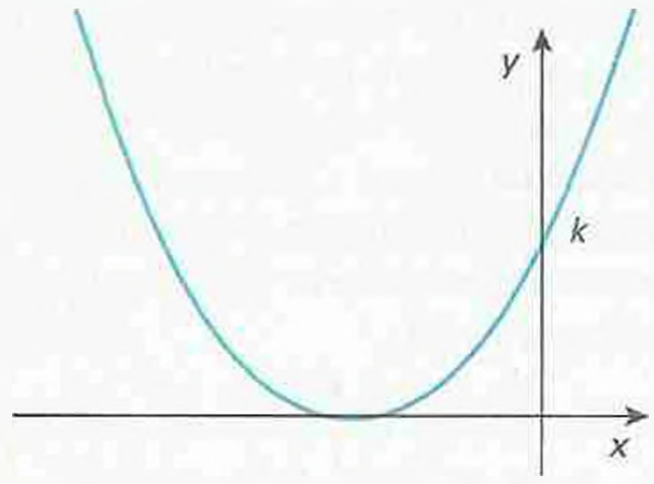
B.17 Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = 4x^2 - 3x + m - 1$ é positiva para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

B.18 Para que valores de m, $m \in \mathbb{R}$, a função $f(x) = -(m + 1)x^2 + 2mx - m - 1$ é negativa para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$?

Exercícios complementares de C.19 a C.22

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (15 - m)$. A ordenada k do ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy é:



a) 25 b) 18 c) 12 d) 9 e) 6

C.2 O gráfico da função $f(x) = kx^2 - (2k + 4)x + k + 4$, $k \in \mathbb{R}$, intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos. Determine os possíveis valores de k.

C.3 O gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 2k - 3$, $k \in \mathbb{R}$, não intercepta o eixo das abscissas. Determine os possíveis valores de k.

C.4 (Vunesp) Encontrar a função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos $P_1(0, 1)$, $P_2(-1, -2)$ e $P_3(-2, 7)$.

C.5 Considere o conjunto $A = [-1, 2]$ e a função $f: A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 7x + 12$. Determine o conjunto imagem de f.

C.6 Obtenha o conjunto imagem da função $f: [0, 4[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

C.7 Sendo o conjunto $A = [0, +\infty[$ e a função $f: A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -x^2 + 4x$, qual é o conjunto imagem de f?

C.8 (PUC/Campinas-SP) Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

a) 2,5 c) 7 e) 25

b) 5 d) 10

C.9 (Fuvest-SP) O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes reais, passa pelos pontos $A(0, 0)$ e $B(1, 2)$.

Então $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ vale:

a) $-\frac{2}{9}$ c) $-\frac{1}{4}$ e) 4

b) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{4}$

C.10 (Fuvest-SP) Considere a parábola de equação $y = x^2 + mx + 4m$.

a) Ache a intersecção da parábola com o eixo Ox, quando $m = -2$.

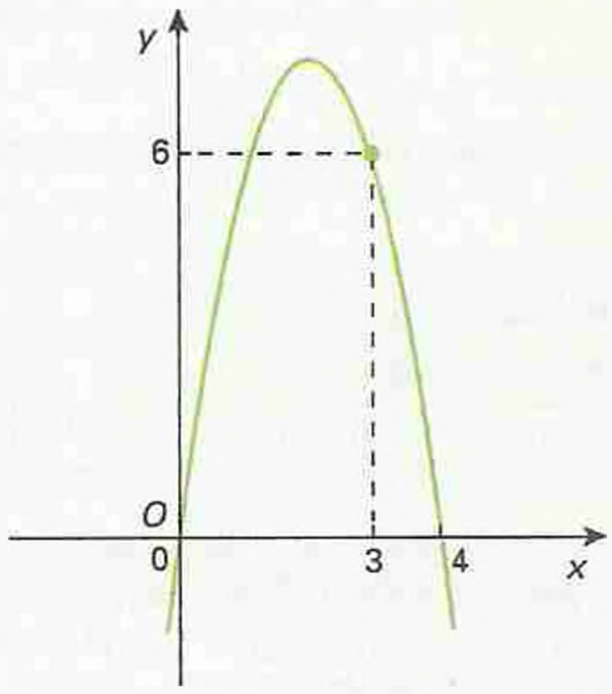
b) Determine o conjunto dos valores de m para os quais a parábola não intercepta o eixo Ox.

C.11 Construa o gráfico da função

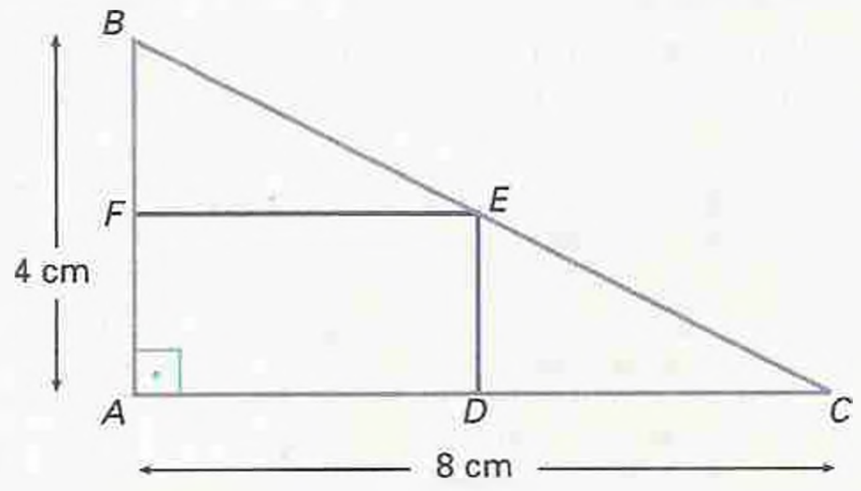
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, \text{ se } x \leqslant -1 \\ -x, \text{ se } -1 < x \leqslant 1 \\ -x^2 + 2x - 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

e dê seu domínio e conjunto imagem.

C.12 Determine o valor máximo da função f cujo gráfico é a seguinte parábola:



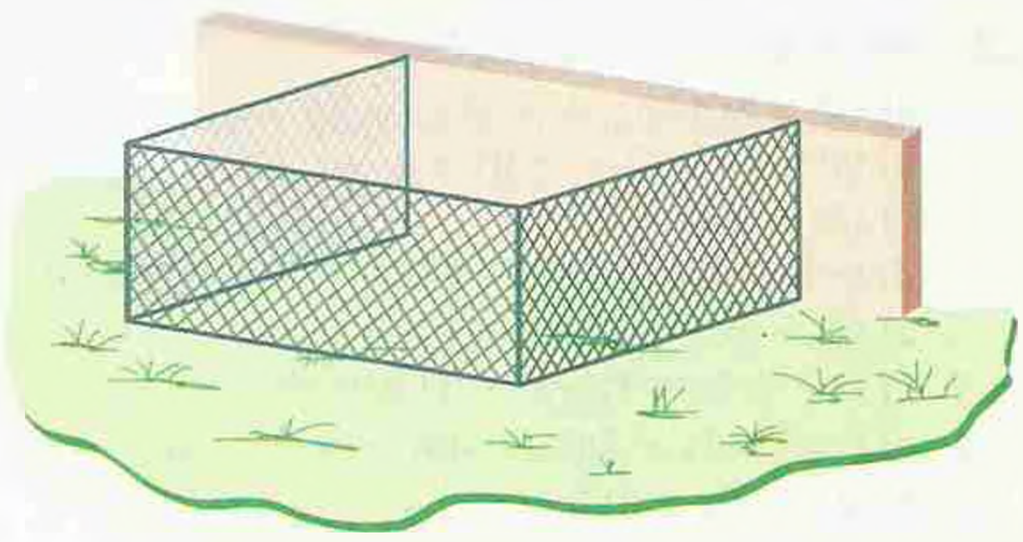
C.13 Um triângulo ABC, retângulo em A, possui os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medindo respectivamente 4 cm e 8 cm. Um retângulo $ADEF$ é inscrito nesse triângulo, de modo que os pontos D, E e F pertençam respectivamente aos lados $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$. Calcule a área **máxima** que pode ter esse retângulo.



Sugestões.

Faça $EF = x$; através da semelhança entre os triângulos ABC e CDE, determine, em função de x, a medida do lado $\overline{DE}$; calcule a área S do retângulo, em função de x.

C.14 Em uma fazenda, um trabalhador deve construir um galinheiro de forma retangular. Dispondo apenas de 30 m de tela, o homem decide aproveitar um velho muro como uma das laterais do galinheiro (conforme figura). Qual será a área máxima desse cercado, sabendo que o muro tem extensão suficiente para ser lateral de qualquer galinheiro construído com essa tela?



C.15 O custo diário da produção de uma indústria de aparelhos de telefone é dado pela função $C(x) = x^2 - 86x + 2.500$, onde $C(x)$ é o custo em dólares e x é o número de unidades fabricadas. Quantos aparelhos devem ser produzidos diariamente para que o custo seja mínimo?

C.16 (FGV-SP) Para uma determinada viagem, foi fretado um avião com 200 lugares. Cada pessoa deve pagar R$ 300,00 mais uma taxa de R$ 6,00 por cada lugar que ficar vago.

a) Qual a receita arrecadada, se comparecerem 150 pessoas para a viagem?

b) Qual a máxima receita que pode ser arrecadada nas condições do problema?

C.17 (Faap-SP) Divida o número 180 em duas partes de modo que o seu produto seja máximo.

C.18 (Cesgranrio) Um dia na praia às 10 h a temperatura era de 36° C e às 14 h atingiu a máxima de 39,2 °C. Supondo que nesse dia a temperatura $f(t)$ em graus era uma função do tempo t medido em horas, dada por $f(t) = at^2 + bt + c$, quando $8 \leqslant t \leqslant 20$, então pode-se afirmar que:

a) $b = 0$ c) $a = b$ e) $b < 0$

b) $ab < 0$ d) $a > 0$

C.19 (U. Católica de Salvador-BA) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$. O conjunto A, no qual a função f é crescente e $f(x) \geqslant 0$, qualquer que seja $x \in A$, é:

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

b) $\left[\frac{3}{2}, \infty\right[$

c) $[2, \infty[$

d) $]-\infty, 1] \cup [2, \infty[$

e) $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [2, \infty[$

C.20 (Cesgranrio) O conjunto dos valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$ é dado por:

a) $p > -9$ c) $p > 11$ e) n.d.a

b) $p < 11$ d) $p < -9$

C.21 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$

c) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 9x - 8} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 8x + 12}}$

C.22 (FGV-SP) Para que a função real $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + k}$, onde x e k são reais, seja definida para qualquer valor de x, k deverá ser um número tal que:

a) $k \leqslant 5$ c) $k = 5$ e) $k \geqslant 9$

b) $k = 9$ d) $k \leqslant 9$

Capítulo 16
INEQUAÇÃO PRODUTO E INEQUAÇÃO QUOCIENTE

1. INTRODUÇÃO

Sendo $x \in \mathbb{R}$, consideremos os números $2x - 10$ e $x^2 - 5x + 6$. Para que valores de x o produto desses números é positivo?

Para responder a essa pergunta devemos resolver a inequação $(2x - 10)(x^2 - 5x + 6) > 0$.

Note que esse tipo de inequação é absoluta novidade, pois não nos deparamos com nenhuma dessas até agora. Para resolvê-la, o que faremos no exercício R.1, vamos antes definir **inequação produto**.

2. INEQUAÇÃO PRODUTO

Chama-se **inequação produto** toda inequação apresentada em uma das seguintes formas:

$$f(x) \cdot g(x) > 0$$
$$f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$$
$$f(x) \cdot g(x) < 0$$
$$f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$$
$$f(x) \cdot g(x) \neq 0$$

em que f e g são funções quaisquer.

Exemplos

a) $(2x - 10)(x^2 - 5x + 6) > 0$
b) $(5x - 10)(6 - x)(3x - 15) \leqslant 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

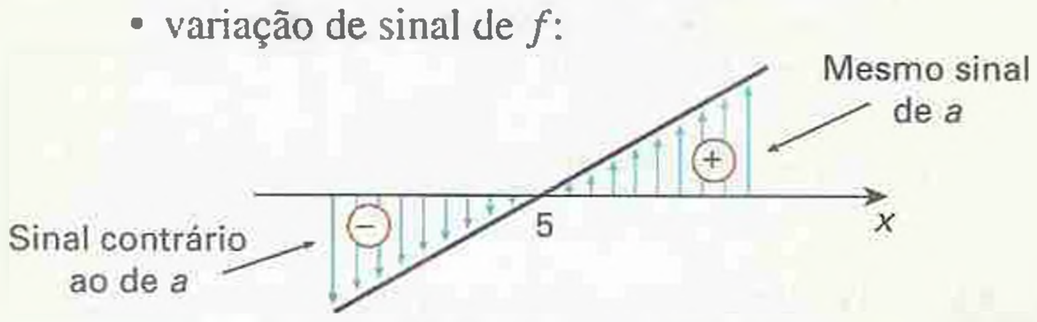
R.1 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(2x - 10)(x^2 - 5x + 6) > 0$.

Resolução

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = x^2 - 5x + 6$, temos:

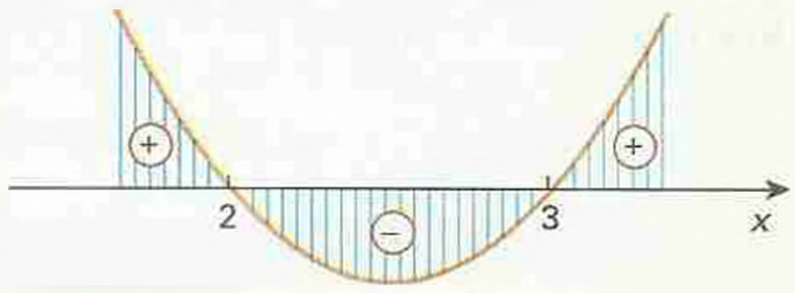
I. $f(x) = 2x - 10$

- raiz de f: $2x - 10 = 0 \Rightarrow x = 5$
- variação de sinal de f:



II. $g(x) = x^2 - 5x + 6$

- raízes de g: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 3$
- variação de sinal de g:



Representando no eixo real a variação de sinal de f e g, temos:

	2	3	5	
$f(x) = 2x - 10$	−	−	−	+
$g(x) = x^2 - 5x + 6$	+	−	+	+
$f(x) \cdot g(x) = (2x - 10)(x^2 - 5x + 6)$	−	+	−	+

Obtivemos os sinais na última linha aplicando a regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que esse produto seja positivo, $(2x - 10)(x^2 - 5x + 6) > 0$, temos que o conjunto solução é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3 \text{ ou } x > 5\}$, ou ainda
$S =]2, 3[\cup]5, +\infty[$

R.2 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(5x - 10)(6 - x)(3x - 15) \leqslant 0$.

Resolução

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = 5x - 10$, $g(x) = 6 - x$ e $h(x) = 3x - 15$, temos:

	2	5	6	
$f(x) = 5x - 10$	−	+	+	+
$g(x) = 6 - x$	+	+	+	−
$h(x) = 3x - 15$	−	−	+	+
$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = (5x - 10)(6 - x)(3x - 15)$	+	−	+	−

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o produto fgh. Como nos interessa que esse produto seja negativo ou nulo, $(5x - 10)(6 - x)(3x - 15) \leqslant 0$, temos que o conjunto solução é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ ou } x \geqslant 6\}$ ou ainda
$S = [2, 5] \cup [6, +\infty[$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $(x^2 - 5x)(2x - 4) < 0$
b) $(x^2 - 8x + 7)(x^2 - 9) \geqslant 0$
c) $(2x - 1)(x - 2) > 0$
d) $(-3x + 12)(2x^2 - 8) \leqslant 0$
e) $(x^2 + 6x + 10)(3x - 1) > 0$
f) $(3x^2 + 2x + 1)(-x^2 + 1) \leqslant 0$
g) $(-x^2 + 3x - 5)(8x - 40) > 0$
h) $x(x^2 - 6x + 8) > 0$
i) $-x(x^2 + x) > 0$
j) $(x^2 - 6x + 9)(-x^2 + 2x - 1) > 0$
k) $(x^2 - 6x + 9)(-x^2 + 2x - 1) \geqslant 0$
l) $(x^2 - 4)(2x + 1) \neq 0$

B.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $(2x - 3)(5 - x)(5x - 1) > 0$

b) $(x^2 - 5x)(x - 4)(-x + 1) \geqslant 0$

c) $(2x - 3)^5(x - 1)^4(4 - x)^3 \leqslant 0$ **Sugestão.** A variação de sinal da expressão $(2x - 3)^5$ é a mesma da base da potência, pois o expoente é ímpar. A expressão $(x - 1)^4$ é sempre positiva ou nula, pois o expoente é par.

B.3 (Fuvest-SP) O conjunto solução de $(-x^2 + 7x - 15)(x^2 + 1) < 0$ é:

a) $\varnothing$ c) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R}_+$

b) $[3, 5]$ d) $[-1, 1]$

B.4 (Fuvest-SP) De $x^4 - x^3 < 0$ pode-se concluir que:

a) $0 < x < 1$ d) $-2 < x < -1$

b) $1 < x < 2$ e) $x < -1$ ou $x > 1$

c) $-1 < x < 0$

Sugestão. Fatore o polinômio $x^4 - x^3$.

Exercícios complementares de C.1 a C.6

3. INEQUAÇÃO QUOCIENTE

Chama-se **inequação quociente** toda inequação apresentada em uma das seguintes formas:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

em que f e g são funções quaisquer, com g **não** identicamente nula.

Exemplos

a) $\frac{2}{x - 3} < 0$ c) $\frac{-2x^2 + x + 6}{2x} \geqslant 0$

b) $\frac{2x - 3}{x - 1} \leqslant 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

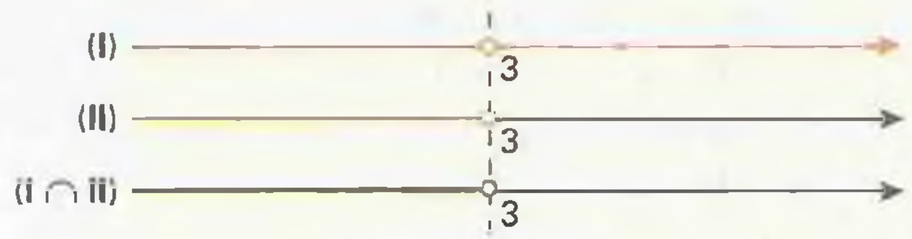
R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{2}{x - 3} < 0$.

Resolução

Condição de existência $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. (I)

Como o numerador de $\frac{2}{x - 3}$ é positivo, a fração será negativa se, e somente se, o denominador for negativo, ou seja, $x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$. (II)

Efetuando a intersecção de (I) e (II), temos:



Logo, o conjunto solução da inequação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$ ou ainda $S =]-\infty, 3[$

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{2x - 3}{x - 1} \leqslant 0$.

Resolução

Condição de existência $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = 2x - 3$ e $g(x) = x - 1$, temos:

		1		$\frac{3}{2}$	
$f(x) = 2x - 3$	−		−		+
$g(x) = x - 1$	−		+		+
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x - 1}$	+	‖	−	‖	+

Os sinais da última linha foram obtidos através da regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como nos interessa que esse quociente seja negativo ou nulo, $\frac{2x - 3}{x - 1} \leqslant 0$, temos que o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant \frac{3}{2}\right\} \text{ ou ainda } S = \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

Note que o intervalo deve ser aberto à esquerda, pois, pela condição de existência, devemos ter $x \neq 1$.

R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{x + 3}{x} \geqslant x + \frac{1}{2}$.

Resolução

Condição de existência $x \neq 0$.

Quando uma inequação do tipo $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$ apresentar a variável no denominador, devemos transformá-la numa outra equivalente com **zero** num dos membros da desigualdade e, a seguir, resolver a inequação quociente assim obtida.

Transformando a inequação dada na equivalente

$$\frac{x + 3}{x} - x - \frac{1}{2} \geqslant 0$$

e reduzindo o primeiro membro ao mesmo denominador, recaímos em uma inequação quociente:

$$\frac{2(x + 3) - 2x^2 - x}{2x} \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 6 - 2x^2 - x}{2x} \geqslant 0 \therefore \frac{-2x^2 + x + 6}{2x} \geqslant 0$$

Estudando a variação de sinal de cada uma das funções, $f(x) = -2x^2 + x + 6$ e $g(x) = 2x$, temos:

		$-\frac{3}{2}$		0		2	
$f(x) = -2x^2 + x + 6$	−		+	‖	+		−
$g(x) = 2x$	−		−		+		+
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-2x^2 + x + 6}{2x}$	+	‖	−		+	‖	−

Devemos ter $\frac{-2x^2 + x + 6}{2x} \geqslant 0$; logo, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{3}{2} \text{ ou } 0 < x \leqslant 2\right\} \text{ ou ainda}$$

$$S = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup]0, 2]$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.5 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\frac{4}{2x-1} > 0$

b) $\frac{5}{1-x} \geqslant 0$

c) $\frac{6}{x^2+5} \neq 0$

d) $\frac{7}{x^2-4} > 0$

e) $\frac{2x-3}{x-5} > 0$

f) $\frac{5x+1}{7-2x} < 0$

g) $\frac{x}{x-1} \leqslant 0$

h) $\frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+15} \geqslant 0$

i) $\frac{x^2-7x+6}{2x+4} < 0$

j) $\frac{x^2-4x+5}{2x-6} > 0$

k) $\frac{(2x-6)(x^2-5x+4)}{x^2-4x+3} \geqslant 0$

l) $\frac{(2x-3)(x^2+9x)}{x^2+2x+1} < 0$

B.6 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\frac{x}{2x-1} < -1$ **Sugestão.** Escreva a inequação na forma $\frac{x}{2x-1} + 1 < 0$.

b) $\frac{6x}{5x+2} \leqslant x$

c) $\frac{5x}{6x-1} \geqslant -2x$

d) $\frac{x-4}{x} > x - \frac{2x-1}{2}$

e) $\frac{1+x}{x} \leqslant \frac{4}{2x-3}$

f) $\frac{1}{x} < x$

g) $\frac{2}{x} \geqslant 2 + x$

B.7 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2-3x}}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{3-x}} + \frac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+6x-10}{-x^2-9}}$

Exercícios complementares de C.7 a C.9

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Determine o maior número inteiro x que satisfaz a desigualdade $(x-1)(2x-5) \leqslant 0$.

C.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$. **Sugestão.** Fatore o primeiro membro.

C.3 Determine o conjunto de todos os valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que verificam a desigualdade $(2x-1)(x+5) > x+5$. **Sugestão.** Escreva a inequação sob a forma $(2x-1)(x+5) - (x+5) > 0$ e fatore o primeiro membro.

C.4 A base e a altura de um triângulo medem $4x$ e $x+2$, respectivamente, e a base e a altura de um retângulo medem $x+3$ e $x+2$, respectivamente, onde $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Para que valores de x a área do triângulo é maior que a do retângulo?

b) Qual é o menor valor inteiro x para que a área do triângulo seja maior que a do retângulo?

C.5 (Cesgranrio) Dada a inequação $(3x-2)^3(x-5)^2(2-x)x > 0$, tem-se que a solução é:

a) $\left\{x \mid x < \frac{2}{3} \text{ ou } 2 < x < 5\right\}$

b) $\left\{x \mid \frac{2}{3} < x < 2 \text{ ou } x < 0\right\}$

c) $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2$

d) $\frac{2}{3} < x < 5$

e) n.d.a

C.6 (UFRS) Considerando as funções $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \frac{6}{x-2}$, para que valores reais de x tem-se $f(x) > g(x)$?

C.7 Determine o menor número inteiro x que satisfaz a desigualdade $\frac{(x-3)(2x+1)}{4-x} < 0$.

C.8 (U. F. Uberlândia-MG) Determine o conjunto solução da inequação $\frac{x^4-1}{x^2+\frac{3x}{2}-1} > 0$.

C.9 (FGV-SP) Para que $y = \sqrt{\frac{(x-3)(x^2+2x-8)}{x^2+4x+3}}$, y real, seja definida, devemos ter:

a) $-4 \leqslant x < -1$ ou $1 < x < 2$

b) $-4 \leqslant x < -3$ ou $-1 < x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 3$

c) $-3 < x < -1$ ou $2 \leqslant x \leqslant 3$

d) $x < 3$ ou $x > -1$

e) $x \leqslant -4$ ou $-3 < x < -1$ ou $2 \leqslant x \leqslant 3$

Capítulo 17

O CONCEITO DE MÓDULO

1. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS DO EIXO REAL

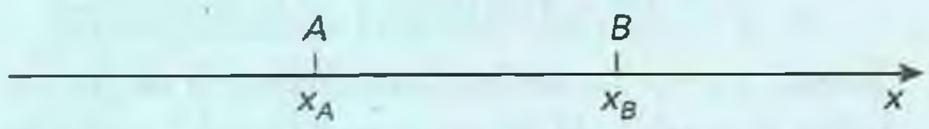
Num dia de inverno o termômetro marcou a temperatura mínima $-5\ °C$ e a máxima $+6\ °C$. Dizemos que a variação da temperatura nesse dia foi de $11\ °C$. Para chegarmos a esse resultado, calculamos a diferença entre a temperatura máxima $+6\ °C$ e a mínima $-5\ °C$:

$$+6\ °C - (-5\ °C) = +11\ °C$$

O cálculo **abscissa máxima menos abscissa mínima** dá origem à definição de **distância entre dois pontos do eixo real**.

Definição

Sejam A e B dois pontos do eixo real com abscissas x_A e x_B, respectivamente, tal que $x_B \geqslant x_A$:



Chama-se **distância entre os pontos A e B**, e indica-se por d_{AB} ou d_{BA}, a diferença $x_B - x_A$.

2. MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Definição

Considere no eixo real de origem O um ponto A de abscissa x:

Chama-se **módulo de x**, e indica-se por $|x|$, a distância entre os pontos A e O:

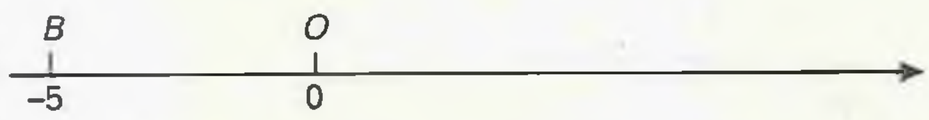
$$|x| = d_{AO}$$

Note que, como $|x|$ é a distância entre dois pontos, tem-se que $|x|$ é um número real positivo ou nulo.

Exemplos

a)

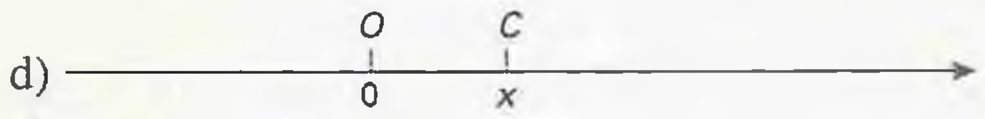
$$|5| = d_{AO} = 5 - 0 \Rightarrow |5| = 5.$$

b) 

$$|-5| = d_{BO} = 0 - (-5) \Rightarrow |-5| = 5$$

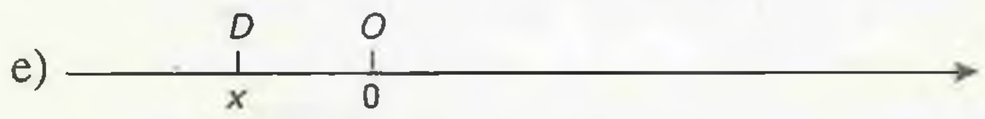
c)

$$|0| = d_{OO} = 0 - 0 \Rightarrow |0| = 0$$

d) 

(sendo $x > 0$)

$$|x| = d_{CO} = x - 0 \Rightarrow |x| = x$$

e) 

(sendo $x < 0$)

$|x| = d_{DO} = 0 - x \Rightarrow |x| = -x$ (**Cuidado!** O número $-x$ é positivo, pois x é negativo.)

Temos então que:

I. o módulo de um número positivo x é igual ao próprio x, isto é, se $x > 0$, então $|x| = x$;

II. o módulo de um número negativo x é igual **ao oposto de** x (que é positivo), isto é, se $x < 0$, então $|x| = -x$;

III. o módulo de zero é igual ao próprio zero: $|0| = 0$.

Sintetizando as conclusões (I), (II) e (III), podemos dar uma definição algébrica para $|x|$ da seguinte maneira:

$$|x| = x \Leftrightarrow x \geqslant 0 \quad \text{e} \quad |x| = -x \Leftrightarrow x \leqslant 0, \quad \forall x, x \in \mathbb{R}.$$

Exemplos

a) $\left|\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3}$ (O módulo de um número positivo é o próprio número.)

b) $|-4| = -(-4) = +4$ (O módulo de um número negativo é o oposto desse número.)

c) $|0| = 0$ (O módulo de zero é o próprio zero: poderíamos dizer também que $|0| = -0$, pois $-0 = 0$.)

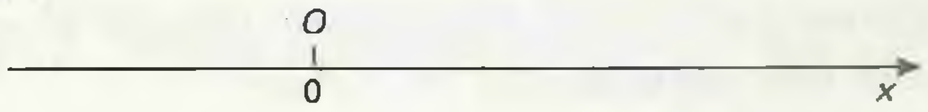
3. PROPRIEDADES DOS MÓDULOS

M.1 $|x| \geqslant 0, \quad \forall x, x \in \mathbb{R}.$

Essa propriedade decorre imediatamente da definição de módulo, pois, sendo uma distância entre dois pontos, o módulo é um número real positivo ou nulo.

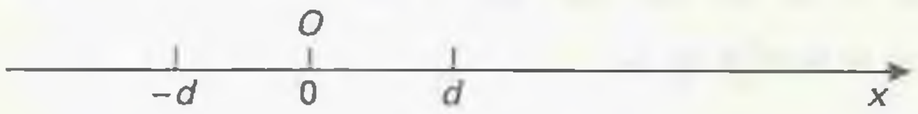
M.2 $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Tal propriedade afirma que existe um único ponto do eixo real que dista **zero** unidade da origem O. É o próprio ponto O:



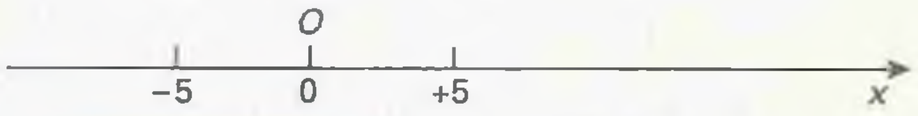
M.3 Sendo $d \in \mathbb{R}_+$, tem-se $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$.

A propriedade M.2 é uma particularidade da M.3, quando $d = 0$. Para $d > 0$, a propriedade M.3 garante que existem apenas dois pontos distintos do eixo real que distam da origem a distância d. São os pontos de abscissa d e $-d$:



Exemplo

$$|x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm 5$$



M.4 $|x| \cdot |y| = |xy|$, $\forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

Isto é, o produto dos módulos de dois números é igual ao módulo do produto deles.

Exemplo

$$|-3| \cdot |4| = |-3 \cdot 4|$$

M.5 $|x|^n = x^n \Leftrightarrow n$ é par, $\forall x, x \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$.

Note que essa propriedade decorre imediatamente da anterior, pois:

- para $n = 0$, temos $|x|^0 = 1 = x^0$;
- para $n \neq 0$, temos:

$$|x|^n = \underbrace{|x| \cdot |x| \cdot |x| \cdot \ldots \cdot |x|}_{n \text{ fatores}} = \overbrace{|x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x|}^{\text{Extensão da M. 4}} =$$

$$= |x^n| \quad \text{(I)}$$

Como n é par, temos $x^n \geqslant 0$; logo, temos $|x^n| = x^n$. **(II)**

Por (I) e (II), temos $|x|^n = x^n$ (se n é par).

Exemplos a) $|x|^2 = x^2$ b) $|x|^6 = x^6$

M.6 $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$, $\forall \{x, y\}, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$ e $y \neq 0$.

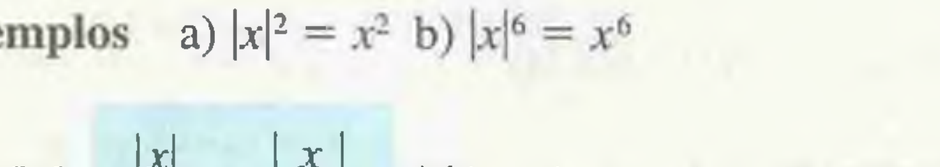
Isto é, o quociente entre os módulos de dois números é igual ao módulo do quociente entre eles.

Exemplo

$$\frac{|-8|}{|2|} = \left|\frac{-8}{2}\right|$$

M.7 $|x| = |a| \Leftrightarrow x = \pm a$, $\forall \{x, a\}, \{x, a\} \subset \mathbb{R}$.

Para entender essa propriedade, pense na definição de módulo: $|x| = |a|$ se, e somente se, os pontos de abscissa x e a estiverem à mesma distância da origem O do eixo real.



Note que os pontos de abscissa a e $-a$ equidistam da origem O. Assim, temos:

$$|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

Existem ainda outras propriedades dos módulos, que veremos mais adiante.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|x - 3| = 4$.

Resolução

Pela propriedade M.3, sabemos que existem dois e somente dois números cujo módulo é igual a 4. São eles: 4 e -4. Logo, temos:

$$|x - 3| = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 4 \text{ ou } x - 3 = -4$$
$$\therefore x = 7 \text{ ou } x = -1$$
$$S = \{7, -1\}$$

R.2 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|x| \cdot |x - 5| = 6$.

Resolução

Pela propriedade M.4, temos:

$$|x| \cdot |x - 5| = 6 \Leftrightarrow |x(x - 5)| = 6 \therefore |x^2 - 5x| = 6$$

Pela propriedade M.3, temos:

$$x^2 - 5x = 6 \text{ ou } x^2 - 5x = -6$$
$$\therefore x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 6$$
ou
$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Logo, $S = \{-1, 6, 2, 3\}$.

R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $x^2 - 3|x| - 4 = 0$.

Resolução

Pela propriedade M.5, temos que $x^2 = |x|^2$. Logo, a equação pode ser escrita na forma:

$$|x|^2 - 3|x| - 4 = 0$$

Fazendo $|x| = t$, temos:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ ou } t = -1$$

Assim, $|x| = 4 \Rightarrow x = \pm 4$ ou $|x| = -1 \Rightarrow \nexists x$
Logo, $S = \{4, -4\}$.

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|3x - 1| = |2x + 6|$.

Resolução

Pela propriedade M.7, temos que:

$$|3x - 1| = |2x + 6| \Leftrightarrow 3x - 1 = 2x + 6 \text{ ou}$$
$$3x - 1 = -2x - 6 \therefore x = 7 \text{ ou } x = -1$$

Logo, o conjunto solução S da equação proposta é:

$$S = \{7, -1\}$$

R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $|x^2 - 5x| = -5x + 9$.

Resolução

- Impomos a condição de existência:

$-5x + 9 \geqslant 0 \Rightarrow -5x \geqslant -9 \therefore 5x \leqslant 9 \therefore x \leqslant \dfrac{9}{5}$

- Aplicamos a propriedade M.3:

$$|x^2 - 5x| = -5x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 5x = \pm(-5x + 9)$$
$$\therefore x^2 - 5x = -5x + 9 \quad \text{(I)} \quad \text{ou}$$
$$x^2 - 5x = 5x - 9 \quad \text{(II)}$$

Resolvendo as equações:

I. $x^2 - 5x = -5x + 9 \Rightarrow x^2 = 9 \therefore x = 3$ ou $x = -3$

($x = 3$ não convém, pois não satisfaz a condição de existência.)

II. $x^2 - 5x = 5x - 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1}$$

$\therefore x = 9$ ou $x = 1$

($x = 9$ não convém, pois não satisfaz a condição de existência.)

Logo, $S = \{-3, 1\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Classifique cada uma das sentenças abaixo como V ou F:

a) $|8| = 8$
b) $|0| = -0$
c) $|-8| = 8$
d) $|\sqrt{2} - 2| = \sqrt{2} - 2$
e) $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$
f) $|\sqrt[3]{10} - 2{,}3| = 2{,}3 - \sqrt[3]{10}$
g) $|\sqrt[4]{9} - \sqrt{3}\,| = 0$
h) $|\pi - 3| = \pi - 3$
i) $|\pi - 3{,}14| = 0$
j) $|\pi - 3{,}15| = 3{,}15 - \pi$

B.2 Calcule os valores dos módulos:

a) $||\sqrt{3} - 1{,}6\,| + 1{,}6|$
b) $||\sqrt{5} - 2{,}4\,| + \sqrt{5}\,|$
c) $||1 - \sqrt{2}\,| + |2 - \sqrt{2}\,||$
d) $||\pi - 3{,}14| + |\pi - 3{,}15||$

B.3 Classifique cada uma das afirmações como V ou F:

a) $|x| = x$, para todo x, $x \in \mathbb{R}$.
b) $|x^2| = x^2$, para todo x, $x \in \mathbb{R}$.
c) $|x^3| = x^3$, para todo x, $x \in \mathbb{R}$.
d) $|x^4| = x^4$, para todo x, $x \in \mathbb{R}$.
e) $|ab| = |a| \cdot |b|$, para quaisquer a e b reais.
f) $|a + b| = |a| + |b|$, para quaisquer a e b reais.
g) Existe número real x tal que $|x| = x$ e $|x| = -x$.
h) $|x| \geqslant 0$, para todo x, $x \in \mathbb{R}$.
i) $|5| \cdot |x| = |5x|$, $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$.
j) $5|x| = |5x|$, $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$.
k) $-5 \cdot |x| = |-5x|$, $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$.
l) $\dfrac{5}{|x|} = \left|\dfrac{5}{x}\right|$, $\forall x$, $x \in \mathbb{R}^*$.
m) $|x|^4 = x^4$, $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$.
n) $|x|^5 = x^5$, $\forall x$, $x \in \mathbb{R}$.

B.4 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|x - 8| = 3$
b) $|2x - 1| = 7$
c) $|3x - 1| = 0$
d) $|x^2 - 2x| = 1$
e) $|x^2 - 5x| = 6$
f) $|x^3 - 4| = 4$
g) $|4x^2 - 3x| = 0$

B.5 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $x^2 - 2|x| - 8 = 0$
b) $x^2 - |5x| + 4 = 0$
c) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$
d) $2x^2 - |9x| + 7 = 0$

B.6 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $|5x + 8| = |4x + 10|$
b) $|3x - 1| = |1 - 2x|$
c) $|x^2 - 3x| = |x|$
d) $|x^2 - 5x| = |x - 5|$
e) $|8x - 1| = |x - 4|$
f) $|x - 2| = |x + 3|$
g) $|2x^2 - 3x| = |x - 2|$
h) $|x^2 - x| = |2x|$

B.7 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das equações:

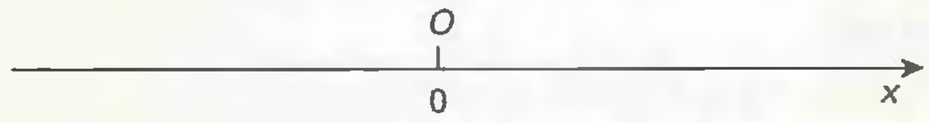
a) $|5x - 10| = 2x + 3$
b) $|6 - 3x| = x + 4$
c) $|x^2 - x| = x$
d) $|x^2 - 3x| = x - 3$
e) $|8x - 16| = 7x + 1$
f) $|2 - 3x| = 1 - x$
g) $|x^2 - 4x| = 5x$
h) $|x^2 - 5x| = x - 5$

Exercícios complementares de C.1 a C.7

4. DESIGUALDADES E MÓDULOS

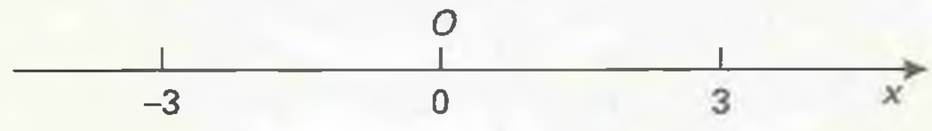
Propriedades

Considere o eixo real de origem O:



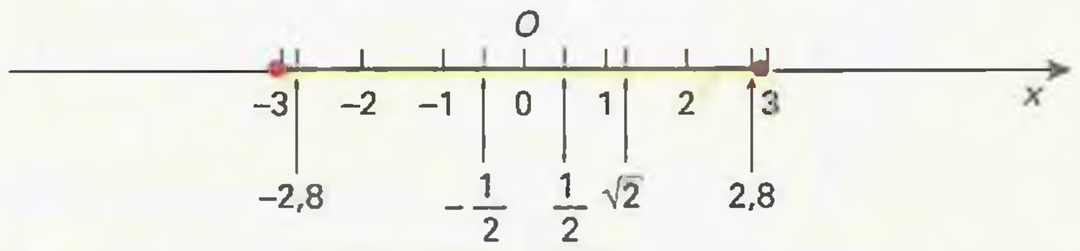
a) Quais as abscissas x dos pontos desse eixo cujas distâncias à origem O são menores ou iguais a 3?
b) Quais as abscissas x dos pontos desse eixo cujas distâncias à origem O são maiores ou iguais a 3?

Para responder a essas questões, note que os pontos de abscissa 3 e -3 distam três unidades da origem:

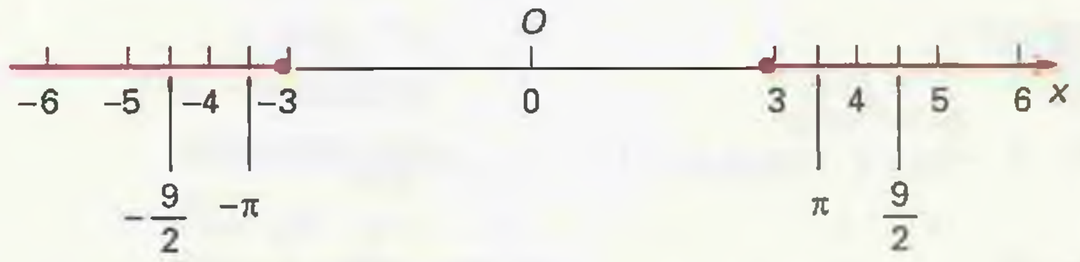


Assim, temos:

a) qualquer ponto de abscissa x, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, localiza-se a uma distância menor ou igual a 3 da origem. Observe:



b) qualquer ponto de abscissa x, $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$, localiza-se a uma distância maior ou igual a 3 da origem. Observe:



As perguntas feitas nos itens (a) e (b) poderiam ter sido formuladas da seguinte maneira:

a) Quais as abscissas x dos pontos do eixo real tais que $|x| \leqslant 3$?
b) Quais as abscissas x dos pontos do eixo real tais que $|x| \geqslant 3$?

Temos, então:

a) $|x| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$;
b) $|x| \geqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$.

Raciocinando dessa maneira, podemos concluir as seguintes propriedades:

M.8 $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo

$$|x| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant x \leqslant 5$$

M.9 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo

$$|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$$

M.10 $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo

$$|x| \geqslant 6 \Leftrightarrow x \leqslant -6 \text{ ou } x \geqslant 6$$

M.11 $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$, $\forall a, a \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > 2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|3x - 1| \leqslant 8$.

Resolução

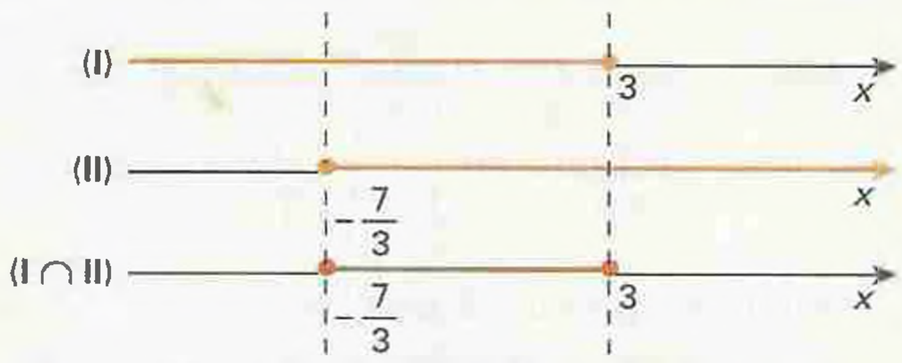
Pela propriedade M.8, temos que:

$$|3x - 1| \leqslant 8 \Leftrightarrow -8 \leqslant 3x - 1 \leqslant 8$$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$$\begin{cases} 3x - 1 \leqslant 8 \\ 3x - 1 \geqslant -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3 & \text{(I)} \\ x \geqslant -\frac{7}{3} & \text{(II)} \end{cases}$$

O conjunto solução S do sistema é (I) $\cap$ (II), ou seja:



Assim, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{3} \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

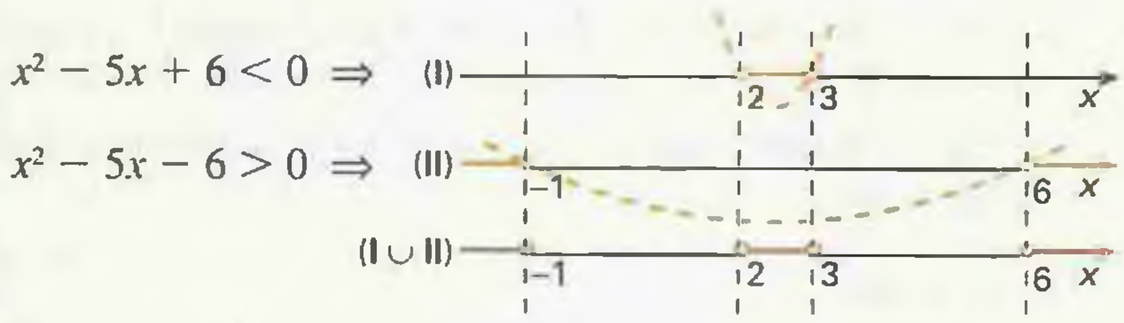
R.7 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $|x^2 - 5x| > 6$.

Resolução

Pela propriedade M.11, temos que:

$$|x^2 - 5x| > 6 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 5x < -6}_{\text{(I)}} \text{ ou } \underbrace{x^2 - 5x > 6}_{\text{(II)}}$$

O conjunto solução S da inequação é (I) $\cup$ (II), ou seja:



Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 2 < x < 3 \text{ ou } x > 6\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.8 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $|3x + 5| \leqslant 11$

b) $\left|2x + \frac{3}{2}\right| > 6$

c) $|x^2 - 5| \leqslant 4$

d) $|2x^2 - x - 2| < 1$

e) $|1 - x| < 5$

f) $\left|\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right| > 4$

g) $|x^2 - 3| \geqslant 1$

h) $|x^2 + 2x| < 3$

B.9 (Cesgranrio) A intersecção dos conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 7| < 2\}$ é um intervalo de comprimento:

a) 2 b) 5 c) 1 d) 3 e) 4

Nota. O comprimento de um intervalo é a distância entre seus extremos.

B.10 Um metalúrgico deve fabricar um eixo de ferro cujo diâmetro deve ter 5 cm. O torno pode provocar um pequeno erro x nessa medida, com $|x| \leqslant 0{,}008$ cm. Qual a maior e a menor medida que pode ter o diâmetro dessa peça depois de pronta?

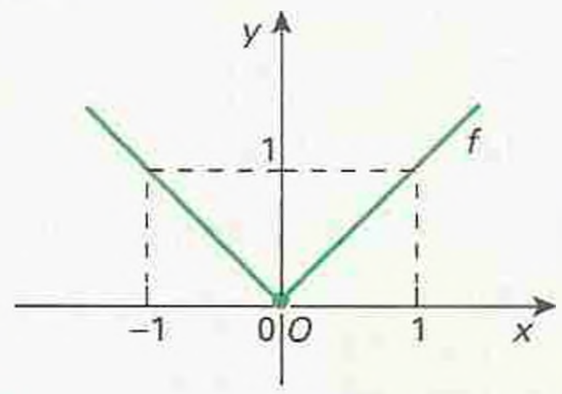
Exercícios complementares de C.8 a C.10

5. FUNÇÃO MODULAR

Consideremos a função: $f(x) = |x|$. Pela definição de módulo, sabemos que $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$

Logo, $f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$

Construindo o gráfico dessa função dada por duas sentenças, temos:



Note que o domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) = [0, +\infty[$$

A função $f(x) = |x|$ é chamada de **função modular**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.8 Construir o gráfico da função $f(x) = |x - 1|$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Para construir o gráfico de f, vamos transformá-la numa função dada por duas sentenças. Sabemos que:

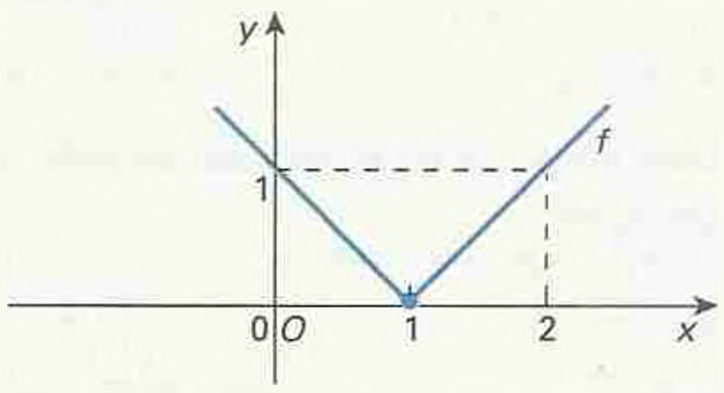
$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x - 1 \geqslant 0 \\ -(x - 1), \text{ se } x - 1 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x \leqslant 1 \end{cases}$$

Assim, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x \leqslant 1 \end{cases}$$

cujo gráfico é:



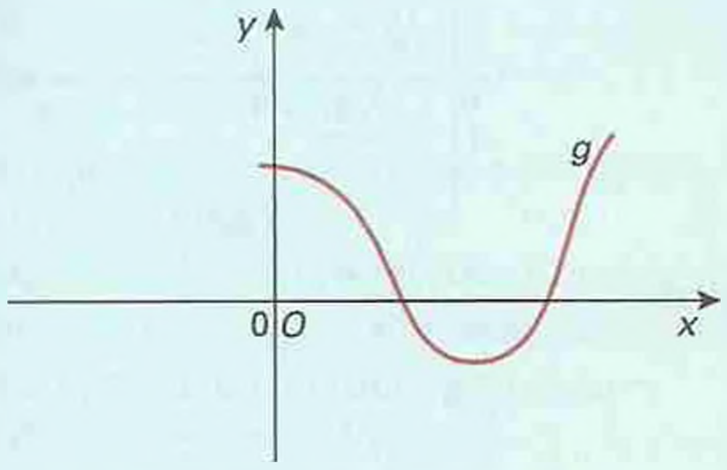
O domínio e o conjunto imagem de f são respectivamente:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) = [0, +\infty[$$

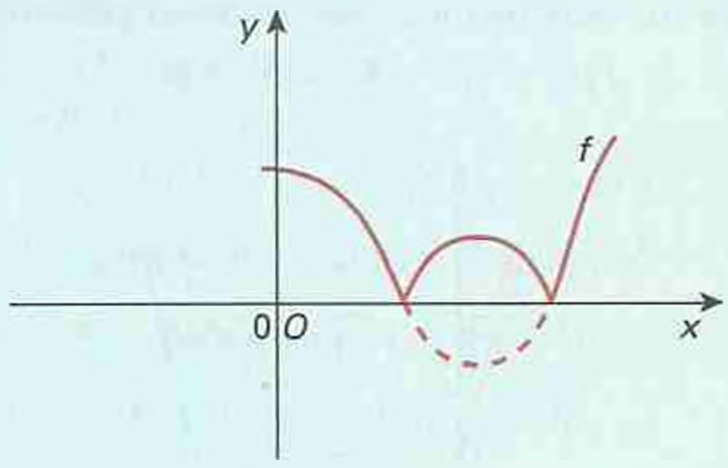
Regra prática

Para construirmos o gráfico de uma função f do tipo $f(x) = |g(x)|$, executamos os seguintes passos:

1º) construímos o gráfico da função g:



2º) no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos os de **ordenadas negativas** em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de f:



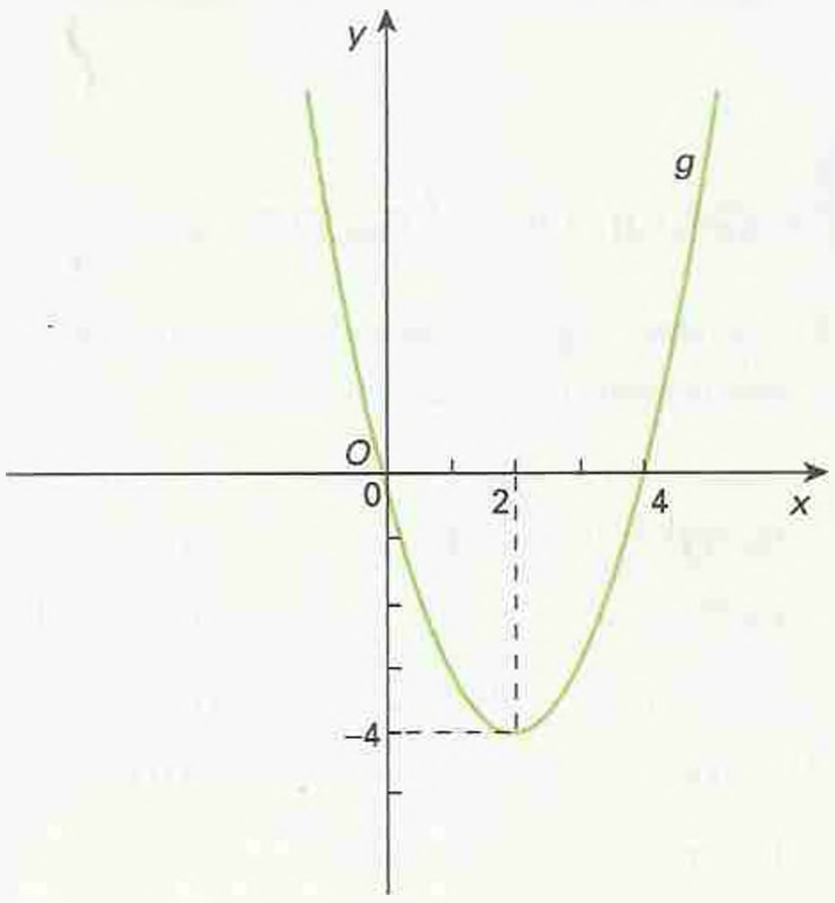
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.9 Construir o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x|$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

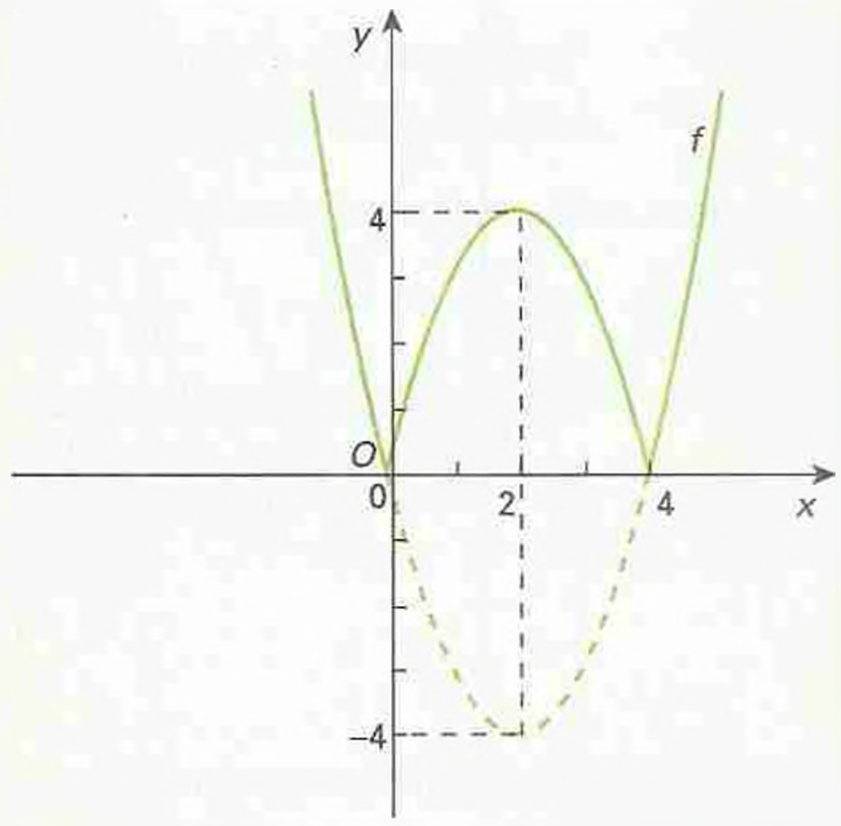
Resolução

Utilizando a regra prática, vamos inicialmente construir o gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x$.

Observe o gráfico de g:



A seguir, no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** em seu simétrico em relação ao eixo Ox, obtendo assim o gráfico de f:



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty[$.

R.10 Construir o gráfico da função $f(x) = -|2x - 6|$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Executamos os seguintes passos:

1º) construímos o gráfico da função $g(x) = 2x - 6$;

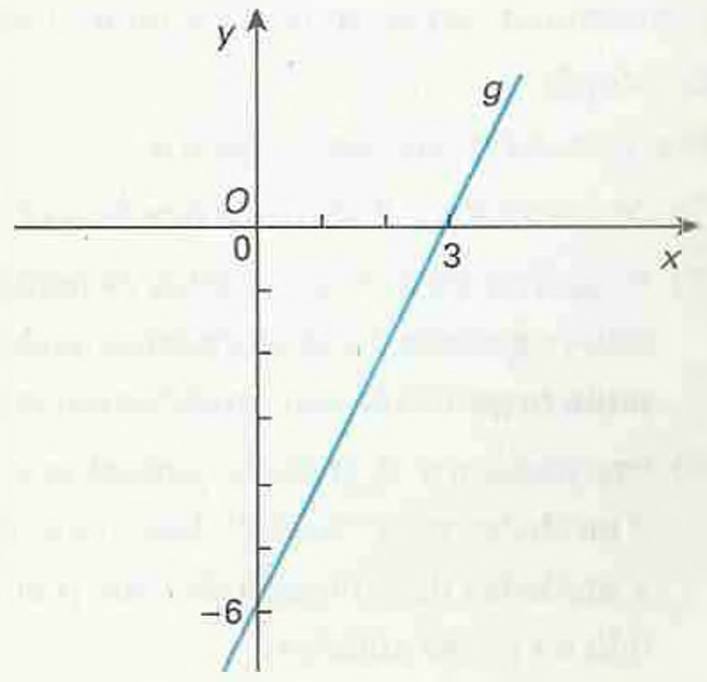
2º) no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** em seu simétrico em relação ao eixo Ox;

3º) transformamos **todos** os pontos do gráfico obtido no passo anterior em seus simétricos em relação ao eixo Ox; isso porque multiplicamos por -1 a ordenada de cada ponto do gráfico anterior.

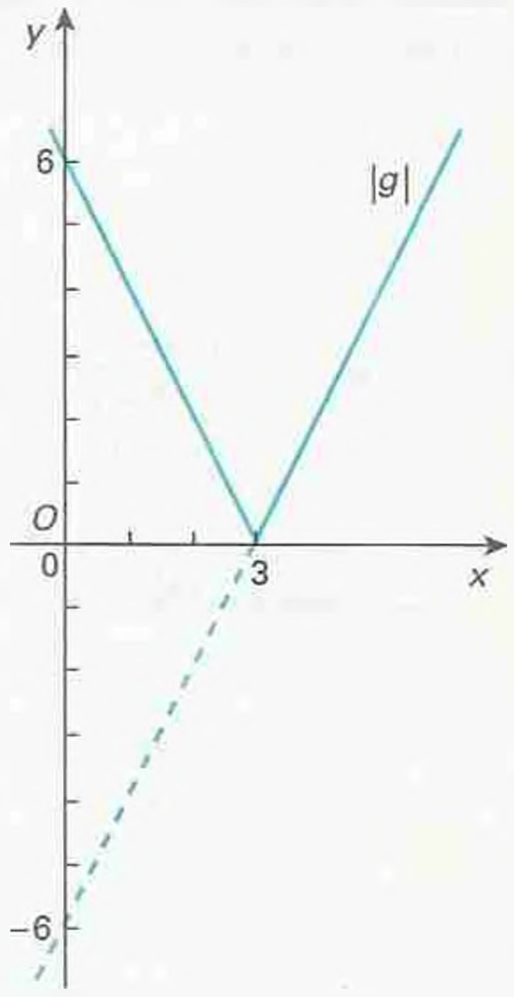
1º passo: $g(x) = 2x - 6$.

x	$g(x)$: $2x - 6$
0	-6
3	0

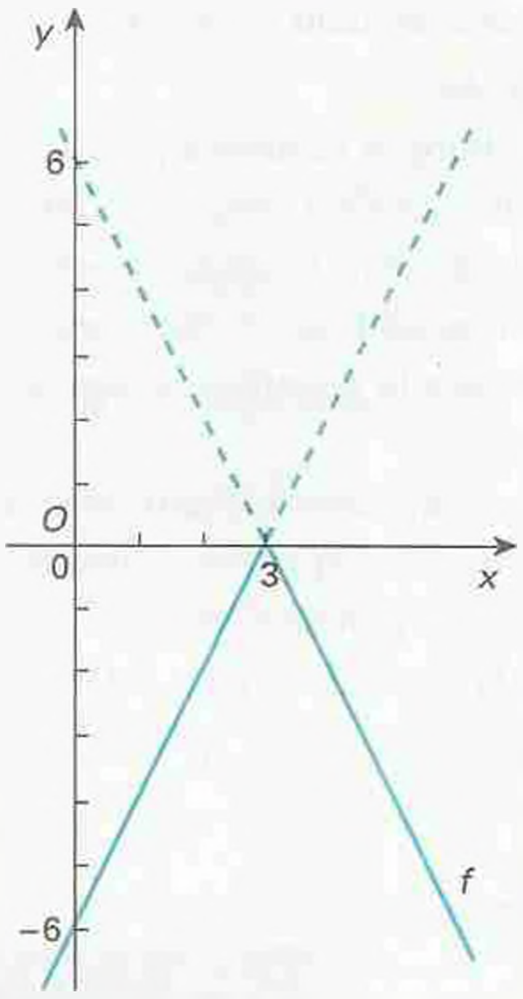
O gráfico de g é:



2º passo:



3º passo: finalmente, construímos o gráfico da função $f(x) = -|2x - 6|$.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) =]-\infty, 0]$$

R.11 Construir o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 2$ e determinar seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Executamos os seguintes passos:

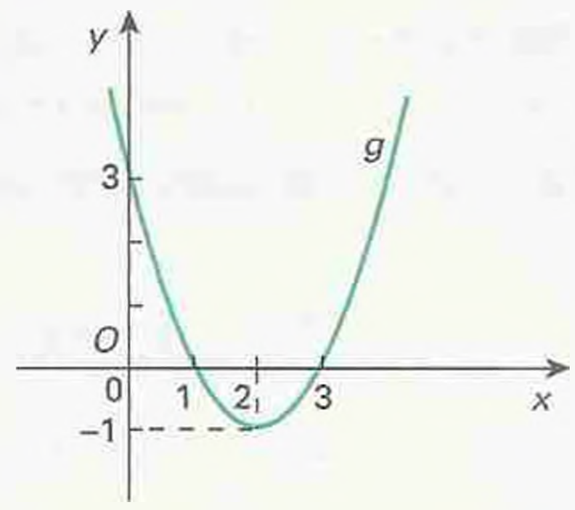
1º) construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 3$;

2º) no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não-negativas** e transformamos cada ponto de **ordenada negativa** no seu simétrico em relação ao eixo Ox;

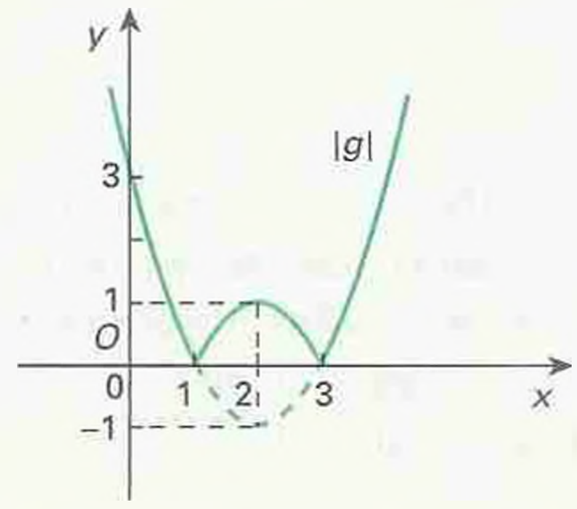
3º) transladamos o gráfico, paralelamente ao eixo Oy, 2 unidades para "baixo". Isso porque vamos subtrair 2 unidades da ordenada de cada ponto da função obtida no passo anterior.

1º passo: $g(x) = x^2 - 4x + 3$.

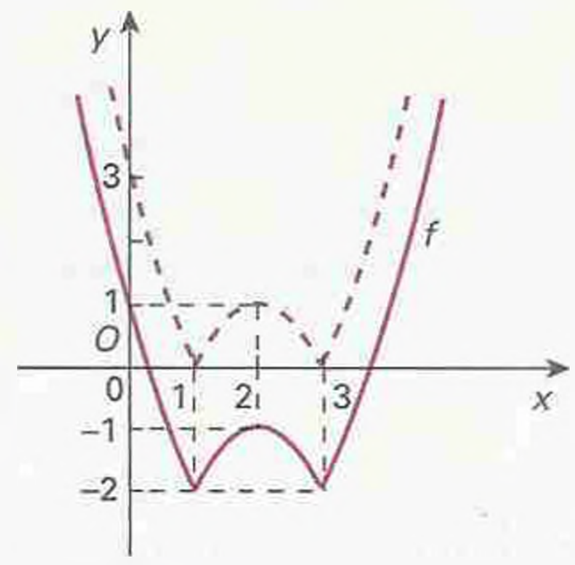
O gráfico de g é:



2º passo:



3º passo: finalmente, construímos o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4x + 3| - 2$.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-2, +\infty[$.

Nota

Se a função fosse $f(x) = |x^2 - 4x + 3| + 2$, então, após o segundo passo, a translação seria feita para "cima", pois estaríamos adicionando duas unidades a cada ordenada do gráfico obtido no segundo passo.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:

a) $y = |2x - 1|$

b) $f(x) = |-3x + 6|$

c) $f(x) = |2x^2 - 4x|$

d) $y = |-x^2 + 2x - 2|$

e) $f(x) = -|3x + 1|$

f) $f(x) = -|x^2 - 5x + 6|$

g) $y = |3x|$

h) $f(x) = -|2x + 8|$

i) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

j) $y = |x^2 + 4x + 6|$

k) $f(x) = -|x^2 - 2x|$

B.12 Esboce o gráfico e dê o domínio e o conjunto imagem de cada uma das seguintes funções:
a) $f(x) = |2x - 6| + 3$
b) $y = |-x + 2| - 3$
c) $f(x) = |2x^2 - 2x| + 4$
d) $f(x) = |-x^2 + 9| + 2$
e) $y = |3x - 1| - 2$
f) $f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 1$
g) $y = |-x^2 + 2x + 8| - 8$
h) $f(x) = |1 + x^2| - 2$

B.13 Determine o gráfico, o domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções:
a) $f(x) = 2 - |3x - 6|$ **Sugestão**. Construa o gráfico da função $g(x) = -|3x - 6|$ e translade-o, paralelamente ao eixo Oy, duas unidades para cima.
b) $f(x) = -2 - |3x^2 - 9x|$
c) $f(x) = 4 - |3x - 1|$
d) $y = -1 - |3x^2 - 12|$

Exercícios complementares de C.11 a C.13

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Unifor-CE) Os números reais x e y são tais que $x + y = 15$ e $2xy = 72$.
O valor de $|x - y|$ é:
a) 0 b) 3 c) 6 d) 9 e) 12

C.2 Qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) $\sqrt{x^2} = x$, para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$.
b) $\sqrt{x^2} = |x|$, para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$.

C.3 (UECE) Se $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2$, então as raízes irracionais da equação $|f(x) - 6| = 8$ são:
a) $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$ c) $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$

C.4 (Fuvest-SP) Determine as raízes das equações seguintes:
a) $|2x - 3| = 5$ b) $|2x^2 - 1| + x = 0$

C.5 (UFCE) A soma dos valores reais de x que satisfazem a igualdade $\frac{3|x + 1|}{|x - 1|} = 1$ é:
a) $-\frac{5}{2}$ c) -5 e) n.d.a.
b) $-\frac{3}{2}$ d) -3

C.6 (PUC-RJ) O conjunto solução da equação $|x - 1| = |x - 1|^2$ em $\mathbb{R}$:
a) possui apenas um elemento.
b) possui exatamente dois elementos.
c) é vazio.
d) possui exatamente três elementos.
e) possui exatamente quatro elementos.

C.7 (Fuvest-SP) Qual o conjunto dos valores assumidos pela expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$, quando a, b e c variam no conjunto dos números reais não-nulos?
a) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
b) $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$
c) $\{-4, 0, 4\}$
d) $\{4\}$
e) $\mathbb{R}$

C.8 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $||3x - 6| - 2| < 3$.

C.9 (Mackenzie-SP) O conjunto solução de $1 < |x - 3| < 4$ é o conjunto dos números x tais que:
a) $4 < x < 7$ ou $-1 < x < 2$
b) $-1 < x < 7$ ou $-3 < x < -1$
c) $-1 < x < 7$ ou $2 < x < 4$
d) $0 < x < 4$
e) $-1 < x < 4$ ou $2 < x < 7$

C.10 Em um dia de inverno a temperatura assumiu apenas os valores t° C, com $|t - 6| \leq 4$. Qual foi a temperatura máxima e a mínima nesse dia?

C.11 Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem:
a) $f(x) = 3|2x - 4|$ **Sugestão**. Como $3 = |3|$, temos que $f(x) = |3| \cdot |2x - 4| = |3(2x - 4)|$.
b) $f(x) = -2 \cdot |3x + 1|$
c) $f(x) = |x| \cdot |3x - 6|$
d) $f(x) = \left|\frac{x}{3}\right| \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right|$
e) $f(x) = 3|2x - 1| + 2$
f) $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 1| - 4$
g) $f(x) = 4 - 3|x - 1|$
h) $f(x) = 2 - |x| \cdot |2x - 4|$

C.12 Construa o gráfico da função $f(x) = |2x - 8|$ e determine os valores de x para os quais $f(x) \leq 2$.

C.13 (Faap-SP) Esboce o gráfico da função $f(x) = -|x^2 - x| + 2$.

Capítulo 18

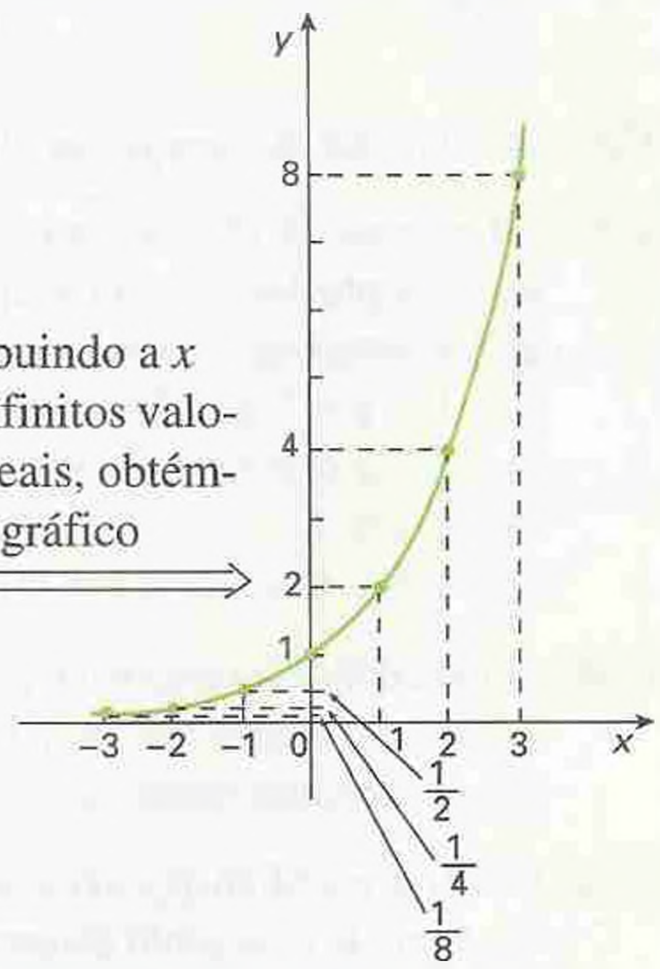
FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. CONCEITUAÇÃO

Consideremos a função $f(x) = 2^x$. Podemos obter o gráfico de f através de uma tabela:

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

Atribuindo a x os infinitos valores reais, obtém-se o gráfico

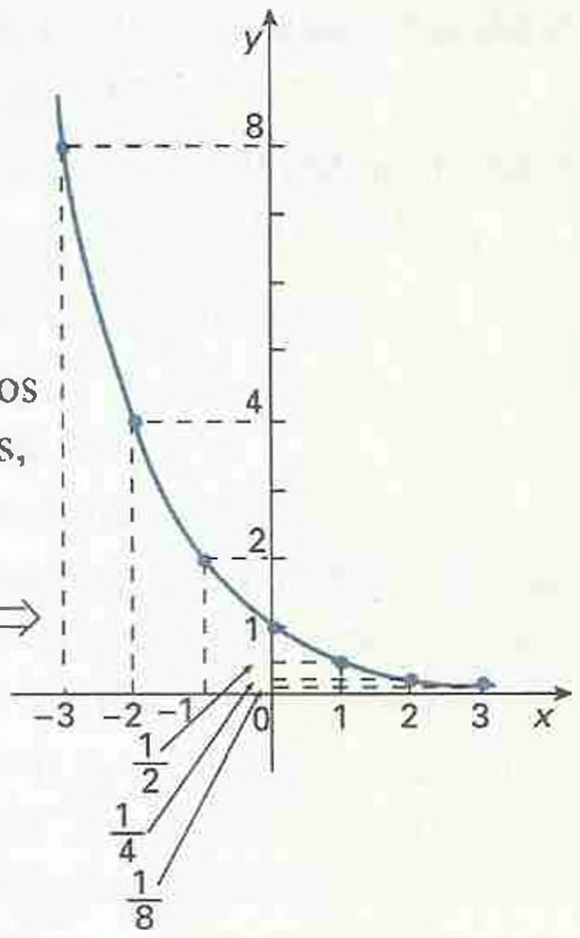


- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- f é crescente em todo seu domínio.

Consideremos agora a função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para obter um esboço do gráfico, vamos construir a tabela:

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Atribuindo a x os infinitos valores reais, obtém-se o gráfico



- $D(g) = \mathbb{R}$;
- $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$;
- g é decrescente em todo seu domínio.

As funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ são chamadas de **funções exponenciais**.

Definição

> Chama-se **função exponencial** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$, em que a é uma constante real positiva e diferente de 1.

Exemplo

São funções exponenciais:

$f(x) = 3^x$; $\quad h(x) = 7^x$;

$g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$; $\quad t(x) = (0,2)^x$.

Crescimento populacional

O crescimento populacional, na ausência de fatores inibidores, pode ser descrito através de uma função exponencial. Por exemplo, o número $M(t)$ de bactérias de uma população no instante t é dado por $M(t) = M_0 e^{kt}$, em que e é um número irracional cujo valor aproximado é 2,7, k é uma constante que depende do número de bactérias e M_0 é o número de bactérias da população no instante $t = 0$.

CID

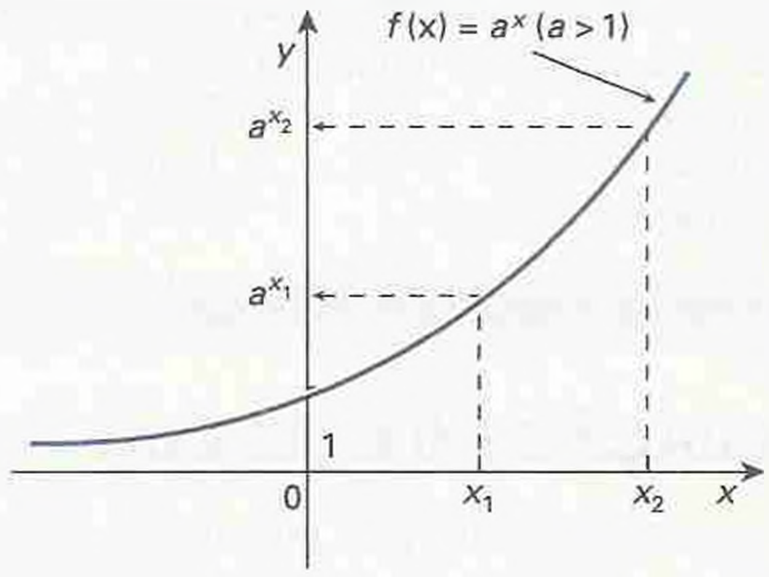
Cultura de bactérias.

2. PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

E.1 Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

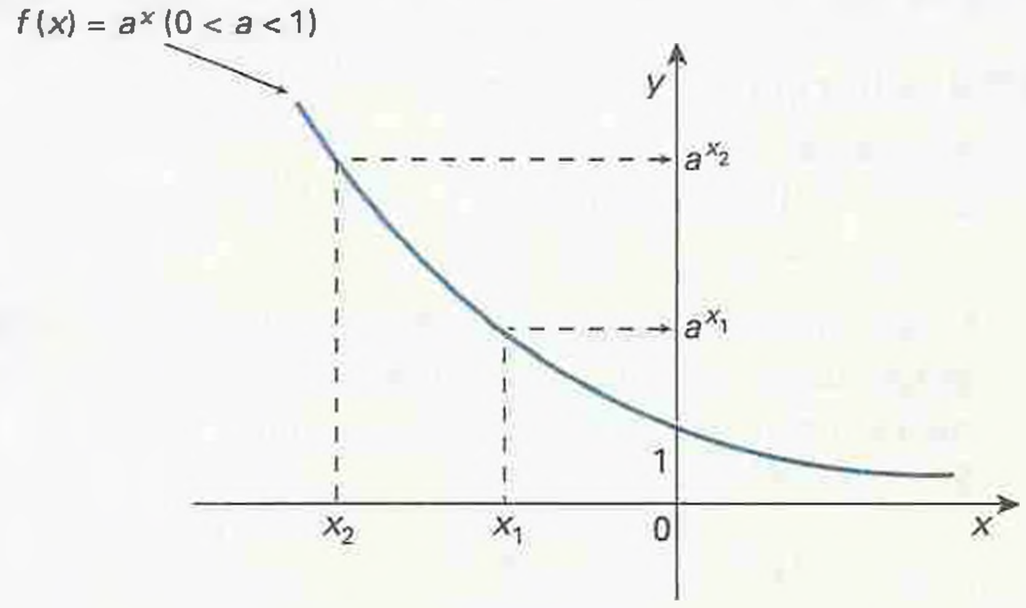
E.2 A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$.



Tem-se, então:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1, \quad \forall a, a \in \mathbb{R} \text{ e } a > 1.$$

E.3 A função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$.



Tem-se, então:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1, \quad \forall a, a \in \mathbb{R} \text{ e } 0 < a < 1.$$

3. EQUAÇÃO EXPONENCIAL

É toda equação cuja incógnita se apresenta no expoente de uma ou mais potências de bases positivas e diferentes de 1.

Exemplos

a) $3^x = 9$ b) $5^{2x} + 5^x = 30$ c) $6^x = 2$

Resolução de uma equação exponencial

A resolução de uma equação exponencial baseia-se na propriedade E.1, isto é, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se que:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Apresentamos, como exercícios resolvidos, alguns tipos de equações exponenciais.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $125^x = 625$.

Resolução

Resolveremos essa equação transformando-a numa igualdade de duas potências de mesma base. Para isso, fatoramos os números 125 e 625:

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 125 = 5^3 \qquad \begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 625 = 5^4$$

Assim, temos:

$$125^x = 625 \Rightarrow (5^3)^x = 5^4$$

$$\therefore 5^{3x} = 5^4 \overset{\text{Prop. E.1}}{\Rightarrow} 3x = 4$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}$$

Logo, $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

R.2 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $2^x = 1$.

Resolução

O número 1 pode ser escrito como 2^0.

Logo, $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \therefore$ pela propriedade E.1, temos $x = 0$.

Logo, $S = \{0\}$.

R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $3^x = 2^x$.

Resolução

Dividindo ambos os membros da equação por 2^x, temos:

$$3^x = 2^x \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{2^x}{2^x} \quad \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \overset{\text{Prop. E.1}}{\Rightarrow} x = 0$$

Logo, $S = \{0\}$.

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Resolução

A equação pode ser escrita sob a forma:

$$(3^2)^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

Fazendo a mudança de variável $3^x = t$, temos:

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$$

$$\therefore t = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$\therefore t = 9 \text{ ou } t = 1$$

Voltando à variável x, temos:

$$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \therefore x = 2 \text{ ou}$$
$$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \therefore x = 0$$

Logo, $S = \{0, 2\}$.

R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$.

Resolução

$2^{x+3} + 2^{x-1} = 17 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 + 2^x : 2^1 = 17$

$\therefore 8 \cdot 2^x + \dfrac{2^x}{2} = 17$

Fazendo a mudança de variável $2^x = t$, temos:

$8t + \dfrac{t}{2} = 17 \Rightarrow \dfrac{16t + t}{2} = \dfrac{34}{2}$

$\therefore 17t = 34 \Rightarrow t = 2$

Voltando à variável x, temos $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.
Logo, $S = \{1\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $64^x = 256$
b) $25^{x+2} = 125^{x+5}$
c) $9^{2x-1} = 27^{5x+1}$
d) $13^x = 1$
e) $5^{2x-1} = 1$
f) $7^x = 8^x$
g) $8^{x+2} = 16^{x-1}$
h) $49^{2x} = 343^{3x+2}$
i) $9^{x-1} - 81 = 0$
j) $7^{x^2-10x+16} = 1$
k) $3^x - 5^x = 0$
l) $3^x \cdot 2^x = 6^{3x-1}$

B.2 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das equações:

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{27}{8}$

b) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{3x+1} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^x$

c) $(\sqrt{2})^x = \sqrt{8}$

d) $\sqrt{3^{x-1}} = (\sqrt[5]{9^x})^2$

e) $(\sqrt[6]{32^{x+1}})^5 = \sqrt[3]{2}$

f) $(\sqrt[3]{3^x})^x = \sqrt[3]{81}$

g) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{x^2} = \left(\dfrac{25}{49}\right)^x$

h) $\left(\dfrac{8}{125}\right)^{2x-1} = 1$

i) $\sqrt[5]{81^x} = \sqrt{3}$

j) $\sqrt[7]{8^x} = (\sqrt{4^{x-1}})^3$

k) $\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}\right)^{x+1} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

l) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \left(\dfrac{25}{9}\right)^{x+1}$

m) $\left(\dfrac{1}{32}\right)^x = 64^{2x-1}$

B.3 Determine o conjunto dos valores x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfazem cada uma das equações:

a) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$
b) $3^{x+1} - 3^{x+2} = -54$
c) $2 \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-2} = 30$
d) $5^{x-2} + 5^{x+1} = 126$
e) $5 \cdot 2^{x-2} + 3 \cdot 2^{x-1} = 44$

B.4 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$
b) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 = 0$
c) $4^{x+1} - 2^{x+1} - 56 = 0$
d) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$
e) $25^{x+\frac{1}{2}} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$
f) $9^{x-\frac{3}{2}} + 3^{x+1} = 30$
g) $2 \cdot 9^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-2} = 22$
h) $5 \cdot 2^{x-2} + 3 \cdot 4^{x-1} = 58$
i) $3^{x+1} \cdot 2^{x+1} + 36^x = 72$

B.5 (U. Amazonas-AM) Em pesquisa realizada, constatou-se que a população (P) de determinada bactéria cresce segundo a expressão $P(t) = 25 \cdot 2^t$, onde t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 400 bactérias, será necessário um tempo de:

a) 4 horas
b) 3 horas
c) 2 horas e 30 minutos
d) 2 horas
e) 1 hora

Exercícios complementares de C.1 a C.5

4. INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Inequação exponencial é toda inequação cuja incógnita se apresenta no expoente de uma ou mais potências de bases positivas e diferentes de 1.

Exemplos

a) $5^x > 25$ b) $3^x + 3^{x+1} \leqslant 12$ c) $3^x \geqslant 2^x$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $25^{3x-1} > 125^{x+2}$.

Resolução

$25^{3x-1} > 125^{x+2} \Rightarrow (5^2)^{3x-1} > (5^3)^{x+2}$

$\therefore 5^{6x-2} > 5^{3x+6}$

Como a base (5) das potências é maior que 1, temos, pela propriedade E.2, que o "sentido" da desigualdade se mantém para os expoentes. Assim, temos:

$5^{6x-2} > 5^{3x+6} \Rightarrow 6x - 2 > 3x + 6$

$\therefore 6x - 3x > 6 + 2 \therefore 3x > 8 \therefore x > \dfrac{8}{3}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{8}{3}\right\}$.

R.7 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x-5} \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1}$.

Resolução

$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x-5} \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1} \Rightarrow \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{2x-5} \leqslant \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right]^{x+1}$

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}\right)^{6x-15} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+2}$

Como a base $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ das potências é um número entre 0 e 1, temos, pela propriedade E.3, que o "sentido" da desigualdade é "invertido" para os expoentes. Assim, temos:

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6x-15} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x+2} \Rightarrow 6x - 15 \geqslant 2x + 2$

$\therefore 6x - 2x \geqslant 2 + 15 \therefore 4x \geqslant 17 \therefore x \geqslant \dfrac{17}{4}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{17}{4}\right\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.6 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $16^{3x-1} > 8^{2x+5}$

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

c) $(0{,}3)^{4x-5} > (0{,}3)^{2x+1}$

d) $\left(\sqrt{2}\right)^{3x-1} \leqslant \sqrt[4]{8}$

e) $\left(\sqrt{0{,}6}\right)^{3x-2} \geqslant 0{,}6$

f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} > 3^{x+2}$

g) $125^{2x+1} > 25^{3x}$

h) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \leqslant \left(\frac{9}{4}\right)^{x}$

i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{3x-2} > \left(\frac{125}{8}\right)^{2x-1}$

j) $\sqrt{2^x} < \sqrt[4]{4}$

k) $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{x+2} > \sqrt[4]{27}$

l) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x+1} \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x+3}$

B.7 (UME-SP) A solução da inequação

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x(x+2)} - \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4} \geqslant 0$ no conjunto dos reais é:

a) $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$
b) $-2 \leqslant x \leqslant 2$
c) $x \geqslant \frac{1}{5}$
d) $x \leqslant 0$
e) $x \geqslant 0$

B.8 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $2^{x-1} < 2^{2x+1} \leqslant 4^{3x+1}$

Sugestão. Resolva o sistema $\begin{cases} 2^{x-1} < 2^{2x+1} \\ 2^{2x+1} \leqslant 4^{3x+1} \end{cases}$, isto é, determine a intersecção dos conjuntos solução das duas inequações.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} < 4^{x+1} < 16^{2x+3}$

B.9 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-1} \geqslant 11$

b) $\left(\sqrt{0{,}39}\right)^{x^2-5x+6} < 1$

c) $\left(\sqrt{1{,}8}\right)^{x^2-6x+5} \geqslant 1$

Exercício complementar C.6

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (PUC-MG) Sendo x e y reais, o valor de $x + y$ no sistema $\begin{cases} 2^x = 4^y \\ 25^x = 25 \cdot 5^y \end{cases}$ é:

a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{3}$
d) 1
e) 2

C.2 (PUC-RJ) A soma das raízes da equação

$5^{x^2-2x+1} = \frac{5.625}{9}$ é:

a) -4
b) -2
c) -1
d) 2
e) 4

C.3 (ITA-SP) Determine o conjunto solução da equação $3^{2x} + 5^{2x} - 15^x = 0$, no universo $\mathbb{R}$. **Sugestão.** Divida ambos os membros da igualdade por 15^x.

C.4 (UnB/PAS-DF-modificado) As substâncias radiativas têm uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em uma nova substância. Conseqüentemente, com o passar do tempo, a quantidade da substância radiativa diminui. A velocidade de decaimento pode ser medida contando-se o número de partículas liberadas por unidade de tempo. Instrumentos para medir a radiatividade, como, por exemplo, o contador de Geiger, fazem isso automaticamente.

O plutônio-240, produzido em reatores nucleares, é um material radiativo de longa vida, o que torna o lixo atômico desses reatores de difícil armazenamento. A partir de uma massa inicial M_0 dessa substância, a sua massa M, após t séculos, será, aproximadamente, determinada pela equação $M = M_0(1{,}01)^{-t}$.
Com base nessas informações, determine, **em porcentagem**, a quantidade de massa do plutônio-240 restante, após 2 séculos de desintegração. (Dê um resultado aproximado.)

C.5 (UMC-SP) O número N de decibéis e a potência I de um som medida em watts por centímetros quadrados estão relacionados pela fórmula $I = 10^{-16} \cdot 10^{\frac{N}{10}}$. O número de decibéis correspondente ao som provocado por tráfico pesado de veículos, cuja potência é estimada em 10^{-8} watts por centímetro quadrado, é igual a:

a) 40
b) 80
c) 120
d) 160
e) 200

C.6 Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 < 0$. **Sugestão.** Faça a mudança de variável $2^x = t$ e resolva a inequação $t^2 - 3t + 2 < 0$.

Capítulo 19
TEORIA DOS LOGARITMOS — O PORQUÊ DOS LOGARITMOS

1. PRINCÍPIOS BÁSICOS

Considere as expressões:

- $31.245 + 6.231$;
- $31.245 - 6.231$;
- $31.245 \cdot 6.231$;
- $31.245 : 6.231$.

Quais delas você resolveria mais rapidamente?

De modo geral é mais simples somar ou subtrair dois números do que multiplicá-los ou dividi-los. Com base nessas idéias, o escocês John Napier (ou Neper) formalizou a teoria dos logaritmos, cuja finalidade é simplificar cálculos numéricos.

Os princípios básicos dos logaritmos — **transformar uma multiplicação em adição** ou **uma divisão em subtração** — já haviam sido vislumbrados por outros matemáticos antes de Napier. No entanto credita-se a ele a criação dos logaritmos, devido a vinte anos de trabalho que culminaram com a publicação das obras *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Descrição das normas dos logaritmos maravilhosos*, em 1614) e *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (*Cálculo das normas dos logaritmos maravilhosos*, em 1619).

John Napier (1550-1617).

2. LOGARITMO

Para compreender o que é um logaritmo, considere uma potência de base positiva e diferente de 1. Por exemplo:

$$2^3 = 8$$

Ao expoente dessa potência damos o nome de **logaritmo**. Dizemos que 3 é o logaritmo de 8 na base 2. Em símbolos:

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$$

Exemplos

a) $5^2 = 25 \Leftrightarrow \log_5 25 = 2$

b) $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$

Definição

Sejam a e b números reais positivos e $b \neq 1$. Chama-se **logaritmo de a na base b** o expoente x tal que $b^x = a$.

Em símbolos:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Nomenclatura

Na sentença $\log_b a = x$:

- a é chamado de "logaritmando";
- b é chamado de "base do logaritmo";
- x é chamado de "logaritmo de a na base b".

Exemplos

a) $\log_2 16$ é o expoente x tal que $2^x = 16$.

Temos $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \therefore x = 4$.

Assim, $\log_2 16 = 4$.

b) $\log_5 \frac{1}{25}$ é o expoente x tal que $5^x = \frac{1}{25}$.

Temos $5^x = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \therefore x = -2$.

Assim, $\log_5 \frac{1}{25} = -2$.

c) $\log_7 1$ é o expoente x tal que $7^x = 1$.

Temos $7^x = 1 \Leftrightarrow 7^x = 7^0 \therefore x = 0$.

Assim, $\log_7 1 = 0$.

d) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ é o expoente x tal que $5^x = \sqrt[3]{5}$.

Temos $5^x = \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{\frac{1}{3}} \therefore x = \frac{1}{3}$.

Assim, $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$.

Convenção

Chama-se **logaritmo decimal** aquele de base 10. Indica-se o logaritmo decimal de um número a simplesmente por **log** a (a base 10 fica subentendida).

Exemplo

$\log \frac{1}{1.000}$ é o expoente x tal que $10^x = \frac{1}{1.000}$

Temos:

$$10^x = \frac{1}{1.000} \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \therefore x = -3$$

Assim, $\log \frac{1}{1.000} = -3$.

3. PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Decorre imediatamente da definição que para números reais positivos a e b, com $b \neq 1$:

L.1 $\log_b b = 1$.

De fato, fazendo $\log_b b = x$, tem-se $b^x = b \therefore x = 1$.

L.2 $\log_b 1 = 0$.

De fato, fazendo $\log_b 1 = x$, tem-se $b^x = 1 \therefore x = 0$.

L.3 $\log_b a^y = y \log_b a, \quad \forall y, y \in \mathbb{R}$.

De fato, fazendo $\log_b a = x$, tem-se $b^x = a$. Elevando-se ao expoente y ambos os membros dessa última igualdade:

$$(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{yx} = a^y$$

Pela definição de logaritmo:

$$b^{yx} = a^y \Leftrightarrow yx = \log_b a^y$$

Como $x = \log_b a$, temos, finalmente, que:

$$y \log_b a = \log_b a^y$$

L.4 $\log_b b^x = x$.

De fato, pelas propriedades L.3 e L.1, temos $\log_b b^x = x \log_b b = x \cdot 1$, portanto, $\log_b b^x = x$.

L.5 $b^{\log_b a} = a$.

De fato, fazendo $\log_b a = x$, tem-se: $b^x = a$. Substituindo, nessa última igualdade, x por $\log_b a$, tem-se:

$$b^{\log_b a} = a$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular os logaritmos:

a) $\log_{125} 625$

b) $\log_{81} \frac{1}{243}$

c) $\log \sqrt[4]{1.000}$

d) $\log_{\frac{27}{8}} \frac{64}{729}$

Resolução

a) $\log_{125} 625 = x \Leftrightarrow 125^x = 625 \therefore (5^3)^x = 5^4$

$\therefore 5^{3x} = 5^4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Assim, $\log_{125} 625 = \frac{4}{3}$.

b) $\log_{81} \frac{1}{243} = x \Leftrightarrow 81^x = \frac{1}{243}$

$\therefore (3^4)^x = \frac{1}{3^5} \therefore 3^{4x} = 3^{-5} \Rightarrow 4x = -5$

$\therefore x = -\frac{5}{4}$

Assim, $\log_{81} \frac{1}{243} = -\frac{5}{4}$.

c) $\log \sqrt[4]{1.000} = x \Leftrightarrow 10^x = \sqrt[4]{1.000}$

$\therefore 10^x = \sqrt[4]{10^3} \therefore 10^x = 10^{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Assim, $\log \sqrt[4]{1.000} = \frac{3}{4}$.

d) $\log_{\frac{27}{8}} \frac{64}{729} = x \Leftrightarrow \left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{64}{729}$

$\therefore \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^x = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \therefore \left(\frac{3}{2}\right)^{3x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = -6 \therefore x = -2$. Assim, $\log_{\frac{27}{8}} \frac{64}{729} = -2$.

Medida do nível sonoro

Para medir o **nível sonoro** utiliza-se a escala logarítmica. Considerando I_0 a menor intensidade física do som audível e I a intensidade física do som que se quer medir, o nível sonoro β de I é calculado por:

$$\beta = \log \frac{I}{I_0}$$

na unidade de medida **bel** (símbolo B), nome dado em homenagem a Graham Bell, inventor do telefone. Na prática utiliza-se o **decibel** (símbolo db) que equivale à décima parte do bel.

Graham Bell (1847-1922).

R.2 Sabendo que $\log_b a = 3$, calcular $\log_b a^5$.

Resolução

Pela propriedade L.3, temos $\log_b a^5 = 5 \log_b a$.

Como $\log_b a = 3$, temos $\log_b a^5 = 5 \log_b a = 5 \cdot 3 = 15$.

Então, $\log_b a^5 = 15$.

R.3 Calcular o valor da expressão

$E = 3^{\log_3 5} + \log_6 6 - \log_8 1$.

Resolução

Pela L.5, temos $3^{\log_3 5} = 5$.

Pela L.1, temos $\log_6 6 = 1$.

Pela L.2, temos $\log_8 1 = 0$.

Assim, $E = 5 + 1 - 0 = 6$.

R.4 Calcule o valor da expressão $5^{4 \log_5 2}$.

Resolução

Pela L.3, temos $4 \log_5 2 = \log_5 2^4 = \log_5 16$.

Assim, $5^{4 \log_5 2} = 5^{\log_5 16} = 16$.

Pela L.5

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule os logaritmos:

a) $\log_7 49$

b) $\log_6 216$

c) $\log_{128} 1.024$

d) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{9}$

e) $\log_2 \sqrt[5]{16}$

f) $\log 10.000$

g) $\log_4 4$

h) $\log_5 1$

i) $\log_3 243$

j) $\log \sqrt[6]{1.000}$

k) $\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{625}$

l) $\log_{243} 3$

m) $\log_{32} 128$

n) $\log_{\frac{4}{25}} \frac{625}{16}$

o) $\log 0{,}001$

p) $\log_{0,3} 0{,}09$

q) $\log_{0.0016} 0{,}008$

r) $\log_{0.6} \frac{81}{625}$

B.2 (UECE) O valor de $2^{\log_2 2} + (2^{\log_2 \sqrt{2}})^2 + 2^{-\log_2 \frac{1}{2}}$ é igual a:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

B.3 Determine x em cada igualdade:

a) $\log_5 x = 2$

b) $\log_{36} x = \frac{1}{2}$

c) $\log_2 x = -3$

d) $\log_4 x = 0$

e) $\log_5 x = 3$

f) $\log_{81} x = \frac{1}{4}$

g) $\log x = -2$

h) $\log_{1.024} x = -0{,}1$

i) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = 3$

B.4 Sabendo que $\log_b a = 9$, calcule $\log_b a^6$.

B.5 Sabendo que $\log_b a^2 = 8$ e que $a > 0$, calcule $\log_b a^3$.

B.6 Sabendo que $\log_b a = 9$, calcule $\log_b \sqrt[3]{a}$.

B.7 Sabendo que $\log_b a = 4$, calcule $\log_b \sqrt[6]{a^5}$.

B.8 Calcule o valor da expressão $E = 6^{\log_6 5}$.

B.9 Calcule o valor da expressão $E = 5^{2 \log_5 3}$.

B.10 Calcule o valor da expressão $E = (b^2)^{\log_b 3}$, em que $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

B.11 Calcule o valor da expressão $E = 5^{2 + \log_5 3}$.

B.12 Calcule o valor da expressão $E = 8^{1 - \log_8 4}$.

B.13 Prove que:

a) $\log_b \frac{1}{a} = -\log_b a$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$;

b) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $b \neq 1$.

B.14 Sabendo que $\log_3 5 = m$, calcule em função de m:

a) $\log_3 \frac{1}{5}$ b) $\log_5 3$ c) $\log_5 \frac{1}{3}$

B.15 Sabendo que $\log_3 5 = m$, calcule em função de m:

a) $\log_3 \frac{1}{5^m}$ b) $\log_5 \frac{1}{3^m}$

B.16 Chama-se cologaritmo de a na base b, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$, o número $-\log_b a$. Isto é:

$$\text{colog}_b a = -\log_b a$$

Calcule os cologaritmos:

a) $\text{colog}_2 8$ b) $\text{colog}_{16} 32$ c) $\text{colog}_5 \frac{1}{125}$

Exercícios complementares de C.1 a C.4

4. OUTRAS PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Sendo a, b e c números reais positivos, com $b \neq 1$, temos:

L.6 $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$.

Demonstração

Sejam $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$.

Assim, podemos escrever $b^x b^y = ac \Leftrightarrow b^{x+y} = ac$.

Pela definição de logaritmo:

$$b^{x+y} = ac \Leftrightarrow x + y = \log_b ac$$

$$\therefore \log_b a + \log_b c = \log_b ac$$

(c.q.d.)

Exemplos

a) $\log_2 (4 \cdot 2) = \log_2 4 + \log_2 2$

b) $\log_5 (625 \cdot 125) = \log_5 625 + \log_5 125$

L.7 $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c,$

Demonstração

Sejam $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$.

Assim, podemos escrever $\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow b^{x-y} = \frac{a}{c}$.

Pela definição de logaritmo:

$$b^{x-y} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow x - y = \log_b \frac{a}{c}$$

$$\therefore \log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$

(c.q.d)

Exemplos

a) $\log_2 \frac{8}{2} = \log_2 8 - \log_2 2$

b) $\log_5 \frac{625}{125} = \log_5 625 - \log_5 125$

L.8 Mudança de base:

$$\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}, \quad \forall k, k \in \mathbb{R}_+^*, k \neq 1$$

Demonstração

Sejam $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_k a = y \Leftrightarrow k^y = a$.
Pela propriedade transitiva da igualdade:

$$b^x = a \text{ e } k^y = a \Leftrightarrow b^x = k^y$$

Pela definição de logaritmo, $b^x = k^y \Leftrightarrow y = \log_k b^x$.
Pela propriedade L.3, podemos escrever:

$$y = x \log_k b \quad \therefore \log_k a = \log_b a \cdot \log_k b$$

$$\therefore \frac{\log_k a}{\log_k b} = \log_b a$$

(c.q.d.)

Exemplos

a) $\log_{64} 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 64}$

b) $\log_{81} 9 = \frac{\log_9 9}{\log_9 81}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Sabendo que $\log_6 5 = 0{,}898$ e $\log_6 2 = 0.386$, calcular:

a) $\log_6 10$ c) $\log_2 5$ e) $\log_6 \frac{5}{12}$

b) $\log_6 2{,}5$ d) $\log_6 20$ f) $\log_6 \sqrt{5}$

Resolução

a) $\log_6 10 = \log_6 (5 \cdot 2) \overset{\text{L.6}}{=} \log_6 5 + \log_6 2 =$
$= 0{,}898 + 0{,}386 = 1{,}284.$

b) $\log_6 2{,}5 = \log_6 \frac{5}{2} \overset{\text{L.7}}{=} \log_6 5 - \log_6 2 =$
$= 0{,}898 - 0{,}386 = 0{,}512.$

c) $\log_2 5 \overset{\text{L.8}}{=} \frac{\log_6 5}{\log_6 2} = \frac{0{,}898}{0{,}386} \simeq 2{,}326.$

d) $\log_6 20 = \log_6 (2^2 \cdot 5) \overset{\text{L.6}}{=} \log_6 2^2 +$
$+ \log_6 5 \overset{\text{L.3}}{=} 2 \log_6 2 + \log_6 5 =$
$= 2 \cdot 0.386 + 0{,}898 = 1.67.$

e) $\log_6 \frac{5}{12} \overset{\text{L.7}}{=} \log_6 5 - \log_6 12 =$
$= \log_6 5 - \log_6 (6 \cdot 2) \overset{\text{L.6}}{=} \log_6 5 - (\log_6 6 +$
$+ \log_6 2) = 0{,}898 - (1 + 0{,}386) =$
$= 0{,}898 - 1{,}386 = -0{,}488.$

f) $\log_6 \sqrt{5} = \log_6 5^{\frac{1}{2}} \overset{\text{L.3}}{=} \frac{1}{2} \log_6 5 =$
$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}898 = 0{,}449.$

R.6 Sabendo que $\log 2 = m$ e $\log 3 = k$, calcular $\log (8\sqrt[5]{9})$ em função de m e k.

Resolução

$$\log (8\sqrt[5]{9}) = \log \left(2^3 \cdot 3^{\frac{2}{5}}\right) \overset{\text{L.6}}{=} \log 2^3 +$$
$$+ \log 3^{\frac{2}{5}} \overset{\text{L.3}}{=} 3 \log 2 + \frac{2}{5} \log 3 = 3m + \frac{2k}{5} =$$
$$= \frac{15m + 2k}{5}$$

Portanto, $\log (8\sqrt[5]{9}) = \frac{15m + 2k}{5}$.

R.7 Sabendo que $\log_{15} 9 = a$, calcular $\log_{15} 5$ em função de a.

Resolução

$$\log_{15} 9 = a \Leftrightarrow \log_{15} 3^2 = a$$

Pela propriedade L.3, podemos escrever:

$$2 \log_{15} 3 = a \quad \therefore \log_{15} 3 = \frac{a}{2}$$

Temos, então, $\log_{15} 5 = \log_{15} \frac{15}{3} \overset{\text{L.7}}{=}$

$$= \log_{15} 15 - \log_{15} 3 = 1 - \frac{a}{2} = \frac{2 - a}{2}.$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.17 Sabendo que $\log_5 2 = 0{,}43$ e $\log_5 3 = 0{,}68$, calcule:

a) $\log_5 6$ e) $\log_2 3$ i) $\log_5 \sqrt{3}$

b) $\log_5 \frac{2}{3}$ f) $\log_5 8$ j) $\log_5 4\sqrt[4]{3}$

c) $\log_5 1{,}5$ g) $\log_5 24$ k) $\log_{\sqrt{5}} 12$

d) $\log_3 2$ h) $\log_5 \frac{9}{8}$

B.18 Sabendo que $\log 5 = 0{,}69$ e $\log 3 = 0{,}47$, calcule:

a) $\log 15$ g) $\log 18$

b) $\log 75$ h) $\log \sqrt[6]{15}$

c) $\log \frac{3}{5}$ i) $\log_3 5$

d) $\log \frac{27}{5}$ j) $\log_9 125$

e) $\log 30$ k) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}9$

f) $\log 6$ **Sugestão.** $6 = \frac{30}{5}$.

B.19 Sabendo que $\log_3 4 = 1{,}26$, calcule:

a) $\log_4 3$ b) $\log_{12} 3$

B.20 Sabendo que $\log_2 5 = 2{,}32$, calcule:

a) $\log_5 2$ b) $\log 2$ c) $\log 5$

B.21 Prove que $\log_{b^\alpha} a = \frac{1}{\alpha} \log_b a$ para qualquer α, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, e quaisquer números a e b reais positivos com $b \neq 1$. **Sugestão**. Faça uma mudança de base.

B.22 Determine o valor de x, sabendo que $x = \log_3 4 \cdot \log_2 3$.

B.23 Determine o valor de x, sabendo que $x = \log_4 125 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 3$.

B.24 Sabendo que $\log (a + b) = m$ e $\log (a - b) = n$, calcule $\log (a^2 - b^2)$ em função de m e n.

B.25 Sendo $\log_2 (a - b) = 3$, obedecidas todas as condições de existência, calcule o valor da expressão:

$$E = \log_4 (3a + 1) - \log_4 (3a^2 + a - 3ab - b)$$

B.26 Sendo $\log_5 \frac{1}{b} = 3{,}4$, obedecidas todas as condições de existência, calcule o valor da expressão:

$$E = \log_{\frac{1}{5}} \frac{a}{b} - \log_{\frac{1}{5}} ab$$

B.27 Sabendo que $3^k = 2$, calcule $\log_2 18$ em função de k.

B.28 Dado que $6^n = 2$, calcule, em função de n, o valor de $\log_2 24$.

B.29 Conhecendo $\log_{20} 5 = a$, calcule, em função de a, o valor de $\log_{20} 4$.

B.30 Sabendo que $\log_{12} 3 = m$, calcule, em função de m, o valor de $\log_{12} 6$.

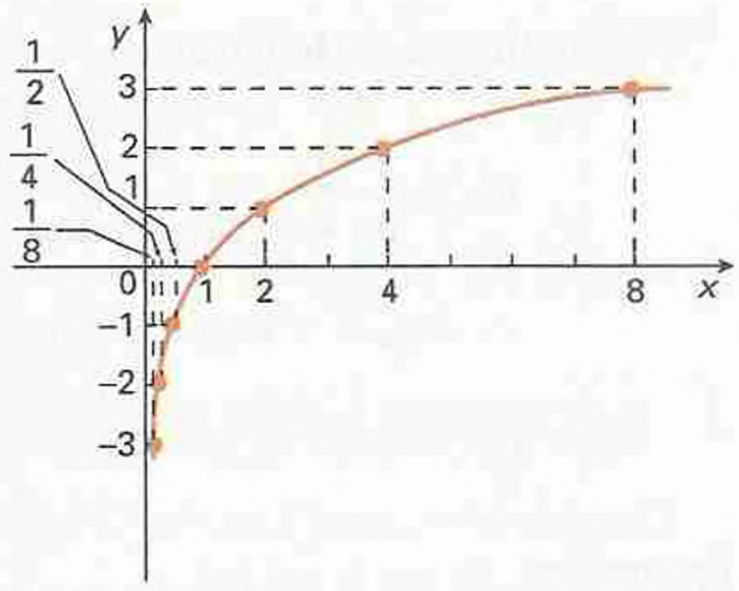
Exercícios complementares de C.5 a C.12

5. FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Consideremos a função $f(x) = \log_2 x$. Podemos obter o gráfico de f através de uma tabela:

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

Atribuindo a x os infinitos valores reais positivos, obtém-se o gráfico

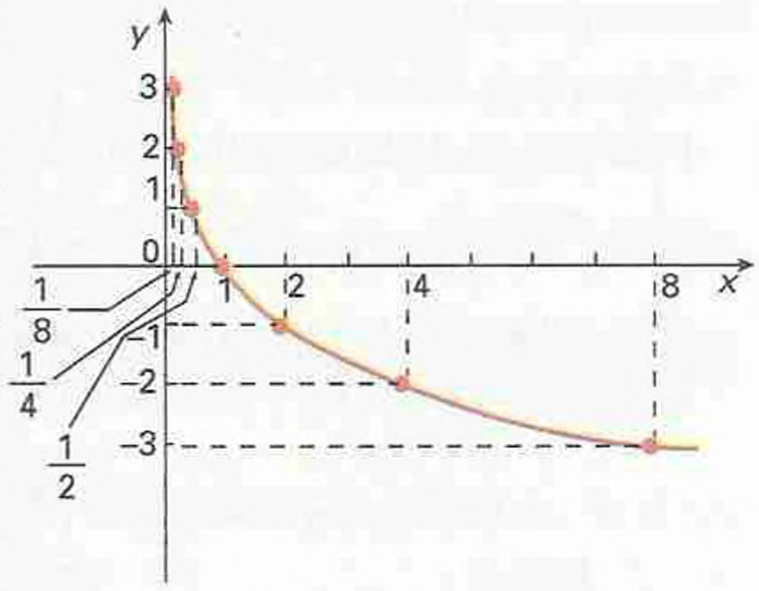


- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- $Im(f) = \mathbb{R}$;
- $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente em todo seu domínio.

Consideremos agora a função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. Para obter um esboço do gráfico de g, vamos construir a seguinte tabela:

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3

Atribuindo a x os infinitos valores reais positivos, obtém-se o gráfico



- $D(g) = \mathbb{R}_+^*$;
- $Im(g) = \mathbb{R}$;
- $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função decrescente em todo seu domínio.

Definição

Chama-se **função logarítmica** toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, com $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

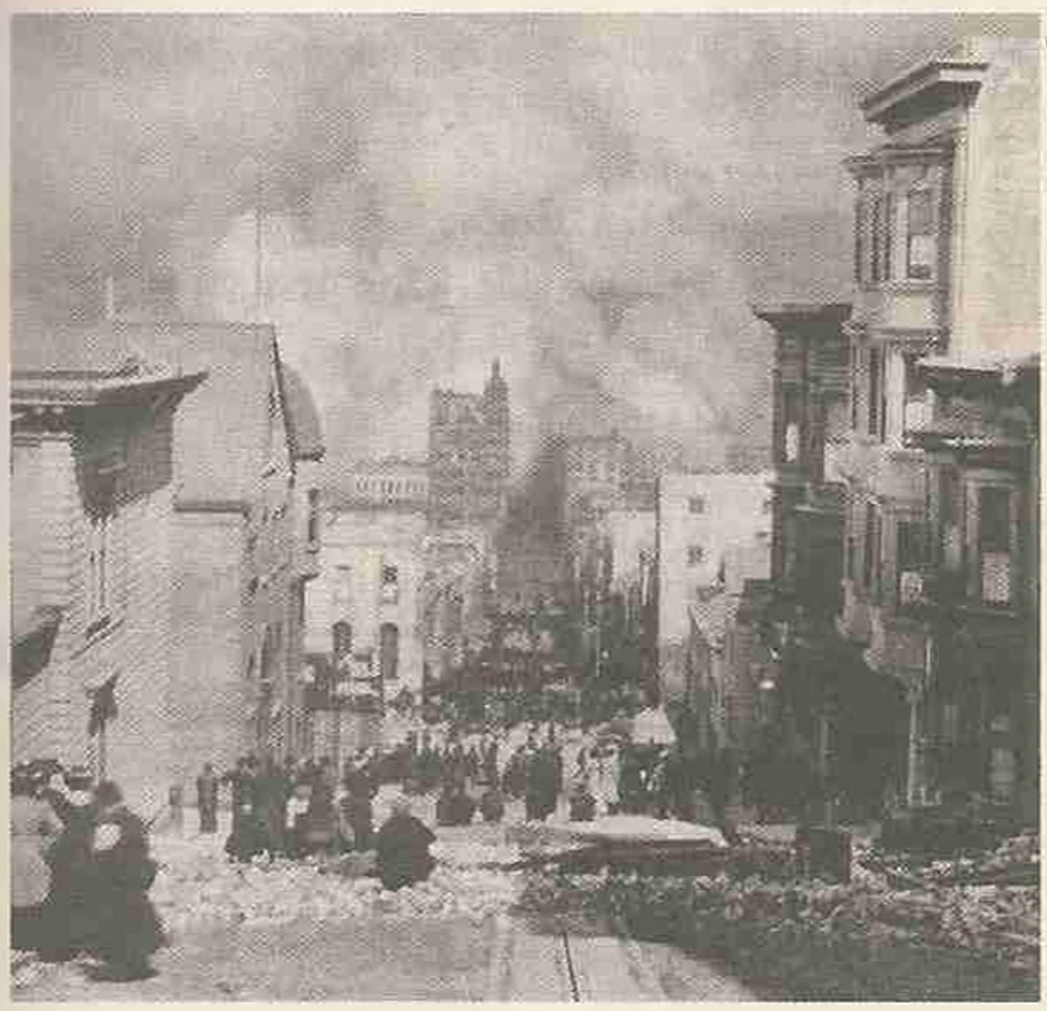
Exemplos

a) $f(x) = \log_2 x$ c) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

b) $h(x) = \log_{0,2} x$ d) $t(x) = \log_{\sqrt{7}} x$

Os terremotos

Abandonando um pequeno dado sobre a superfície terrestre ocorrerá uma liberação de energia que a fará vibrar levemente. Se, no lugar do dado, for abandonado um tijolo, a energia liberada fará vibrar mais intensamente essa superfície. Imagine um cubo de granito com 2 km de aresta abandonado de uma altura de 280 km; a energia liberada será equivalente a 20 trilhões de kWh (quilowatt-hora). Essa foi a medida da energia liberada pelo terremoto ocorrido em São Francisco, Califórnia, em 1906. Mais violento ainda foi o terremoto que arrasou Lisboa em 1755, liberando energia equivalente a 350 trilhões de kWh.



REPRODUÇÃO

O terremoto ocorrido, em 1906, na cidade de São Francisco (EUA), registrou 9 pontos na escala Richter.

Os logaritmos são aplicados na medida da intensidade de um terremoto. Na escala Richter, a intensidade I de um terremoto é definida por

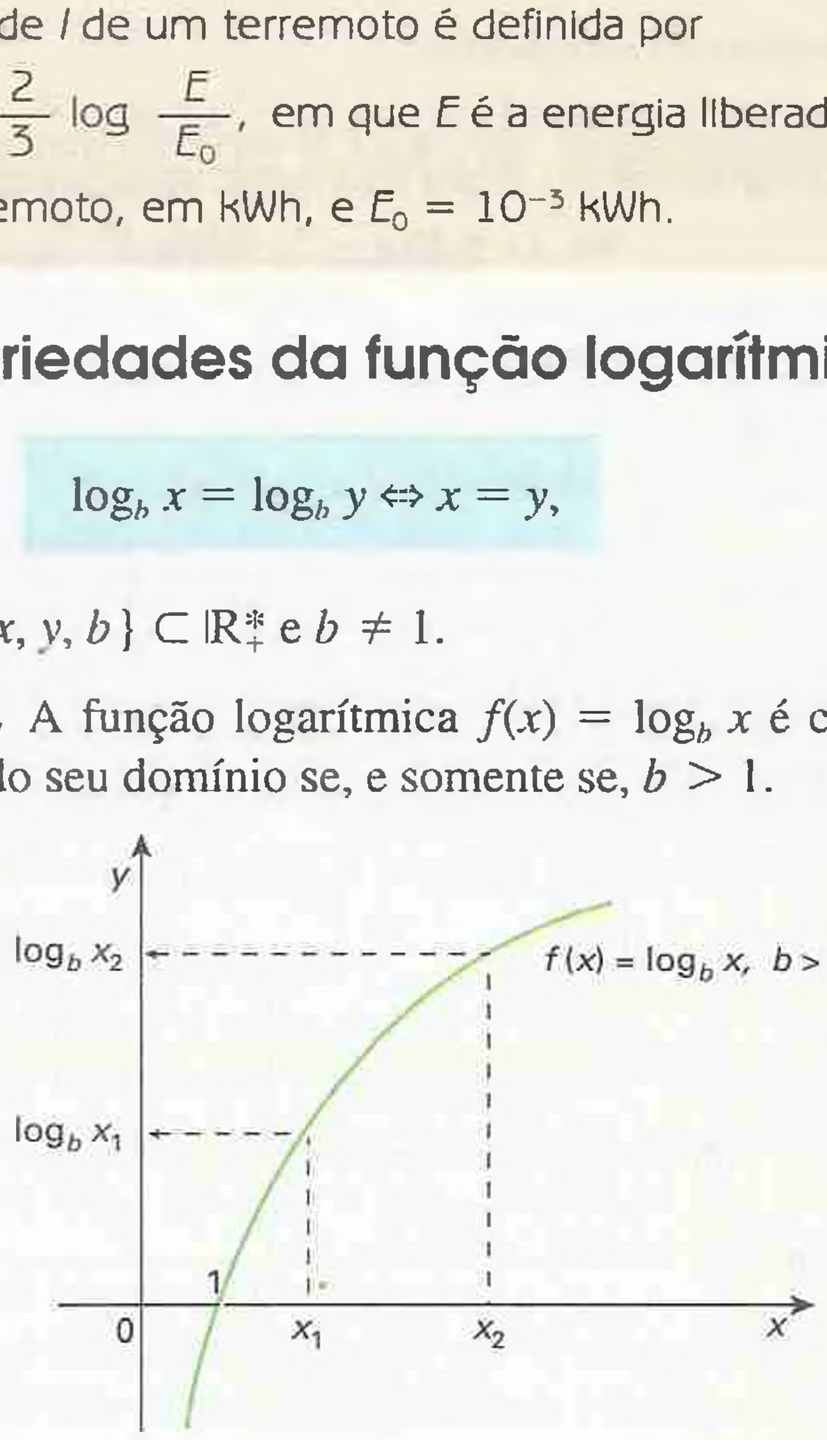
$I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$, em que E é a energia liberada pelo terremoto, em kWh, e $E_0 = 10^{-3}$ kWh.

Propriedades da função logarítmica

G.1 $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y,$

$\forall \{x, y, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b \neq 1.$

G.2 A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $b > 1$.

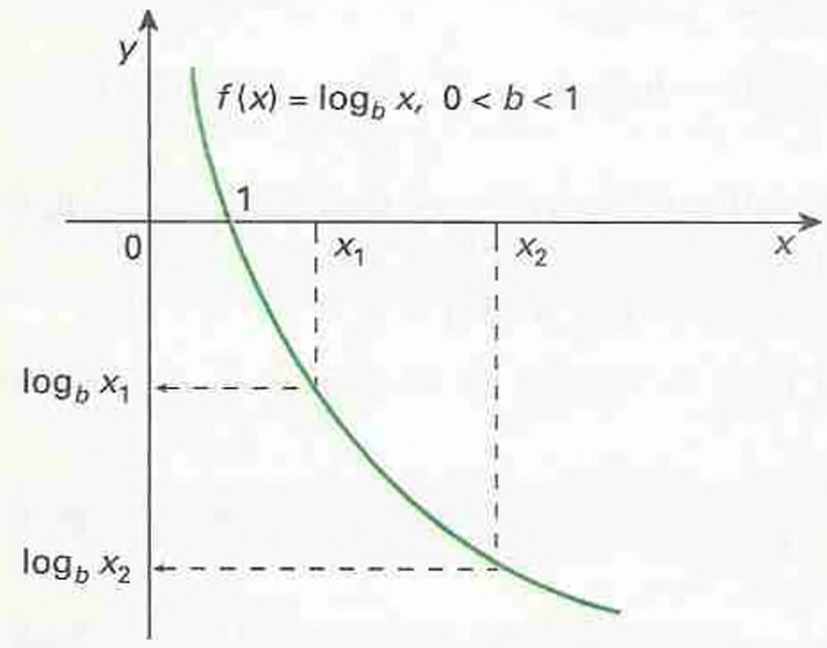


Tem-se, então:

$$\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1,$$

$\forall \{x_1, x_2, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b > 1$

G.3 A função logarítmica $f(x) = \log_b x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$.



Tem-se, então:

$$\log_b x_2 < \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1,$$

$\forall \{x_1, x_2, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b < 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Determinar o domínio da função $f(x) = \log_5 (3x - 6)$.

Resolução

Existe $\log_b a$ se, e somente se, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b \neq 1$. Como a base 5 do logaritmo já obedece à condição de existência, basta impormos a condição sobre o logaritmando, isto é:

$$3x - 6 > 0 \therefore x > 2$$

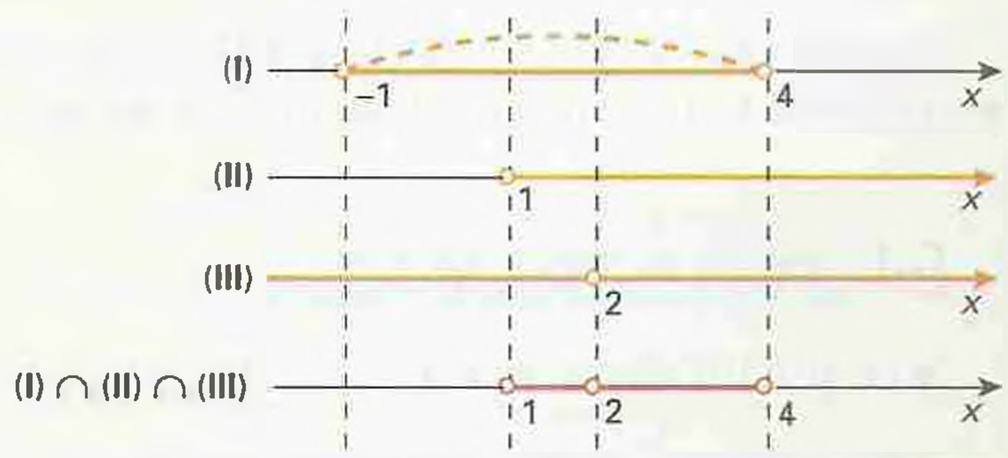
Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

R.9 Determinar o domínio da função $f(x) = \log_{x-1} (-x^2 + 3x + 4)$.

Resolução

Devemos ter:

$$\begin{cases} -x^2 + 3x + 4 > 0 & \text{(I)} \\ x - 1 > 0 & \text{(II)} \\ x - 1 \neq 1 & \text{(III)} \end{cases}$$



Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4 \text{ e } x \neq 2\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.31 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

B.32 Classifique como crescente ou decrescente cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_5 x$ c) $h(x) = \log_{\sqrt[6]{5}} x$

b) $g(x) = \log_{0,3} x$ d) $t(x) = \log_{\sqrt{0,6}} x$

B.33 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $\log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

b) $\log_3 a > \log_3 b \Leftrightarrow a > b$

c) $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b$

d) $\log_{0,7} a < \log_{0,7} b \Leftrightarrow a > b$

e) $\log_{\sqrt{1,5}} a \geqslant \log_{\sqrt{1,5}} b \Leftrightarrow a \geqslant b$

B.34 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_8 (5x - 15)$

b) $g(x) = \log_5 (x^2 - 3x)$

c) $f(x) = \log_{0,5} (x^2 - 5x + 4)$

d) $t(x) = \log_3 x^2$

e) $h(x) = \log_x (6x - 1)$

f) $t(x) = \log_{2x-4} (6x + 1)$

B.35 (PUC-MG) O domínio da função $f(x) = \log_{x-3} (x^2 - 7x + 12)$ é o conjunto:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 6\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < 12\}$

Exercícios complementares de C.13 a C.15

6. EQUAÇÃO LOGARÍTMICA

Chama-se **equação logarítmica** aquela que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplos

a) $\log_5 x = 3$

b) $\log (x^2 - x) + \log x = \log 9$

c) $\log_x 3x = 2$

Resolução de uma equação logarítmica

A resolução de uma equação logarítmica baseia-se na propriedade G.1 das funções logarítmicas, ou seja:

G.1 $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y,$

$\forall \{x, y, b\} \subset \mathbb{R}_+^* \text{ e } b \neq 1.$

Apresentamos, como exercícios resolvidos, alguns tipos de equação logarítmica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.10 Resolver a equação $\log_2 (4x + 24) = 5$.

Resolução

Condição de existência (C.E.)

Em primeiro lugar, devemos impor a condição de existência do logaritmo:

$$4x + 24 > 0 \Leftrightarrow x > -6 \therefore \text{ C.E. } x > -6$$

Preparação da equação

Transformamos os dois membros da equação em logaritmos de mesma base. O número 5 pode ser escrito como logaritmo de base 2, do seguinte modo:

$$5 = 5 \log_2 2 = \log_2 2^5$$

Assim, temos:

$$\log_2 (4x + 24) = 5 \Leftrightarrow \log_2 (4x + 24) = \log_2 2^5$$
$$\therefore \log_2 (4x + 24) = \log_2 32$$

Resolução da equação

Pela propriedade G.1, temos:

$$\log_2 (4x + 24) = \log_2 32 \Rightarrow 4x + 24 = 32$$
$$\therefore 4x = 8 \therefore x = 2$$

Note que $x = 2$ satisfaz a C.E. $x > -6$.

Portanto $S = \{2\}$.

R.11 Resolver a equação $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 7) = 2$.

Resolução

Condição de existência

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 & \text{(I)} \\ x > 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

C.E. $x > 7$

Preparação da equação:

$$\log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 7) = \log_3 3^2$$

Pela propriedade L.6 dos logaritmos, podemos escrever:

$$\log_3 (x + 1)(x - 7) = \log_3 3^2$$

Resolução da equação

Pela propriedade G.1, temos:

$$\log_3 (x^2 - 6x - 7) = \log_3 9 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 9$$
$$\therefore x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2$$

Note que apenas $x = 8$ satisfaz a C.E. $x > 7$.

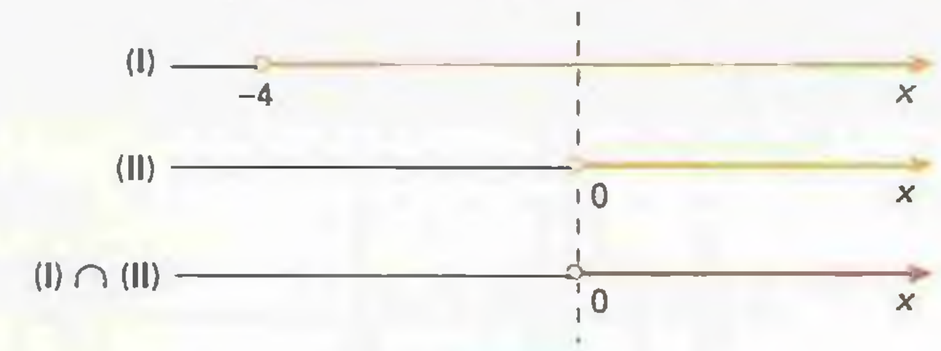
Portanto $S = \{8\}$.

R.12 Resolver a equação $\log_2 (x + 4) - \log_4 x = 2$.

Resolução

Condição de existência

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 & \text{(I)} \\ x > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$



C.E. $x > 0$

Preparação da equação
Inicialmente, devemos passar para uma mesma base todos os logaritmos da equação.

- Pela propriedade L.8 (mudança de base), podemos escrever $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}$.
- Pela propriedade L.4, podemos escrever $2 = \log_2 2^2$.

Assim, temos que $\log_2 (x + 4) - \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 2^2$.

Resolução da equação

$$\log_2 (x + 4) - \frac{\log_2 x}{2} = \log_2 4 \Rightarrow$$

$$\frac{2 \log_2 (x + 4) - \log_2 x}{2} = \frac{2 \log_2 4}{2}$$

$$\therefore \log_2 (x + 4)^2 - \log_2 x = \log_2 4^2$$

$$\therefore \log_2 \frac{(x + 4)^2}{x} = \log_2 16 \therefore \frac{(x + 4)^2}{x} = 16$$

$$\therefore x^2 + 8x + 16 = 16x \therefore x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \therefore x = 4.$$

Note que $x = 4$ satisfaz a C.E. $x > 0$.

Portanto $S = \{4\}$.

R.13 Resolver a equação $\log_x 9 = 2$.

Resolução

Condição de existência C.E. $x > 0$ e $x \neq 1$.

Preparação da equação:

$$\log_x 9 = 2 \Leftrightarrow \log_x 9 = \log_x x^2$$

Resolução da equação:

$$\log_x 9 = \log_x x^2 \Rightarrow 9 = x^2 \therefore x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Note que apenas $x = 3$ satisfaz a C.E. $x > 0$ e $x \neq 1$.

Portanto $S = \{3\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.36 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\log_3 (6x - 9) = 4$

b) $\log_2 (2x + 10) + \log_2 (x + 1) = 6$

c) $\log_5 (3x + 7) - \log_5 (x - 1) = 1$

d) $\log_2 x + \log_2 (x - 2) - \log_2 (x - 3) = 3$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x) - \log_{\frac{1}{2}} x = -2$

f) $\log_3 (x - 2) - \log_9 (x - 4) = 1$

g) $\log_6 (x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{6}} (x - 2) = \log_{36} 64$

h) $\log_x 32 = -5$

B.37 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das equações:

a) $\log_2 (x^2 + 2x) = 3$

b) $\log_4 (x + 10) + \log_4 (x - 5) = 2$

c) $\log (x + 68) - \log (x - 22) = 1$

d) $2 \log_2 x + \log_2 3 - \log_2 (x - 1) = \log_2 6 + \log_2 x$

e) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{2}} (x - 2) = -3$

f) $\log_2 (x + 3) - \log_4 x = 2$

g) $2 \log_5 x + 2 \log_{25} (x + 1) = -\log_{\frac{1}{5}} (x^2 + 4x)$

h) $\log_x 16 = -4$

B.38 Determine os reais x e y que satisfaçam o sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

B.39 (UCB) Em $U = \mathbb{R}$, determine o valor do produto das raízes da equação $x^{\log_3 x} = 6.561x^2$.

B.40 (FURRN) Aumentando-se um número x de 12 unidades, seu logaritmo na base 5 aumenta de 2 unidades. O valor de x é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ e) 6

b) 1 d) 2

B.41 (UECE) Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 + 6x + 4 = 0$, então $\log_4 (5x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2)$ é igual a:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 3 d) 5

Exercícios complementares de C.16 a C.20

7. INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

Chama-se **inequação logarítmica** aquela que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplos

a) $\log_2 (3x - 1) > 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 5) \leqslant -4$

c) $\log_x 9 > 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.14 Resolver a inequação $\log_2 (3x - 1) > 3$.

Resolução

Condição de existência (C.E.) $3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

Preparação da inequação
Escrevemos o número 3 como um logaritmo de base 2, ou seja, $3 = \log_2 2^3$.

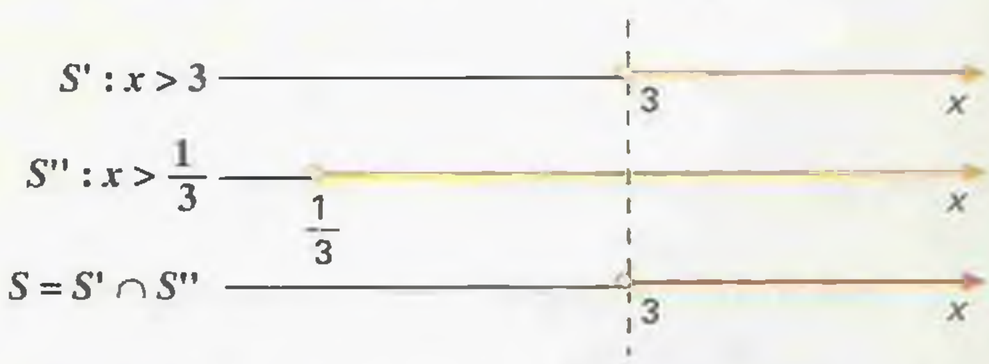
Temos, então, $\log_2 (3x - 1) > \log_2 2^3$.

Resolução da inequação
Pela propriedade G.2, temos que o "sentido" ($>$) da desigualdade entre os logaritmos se mantém ($>$) para os logaritmandos, pois a base 2 é maior que 1. Ou seja:

$$\log_2 (3x - 1) > \log_2 8 \Rightarrow 3x - 1 > 8$$

$$\therefore 3x > 9 \therefore x > 3$$

O conjunto solução S da inequação é a intersecção do conjunto S' dos reais x tais que $x > 3$, com o conjunto S'' dos reais x que satisfazem a C.E. $x > \frac{1}{3}$. Ou seja:



Portanto $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

R.15 Resolver a inequação

$\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 5) \leqslant -4$.

Resolução

Condição de existência (C.E.)

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 & \text{(I)} \\ x > -5 & \text{(II)} \end{cases}$$

$\therefore \quad x > 1$

Preparação da inequação

Escrevemos o número -4 da inequação como um logaritmo de base $\frac{1}{2}$, ou seja, $-4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

Temos, então:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

Pela propriedade L.6 dos logaritmos, podemos escrever:

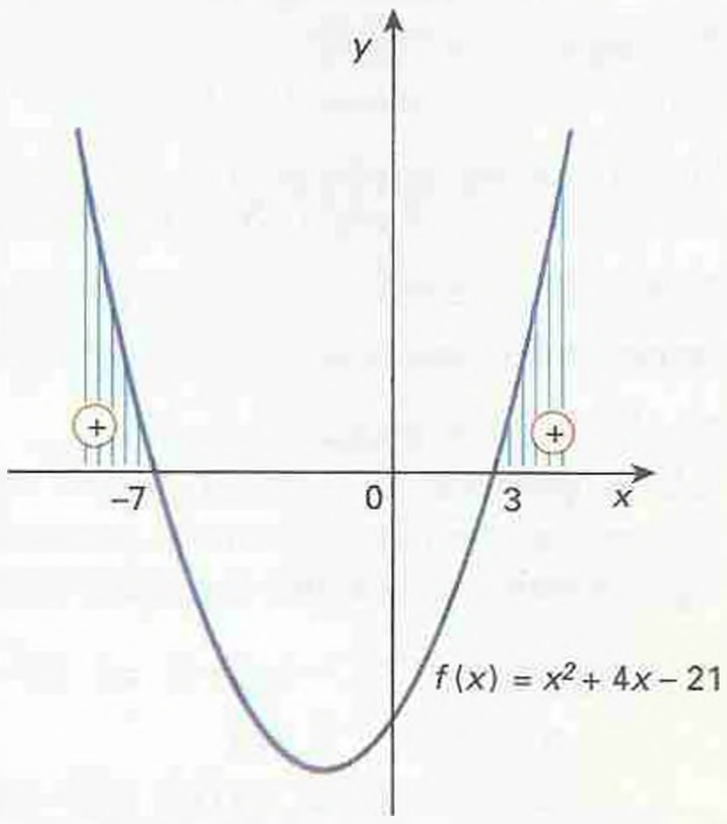
$$\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)(x + 5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

Resolução da inequação

Pela propriedade G.3 da função logarítmica, temos que o "sentido" ($\leqslant$) da desigualdade entre os logaritmos é "invertido" ($\geqslant$) para os logaritmandos, pois a base $\frac{1}{2}$ está entre 0 e 1. Ou seja:

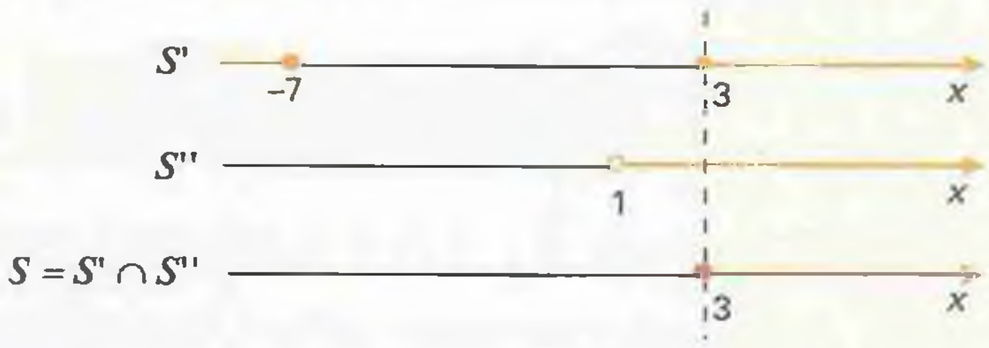
$\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)(x + 5) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 16 \Rightarrow (x - 1)(x + 5) \geqslant 16$

$\therefore \quad x^2 + 5x - x - 5 \geqslant 16 \quad \therefore \quad x^2 + 4x - 21 \geqslant 0$



Portanto $x \leqslant -7$ ou $x \geqslant 3$.

O conjunto solução S da inequação é a intersecção do conjunto S' dos reais x tais que $x \leqslant -7$ ou $x \geqslant 3$, com o conjunto S'' dos reais que satisfazem a C.E. $x > 1$. Isto é:



Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.42 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\log_5 (2x - 8) > 2$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) \leqslant -1$

c) $\log_2 (3x - 6) > \log_2 (6 - x)$

d) $\log_{0,5} (5x - 1) \geqslant \log_{0,5} (5 - 2x)$

e) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 1) < 3$

f) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{4}} (5x + 1) \geqslant 1$

g) $\log_x 9 > 1$

B.43 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de cada uma das inequações:

a) $\log_3 (4x - 2) \leqslant 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (5 - x) > 3$

c) $\log_6 (3x - 1) \geqslant \log_6 (7 - 2x)$

d) $\log_{0,2} (4x - 1) < \log_{0,2} (1 - x)$

e) $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 7) \geqslant 2$

f) $\log_{0,1} (x - 2) - \log_{0,1} (x + 4) > \log_{0,1} \frac{1}{4}$

B.44 Determine o conjunto dos números reais x que satisfazem cada uma das inequações:

a) $\log_2 (x^2 + 2x) > 3$

b) $\log_{0,7} (x^2 - 1) \geqslant 2 \log_{0,7} (x - 2)$

c) $2 \log_2 (x + 1) - \log_2 (x^2 - 1) < 1$

d) $\log (x + 3) + \log (x - 3) \leqslant 2 \log x$

Exercícios complementares de C.21 a C.23

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFG) As indicações R_1 e R_2, na escala Richter, de dois terremotos estão relacionados pela fórmula:

$$R_2 - R_1 = \log_{10} \left(\frac{M_2}{M_1}\right)$$

onde M_1 e M_2 medem as energias liberadas pelos respectivos terremotos, sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Considerando que ocorreram dois terremotos, um correspondente a $R_1 = 6$ e outro correspondente a $R_2 = 4$, determine a razão entre as energias liberadas pelos mesmos.

C.2 (Mackenzie-SP) A expressão

$\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{10} 0{,}001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10}$ é igual a:

a) $\frac{13}{2}$ c) 0 e) $-\frac{19}{2}$

b) $-\frac{13}{2}$ d) $\frac{5}{4}$

C.3 Calcule o valor da expressão $16^{\log_4 2}$.

C.4 Sabendo que $\log 2 \approx 0{,}301$, calcule $\log 8$ com aproximação de três casas decimais.

C.5 (Fuvest-SP) Se $x^5 = 1.000$ e $b^3 = 100$, então o logaritmo de x na base b vale:

a) 0,5 c) 1,2 e) 2,0
b) 0,9 d) 1,5

C.6 Sabendo que $\log_3 a + \log_3 b = c$, calcule, em função de a e c, o valor de b.

C.7 Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcule $\log 7{,}2$.

C.8 Sabendo que $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 31{,}42 = 1{,}497$, calcule, com aproximação de duas casas decimais, o número $\log_3 3.142$.

C.9 Ao aplicar um capital C durante n unidades de tempo (dia, mês, ano etc.) à taxa i por unidade de tempo, obtém-se o montante M (capital inicial mais o juro) acumulado ao final da aplicação. A fórmula para o cálculo desse montante é $M = C(1 + i)^n$. Determine durante quanto tempo o capital inicial de R$ 10.000,00 esteve aplicado à taxa de juro de 5% ao mês, gerando o montante de R$ 13.400,00. (Dados os logaritmos decimais: $\log 1{,}34 = 0{,}12$ e $\log 1{,}05 = 0{,}02$.)

C.10 (Fuvest-SP) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a:

a) $\log_4 7$ c) 1 e) 0
b) $\log_{16} 7$ d) 2

C.11 (Fuvest-SP) Sabendo-se que $5^p = 2$, podemos concluir que $\log_2 100$ é igual a:

a) $\frac{2}{p}$ c) $2 + p^2$ e) $\frac{2 + 2p}{p}$
b) $2p$ d) $2 + 2p$

C.12 (Cesgranrio) Sabendo-se que $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$, onde a, b e c são positivos, com b e c diferentes de 1, o valor de $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{12}$ é igual a: (Considere $\log_2 3 = x$.)

a) $-\frac{2x}{3}$ d) $\frac{2 + x}{9}$
b) $-\frac{2 + x}{9}$ e) $\frac{2 + x}{3}$
c) $-\frac{2 + x}{3}$

C.13 (Unifor-CE) O mais amplo domínio da função real f, definida por $f(x) = \log_2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$, é:

a) $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ d) $]1, +\infty[$
b) $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ e) $]-\infty, 0[$
c) $]0, 1[$

C.14 Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_5 \frac{3x - 1}{x - 2}$

b) $g(x) = \log \frac{x^2 - 5x + 4}{2x - 4}$

C.15 Obtenha o domínio da função $f(x) = \log_{x-2}(|x - 1| - 3)$.

C.16 (UFPI) O número de soluções da equação $\log_{10}(1 - \log_{10}(x^2 - 1)) = 0$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

C.17 (UFMGS-modificado) Sobre as raízes da equação $(\log_{10} x)^2 - 5 \log_{10} x + 6 = 0$, é *correto* afirmar que:

a) não são reais.
b) são números irracionais.
c) são números inteiros consecutivos.
d) são opostas.
e) o quociente da maior raiz pela menor raiz é igual a dez.

Sugestão. Faça a mudança de variável $\log_{10} x = t$ e resolva a equação $t^2 - 5t + 6 = 0$.

C.18 (UFR-RJ) Determine o conjunto das soluções reais da equação:

$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 x = \log_4 (-2x - 1)$

Sugestão. Transforme os logaritmos para a base 2.

C.19 (UEMG) A equação $\log_{x+2}(2x^2 + x) = 1$ admite o seguinte conjunto solução:

a) $\{-1\}$ c) $\{-1, 1\}$
b) $\{0\}$ d) $\{1\}$

C.20 Em um certo país, onde a unidade monetária é o **conto**, o preço do litro da gasolina no dia 1º de janeiro do ano 2000 era 1 conto. Esse preço é reajustado uma única vez por ano e sempre no dia 1º de janeiro, de acordo com o índice de inflação que é de 25% ao ano.

a) Supondo que esse índice de inflação seja constante, complete a tabela, em que k é um número natural:

	Preço do litro da gasolina em contos
1º de janeiro de 2000	1
1º de janeiro de 2001	1,25
1º de janeiro de 2002	$(1{,}25)^2$
1º de janeiro de 2003	.....
1º de janeiro de 2004	.....
1º de janeiro do ano 2000 + k	.....

b) Em que ano o preço do litro da gasolina nesse país ultrapassará 8 contos, pela primeira vez? (Use $\log 2 = 0{,}301$.)

C.21 Obtenha o conjunto de todos os valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam cada uma das desigualdades:

a) $\log_2 (x + 3) - \log_4 x \leqslant 2$
b) $\log_6 (x^2 - 1) + \log_{\frac{1}{6}} (x - 2) > \log_{36} 64$

C.22 Considerando o conjunto universo $U = \mathbb{R}$, resolva a inequação:

$$3 \leqslant \log_2 (3x + 10) < \log_2 (x + 30)$$

C.23 (Fuvest-SP) Se $\log_{10} x \leqslant \log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8 - 1$, então:

a) $0 < x \leqslant 10^2$ d) $10^6 < x \leqslant 10^8$
b) $10^2 < x \leqslant 10^4$ e) $x > 10^8$
c) $10^4 < x \leqslant 10^6$

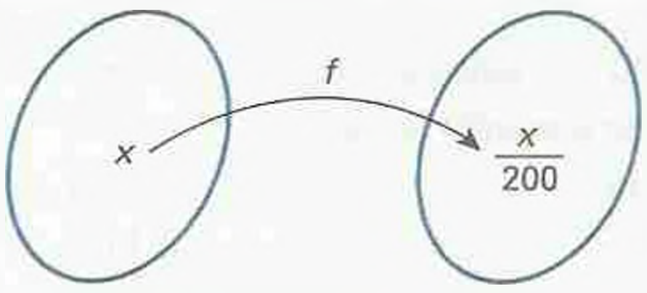
Capítulo 20

COMPOSIÇÃO E INVERSÃO DE FUNÇÕES

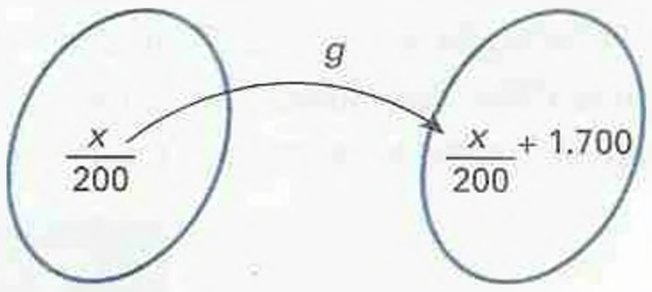
1. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Todo mês, uma empresa divide igualmente uma parte x do lucro entre seus 200 funcionários. Consideremos as seguintes funções:

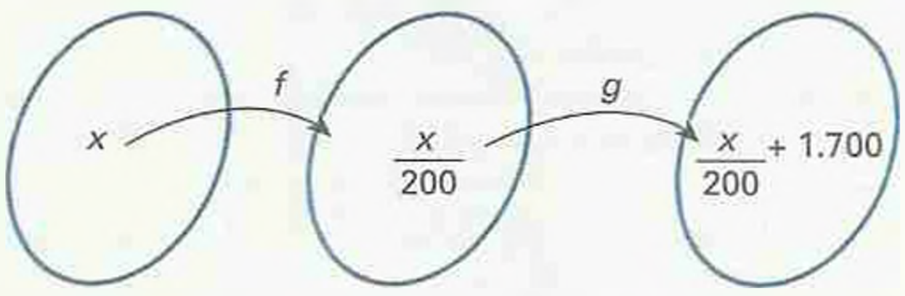
- f que associa x à fração destinada a cada funcionário;



- g que associa a fração anterior à soma dessa fração com o salário de Pedro, que é de 1.700 reais;



Esquematizando, temos:



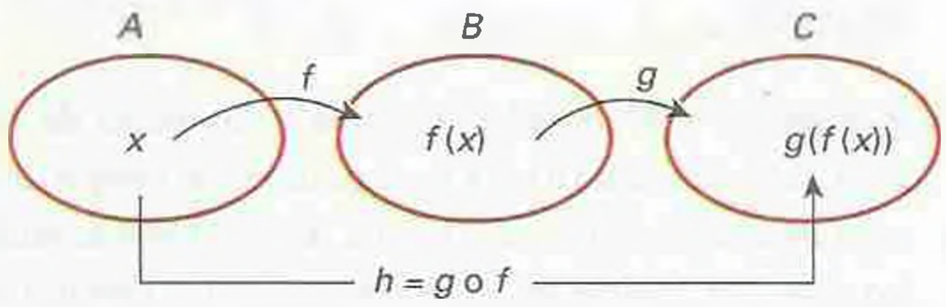
Se a parte do lucro que será distribuída é x reais, então Pedro receberá $\frac{x}{200} + 1.700$ reais. Note que $f(x) = \frac{x}{200}$ e $g\left(\frac{x}{200}\right) = \frac{x}{200} + 1.700$. Assim, podemos escrever que $g(f(x)) = \frac{x}{200} + 1.700$. A função $g(f(x))$ é chamada de função composta de g e f. Indica-se a composição das funções g e f por $g \circ f$, ou seja, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Definição

Sejam A, B e C conjuntos e sejam as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$.

A função $h: A \to C$ tal que $h(x) = g(f(x))$ é chamada de **função composta de g com f**. Indicaremos essa composição por $g \circ f$, lê-se "g composta com f".

Esquematicamente, temos:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 - 5$, determinar:

a) $(g \circ f)(4)$ c) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(4)$ d) $(f \circ g)(x)$

Resolução

a) Temos que $(g \circ f)(4) = g(f(4))$ e $f(4) = 4 + 3 = 7$.
Logo, $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 7^2 - 5 = 44$.

b) Temos que $(f \circ g)(4) = f(g(4))$ e $g(4) = 4^2 - 5 = 11$.
Logo, $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(11) = 11 + 3 = 14$.

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 - 5 = (x + 3)^2 - 5 =$
$= x^2 + 6x + 9 - 5 = x^2 + 6x + 4$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 3 = x^2 - 5 + 3 = x^2 - 2$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 (PUC-SP) Sendo $f(x) = x^3 + 1$ e $g(x) = x - 2$, então $g(f(0))$ é igual a:

a) 1 c) 0 e) -1

b) 3 d) 2

B.2 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 3x + 2$, determine:

a) $(g \circ f)(5)$ c) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(5)$ d) $(f \circ g)(x)$

B.3 Dadas as funções reais de variável real $f(x) = x^3 + 7$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$, determine:

a) $(g \circ f)(1)$ d) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(1)$ e) $(f \circ g)(x)$

c) $(f \circ g)(-8)$

B.4 (UFSC) Sendo $f(x) = \frac{x - 2}{5}$ e $g(x) = 5x^2$, tem-se que:

a) $f(g(x)) = x^2$

b) $f(g(x)) = x^2 - 2$

c) $g(f(x)) = x^2 - 4x + 4$

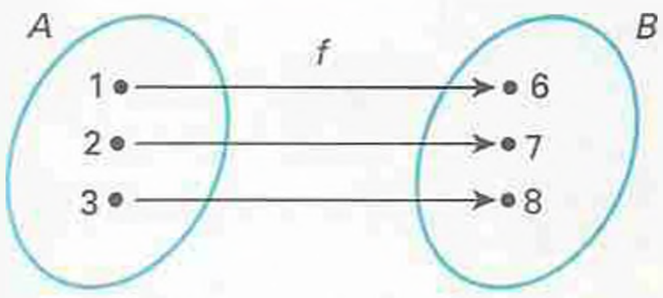
d) $g(f(x)) = \frac{x^2 - 4x + 4}{5}$

e) $g(f(x)) = x^2 - 4x$

Exercícios complementares de C.1 a C.3

2. FUNÇÕES INVERSAS

Consideremos a função $f: A \to B$, descrita pelo diagrama:



$\therefore f = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$

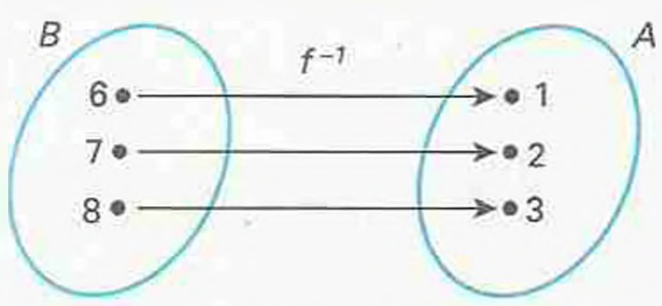
Chama-se **relação inversa** de f, que se indica por f^{-1}, a relação de B em A tal que:

$$(x, y) \in f^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in f$$

ou seja, cada par ordenado (x, y) de f^{-1} é **obtido invertendo-se** a ordem dos elementos do par ordenado (y, x) de f. Assim, temos:

$(1, 6) \in f \Rightarrow (6, 1) \in f^{-1}$; $(2, 7) \in f \Rightarrow (7, 2) \in f^{-1}$;
$(3, 8) \in f \Rightarrow (8, 3) \in f^{-1}$

A representação de f^{-1} em diagrama de flechas é:



$\therefore f^{-1} = \{(6, 1), (7, 2), (8, 3)\}$

Note que, nesse caso, a relação inversa da função f também é função, por isso dizemos que f^{-1} é a **função inversa** de f.

Nota

Nem sempre a relação inversa de uma função também é função.

Definição

> Uma função $f: A \to B$ é **invertível** se, e somente se, sua relação inversa f^{-1} de B em A **também** é função.
>
> As funções f e f^{-1} são chamadas de **funções inversas entre si**.

Técnica para a obtenção da inversa de uma função

Se uma função real de variável real $y = f(x)$ é invertível, sua inversa é obtida do seguinte modo:

I. trocamos x por y e y por x, escrevendo $x = f(y)$;
II. isolamos a variável y, após a mudança de variáveis, obtendo $y = f^{-1}(x)$.

Pense no porquê dessa técnica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Determinar a inversa da função $y = 3x - 1$.

Resolução

• Trocando x por y e y por x, temos $x = 3y - 1$.
• Isolando a variável y, temos:

$$x = 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{x + 1}{3}$$

Assim, a inversa da função $f(x) = 3x - 1$ é a função:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3}$$

R.3 Determinar a inversa da função $y = \frac{x}{2x + 4}$.

Resolução

• Trocando x por y e y por x, temos $x = \frac{y}{2y + 4}$.
• Isolamos a variável y:

$$x = \frac{y}{2y + 4} \Rightarrow x(2y + 4) = y \therefore 2xy + 4x = y$$

$$\therefore 4x = y - 2xy \therefore 4x = y(1 - 2x) \therefore \frac{4x}{1 - 2x} = y$$

Assim, a inversa da função $f(x) = \frac{x}{2x + 4}$ é a função:

$$f^{-1}(x) = \frac{4x}{1 - 2x}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.5 Sejam os conjuntos $A = \{1, -1, 2, -2, 3\}$ e $B = \{2, 5, 10\}$ e a função $f: A \to B$ tal que $f(x) = x^2 + 1$.
a) Construa o diagrama de flechas representando a função f.
b) Construa o diagrama de flechas representando a relação f^{-1}.
c) A relação f^{-1} é função? Por quê?

B.6 Considere os conjuntos $A = \{9, 4, 1, 0\}$ e $B = \{3, 2, 1, 0\}$ e a função $f: A \to B$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$.
a) Construa o diagrama de flechas representando a função f.
b) Construa o diagrama de flechas representando a relação f^{-1}.
c) A relação f^{-1} é função? Por quê?

B.7 Determine a inversa de cada uma das funções:

a) $y = 3x - 5$
b) $f(x) = 8x + 4$
c) $y = \frac{x + 3}{x - 2}$
d) $g(x) = \frac{5x - 2}{x + 8}$

B.8 (Faap-SP) Qual é a inversa da função $f(x) = \log_5 x$?

B.9 Determine a inversa de cada uma das funções:

a) $y = 3^{x+2}$
b) $y = 5^{3x-2}$

B.10 (Mackenzie-SP) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 1$, sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$
c) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$
d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$
e) n.d.a.

Exercícios complementares de C.4 a C.7

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Faap-SP) Dadas as funções reais $f(x) = 2 - 3x$ e $g(x) = 3x + k$, determine o valor de k de modo que $f[g(x)] = g[f(x)]$.

C.2 Seja f uma função real de variável real tal que $f(6x + 2) = 12x - 1$. Determinar:

a) $f(20)$ b) $f(x)$

Sugestão. Faça a mudança de variável $6x + 2 = t$, obtendo $f(t)$.

C.3 (UFMG) Considere a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 5, \text{ se } 1 < x \leqslant 4 \\ x - 4, \text{ se } x > 4 \end{cases}$$

Pode-se afirmar que o valor de $f(f(f(2)))$ é:

a) $\frac{1}{3}$ c) 3 e) 9

b) 1 d) 5

C.4 (Consart) O gráfico de uma função f é o segmento de reta cujos extremos são os pontos $(-3, 4)$ e $(3, 0)$. Se f^{-1} é a função inversa de f, então $f^{-1}(2)$ é:

a) 2 d) $-\frac{3}{2}$

b) 0 e) não-definida

c) $\frac{3}{2}$

C.5 (UFCE) Uma função invertível f é tal que $f(x + 3) = 2x - 1$. A inversa de f é:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x + 7}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2}$

c) $f^{-1}(x) = x + 3$

d) $f^{-1}(x) = 2x - 3$

e) $f^{-1}(x) = \frac{2}{x - 3}$

Sugestão. Faça a mudança de variável $x + 3 = t$, obtendo $f(t)$; a seguir, determine $f^{-1}(t)$.

C.6 (UFPR) Determine o conjunto imagem da inversa da função $f(x) = \frac{5}{x^3 - x}$.

Sugestão. Não é preciso obter a função inversa. Pense no seguinte: $(x, y) \in f$ se, e somente se, $(y, x) \in f^{-1}$.

C.7 (UNIR) A inversa da função $f(x) = \log x + \log 3$ é:

a) $f^{-1}(x) = 10^{x+3}$

b) $f^{-1}(x) = 10^{3x}$

c) $f^{-1}(x) = \frac{10^{3x}}{3}$

d) $f^{-1}(x) = \frac{10^x}{3}$

e) $f^{-1}(x) = \frac{10^{3x}}{3}$

Capítulo 21

NOÇÕES DE ESTATÍSTICA

1. O QUE É ESTATÍSTICA?

Durante um telejornal, o repórter divulgou uma pesquisa segundo a qual apenas 5% dos brasileiros têm o hábito de ler jornal diariamente.

Você já pensou em como são feitas pesquisas como essa? Como é possível entrevistar toda a população brasileira para se saber a porcentagem de leitores de jornal?

Veremos, neste breve curso, que não é necessário entrevistar toda a população para se chegar a uma determinada conclusão sobre ela. Chegar a esse tipo de conclusão é objeto da **estatística**.

Como uma primeira idéia, podemos entender a estatística como sendo um **método** de estudo de comportamentos coletivos cujas conclusões são traduzidas em resultados numéricos.

2. UNIVERSO ESTATÍSTICO OU POPULAÇÃO ESTATÍSTICA

Quando é feita uma coleta de dados sobre determinado assunto, chama-se de **universo estatístico** ou **população estatística** o conjunto formado por todos os elementos que possam oferecer dados pertinentes ao assunto em questão.

Exemplos

a) O governo encomenda ao IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) uma pesquisa para conhecer o salário médio do brasileiro. O **universo estatístico** ou **população estatística** é, nesse caso, o conjunto de todos os assalariados brasileiros.

b) Um partido político quer conhecer a tendência do eleitorado quanto à preferência entre dois candidatos à presidência da República do Brasil. Para isso, encomenda uma pesquisa a uma empresa especializada. O **universo estatístico** ou **população estatística** é, nesse caso, o conjunto de todos os eleitores brasileiros.

3. AMOSTRA

Quando o universo estatístico é muito vasto ou quando não é possível coletar dados de todos os seus elementos, retira-se desse universo um subconjunto, chamado de **amostra**, e os dados são coletados nessa amostra.

4. ROL

É toda seqüência $(a_1; a_2; a_3; ...; a_n)$ de dados numéricos tal que:

- cada termo, a partir do segundo, é **maior ou igual** ao seu **antecessor**;
- ou cada termo, a partir do segundo, é **menor ou igual** ao seu **antecessor**.

Exemplo

Os cinco alunos de uma amostra apresentaram as seguintes notas na prova bimestral de matemática
6; 4; 8; 7; 8. Apresentando esses dados em rol, temos:
(4; 6; 7; 8; 8) ou (8; 8; 7; 6; 4).

5. CLASSES

Em uma mostra de latas de óleo comestível, foram constatados os seguintes volumes em mililitros: 980; 990; 1.000; 970; 980; 1.000; 1.010; 950; 970; 940; 1.020; 1.010; 920; 990; 950; 900; 1.000; 950; 970; 1.010. Podemos separar os elementos dessa amostra em róis disjuntos (sem elementos comuns). Por exemplo:

I. 900; 920
II. 940
III. 950; 950; 950
IV. 970; 970; 970; 980; 980
V. 990; 990; 1.000; 1.000; 1.000
VI. 1.010; 1.010; 1.010; 1.020

Qualquer intervalo real que contenha um rol da amostra é chamado de **classe**. Por exemplo, podemos formar as seguintes **classes** com os elementos dessa amostra:

- o intervalo [900, 940[contém o rol (I);
- o intervalo [940, 950[contém o rol (II);
- o intervalo [950, 970[contém o rol (III);
- o intervalo [970, 990[contém o rol (IV);
- o intervalo [990. 1.010[contém o rol (V);
- o intervalo [1.010, 1.020] contém o rol (VI).

A diferença entre o maior e o menor elemento de uma classe, nessa ordem, é chamada de **amplitude** da classe. Por exemplo, a amplitude da classe [900, 940[é $940 - 900 = 40$.

Notas

1. Os extremos de cada classe não precisam ser, necessariamente, elementos da amostra, mas se o forem, deve-se tomar o cuidado de não permitir que um mesmo elemento pertença a duas classes simultaneamente; por isso, no exemplo anterior, com exceção do último intervalo, consideramos os demais **abertos** à direita.

2. Embora não seja obrigatório, é conveniente que, dentre duas classes consecutivas, o extremo à direita (aberto) da primeira coincida com o extremo à esquerda (fechado) da segunda, como fizemos no exemplo anterior.

6. DISTRIBUIÇÃO DE FREQÜÊNCIA

A quantidade de elementos da amostra que pertencem a uma determinada classe é chamada de **freqüência** dessa classe. No exemplo anterior:

- a freqüência da classe [900, 940[é igual a 2, pois 2 elementos da amostra pertencem a essa classe;
- a freqüência da classe [940, 950[é igual a 1, pois apenas 1 elemento da amostra pertence a essa classe;
- analogamente, as classes [950, 970[; [970, 990[; [990, 1.010[e [1.010, 1.020] têm freqüências, respectivamente, iguais a 3, 5, 5 e 4.

Podemos apresentar as classes com suas respectivas freqüências através de uma tabela chamada de **tabela de distribuição de freqüência**:

Classe (volume em mililitros)	*F*
[900, 940[	2
[940, 950[	1
[950, 970[	3
[970, 990[	5
[990, 1.010[	5
[1.010, 1.020]	4

A soma de todas as freqüências,
$2 + 1 + 3 + 5 + 5 + 4 = 20$, é chamada de **freqüência total** (F_t) da distribuição. Dividindo a freqüência F de uma classe pela freqüência total F_t, obtemos um número chamado de **freqüência relativa da classe**. É usual apresentar-se a freqüência relativa em porcentagem. Indicando a freqüência relativa de uma classe por $F\%$, tem-se que:

$$F\% = \frac{F}{F_t} \cdot 100\%$$

Assim, da tabela anterior, temos que:

- a classe [900, 940[tem freqüência relativa igual a $\frac{2}{20} \cdot 100\% = 0{,}1 \cdot 100\% = 10\%$;
- a classe [940, 950[tem freqüência relativa igual a $\frac{1}{20} \cdot 100\% = 0{,}05 \cdot 100\% = 5\%$;
- a classe [950, 970[tem freqüência relativa igual a $\frac{3}{20} \cdot 100\% = 0{,}15 \cdot 100\% = 15\%$;
- a classe [970, 990[tem freqüência relativa igual a $\frac{5}{20} \cdot 100\% = 0{,}25 \cdot 100\% = 25\%$;
- a classe [990, 1.010[tem freqüência relativa igual a $\frac{5}{20} \cdot 100\% = 0{,}25 \cdot 100\% = 25\%$;
- a classe [1.010, 1.020] tem freqüência relativa igual a $\frac{4}{20} \cdot 100\% = 0{,}20 \cdot 100\% = 20\%$.

Assim, temos a tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa:

Classe (volume em mililitros)	*F*	*F%*
[900, 940[	2	10%
[940, 950[	1	5%
[950. 970[	3	15%
[970, 990[	5	25%
[990, 1.010[	5	25%
[1.010, 1.020]	4	20%
	$F_t = \Sigma F = 20$	

7. CLASSES UNITÁRIAS

Podemos considerar uma classe como sendo um único número real. Esse tipo de classe é denominado **classe unitária**.

Exemplo

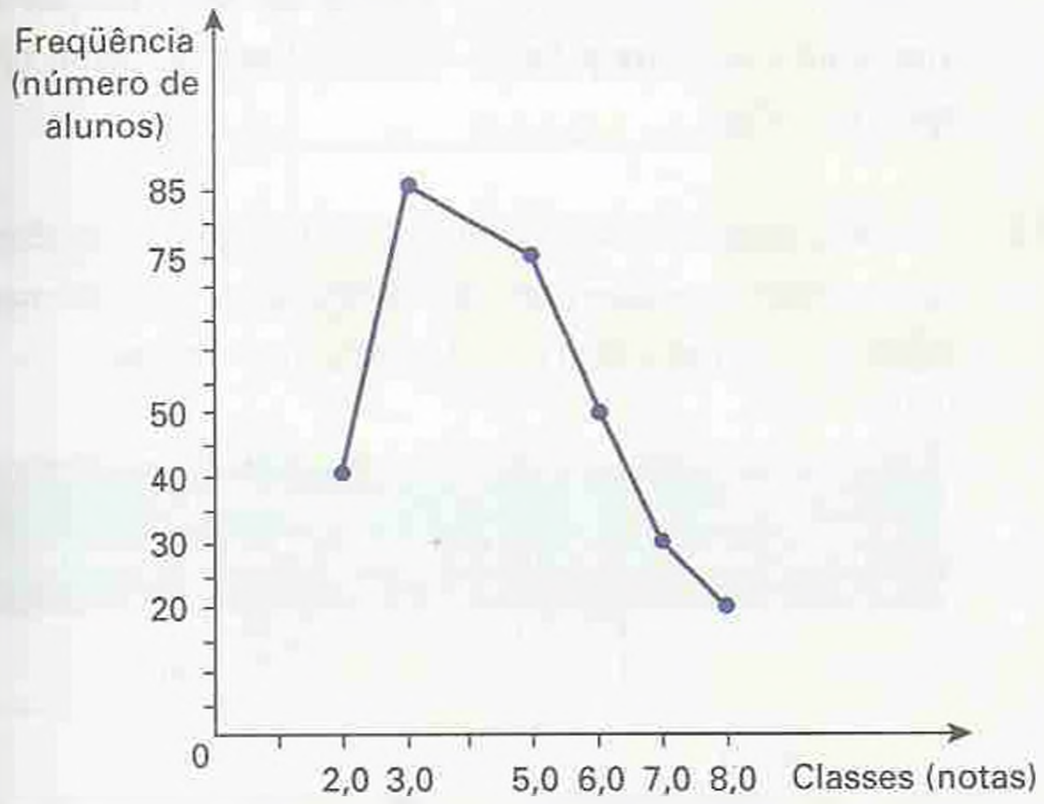
Para avaliar o nível de ensino em uma região, escolheu-se uma amostra de trezentos alunos da primeira série do ensino médio e aplicou-se uma prova. A tabela de distribuição de freqüência abaixo mostra o resultado dessa prova. As notas representam **classe unitárias**.

Classe (nota)	Freqüência (número de alunos)
2,0	40
3,0	85
5,0	75
6,0	50
7,0	30
8,0	20

8. REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE FREQÜÊNCIA

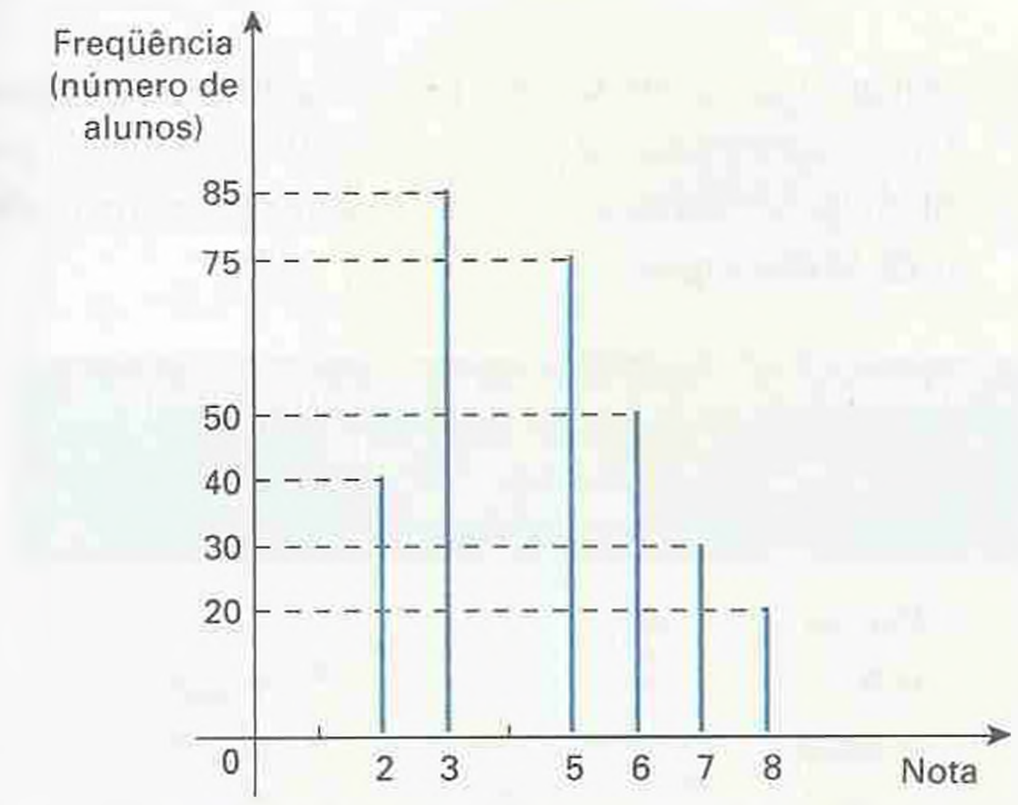
A tabela de distribuição de freqüência do exemplo anterior pode ser representada graficamente:

Gráfico de linha



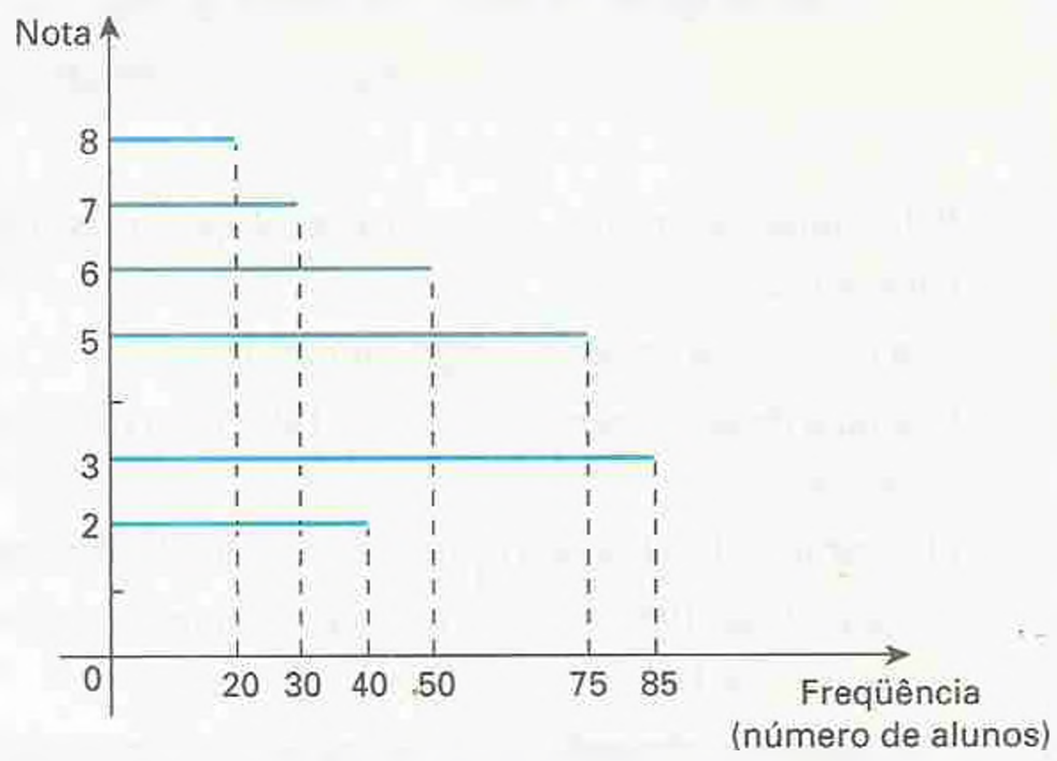
Para a construção desse gráfico, marcam-se os pontos determinados pelas classes e as correspondentes freqüências, ligando-os, a seguir, por segmentos de reta. Apenas os extremos desses segmentos oferecem informações sobre o comportamento da amostra; as demais partes dos segmentos são, simplesmente, linhas auxiliares.

Gráfico de barras verticais



As freqüências são dispostas num eixo vertical.

Gráfico de barras horizontais



As freqüências são dispostas num eixo horizontal.

Gráfico de setores

Divide-se um círculo em setores, com ângulos proporcionais às freqüências das classes. Nesse caso, dividimos 360° em partes proporcionais às freqüências 20, 30, 40, 50, 75 e 85.

$$\frac{360°}{20 + 30 + 40 + 50 + 75 + 85} \cdot 20 = 24°$$

$$\frac{360°}{20 + 30 + 40 + 50 + 75 + 85} \cdot 30 = 36°$$

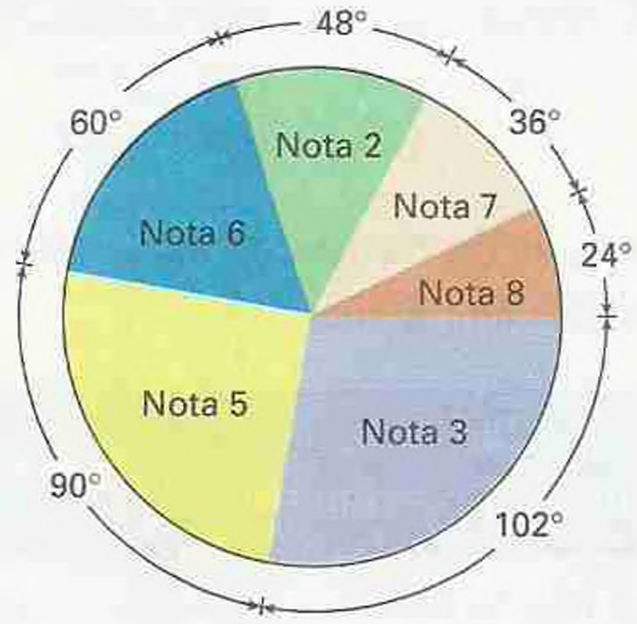
$$\frac{360°}{20 + 30 + 40 + 50 + 75 + 85} \cdot 40 = 48°$$

$$\frac{360°}{20 + 30 + 40 + 50 + 75 + 85} \cdot 50 = 60°$$

$$\frac{360°}{20 + 30 + 40 + 50 + 75 + 85} \cdot 75 = 90°$$

$$\frac{360°}{20 + 30 + 40 + 50 + 75 + 85} \cdot 85 = 102°$$

Graficamente, temos:

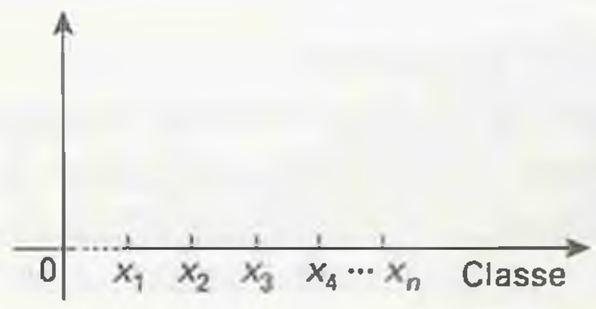


9. HISTOGRAMA

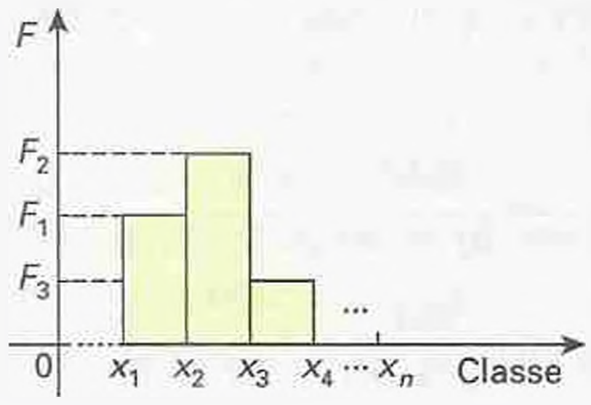
O **histograma** é um gráfico utilizado para representar uma distribuição de freqüência em que as classes não são unitárias. Veja, a seguir, como esse gráfico é construído.

1º) Separam-se os elementos da amostra em classes de mesma amplitude e representam-se essas classes no eixo das abscissas:

Classe	Freqüência
$[x_1, x_2[$	F_1
$[x_2, x_3[$	F_2
$[x_3, x_4[$	F_3
⋮	⋮
$[x_{n-1}, x_n]$	F_n



2º) Constroem-se retângulos cujas bases coincidem com as classes; a altura de cada retângulo representa a freqüência da classe correspondente.



Nota

Podem-se construir histogramas com classes de amplitudes diferentes, porém, a altura de cada retângulo não representará a freqüência da classe. Por isso, é mais usual adotar uma mesma amplitude para as classes.

Exemplo

Os alunos de uma amostra apresentaram as seguintes estaturas, em centímetros:

168	170	165	177
169	180	162	171
178	173	164	172
181	166	168	170

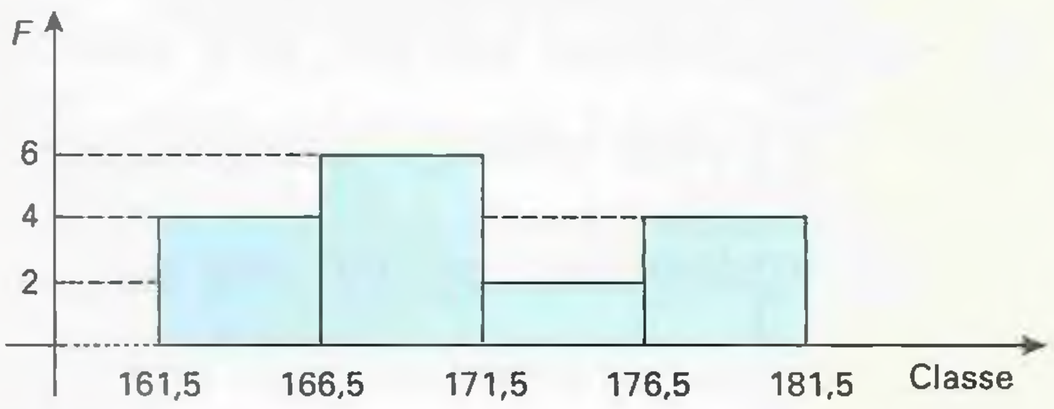
Vamos separar os elementos da amostra em quatro classes de mesma amplitude:

Classe (estatura em centímetros)	Freqüência
[161,5; 166,5[	4
[166,5; 171,5[	6
[171,5; 176,5[	2
[176,5; 181,5]	4

Nota

Lembre-se que os extremos de classe não precisam ser, necessariamente, elementos da amostra. Começamos da medida 161,5 cm, mas poderíamos ter começado de outra medida, por exemplo, 161,8 cm ou de 162 cm, que é o menor elemento da amostra. Se você optar por começar de valores não pertencentes à amostra, procure sempre começar de um valor a menos de uma unidade do menor elemento da amostra.

O histograma correspondente a essa distribuição é:



EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Numa amostra de soldados do exército foram constatadas as seguintes estaturas, em metros: 1,80; 1,78; 1,69; 1,92; 1,93; 1,81; 1,90; 1.76; 1,74; 1,83; 1,88; 1,79; 1,85; 1,92; 1,86; 1,74. Construa uma tabela de distribuição de freqüência e de freqüência relativa dessa amostra, com quatro classes.

B.2 A tabela seguinte corresponde à distribuição de freqüência das camisas vendidas por uma confecção no mês de maio, segundo a numeração (1, 2, 3, 4 e 5) das camisas.

Classe (numeração)	Freqüência (número de unidades vendidas)
1	50
2	150
3	250
4	450
5	100

Construa os seguintes gráficos dessa distribuição: de linha, de barras verticais, de barras horizontais e de setores.

B.3 (Enem) Um estudo sobre o problema do desemprego na Grande São Paulo, no período 1985-1996, realizado pelo SEADE-DIEESE, apresentou o seguinte gráfico sobre taxa de desemprego.

Médias anuais da taxa de desemprego total
Grande São Paulo
1985-1996

Fonte: SEP, Convênio SEADE-DIEESE.

Pela análise do gráfico, é correto afirmar que, no período considerado:

a) a maior taxa de desemprego foi de 14%.

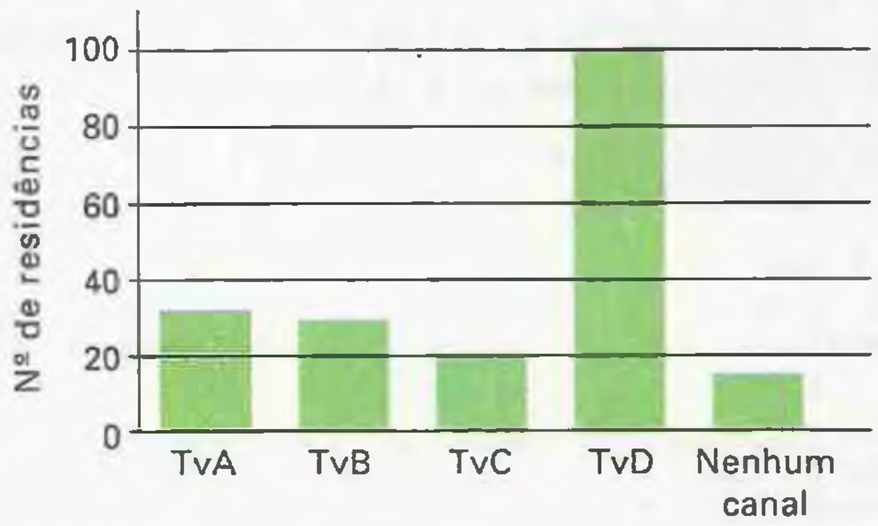
b) a taxa de desemprego no ano de 1995 foi a menor do período.

c) a partir de 1992, a taxa de desemprego foi decrescente.

d) no período 1985-1996, a taxa de desemprego esteve entre 8% e 16%.

e) a taxa de desemprego foi crescente no período compreendido entre 1988 e 1991.

B.4 (Enem) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20 h e 21 h, durante uma determinada noite. Os resultados obtidos estão representados no gráfico de barras a seguir:



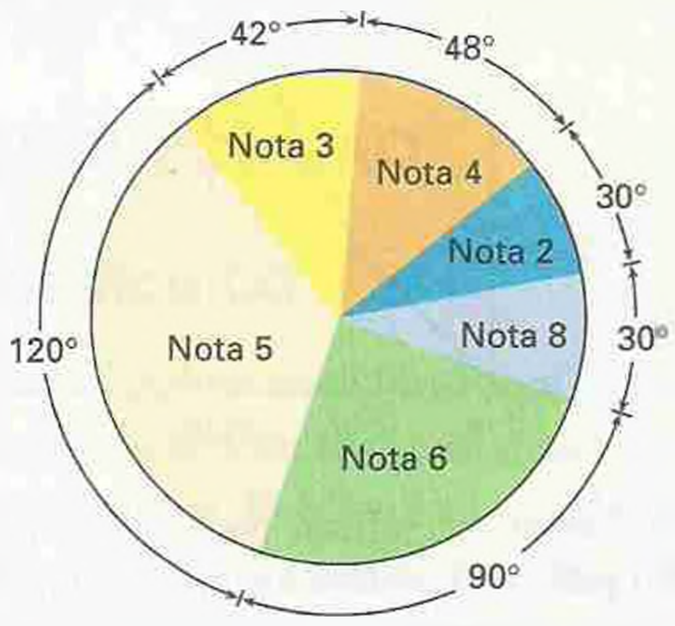
I. O número de residências atingidas nessa pesquisa foi, aproximadamente, de:

a) 100 c) 150 e) 220
b) 135 d) 200

II. A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à TvB é aproximadamente igual a:

a) 15% c) 22% e) 30%
b) 20% d) 27%

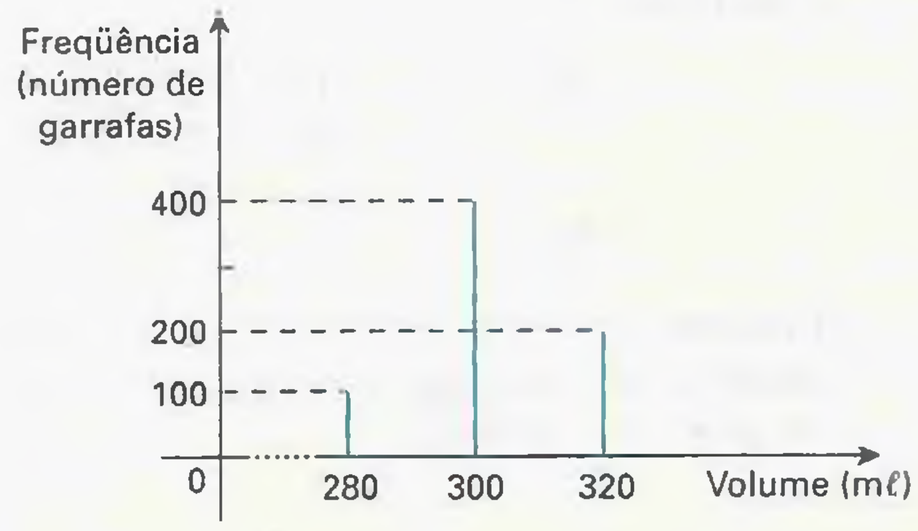
B.5 O gráfico de setores representado abaixo mostra a distribuição de uma amostra de alunos e suas respectivas notas na prova de português.



Sabendo que a amostra é composta de sessenta alunos, responda:

a) Quantos alunos tiveram nota 3?
b) Quantos alunos tiveram nota 5?
c) Qual a freqüência relativa da classe "nota 6"?

B.6 O gráfico mostra a distribuição de uma amostra de garrafas de refrigerantes e seus respectivos volumes em mililitros:



a) Quantas garrafas compõem essa amostra?
b) Qual a freqüência relativa da classe "300 mℓ"?

B.7 Os tempos de duração, em dias, de vinte lâmpadas foram:

150	210	309	270	180
246	285	195	210	248
199	250	290	284	301
221	300	190	210	259

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com cinco classes de mesma amplitude e o respectivo histograma.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Enem) A tabela abaixo apresenta dados referentes à mortalidade infantil, à porcentagem de famílias de baixa renda com crianças menores de 6 anos e às taxas de analfabetismo das diferentes regiões brasileiras e do Brasil como um todo.

Regiões do Brasil	Mortalidade infantil*	Famílias de baixa renda com crianças menores de 6 anos (em %)	Taxa de analfabetismo em maiores de 15 anos (em %)
Norte	35,6	34,5	12,7
Nordeste	59,0	54,9	29,4
Sul	22,5	22,4	8,3
Sudeste	25,2	18,9	8,6
Centro-Oeste	25,4	25,5	12,4
Brasil	**36,7**	**31,8**	**14,7**

Fonte: *Folha de S.Paulo*, 11/3/99.

* A mortalidade infantil indica o número de crianças que morrem antes de completar um ano de idade para cada grupo de 1.000 crianças que nascerem vivas.

Suponha que um grupo de alunos recebeu a tarefa de pesquisar fatores que interferem na manutenção da saúde ou no desenvolvimento de doenças. O primeiro grupo deveria colher dados que apoiassem a idéia de que, se combatendo agentes biológicos e químicos, garante-se a saúde. Já o segundo grupo deveria coletar informações que reforçassem a idéia de que a saúde de um indivíduo está diretamente relacionada à sua condição socioeconômica. Os dados da tabela podem ser utilizados apropriadamente para:

a) apoiar apenas a argumentação do primeiro grupo.
b) apoiar apenas a argumentação do segundo grupo.
c) refutar apenas a posição a ser defendida pelo segundo grupo.
d) apoiar a argumentação dos dois grupos.
e) refutar as posições a serem defendidas pelos dois grupos.

C.2 (Enem) Lâmpadas incandescentes são normalmente projetadas para trabalhar com a tensão da rede elétrica em que serão ligadas. Em 1997, contudo, lâmpadas projetadas para funcionar com 127 V foram retiradas do mercado e, em seu lugar, colocaram-se lâmpadas concebidas para

uma tensão de 120 V. Segundo dados recentes, essa substituição representou uma mudança significativa no consumo de energia elétrica para cerca de 80 milhões de brasileiros que residem nas regiões em que a tensão da rede é de 127 V.

A tabela abaixo apresenta algumas características de duas lâmpadas de 60 W, projetadas respectivamente para 127 V (antiga) e 120 V (nova), quando ambas se encontram ligadas numa rede de 127 V.

Lâmpada (projeto original)	Tensão da rede elétrica	Potência medida (watt)	Luminosidade medida (lúmens)	Vida útil média (horas)
60 W – 127 V	127 V	60	750	1.000
60 W – 120 V	127 V	65	920	452

Acender uma lâmpada de 60 W e 120 V em um local onde a tensão na tomada é de 127 V, comparativamente a uma lâmpada de 60 W e 127 V no mesmo local, tem como resultado:

a) mesma potência, maior intensidade de luz e maior durabilidade.
b) mesma potência, maior intensidade de luz e menor durabilidade.
c) maior potência, maior intensidade de luz e maior durabilidade.
d) maior potência, maior intensidade de luz e menor durabilidade.
e) menor potência, menor intensidade de luz e menor durabilidade.

C.3 (Univali) O gráfico mostra as vendas de televisores em uma loja:

Pode-se afirmar que:

a) as vendas aumentaram mês a mês.
b) foram vendidos 100 televisores até junho.
c) as vendas do mês de maio foram inferiores à soma das vendas de janeiro e fevereiro.
d) foram vendidos 90 televisores até abril.
e) se cada televisor é vendido por R$ 240,00, em maio a loja faturou, com as vendas desse produto, R$ 7.200,00.

C.4 (Enem) Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I, abaixo representado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois o gráfico II, onde pretende justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

Gráfico I

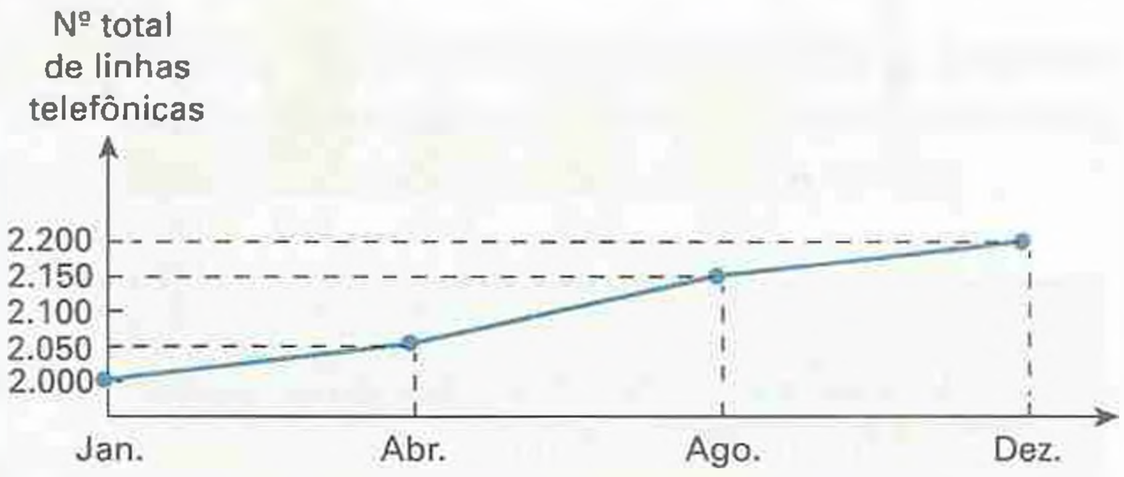
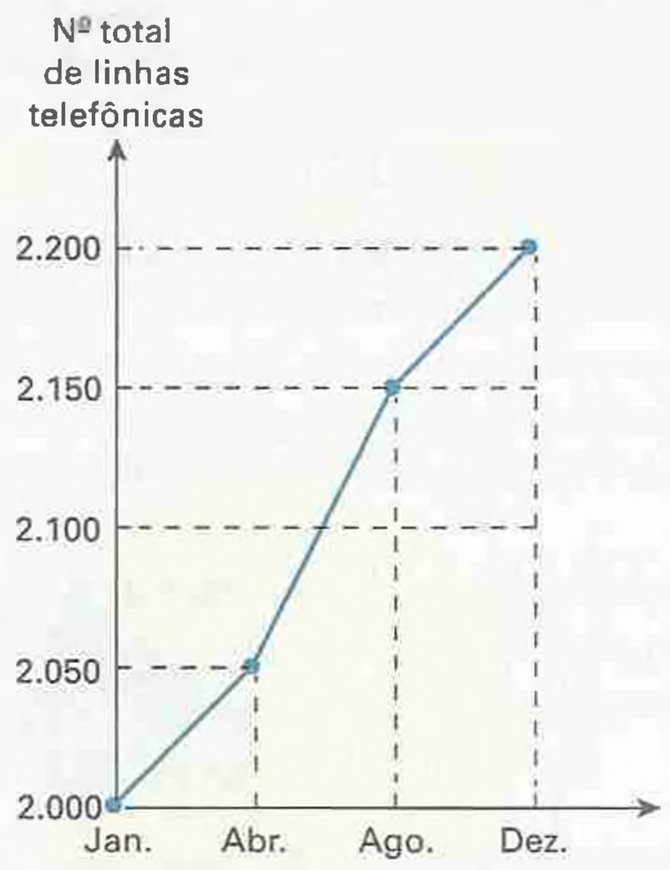


Gráfico II



Analisando os gráficos, pode-se concluir que:

a) o gráfico II representa um crescimento real maior do que o do gráfico I.
b) o gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o II incorreto.
c) o gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.
d) a aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
e) os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

C.5 As áreas construídas, medidas em metros quadrados, de vinte residências de uma certa região são:

250	280	330	402	385
302	290	270	310	304
407	380	295	283	402
390	300	283	250	265

Construa uma tabela de distribuição de freqüência dessa amostra com seis classes de mesma amplitude e o respectivo histograma.

Capítulo 22

MEDIDAS ESTATÍSTICAS

1. INTRODUÇÃO

Dividindo a renda nacional anual de um país pelo número de habitantes, obtém-se a renda *per capita*, isto é, a renda por pessoa.

Supondo que a renda *per capita* de um país é de 5.000 dólares, pode-se concluir que a distribuição de renda nesse país é eqüitativa? É claro que não, pois pode-se ter, por exemplo, metade da população não ganhando nada, e cada cidadão da outra metade ganhando 10.000 dólares; a renda *per capita* continuaria sendo 5.000 dólares.

Esse exemplo ajuda a entender que é necessário mais de um parâmetro para avaliar a distribuição dos valores de uma amostra de números. Neste capítulo vamos estudar alguns desses parâmetros, denominados **medidas estatísticas**.

2. MEDIDAS DE POSIÇÃO

Média Aritmética ($\overline{x}$)

Os conteúdos de 4 baldes de água são: 3ℓ, 5ℓ, 2ℓ e 1ℓ. Se toda essa água fosse distribuída igualmente entre esses baldes, com quantos litros de água ficaria cada um?

A quantidade de água de cada um seria razão da quantidade total de água para o número de baldes, isto é:

$$\frac{3 + 5 + 2 + 1}{4}\ell = 2{,}75\ell$$

O resultado $2{,}75\ell$ é chamado de **média aritmética** dos valores 3ℓ, 5ℓ, 2ℓ e 1ℓ.

Podemos entender a **média aritmética** de duas ou mais quantidades como sendo o valor que cada uma delas teria se, mantendo-se a soma delas, todas fossem iguais.

A **média aritmética** dos números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que se indica por $\overline{x}$, é dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

ou, usando o símbolo de **somatório**:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Média aritmética ponderada

Cinco baldes contêm 4 litros de água cada um, três outros contêm 2ℓ de água cada um, e, ainda, dois outros contêm 5ℓ de água cada um. Se toda essa água fosse distribuída igualmente entre esses baldes, com quantos litros ficaria cada um?

A quantidade de água de cada balde seria a razão da quantidade total de água para o número de baldes, isto é:

$$\frac{4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{10}\ell = 3{,}6\ell$$

O resultado $3{,}6\ell$ é chamado de **média aritmética ponderada** dos valores 4ℓ, 2ℓ e 5ℓ, com **pesos** (fatores de ponderação) 5, 3 e 2, respectivamente.

A média aritmética ponderada dos números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ com pesos, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, respectivamente, é o número $\overline{x}$ tal que:

$$\overline{x} = \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

ou, usando o símbolo de somatório:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Numa empresa, dez operários têm salário de R$ 2.000,00 mensais; doze têm salário de R$ 1.500,00 mensais; e oito operários têm salário de R$ 1.400,00 mensais. Qual é o salário médio desses operários?

Resolução

O salário mensal médio dos operários é a **média aritmética ponderada** entre os valores R$ 2.000,00, R$ 1.500,00 e R$ 1.400,00 com fatores de ponderação (pesos) respectivamente iguais a 10, 12 e 8. Isto é:

$$\overline{x} = \frac{10 \cdot 2.000 + 12 \cdot 1.500 + 8 \cdot 1.400}{10 + 12 + 8} \text{ reais}$$

$\therefore \overline{x} = \text{R\$ } 1.640{,}00$

Logo, o salário mensal médio dos operários é R$ 1.640,00.

R.2 A tabela seguinte mostra a distribuição de freqüência das estaturas, em centímetros, de uma amostra de estudantes do primeiro grau.

Classe (estaturas em centímetros)	Freqüência (número de alunos)
[150,5; 156,5[	4
[156,5; 160,5[	5
[160,5; 168,5[	8
[168,5; 178,5]	3

Qual é a estatura média dos estudantes dessa amostra?

Resolução

Quando as classes não são unitárias, como nesse caso, para calcular a média tomamos o **ponto médio** x_M de cada classe e calculamos a **média aritmética ponderada** entre os valores x_M, atribuindo a cada um o peso igual à freqüência da respectiva classe. Isto é:

Classe	Ponto médio (x_M)	Freqüência
[150,5; 156,5[	$\frac{150,5 + 156,5}{2} = 153,5$	4
[156,5; 160,5[	$\frac{156,5 + 160,5}{2} = 158,5$	5
[160,5; 168,5[	$\frac{160,5 + 168,5}{2} = 164,5$	8
[168,5; 178,5]	$\frac{168,5 + 178,5}{2} = 173,5$	3

Calculando a média aritmética ponderada dos números 153,5; 158,5; 164,5 e 173,5, com pesos respectivamente iguais a 4, 5, 8 e 3, temos:

$$\overline{x} = \frac{153,5 \cdot 4 + 158,5 \cdot 5 + 164,5 \cdot 8 + 173,5 \cdot 3}{4 + 5 + 8 + 3} =$$

$= 162,15.$

Logo, a estatura média dos estudantes é 162,15 cm.

Moda (Mo)

Consideremos as idades, em anos, dos dez atletas que representaram o colégio nos últimos jogos interestaduais: 16, 19, 19, 22, 17, 19, 19, 17, 18, 18. A idade de maior freqüência possível é 19 anos, por isso dizemos que a **moda** dessa amostra é 19 anos, e indicamos:

$$Mo = 19 \text{ anos}$$

Em uma amostra cujas freqüências dos elementos **não** são todas iguais, chama-se **moda**, que se indica por **Mo**, todo elemento de maior freqüência possível.

Exemplos

a) Na amostra 3, 4, 7, 3, 7, 9, 7, temos:

$$Mo = 7$$

b) Na amostra 9, 9, 5, 7, 10, 2, 1, 10, temos duas modas (amostra bimodal):

$$Mo = 9 \text{ e } M'o = 10$$

c) A amostra 1, 5, 7, 6, 45, 2, 0 não apresenta moda, pois todos os seus elementos têm a mesma freqüência.

Mediana (Md)

- As estaturas, em centímetros, dos cinco jogadores da equipe de basquetebol do nosso colégio são:

184; 179; 190; 181; 178

Dispondo essas estaturas em rol, temos:

178; 179; 181; 184; 190

O termo central desse rol é chamado de **mediana** da amostra. Indicando a mediana por Md, temos:

$$Md = 181 \text{ cm}$$

- Dispondo em rol as notas da prova de história dos alunos de 1ª série B, temos:

2.0 3.0 4.0 4,0 4.5 4.5 5,0 5.5 5.5 6,0 6,5 6.5 6,5 7,0 7,5 8,0 8,0 8,0 8,0 10.0

Termos centrais

Diretas já

Em março de 1983, o deputado federal Dante de Oliveira, atendendo a uma crescente pressão do povo brasileiro, apresentou uma proposta de emenda à Constituição, que pretendia restabelecer as eleições diretas para a Presidência da República. Se aprovada, a emenda apressaria o fim da ditadura militar iniciada em 1964, e o país retornaria à democraria plena. A expectativa em torno da votação dessa proposta pelo Congresso deu início à maior manifestação popular já ocorrida até então no Brasil. O movimento ficou conhecido como "Diretas já".

Em abril de 1984, o movimento levou à Praça da Candelária, no Rio de Janeiro, cerca de 500 mil pessoas e ao Vale do Anhangabaú, em São Paulo, perto de 1 milhão de manifestantes.

A relação desse acontecimento com a matemática é a maneira como foram contadas as pessoas na Candelária e no Vale Anhangabaú. Uma a uma? É claro que não. Existem métodos estatísticos para a contagem de multidões, com margem de erro insignificante. Por exemplo, escolhem-se algumas regiões ocupadas pela multidão e contam-se as pessoas por metro quadrado em cada região. A seguir, calcula-se a média aritmética entre os valores obtidos. Finalmente, multiplica-se essa média pela área total, em m^2, ocupada pela multidão.

Como o número de termos do rol é par, define-se a mediana da amostra como a média aritmética entre os termos centrais do rol, isto é:

$$Md = \frac{6,0 + 6,5}{2} = 6,25$$

Consideremos n números dispostos em rol $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

• Sendo n ímpar, chama-se **mediana (Md)** o termo central desse rol, isto é, o termo x_i com:

$$i = \frac{n + 1}{2}$$

• Sendo n par, chama-se **mediana (Md)** a média aritmética entre os termos centrais desse rol, isto é, a média aritmética entre os termos x_i e x_{i+1} com:

$$i = \frac{n}{2}$$

Nota

Para se determinar a mediana, a amostra pode ser colocada em rol do menor número para o maior, ou do maior para o menor. Nos dois róis o termo médio é o mesmo.

3. MEDIDAS DE DISPERSÃO

Para preencher uma vaga de gerente de produção, o departamento de recursos humanos de uma empresa realizou um teste com vários candidatos, selecionando os dois melhores: Leonor e Felipe. A tabela abaixo mostra os desempenhos dos dois candidatos nas provas a que se submeteram:

Candidato / Assunto	Leonor	Felipe
Conhecimentos de informática	8,5	9,5
Língua portuguesa	9,5	9,0
Língua inglesa	8,0	8,5
Matemática	7,0	8,0
Conhecimentos de economia	7,0	5,0
	Média = 8,0	Média = 8,0

Os dois candidatos obtiveram a mesma média. Como proceder, cientificamente, para determinar qual dos dois teve o melhor desempenho nessa avaliação?

A comparação entre os desempenhos desse dois candidatos pode ser feita através de medidas estatísticas como: o **desvio absoluto médio**, a **variância** ou o **desvio padrão**. Essas medidas, chamadas **medidas de dispersão**, indicam o quanto os elementos de uma amostra estão afastados da média aritmética. Calculando uma dessas medidas, em cada uma de duas amostras de mesma média aritmética, será considerada a amostra menos dispersa aquela que apresentar a menor medida. No caso de Felipe e Leonor, a amostra de notas menos dispersas em relação à média aritmética corresponde ao melhor desempenho e, portanto, ao merecedor da vaga.

Desvio absoluto médio (*Dam*)

Nas cinco provas realizadas, Leonor obteve 8 de média aritmética e suas notas foram: 8,5; 9,5; 8,0; 7,0 e 7,0, conforme a tabela anterior.

Para determinar o quanto cada nota está afastada da média aritmética, basta efetuar a diferença entre a nota e a média, nessa ordem; essa diferença é chamada de **desvio** da nota. Esses **desvios** são:

8,5 − 8,0 = 0,5 (a nota 8,5 está 0,5 acima da média)
9,5 − 8,0 = 1,5 (a nota 9,5 está 1,5 acima da média)
8,0 − 8,0 = 0,0 (a nota 8,0 coincide com a média)
7,0 − 8,0 = −1,0 (as duas últimas notas, 7,0, estão 1,0 abaixo da média)

O módulo de cada um desses desvios é chamado de **desvio absoluto** da nota correspondente:

- o desvio absoluto da nota 8,5 é $|0,5| = 0,5$;
- o desvio absoluto da nota 9,5 é $|1,5| = 1,5$;
- o desvio absoluto da nota 8,0 é $|0,0| = 0,0$;
- o desvio absoluto de cada uma das duas últimas notas, 7,0, é $|-1,0| = 1,0$.

A média aritmética entre esses desvios absolutos é chamada de **desvio absoluto médio**, que se indica por *Dam*:

$$Dam = \frac{|0,5| + |1,5| + |0,0| + |-1,0| + |-1,0|}{5}$$

$$\therefore Dam = \frac{0,5 + 1,5 + 0,0 + 1,0 + 1,0}{5}$$

$$\therefore Dam = \frac{4,0}{5} = 0,8$$

Analogamente obtém-se o desvio absoluto médio das notas obtidas por Felipe, *D'am*, no conjunto de provas:

$$D'am = 1,2$$

O desvio absoluto médio mede o afastamento médio dos elementos da amostra em relação à média aritmética. Assim, temos que as notas de Leonor estão, em média, 0,8 acima ou abaixo da média aritmética 8; enquanto as notas de Felipe estão, em média, 1,2 acima ou abaixo da média aritmética 8. Como $Dam < D'am$, conclui-se que Leonor teve um desempenho mais regular que Felipe, e, por isso, merece a vaga.

Sendo $\bar{x}$ a média aritmética de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, chama-se **desvio absoluto médio**, que se indica por *Dam*, o número:

$$Dam = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + ... + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

ou, usando o símbolo de somatório:

$$Dam = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Variância (σ^2)

Uma outra medida que indica o afastamento dos elementos de uma amostra, em relação à média aritmética, é a **variância**, que se representa por σ^2. Define-se essa medida como a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos da amostra, isto é:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

ou, usando o símbolo de somatório:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Calculando as variâncias dos conjuntos de notas de Leonor, $\sigma^2_{(L)}$, e de Felipe, $\sigma^2_{(F)}$, citados anteriormente, temos:

$$\sigma^2_{(L)} = \frac{(0,5)^2 + (1,5)^2 + (0,0)^2 + (-1,0)^2 + (-1,0)^2}{5} = 0,9$$

e

$$\sigma^2_{(F)} = \frac{(1,5)^2 + (1,0)^2 + (0,5)^2 + (0,0)^2 + (-3,0)^2}{5} = 2,5$$

Como $\sigma^2_{(L)} < \sigma^2_{(F)}$, conclui-se que Leonor teve um desempenho, nas provas, mais regular do que Felipe.

Desvio padrão (σ)

Na interpretação da variância podem surgir algumas dificuldades em relação à unidade de medida dos elementos da amostra. Por exemplo, se os elementos da amostra representam capacidades em litros (ℓ), a variância representará um resultado em ℓ^2; como essa unidade não tem significado físico, não é conveniente utilizar a variância nesse caso. Por causa de dificuldades como essa, foi criado o **desvio padrão**, representado por σ, e definido como a **raiz quadrada da variância**.

Calculando o desvio padrão do conjunto de notas de Leonor, $\sigma_{(L)}$, e de Felipe, $\sigma_{(F)}$, citados anteriormente, temos:

$$\sigma_{(L)} = \sqrt{0,9} \simeq 0,948$$

e

$$\sigma_{(F)} = \sqrt{2,5} \simeq 1,581$$

Como $\sigma_{(L)} < \sigma_{(F)}$, concluímos que Leonor teve um desempenho, nas provas, mais regular do que Felipe.

Nota

Não perca de vista que a comparação da dispersão de duas amostras pode ser feita com o **desvio absoluto médio**, ou com a **variância** ou com o **desvio padrão**.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

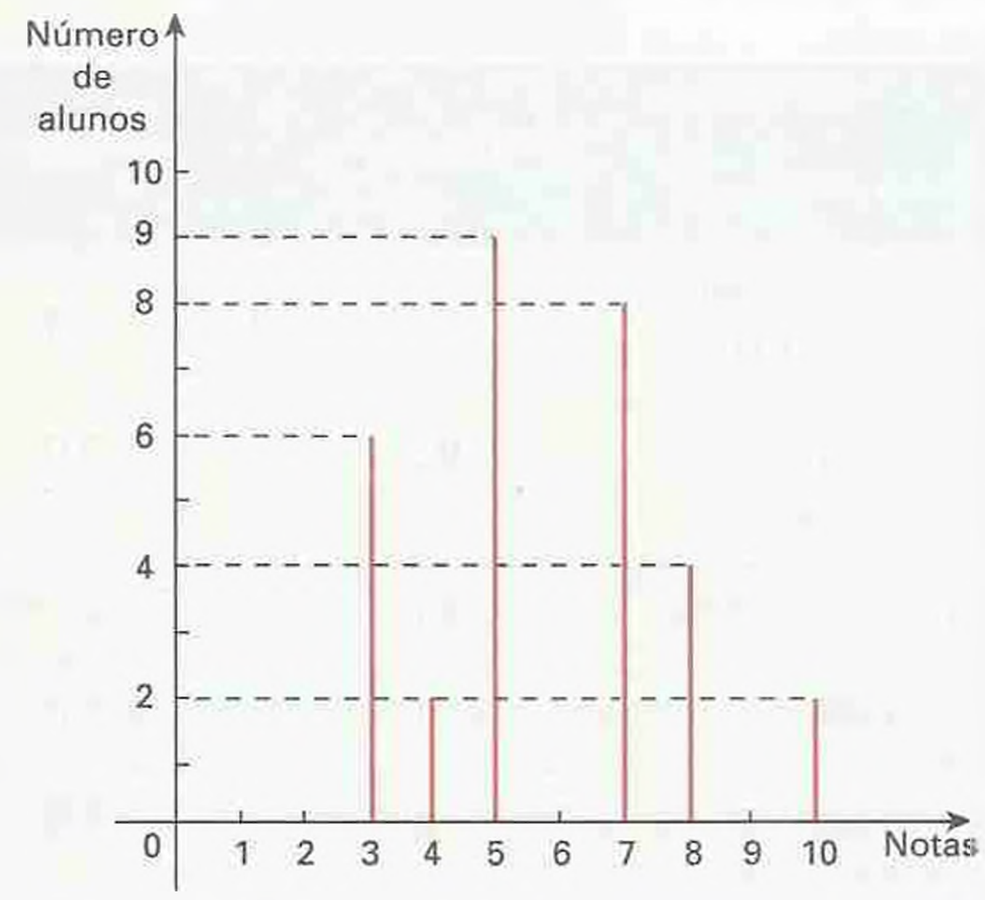
B.1 As idades dos jogadores de um time de basquetebol são 18, 23, 19, 20 e 21 anos. Qual é a média de idade desses jogadores?

B.2 Entre sessenta números, vinte são iguais a 5, dez são iguais a 6, quinze são iguais a 8, dez são iguais a 12, e cinco são iguais a 16. Determine a média aritmética desses números.

B.3 Quatro funcionários *A*, *B*, *C* e *D* de uma empresa têm respectivamente 8, 6, 10 e 16 anos de trabalho nessa empresa. O funcionário *A* recebeu um prêmio de R$ 500,00 por ano de casa; *B* recebeu um prêmio de R$ 600,00 por ano de casa; e *C* e *D* receberam, cada um, R$ 800,00 de prêmio por ano de casa. Qual foi o prêmio médio recebido por ano de casa por esses funcionários?

B.4 As classes *A*, *B* e *C* da segunda série do ensino médio tiveram respectivamente as seguintes médias na prova de matemática: 6,5; 6,0 e 7,0. Sabendo que a classe *A* é formada por 28 alunos, *B* é formada por 25 alunos e *C*, por 22 alunos, calcule a nota média de todos os 75 alunos.

B.5 (UFRJ) O gráfico mostra a distribuição de uma prova de matemática.



a) Quantos alunos fizeram a prova?

b) Sendo $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ as notas obtidas pelos n alunos nessa prova (n é o número de alunos que fizeram a prova), determine o número $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$, denominado média aritmética das notas dessa prova.

B.6 (Unicamp-SP) O gráfico, em forma de pizza, representa as notas obtidas em uma questão pelos 32.000 candidatos presentes à primeira fase de uma prova de vestibular. Ele mostra, por exemplo, que 32% desses candidatos tiveram nota 2 nessa questão.

Pergunta-se:

a) Quantos candidatos tiveram nota 3?

b) É possível afirmar que a nota média, nessa questão, foi $\leqslant 2$? Justifique sua resposta.

B.7 Observando o gráfico do exercício anterior, responda:

a) Qual é a moda do conjunto das notas de todos os alunos?

b) Qual é a mediana do conjunto das notas de todos os alunos?

B.8 A tabela mostra a distribuição de freqüência da carga, em toneladas, dos caminhões que passaram por uma estrada num certo período.

Carga (em toneladas)	Número de caminhões
[9,5; 14,5[	18
[14,5; 19,5[	33
[19,5; 25,5]	9

Calcule a carga média desses caminhões.

B.9 (Fuvest-SP, modificado) A distribuição dos salários de uma empresa é dada na seguinte tabela:

Salário em R$	Número de funcionários
500,00	10
1.000,00	5
1.500,00	1
2.000,00	10
5.000,00	4
10.500,00	1
Total	31

a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?

b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salário de R$ 2.000,00 cada. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior do que a anterior?

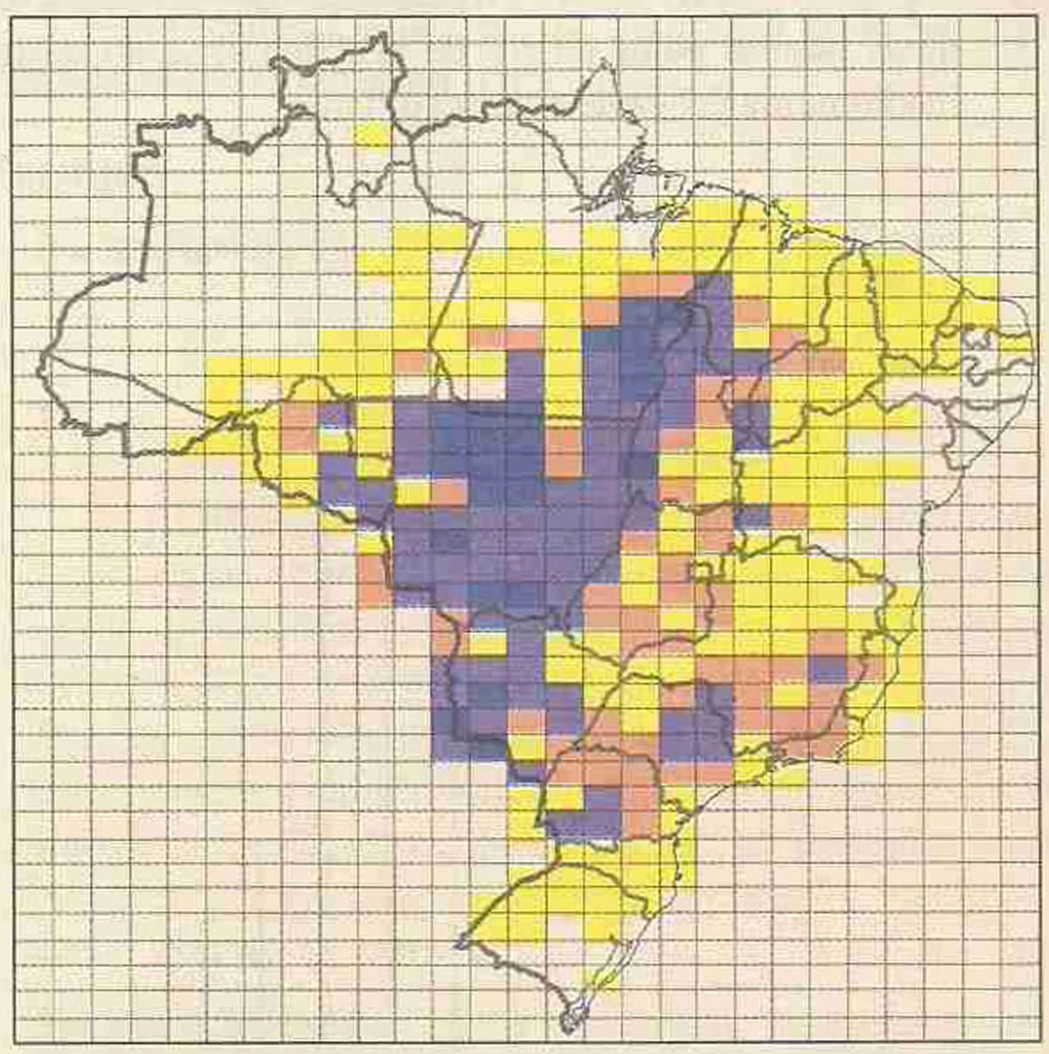
Monitoramento por satélite

As queimadas brasileiras, em geral, são intencionais, usadas como "tecnologia agrícola" para limpeza do solo antes do plantio, redução de pragas e ervas daninhas, renovação de pastagens e como auxiliar na colheita de cana-de-açucar. "Embora existam outras tecnologias agrícolas para substituir as queimadas, o fogo ainda é muito mais barato", lembra Evaristo Eduardo de Miranda, do Núcleo de Monitoramento Ambiental (NMA). Por isso, é grande o número de áreas que queimam todos os anos, as mesmas áreas, já desmatadas há muito tempo. Esse fogo é monitorado com satélites meteorológicos, através dos sensores de temperatura, precisos na localização e na contagem do número de focos, mas não na delimitação da área queimada. O monitoramento por satélite foi concebido para ajudar os órgãos de fiscalização a localizar as piores concentrações de focos e ajustar os programas de controle legal ou mesmo de combate ao fogo.

O mapa ao lado, difundido pela **Agência Estado**, mostra os pontos de queimadas no território brasileiro no mês de agosto de 1999.

MONITORAMENTO ORBITAL DE QUEIMADAS

Brasil — Agosto de 1999



Total de queimadas: 39.630
Total de quadrículas com queimadas: 348
Número mínimo de queimadas: 1
Número máximo de queimadas: 1.946
Número médio de queimadas: 113,88
Desvio padrão de queimadas: 209,68

Legenda
Nenhum
1-55 pontos
56-110 pontos
113-319 pontos
340-1.946 pontos

Dados do Satélite NOAA: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE-MCT)
Mapeamento Digital e Arte Final: Núcleo de Monitoramento Ambiental (Embrapa-NMA)
Interpretação Espacial e Análise Ambiental (ECOFORÇA)
Difusão: Agência Estado (AE)

Para obter textos publicados pelo jornal **O Estado de S. Paulo**, ou propostas de atividades, consulte o site **Estadão na escola** (www.estadao-escola.com.br).

B.10 (Fuvest-SP) Dois atiradores x e obtiveram numa série de vinte tiros, num alvo da forma indicada na figura, os seguintes resultados:

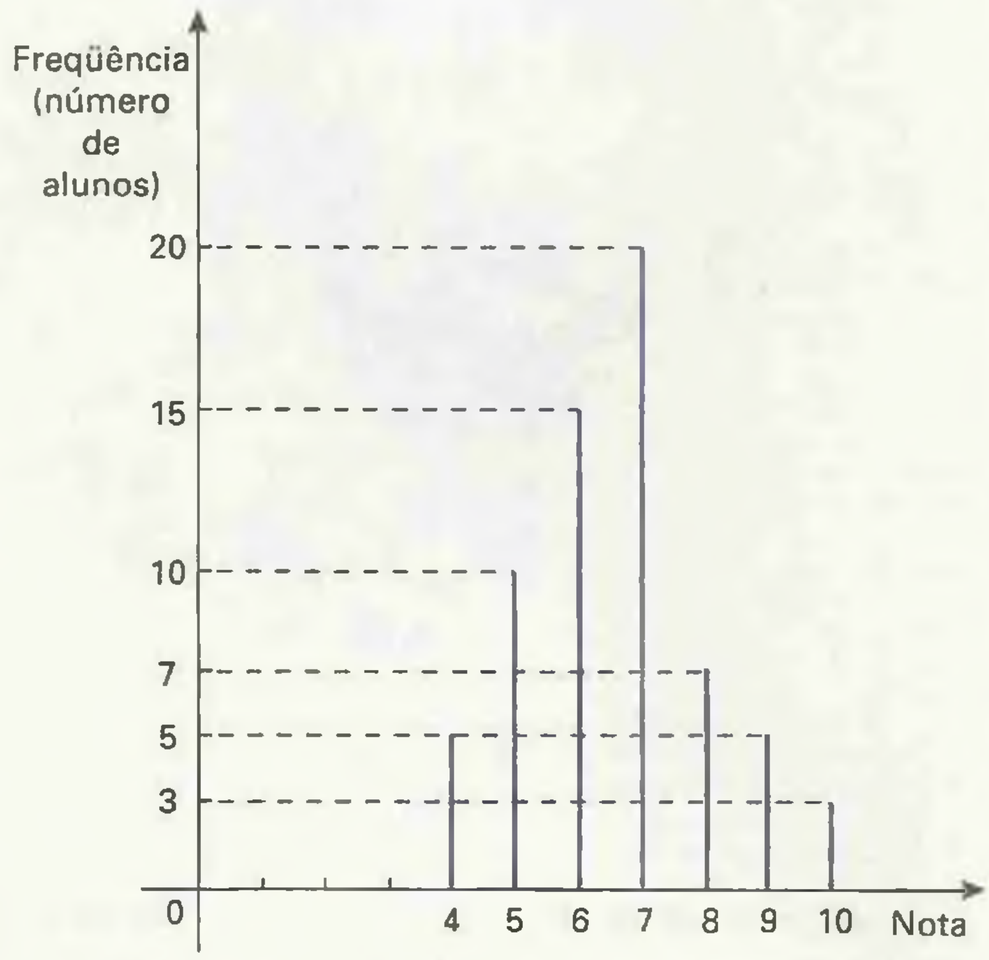
Atirador	Resultado				
	50	30	20	10	0
x	4	6	5	4	1
y	6	3	5	3	3

a) Qual é a média de pontos por tiro de cada um dos atiradores?
b) Compare os desvios padrão de cada uma das séries de tiros e decida qual é o atirador com desempenho mais regular.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Unicamp-SP) A média aritmética das idades de um grupo de 120 pessoas é 40 anos. Se a média aritmética das idades das mulheres é 35 anos e a dos homens é 50 anos, qual o número de pessoas de cada sexo, no grupo?

C.2 O gráfico abaixo mostra a distribuição de freqüência das notas obtidas pelos alunos da segunda série do ensino médio numa prova de educação física.

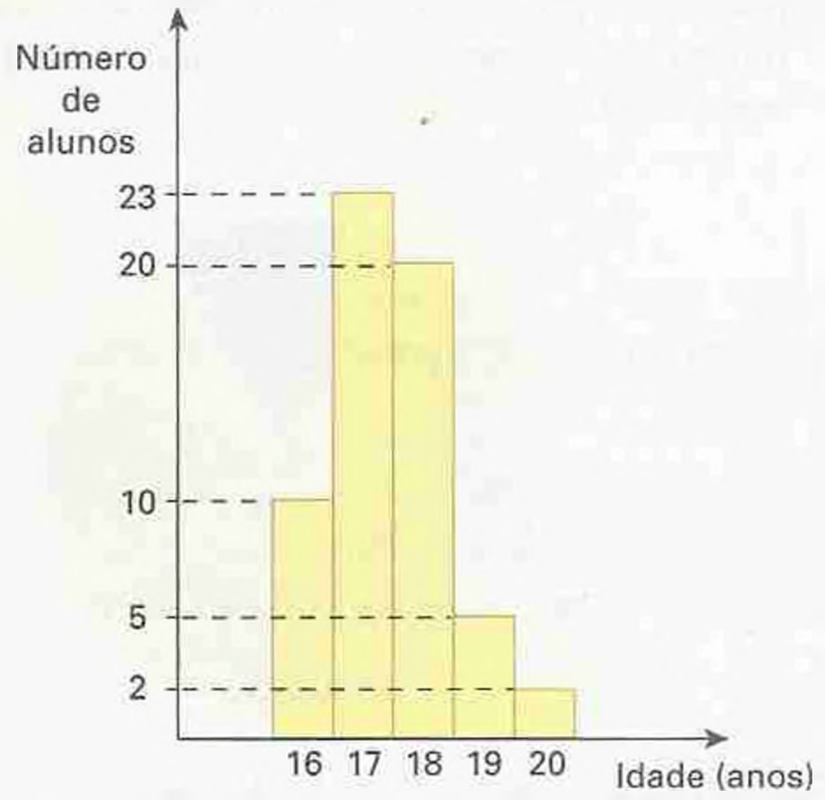


Determinar:
a) a nota média desses alunos;
b) a mediana dessa distribuição;
c) a moda dessa distribuição.

C.3 (Vunesp) Suponhamos que nos vestibulares desse ano uma universidade tivesse tido, para os seus diversos cursos, uma média de 3,60 candidatos por vaga oferecida. Se para os vestibulares do ano que vem o número de vagas for aumentado de 20% e o número de candidatos aumentar em 10%, qual a média de candidatos por vaga que essa universidade terá no próximo ano?

a) 3,24 c) 3,36 e) 3,46
b) 3,30 d) 3,40

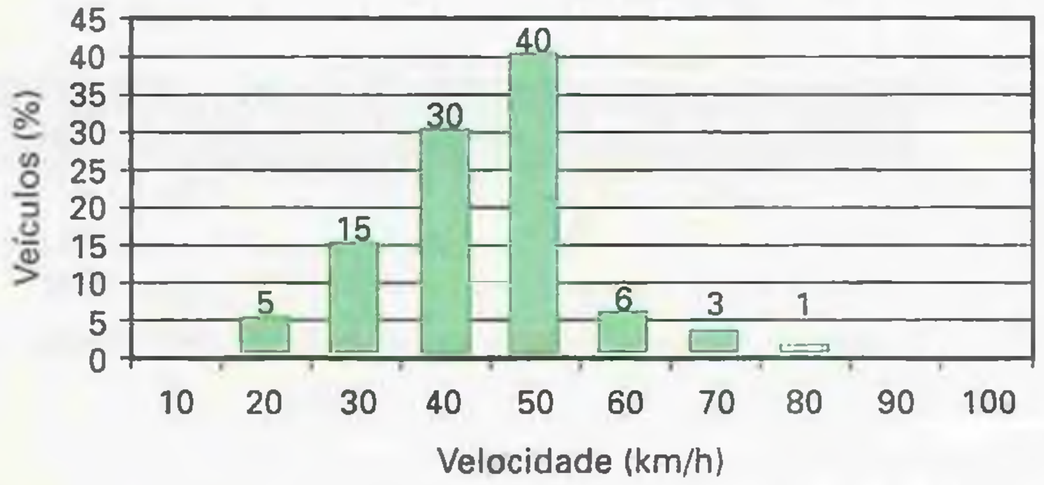
C.4 (Fuvest-SP) A distribuição das idades dos alunos de uma classe é dada pelo seguinte gráfico:



Qual das alternativas representa melhor a média de idades dos alunos?

a) 16 anos e 10 meses
b) 17 anos e 1 mês
c) 17 anos e 5 meses
d) 18 anos e 6 meses
e) 19 anos e 2 meses

C.5 (Enem) Um sistema de radar e programado para registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos trafegando por uma avenida, onde passam em média 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade permitida. Um levantamento estatístico dos registros do radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de veículos de acordo com sua velocidade aproximada.



A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de:

a) 35 km/h
b) 44 km/h
c) 55 km/h
d) 76 km/h
e) 85 km/h

C.6 Às vésperas de um jogo decisivo, o técnico de uma equipe de basquetebol deve optar pela escalação de um dentre dois jogadores A e B. As duas tabelas seguintes mostram o desempenho de cada jogador nos últimos cinco jogos dos quais participou:

Jogador A	
Jogo	Número de pontos
1	20
2	22
3	18
4	20
5	20

Jogador B	
Jogo	Número de pontos
1	30
2	14
3	20
4	12
5	24

a) Calcular a média de cada um por jogo.
b) Calcular o desvio padrão de cada um nesses cinco jogos.
c) Você, como técnico desse time, se tivesse que escalar um desses jogadores, num jogo onde a simples vitória lhe daria o título de campeão, qual deles escalaria?

Capítulo 23

SEQÜÊNCIAS

1. CONCEITUAÇÃO

Na lista de chamada de sua classe, o nome de cada aluno está associado a um número natural não-nulo. Por exemplo:

1. Alberto Vieira de Moraes
2. Alessandra Rodrigues Fontana
3. Alex Stanley

⋮

30. Valdir de Souza e Ramos

Quando associamos os números naturais 1, 2, 3, ..., 30 aos elementos do conjunto B dos alunos, de modo que cada um dos números — 1, 2, 3, ..., 30 — esteja associado a um único elemento de B, estamos estabelecendo uma **seqüência**, onde:

- o número 1 é associado ao primeiro elemento da seqüência;
- o número 2 é associado ao segundo elemento da seqüência;
- o número 3 é associado ao terceiro elemento da seqüência;

⋮

- o número 30 é associado ao trigésimo elemento da seqüência.

Para representar uma **seqüência**, escrevemos entre parênteses os seus elementos separados um a um por vírgulas, de modo que da esquerda para a direita tenhamos: (primeiro elemento, segundo elemento, terceiro elemento, ...).

Desse modo a seqüência da lista de chamada fica representada assim:

(Alberto Vieira de Moraes , Alessandra Rodrigues Fontana , Alex Stanley , ..., Valdir de Souza e Ramos)

Primeiro elemento — **Segundo elemento** — **Terceiro elemento** — **Trigésimo elemento**

Note, portanto, que:

> Seqüência é todo conjunto cujos elementos obedecem a uma determinada ordem.

Existem, também, seqüências infinitas como, por exemplo, a seqüência dos números naturais pares em ordem crescente: (0, 2, 4, 6, 8, ...).

Notas

1. Cada elemento de uma seqüência também pode ser denominado **termo da seqüência**.

2. O termo de uma seqüência que ocupa a posição de número n é indicado pelo símbolo a_n. Isto é:

a_1 indica o primeiro termo da seqüência
a_2 indica o segundo termo da seqüência
a_3 indica o terceiro termo da seqüência

⋮

a_n indica o enésimo termo da seqüência

3. Uma seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ pode ser representada abreviadamente por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exemplo

Na seqüência (3, 7, 11, 15, ...) temos que:

$$a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, ...$$

O código de barras

Os modernos supermercados são equipados com dispositivos chamados de **leitoras ópticas**, cuja finalidade é identificar cada produto através da leitura eletrônica de uma **seqüência** de barras verticais de espessuras variáveis (algumas têm a mesma espessura) impressas na embalagem do produto. Cada seqüência está associada a um único produto e ao seu preço. Esse sistema de representação é chamado de **código de barras**.

CID

2. LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA

Um conjunto de informações capazes de determinar todos os termos de uma seqüência e a ordem em que se apresentam é chamado de **lei de formação da seqüência**.

Exemplos

a) Considere a seguinte seqüência:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ tal que } \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2 + a_n \end{cases}$$

As informações $a_1 = 5$ e $a_{n+1} = 2 + a_n$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$, determinam todos os termos da seqüência e a ordem em que se apresentam. Vejamos:

- o primeiro termo da seqüência é 5; isto é, $a_1 = 5$;
- na igualdade $a_{n+1} = 2 + a_n$, atribuindo-se a n os valores 1, 2, 3, ..., obtemos os demais termos da seqüência, isto é:

$n = 1 \Rightarrow a_2 = 2 + a_1 \therefore a_2 = 2 + 5 \therefore a_2 = 7$
$n = 2 \Rightarrow a_3 = 2 + a_2 \therefore a_3 = 2 + 7 \therefore a_3 = 9$
$n = 3 \Rightarrow a_4 = 2 + a_3 \therefore a_4 = 2 + 9 \therefore a_4 = 11$
⋮

Logo, a seqüência é (5, 7, 9, 11, ...).

b) Considere a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = n^2 + 3$. Para determinar os termos dessa seqüência, basta atribuirmos a n os valores 1, 2, 3, ... na igualdade $a_n = n^2 + 3$:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 + 3 \therefore a_1 = 4$
$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 + 3 \therefore a_2 = 7$
$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 + 3 \therefore a_3 = 12$
$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 + 3 \therefore a_4 = 19$
⋮

Portanto a seqüência é (4, 7, 12, 19, ...).

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Na seqüência (3, 2, 5, 9, 6, 6, 6, ...), identifique os termos a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 e a_7.

B.2 Numa seqüência finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, os termos a_1 e a_n são chamados de **extremos da seqüência**. Dois termos a_i e a_j são chamados de **equidistantes dos extremos** se, e somente se, o número de termos que antecedem a_i é igual ao número de termos que sucedem a_j. Qual das alternativas abaixo apresenta dois termos equidistantes dos extremos da seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{60})$?

a) a_{20} e a_{40} c) a_{19} e a_{40} e) a_{19} e a_{39}
b) a_{20} e a_{39} d) a_{20} e a_{41}

B.3 Um termo a_s é chamado de **termo médio** de uma seqüência com número ímpar de termos se, e somente se, o número de termos que antecedem a_s é igual ao número de termos que o sucedem. Qual das alternativas abaixo apresenta o termo médio da seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{93})$?

a) a_{45} c) a_{47} e) a_{49}
b) a_{46} d) a_{48}

B.4 Escreva sob a forma $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ cada uma das seguintes seqüências:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 6 \\ a_{n+1} = 9 + a_n \end{cases}$

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 3 \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \end{cases}$

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 5n + 3$

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = n^2 + 2n$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (PUC-SP) Na seqüência cujos termos obedecem à fórmula de recorrência $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = (a_n - 2)^2$, qualquer que seja n, $n \in \mathbb{N}^*$, o sexto termo é:

a) 1 c) 3 e) 9
b) −1 d) 6

C.2 (FGV-SP) A seqüência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é tal que $y_n - y_{n-1} = 2n$, para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geqslant 2$. Sabendo-se que $y_1 = -1$, o termo y_4 é igual a:

a) 21 c) 27 e) 51
b) 17 d) 31

C.3 A soma S_n dos n primeiros termos da seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$ é dada por $S_n = n^2 + 4n$ para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcule a soma dos dez primeiros termos da seqüência.
b) Determine o primeiro termo da seqüência.
c) Determine o sexto termo da seqüência.

C.4 (Cesgranrio) A soma dos n primeiros termos de uma sucessão é dada por $S_n = n(n + 1)$. Então o vigésimo termo da sucessão é:

a) 420 c) 60 e) 20
b) 380 d) 40

Nota

"Sucessão" é sinônimo de "seqüência".

Capítulo 24

O QUE É UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA?

1. PROGRESSÃO ARITMÉTICA (P.A.)

Definição

Progressão aritmética é toda seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante r. O número r é chamado de "**razão** da progressão aritmética".

Exemplos

a) (4, 7, 10, 13, 16, 19, 22) é uma P.A. finita de razão $r = 3$.

b) (10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4, ...) é uma P.A. infinita de razão $r = -2$.

c) (5, 5, 5, 5, ...) é uma P.A. infinita de razão $r = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, sabendo que $a_7 = \frac{1}{3}$ e $a_8 = \frac{1}{2}$.

Resolução

A razão r da P.A. é tal que:

$$r = a_8 - a_7 \therefore r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \therefore r = \frac{1}{6}$$

R.2 Verificar se a seqüência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 3n + 8$ é ou não P.A.

Resolução

Devemos verificar se a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e seu antecessor é constante ou não.

Temos que $a_n = 3n + 8$ e $a_{n+1} = 3(n + 1) + 8$ são termos consecutivos da seqüência $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$. Calculando a diferença $a_{n+1} - a_n$, obtemos:

$$a_{n+1} - a_n = 3(n + 1) + 8 - (3n + 8) = 3$$

Como essa diferença é constante, concluímos que a seqüência é P.A.

2. CLASSIFICAÇÃO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Uma P.A. é **crescente** quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que a sua **razão seja positiva**.

Exemplo

(7, 11, 15, 19, ...) é uma P.A. crescente. Note que sua razão é positiva, $r = 4$.

Uma P.A. é **decrescente** quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que a sua **razão seja negativa**.

Exemplo

(50, 40, 30, 20, ...) é uma P.A. decrescente. Note que sua razão é negativa, $r = -10$.

Uma P.A. é **constante** quando todos os seus termos são iguais. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que sua **razão seja igual a zero**.

Exemplo

A P.A. $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \ldots\right)$ é constante. Note que sua razão é igual a zero, $r = 0$.

3. PROPRIEDADE

Uma seqüência de três termos é P.A. se, e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois, isto é:

$$(a, b, c) \text{ é P.A.} \Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$$

Demonstração

Temos que $\begin{cases} (a, b, c) \text{ é P.A.} \Leftrightarrow b - a = c - b \\ \text{e} \\ b - a = c - b \Leftrightarrow b = \dfrac{a + c}{2} \end{cases}$

Logo, (a, b, c) é P.A. $\Leftrightarrow b = \frac{a + c}{2}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

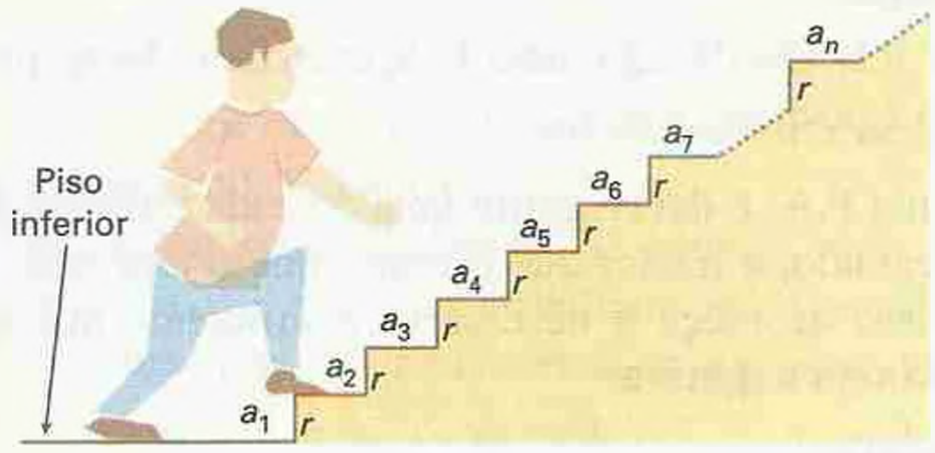
R.3 Determine x para que a seqüência $(3 + x, 5x, 2x + 11)$ seja P.A.

Resolução

A seqüência é P.A. se, e somente se, $5x = \frac{3 + x + 2x + 11}{2}$. Resolvendo essa equação, obtém-se $x = 2$.

4. FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Numa progressão aritmética um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (r) e do primeiro termo (a_1) através de uma fórmula matemática. Para entender essa fórmula, considere uma escada que une dois pisos. Ao piso inferior associamos um número a_1 que indica a altitude (altura em relação ao nível do mar) desse piso. Aos patamares da escada associamos as respectivas altitudes: a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ... (conforme a figura).



Sendo r a altura de cada degrau, observe que as altitudes a_1, a_2, a_3, ... formam, nessa ordem, uma P.A. Se um indivíduo estiver na altitude a_1, quantos degraus deverá subir para atingir a altitude a_7?

Observando a figura, percebemos que o indivíduo deve subir seis degraus ($6r$). Assim, a altitude a_7 é igual à soma $a_1 + 6r$, isto é, $a_7 = a_1 + 6r$.

Se o indivíduo estiver na altitude a_1, quantos degraus deverá subir para atingir a altitude a_n?

Ora, estando na altitude a_1, o indivíduo não terá subido nenhum degrau; na altitude a_2 terá subido um degrau; na altitude a_3 terá subido dois degraus; na altitude a_4 terá subido três degraus; e assim por diante.

Ou seja:

$$a_1 = a_1 + 0r,\ a_2 = a_1 + 1r,$$
$$a_3 = a_1 + 2r,\ a_4 = a_1 + 3r,\ ...$$

na altitude a_n terá subido $n - 1$ degraus. Assim, a altitude a_n pode ser expressa como:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \quad \forall n, n \in \mathbb{N}^*$$

Generalizando, temos:

Numa P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão r tem-se $a_n = a_1 + (n - 1)r$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$. Essa sentença é chamada de **fórmula do termo geral da P.A.**

Voltando à figura inicial, observe que, se o indivíduo estiver na altitude a_6 e pretende se deslocar até a altitude a_{10}, ele deve subir $10 - 6$ degraus, ou seja, $a_{10} = a_6 + (10 - 6)r$. Generalizando, se o indivíduo estiver na altitude a_k e pretende se deslocar até a altitude a_n, ele deve subir (ou descer) $n - k$ degraus, isto é:

$$a_n = a_k + (n - k)r$$

Essa identidade é uma outra forma de apresentação da fórmula do termo geral. Note que para $k = 1$, obtém-se a fórmula anterior.

Exemplos

$a_{20} = a_6 + (20 - 6)r$, ou seja, $a_{20} = a_6 + 14r$
$a_{37} = a_9 + (37 - 9)r$, ou seja, $a_{37} = a_9 + 28r$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Determinar o 61º termo da P.A. (9, 13, 17, 21, ...).

Resolução

$$a_1 = 9,\ r = 4,\ n = 61,\ a_{61} = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 61$, temos que:

$$a_{61} = a_1 + (61 - 1)r \ \therefore\ a_{61} = a_1 + 60r$$
$$\therefore a_{61} = 9 + 60 \cdot 4 \ \therefore\ a_{61} = 249$$

R.5 Determinar a razão da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ em que $a_1 = 2$ e $a_8 = 3$.

Resolução

$$a_1 = 2,\ a_8 = 3,\ n = 8,\ r = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, para $n = 8$, temos:

$$a_8 = a_1 + 7r \ \therefore\ 3 = 2 + 7r \Rightarrow r = \frac{1}{7}$$

R.6 Determinar o número de termos da P.A. (4, 7, 10, ..., 136).

Resolução

$$a_1 = 4,\ a_n = 136,\ r = 3,\ n = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos que:

$$136 = 4 + (n - 1) \cdot 3 \ \therefore\ 136 = 4 + 3n - 3$$
$$\therefore 3n = 135 \Rightarrow n = 45$$

Logo, a P.A. possui 45 termos.

R.7 Determinar a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 12$ e $a_3 + a_5 = 18$.

Resolução

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos:

$$a_4 = a_1 + 3r,\ a_3 = a_1 + 2r \text{ e } a_5 = a_1 + 4r$$

Logo:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 12 \\ a_3 + a_5 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 + 3r = 12 \\ a_1 + 2r + a_1 + 4r = 18 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 3r = 12 \\ 2a_1 + 6r = 18 \end{cases}$$

Subtraímos, então, essas igualdades, membro a membro:

$$-3r = -6 \ \therefore\ r = 2$$

R.8 Interpolar (inserir) cinco meios aritméticos entre 1 e 25, nessa ordem.

Resolução

Interpolar (ou inserir) cinco meios aritméticos entre 1 e 25, nessa ordem, significa determinar a P.A. de primeiro termo igual a 1 e último termo igual a 25, havendo entre eles cinco outros termos, isto é:

$$(1, \underbrace{\ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots}, 25)$$

a_1 — Meios aritméticos — a_7

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, temos que $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 25 = 1 + 6r \therefore r = 4$.
Logo, a P.A. é (1, 5, 9, 13, 17, 21, 25).

R.9 Determinar o 62º termo da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão 2 e $a_{20} = 5$.

Resolução

$$a_{20} = 5,\ r = 2,\ n = 62,\ a_{62} = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_k + (n - k)r$, temos que:
$a_{62} = a_{20} + (62 - 20)r \therefore a_{62} = 5 + 42 \cdot 2 \therefore a_{62} = 89$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Verifique se é ou não progressão aritmética cada uma das seguintes seqüências:

a) $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_6)$ tal que $a_n = 5n + 1$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 6$

b) $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9)$ tal que $a_n = n^2$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 9$

c) $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8)$ tal que $a_n = \frac{n}{3} + 1$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 8$

B.2 A seqüência (a_n), dada por $a_n = 4n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, é progressão aritmética? Justifique sua resposta.
Sugestão. Como, nesse caso, a variável n deve assumir infinitos valores, a melhor maneira de se verificar se é, ou não, P.A., consiste em calcular a diferença $a_{n+1} - a_n$; se tal diferença for constante, então a seqüência é P.A.; caso contrário, não é.

B.3 Calcule a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, sabendo que $a_{15} = \frac{2}{3}$ e $a_{16} = \frac{2}{5}$.

B.4 Qual é a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cuja lei de formação é $a_n = 5n - 1$?

B.5 Classifique como crescente, decrescente ou constante cada uma das seguintes progressões aritméticas:

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 8 - 3n$

b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = 2n + 1$

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \frac{n^2 - 9}{n + 3} - n$

d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + 8 \end{cases}$

e) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \frac{n^2 + 4n + 4}{(n + 2)^2}$

f) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_n = \frac{7}{3} + \frac{n}{2}$

B.6 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(1 - x,\ x - 2,\ 2x - 1)$ seja P.A.

B.7 Qual é o valor real de x tal que a seqüência $(x - 3,\ x^2 + 2,\ 5x + 3)$ seja P.A.?

B.8 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(2 - 4x,\ 3 - x^2,\ 1 - x)$ seja P.A. crescente.

B.9 Determine o 51º termo da P.A. (5, 9, 13, 17, ...).

B.10 Qual é o 62º termo da P.A. (98, 93, 88, ...)?

B.11 Obtenha o 25º termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = \frac{2}{3}$ e $a_2 = \frac{11}{8}$.

B.12 Encontre a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = 14$ e $a_{16} = 45$.

B.13 Calcule a razão da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ tal que $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B.14 Quantos termos possui a P.A. (12, 18, 24, ..., 222)?

B.15 Determine o número de termos da P.A. cujo último termo é $\frac{103}{6}$, o primeiro é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{3}$.

B.16 Calcule o número de múltiplos de 7 existentes entre 10 e 200.

B.17 Quantos números inteiros divisíveis por 13 existem entre 100 e 1.000?

B.18 Determine a razão da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_9 = 15$ e $a_3 + a_6 = 18$.

B.19 Obtenha o primeiro termo da P.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_7 = 10$ e $a_3 + a_4 = 5$.

B.20 Interpole seis meios aritméticos entre 4 e 67, nessa ordem.

B.21 Insira (ou interpole) cinco meios aritméticos entre 1 e 2, nessa ordem.

B.22 Qual é a razão da P.A. que se obtém interpolando quinze meios aritméticos entre 3 e 5, nessa ordem?

B.23 Obtenha o 46º termo da P.A. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão 5 tal que $a_{12} = -8$.

Exercícios complementares de C.1 a C.12

5. REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UMA P.A.

É de grande utilidade, para a resolução de certos problemas, sabermos representar genericamente uma P.A. Como exemplos, mostraremos algumas representações.

- P.A. de três termos:

  $(x, x + r, x + 2r)$ ou
  $(x - r, x, x + r)$, em que a razão é r

- P.A. de quatro termos:

  $(x, x + r, x + 2r, x + 3r)$ ou
  $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$, em que a razão é $2r$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.10 Determinar a P.A. crescente de três termos, sabendo que a soma desses termos é 3 e que o produto deles é -8.

Resolução

Quando se conhece a soma dos termos, a representação mais cômoda é $(x - r, x, x + r)$. Pelo enunciado, temos:

$$\begin{cases} x - r + x + x + r = 3 \Rightarrow 3x = 3 \therefore x = 1 \quad \textbf{(I)} \\ (x - r)x(x + r) = -8 \quad \textbf{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), $(1 - r) \cdot 1 \cdot (1 + r) = -8$
$\therefore 1 - r^2 = -8 \Rightarrow r^2 = 9 \quad \therefore r = \pm 3$.

Como devemos ter uma P.A. crescente, só interessa a razão positiva, isto é, $r = 3$.
Assim, a P.A. procurada $(x - r, x, x + r)$ para $x = 1$ e $r = 3$ é $(-2, 1, 4)$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.24 Numa P.A. decrescente de três termos, a soma desses termos é 6 e o produto deles é -24. Determine a P.A.

B.25 (Unicap-PE) Três números formam uma progressão aritmética. A soma deles é 3 e a soma de seus quadrados é 11. O produto desses números é:
a) 5 b) -5 c) 3 d) -3 e) 0

B.26 (FGV-SP) Quatro números constituem uma progressão aritmética. A sua soma vale 24 e a soma de seus quadrados vale 164. O maior desses números é:
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) n.d.a.
Sugestão. Represente a P.A. por $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$.

Exercício complementar C.13

6. SOMA DOS *n* PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.A.

Termos equidistantes dos extremos

Propriedade

Numa P.A. finita a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_{n-k}, ..., a_n)$ de razão r.
Os termos a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos.
Calculando a soma desses termos, temos:

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + (k + 1 - 1)r + a_1 + (n - k - 1)r =$$

$$= a_1 + \cancel{kr} + a_1 + (n - 1)r - \cancel{kr} =$$

$$= a_1 + a_1 + (n - 1)r = a_1 + a_n$$

(c.q.d.)

Exemplo

(3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63)

28 + 38 = 66
23 + 43 = 66
18 + 48 = 66
13 + 53 = 66
8 + 58 = 66
3 + 63 = 66

Cálculo da soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

Em uma pequena escola do principado de Braunschweig, Alemanha, em 1785, o professor Büttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um gurizote de oito anos de idade aproximou-se da mesa do senhor Büttner e, mostrando-lhe sua prancheta, proclamou: "Taí". O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto.

Aquele gurizote viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Karl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por ele foi simples e elegante: o menino percebeu que a soma do primeiro número, 1, com o último, 100, é igual a 101; a soma do segundo número, 2, com o penúltimo, 99, é igual a 101; também a soma do terceiro número, 3, com o antepenúltimo, 98, é igual a 101; e, assim por diante, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos:

1 2 3 4 ... 97 98 99 100

101
101
101
101

Como são possíveis cinqüenta somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = 50 \cdot 101 = 5.050$$

Esse raciocínio pode ser estendido para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer, como veremos a seguir.

Gauss realizou seu primeiro grande trabalho aos 16 anos de idade. Criou um método para deduzir os elementos da órbita de um planeta com medidas tomadas a partir de um ponto terrestre.

Teorema

A soma S_n dos n primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração

Vamos descrever a soma S_n duas vezes, do seguinte modo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{e}$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$$

Somemos, membro a membro, essas igualdades:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Note que em cada expressão entre parênteses temos a soma dos extremos, $(a_1 + a_n)$, ou a soma de dois termos equidistantes dos extremos. Pela propriedade dos termos equidistantes dos extremos, podemos escrever:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)}$$

$$\therefore\ 2S_n = (a_1 + a_n)n \quad \therefore\ S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.11 Calcular a soma dos trinta primeiros termos da P.A. (4, 9, 14, 19, ...).

Resolução

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ para $n = 30$, temos $S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})30}{2}$.

Precisamos calcular o valor de a_{30}. Pelo termo geral $a_n = a_1 + (n - 1)r$ temos:

$$a_{30} = a_1 + 29r \quad \therefore\ a_{30} = 4 + 29 \cdot 5 \quad \therefore\ a_{30} = 149$$

Logo, $S_{30} = \frac{(4 + 149)30}{2} = 2.295$.

R.12 Calcular a soma dos n primeiros termos da P.A. (2, 10, 18, 26, ...).

Resolução

Temos que $a_1 = 2$ e $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 8$, ou seja, $a_n = 8n - 6$.

Pela fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, temos:

$$S_n = \frac{(2 + 8n - 6)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(8n - 4)n}{2}$$

$$\therefore S_n = (4n - 2)n \therefore S_n = 4n^2 - 2n$$

Nota

A resposta obtida nesse exercício, $S_n = 4n^2 - 2n$, é uma fórmula para se calcular a soma dos n primeiros termos da P.A. (2, 10, 18, 26, ...). Por exemplo, a soma dos quatro primeiros termos dessa P.A. é:

$$S_4 = 4 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 = 56$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.27 Calcule a soma dos oitenta primeiros termos da P.A. (6, 9, 12, 15, 18, ...).

B.28 Obtenha a soma dos 51 primeiros termos da P.A. (−15, −11, −7, −3, 1, ...).

B.29 Determine a soma dos termos da P.A. finita (6, 10, 14, ..., 134).

B.30 Qual é a soma dos termos da P.A. finita (−30, −21, −12, ..., 213)?

B.31 A P.A. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é tal que $a_4 + a_5 = 89$ e $a_2 + a_6 = 78$. Qual é a soma dos seus vinte primeiros termos?

B.32 Calcule a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 100 e 300.

B.33 Encontre a soma dos múltiplos de 11 compreendidos entre 200 e 500.

B.34 Calcule o número de termos da P.A. cujo primeiro termo é 1, o último termo é 157 e a soma de seus termos é 3.160.

B.35 Sendo S_n a soma dos termos da P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão $r = 4$ e com $a_1 = 6$, determine n de modo que $S_n = 1.456$.

B.36 A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 2n^2$. Determine o primeiro termo e a razão da P.A.

B.37 Determine o quinto termo da P.A. cuja soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = 2n^2 + 6n$.

B.38 A letra grega $\sum$ (sigma) é usada, nas ciências exatas, para indicar uma soma. Por exemplo, a expressão $\sum_{j=1}^{5} 2j$, que se lê "somatório de $2j$, com j variando (em $\mathbb{N}$) de 1 até 5", é calculada atribuindo-se os valores 1, 2, 3, 4 e 5 à variável j da expressão $2j$ e a seguir somando-se os resultados obtidos. Isto é, primeiro obtemos os valores de $2j$:

$j = 1 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 1 = 2$; $j = 2 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 2 = 4$
$j = 3 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 3 = 6$
$j = 4 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 4 = 8$; $j = 5 \Rightarrow 2j = 2 \cdot 5 = 10$

Somando esses valores, encontramos:

$$\sum_{j=1}^{5} 2j = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

De acordo com essa idéia, calcule:

a) $\sum_{j=1}^{50} 2j$ b) $\sum_{j=1}^{40} (3j - 1)$

B.39 (Fuvest-SP) Calcular a soma dos n primeiros números naturais ímpares.

B.40 Calcule a soma dos n primeiros números naturais pares.

B.41 Calcule a soma dos n primeiros números naturais pares diferentes de zero.

Exercícios complementares de C.14 a C.20

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(2 \log_2 x,\ 2 + 3 \log_2 x,\ 8 \log_2 x)$ seja P.A.

C.2 (UFCE) Considere a seqüência $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...)$, em que $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{3}$ para todo n natural não-nulo.

Determine o termo a_{73} dessa seqüência.

C.3 Dois termos de uma P.A. são $a_k = 54$ e $a_{k+3} = 21$. Determine a razão dessa P.A.

C.4 (Cesgranrio) Em uma progressão aritmética de 41 termos e de razão 9, a soma do termo do meio com seu antecedente é igual ao último termo. Então, o termo do meio é:

a) 369 c) 201 e) 180
b) 189 d) 171

C.5 (Faap-SP) Quantos números inteiros compreendidos entre 123 e 1.245 são divisíveis por 2 e por 3 simultaneamente?

C.6 Sendo n um número ímpar, qual das alternativas apresenta o termo médio da seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$?

a) $a_{\frac{n}{2}}$ c) $a_{\frac{n+1}{2}}$ e) $a_{\frac{n}{4}}$

b) $a_{\frac{n-1}{2}}$ d) $a_{\frac{n+2}{2}}$

C.7 Determine o termo médio da P.A. (3, 7, 11, ..., 203).

C.8 (Mackenzie-SP) A seqüência de números reais $(89, \underbrace{a, b, c, ..., j}_{\text{10 termos}}, 45)$ é uma progressão aritmética cujo oitavo termo vale:

a) 57 b) 59 c) 61 d) 63 e) 65

C.9 Para construir uma escada, um carpinteiro pregou a dois caibros 12 degraus paralelos, conforme a figura.

Em ordem decrescente, os comprimentos desses degraus formam uma progressão aritmética. A soma dos comprimentos do terceiro e quinto degraus é 88 cm, e a soma dos comprimentos dos dois degraus menores é 58 cm. Qual é o comprimento do maior degrau dessa escada?

C.10 Um satélite artificial, em órbita circular em torno da Terra, realiza uma volta completa a cada 6 h. Às 18 h do dia 15 de janeiro de 1992 e às 12 h do dia 25 de janeiro de 1992; esse satélite esteve sobre a cidade de São Paulo. Quantas voltas em torno da Terra deu o satélite nesse intervalo de tempo?

C.11 Em uma estrada são instalados telefones SOS a cada 2,8 km. Calcule o número de telefones instalados no trecho que vai do quilômetro 5 até o quilômetro 61, sabendo que nessas duas marcas há telefones instalados. Conte inclusive esses dois telefones.

C.12 O cometa de mais longo período que se conhece é o Herschel-Rigollet. Seu período é 156 anos. Esse cometa passou pelo periélio em agosto de 1939. Qual será o primeiro ano, após o ano 4000, em que o cometa Herschel-Rigollet passará novamente por aquele ponto?

C.13 (Fatec-SP) Se as medidas dos ângulos internos de um triângulo estão em progressão aritmética, e a medida do maior ângulo é o quíntuplo da medida do menor, então a diferença entre a medida do maior ângulo e a soma das medidas dos outros dois é:

a) 20° c) 80° e) 90°
b) 40° d) 120°

C.14 O produto $P = a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot ... \cdot a^{100}$ é igual a:

a) $P = a^{3.600}$ c) $P = a^{7.000}$ e) $P = a^{4.800}$
b) $P = a^{2.800}$ d) $P = a^{5.050}$

Sugestão. Conserve a base a e adicione os expoentes.

C.15 (Fuvest-SP) A soma das frações irredutíveis, positivas, menores que 10, de denominador 4, é:

a) 10 c) 60 e) 100
b) 20 d) 80

C.16 (Fesp-SP) A soma dos múltiplos de 9 compreendidos entre 65 e 249 é:

a) 283 c) 5.670 e) 2.941
b) 3.150 d) 4.328

C.17 (FGV-SP) Um terreno será vendido através de um plano de pagamentos mensais em que o primeiro pagamento de R$ 500,00 será feito 1 mês após a compra, o segundo de R$ 550,00 será feito 2 meses após a compra, o terceiro de R$ 600,00 será feita 3 meses após a compra e assim por diante (isto é, cada pagamento mensal é igual ao anterior acrescido de R$ 50,00). Sabendo que o preço total do terreno é de R$ 19.500,00, calcule o número de prestações mensais que devem ser pagas.

C.18 (Unirio) Um agricultor estava perdendo a sua plantação, em virtude da ação de uma praga. Ao consultar um especialista, foi orientado para que pulverizasse, uma vez ao dia, uma determinada quantidade de um certo produto, todos os dias, da seguinte maneira:

primeiro dia: 1,0 litro; segundo dia: 1,2 litro; terceiro dia: 1,4 litro; ... e assim sucessivamente.

Sabendo-se que o total de produto pulverizado foi de 63 litros, o número de dias de duração desse tratamento nessa plantação foi de:

a) 21 b) 22 c) 25 d) 27 e) 30

C.19 Determine n de modo que $\sum_{j=1}^{n} (2j + 3) = 1.085$.

C.20 (Mackenzie-SP) A soma dos n primeiros termos das seqüências aritméticas (8, 12, ...) e (17, 19, ...) são iguais. Então, n vale:

a) 14 b) 10 c) 12 d) 18 e) 16

Capítulo 25

O QUE É PROGRESSÃO GEOMÉTRICA?

1. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (P.G.)

Definição

Progressão geométrica é toda seqüência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante q. O número q é chamado de **razão** da progressão geométrica.

Exemplos

a) (3, 6, 12, 24, 48, 96) é uma P.G. finita de razão $q = 2$.

b) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ é uma P.G. infinita de razão $q = \frac{1}{2}$.

c) (2, −6, 18, −54, 162, ...) é uma P.G. infinita de razão $q = -3$.

d) (5, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. infinita de razão $q = 0$.

e) (0, 0, 0, ...) é uma P.G. infinita de razão indeterminada.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Determinar a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_{15} = 32$ e $a_{16} = 108$.

Resolução

A razão q da P.G. é tal que:

$$q = \frac{a_{16}}{a_{15}}, \text{ se } a_{15} \neq 0 \quad \therefore \quad q = \frac{108}{32} = \frac{27}{8}.$$

R.2 Verificar se é ou não progressão geométrica a seqüência (a_n) dada pela lei de formação $a_n = 3^{\frac{n}{2}}$, $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

Resolução

Como a variável n deve assumir os infinitos valores do conjunto $\mathbb{N}^*$, em vez de atribuir os infinitos valores a n (o que não conseguiríamos), vamos verificar se o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Note que tal quociente sempre existe, pois todos os termos da seqüência (a_n) são diferentes de zero.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{3^{\frac{n}{2}}} = \frac{3^{\frac{n}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{n}{2}}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

Como o quociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ é constante $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)$ concluímos que a seqüência é P.G. de razão $q = 3^{\frac{1}{2}}$.

2. CLASSIFICAÇÃO DAS PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Uma P.G. é **crescente** quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que $a_1 > 0$ e $q > 1$, ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

Exemplos

a) (4, 8, 16, 32, ...) é uma P.G. crescente de razão $q = 2$.

b) $\left(-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$ é uma P.G. crescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

Uma P.G. é **decrescente** quando cada termo. a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, ou $a_1 < 0$ e $q > 1$.

Exemplos

a) $\left(8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$ é uma P.G. decrescente de razão $q = \frac{1}{2}$.

b) (−1, −2, −4, −8, ...) é uma P.G. decrescente de razão $q = 2$.

Uma P.G. é **constante** quando todos os seus termos são iguais. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que sua razão seja 1 ou que todos os seus termos sejam nulos.

Exemplos

a) (8, 8, 8, 8, ...) é uma P.G. constante de razão $q = 1$.

b) (0, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. constante de razão indeterminada.

Uma P.G. é **oscilante** quando todos os seus termos são diferentes de zero e dois termos consecutivos quaisquer têm sinais opostos. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplos

a) (3, −6, 12, −24, 48, −96, ...) é uma P.G. oscilante de razão $q = -2$.

b) $\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, ...\right)$ é uma P.G. oscilante de razão $q = -\frac{1}{2}$.

Uma P.G. é **quase nula** quando o primeiro termo é diferente de zero e todos os demais são iguais a zero. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que $a_1 \neq 0$ e $q = 0$.

Exemplo

(8, 0, 0, 0, 0, ...) é uma P.G. quase nula.

3. PROPRIEDADE

Uma seqüência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produtro dos outros dois, isto é, sendo $a \neq 0$, temos que:

$$(a, b, c) \text{ é P.G.} \Leftrightarrow b^2 = ac$$

Demonstração

Vamos analisar duas hipóteses: $b \neq 0$ ou $b = 0$.

1ª hipótese: $b \neq 0$

Como $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos que:

$$\begin{cases} (a, b, c) \text{ é P.G.} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \\ \text{e} \\ \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = ac \end{cases}$$

Logo, (a, b, c) é P.G. $\Leftrightarrow b^2 = ac$

2ª hipótese: $b = 0$

Como $a \neq 0$ e $b = 0$, temos que:

$$\begin{cases} (a, b, c) \text{ é P.G.} \Leftrightarrow c = 0 \\ \text{e} \\ c = 0 \Leftrightarrow b^2 = ac \end{cases}$$

Logo, (a, b, c) é P.G. $\Leftrightarrow b^2 = ac$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Determinar x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(4, 4x, 10x + 6)$ seja P.G.

Resolução

A seqüência de três termos, com o primeiro termo não-nulo, será P.G. se, e somente se, o quadrado do termo médio for igual ao produto dos extremos. Isto é:

$$(4x)^2 = 4(10x + 6) \Rightarrow 16x^2 = 40x + 24$$
$$\therefore 16x^2 - 40x - 24 = 0 \quad \therefore 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Calculando as raízes dessa equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2(-3) = 49$$

$$\therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

Logo, $x = 3$ ou $x = -\frac{1}{2}$.

4. FÓRMULA DO TERMO GERAL DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Numa progressão geométrica, um termo qualquer pode ser expresso em função da razão (q) e do primeiro termo (a_1) através de uma fórmula matemática. Para entendermos tal fórmula, consideremos a P.G. cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é q:

$$(a_1, \underbrace{a_1q}_{a_2}, \underbrace{a_1q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1q^4}_{a_5}, ..., \underbrace{?}_{a_n}, ...)$$

Note que qualquer termo da P.G. é igual ao produto do primeiro termo (a_1) por uma potência de q:

$$a_1 = a_1q^0, \ a_2 = a_1q^1, \ a_3 = a_1q^2,$$
$$a_4 = a_1q^3, \ a_5 = a_1q^4, ..., a_n = ?$$

Como os expoentes de q formam a P.A. (0, 1, 2, 3, 4, ...), cujo enésimo termo é $n - 1$, concluímos que:

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

Essa sentença é chamada de **fórmula do termo geral** da P.G.

Podemos, ainda, expressar um termo a_n da P.G. em função de um outro qualquer a_k e da razão q. Por exemplo, observe que na P.G. $(a_1, \underbrace{a_1q}_{a_2}, \underbrace{a_1q^2}_{a_3}, \underbrace{a_1q^3}_{a_4}, \underbrace{a_1q^4}_{a_5}, \underbrace{a_1q^5}_{a_6}, ...)$, temos que:

$$a_6 = a_1q^5; \ a_6 = a_2q^4; \ a_6 = a_3q^3; \ a_6 = a_4q^2; \ a_6 = a_5q$$

Generalizando, podemos escrever:

$$a_n = a_kq^{n-k}$$

Essa identidade é outra forma de apresentação da fórmula do termo geral. Note que para $k = 1$, obtém-se a fórmula anterior.

Exemplos

$a_{30} = a_{10}q^{30-10}$, ou seja, $a_{30} = a_{10}q^{20}$

$a_{16} = a_5q^{16-5}$, ou seja, $a_{16} = a_5q^{11}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Determinar o 15º termo da progressão geométrica (256, 128, 64, ...).

Resolução

Temos que:

$$a_1 = 256, \ q = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}, \ n = 15, \ a_{15} = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1q^{n-1}$, para $n = 15$, obtemos:

$$a_{15} = a_1q^{15-1} \ \therefore \ a_{15} = a_1q^{14} \ \therefore \ a_{15} = 256\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$

$$\therefore a_{15} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^{14}} \ \therefore \ a_{15} = \frac{1}{2^6} \ \therefore \ a_{15} = \frac{1}{64}$$

R.5 Determinar a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = \frac{1}{3^{28}}$ e $a_{10} = \frac{1}{3^{10}}$.

Resolução

$$a_1 = \frac{1}{3^{28}},\ a_{10} = \frac{1}{3^{10}},\ n = 10,\ q = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, para $n = 10$, obtemos:

$$a_{10} = a_1 q^{10-1} \therefore a_{10} = a_1 q^9$$

$$\therefore \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^{28}} q^9 \therefore \frac{3^{28}}{3^{10}} = q^9 \therefore q^9 = 3^{18}$$

$$\therefore q = \sqrt[9]{3^{18}} \therefore q = 3^2 \therefore q = 9$$

R.6 Determinar o número de termos da P.G. $\left(128, 64, 32, ..., \frac{1}{256}\right)$.

Resolução

Temos que:

$$a_1 = 128,\ q = \frac{64}{128} = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{256},\ n = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, obtemos:

$$\frac{1}{256} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore \frac{1}{256 \cdot 128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{2^8 \cdot 2^7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore \frac{1}{2^{15}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore 15 = n - 1 \therefore n = 16$$

Logo, a P.G. possui dezesseis termos.

R.7 Determinar a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 252$ e $a_2 + a_5 = 84$.

Resolução

Aplicamos a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, para $n = 4$, $n = 2$ e $n = 5$, respectivamente:

$$a_4 = a_1 q^3;\ a_2 = a_1 q;\ a_5 = a_1 q^4$$

Logo, temos $\begin{cases} a_1 + a_4 = 252 \\ a_2 + a_5 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 q^3 = 252 \\ a_1 q + a_1 q^4 = 84 \end{cases}$

Fatoramos o primeiro membro de cada uma das igualdades anteriores $\begin{cases} a_1(1 + q^3) = 252 \\ a_1 q(1 + q^3) = 84 \end{cases}$

Dividimos, membro a membro, as duas igualdades anteriores:

$$\frac{a_1(1 + q^3)}{a_1 q(1 + q^3)} = \frac{252}{84} \Rightarrow \frac{1}{q} = 3 \therefore q = \frac{1}{3}$$

R.8 Interpolar quatro meios geométricos entre 1 e 243, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a P.G. de seis termos, com $a_1 = 1$ e $a_6 = 243$:

$$(1, \underbrace{..., ..., ..., ...}_{\text{Meios geométricos}}, 243)$$

a_1 e a_6

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, temos:

$$a_6 = a_1 q^5 \Rightarrow 243 = 1 \cdot q^5 \therefore q = \sqrt[5]{243} \therefore q = 3$$

Logo, temos a P.G. (1, 3, 9, 27, 81, 243).

R.9 Interpolar três meios geométricos entre 1 e 2, nessa ordem.

Resolução

Devemos determinar a P.G. de cinco termos com $a_1 = 1$ e $a_5 = 2$:

$$(1, \underbrace{..., ..., ...}_{\text{Meios geométricos}}, 2)$$

a_1 e a_5

Pela fórmula do termo geral, $a_n = a_1 q^{n-1}$, temos que:

$$a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow 2 = 1 \cdot q^4 \therefore q = \pm\sqrt[4]{2}$$

Chegamos, portanto, a duas interpolações possíveis:

1ª) para $q = \sqrt[4]{2}$, temos a P.G.:

$$(1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2^2}, \sqrt[4]{2^3}, 2)$$

2ª) para $q = -\sqrt[4]{2}$, temos a P.G.:

$$(1, -\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2^2}, -\sqrt[4]{2^3}, 2)$$

Simplificando, obtemos $(1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}, 2)$ ou $(1, -\sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}, 2)$.

R.10 Determinar o 14º termo da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q = 3$ e $a_9 = 2$.

Resolução

$$a_9 = 2;\ q = 3;\ n = 14;\ a_{14} = ?$$

Aplicando a fórmula do termo geral $a_n = a_k q^{n-k}$, temos que $a_{14} = a_9 q^{14-9} \therefore a_{14} = 2 \cdot 3^5 \therefore a_{14} = 486$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Quais das seqüências a seguir são progressões geométricas?

a) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $a_n = 3 \cdot 2^n,\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 5$

b) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ tal que $a_n = 3n,\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 6$

c) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = 5^{-n},\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 4$

d) $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que $\begin{cases} a_1 = \frac{4}{3} \\ a_{n+1} = 6a_n,\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ e $n \leqslant 5$

e) (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $a_n = n^{n+1},\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 4$

f) (a_1, a_2, a_3) tal que $a_n = 2^{1-n},\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 3$

B.2 Verifique se é ou não progressão geométrica a seqüência (a_n) dada por $a_n = 5^{n+4},\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

B.3 Determine a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_{38} = 15$ e $a_{39} = 5$.

B.4 Qual é a razão da P.G. (a_n) cuja lei de formação é:

$$a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}},\ \forall n, n \in \mathbb{N}^*?$$

B.5 Classifique cada uma das progressões geométricas como crescente, decrescente, constante, oscilante ou quase nula:

a) (5, 5, 5, 5, ...)

b) $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots\right)$

c) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \ldots\right)$

e) (−1, 2, −4, 8, −16)

f) (0, 0, 0, 0, 0, ...)

B.6 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a seqüência $(5, 2x + 4, 6x + 2)$ seja P.G.

B.7 Para que valor de x, $x \in \mathbb{R}$, a seqüência $(2, 2x, 4x + 6)$ é P.G. crescente?

B.8 Determine o décimo termo da P.G. (3, 6, 12, ...).

B.9 Obtenha o 11º termo da P.G. $\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$.

B.10 Calcule a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = 4$ e $a_6 = 128$.

B.11 Encontre a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 = 2$ e $a_5 = 162$.

B.12 Qual é o número de termos da P.G. $\left(512, 256, 128, \ldots, \frac{1}{1.024}\right)$?

B.13 Determine o número de termos da P.G. $\left(\frac{1}{243}, \frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \ldots, 243\right)$.

B.14 Obtenha o primeiro termo da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 28$ e $a_2 + a_5 = 84$.

B.15 Qual é a razão da P.G. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tal que $a_1 + a_4 = 27$ e $a_3 + a_6 = 108$?

B.16 Interpole quatro meios geométricos entre 3 e 96, nessa ordem.

B.17 Insira cinco meios geométricos entre 1 e 2, nessa ordem.

B.18 Determine o 38º termo da P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ de razão $\frac{1}{2}$ e $a_{32} = \frac{1}{64}$.

Exercícios complementares de C.1 a C.7

A corrente milionária

Não faz muito tempo, uma verdadeira mania tomou conta do Brasil: a corrente milionária.

Eu me lembro de quando recebi a proposta tentadora para participar dessa corrente. Carlos, um colega de trabalho, apresentou-me uma lista com dez nomes, numerados de 1 a 10, dos quais o último era o seu. Explicou que se tratava de uma "ação entre amigos" cujo objetivo era que cada um dos participantes "engordasse" a sua conta bancária com uma boa quantia. Fiquei interessado.

O regulamento, que vinha logo abaixo da lista de nomes, dizia:

§1. Para participar da corrente o adquirente deve entregar ao portador desta um cheque no valor de Cr$ 20.000,00 (vinte mil cruzeiros) nominal ao primeiro nome da lista.

§2. Após receber o cheque, o portador o depositará na conta cujo número e banco encontram-se ao lado do primeiro nome desta lista.

§3. O adquirente deve fazer duas cópias deste contrato com a seguinte alteração: exclua o primeiro nome da lista, acrecentando o seu como décimo nome, seguido do número de sua conta bancária, nome do banco e agência.

§4. Cada uma das cópias deve ser passada a uma pessoa de sua extrema confiança que queira participar da corrente. Essa pessoa, por sua vez, repetirá os procedimentos anteriores.

§5. Quando seu nome chegar à primeira posição, você receberá 1.024 cheques no valor de Cr$ 20.000,00 cada.

Para se ter uma idéia da quantia que representava esse total de cheques, 1 dólar valia, na época, Cr$ 500,00. Logo, o total de cheques equivalia a 40.960 dólares.

"Quando a esmola é demais, o santo desconfia", dizia meu velho pai. Por isso, pedi um tempo para pensar.

Fui para casa entusiasmado com a quantia que poderia ganhar, "sem risco algum" e de "modo absolutamente legal".

Doce ilusão. Com alguns cálculos muito simples, percebi que a tal corrente era uma grande fraude. Para entender o porquê, pense nas remessas de listas desde o primeiro nome:

primeira remessa de listas → 2 pessoas (2^1)
segunda remessa de listas → 4 pessoas (2^2)
terceira remessa de listas → 8 pessoas (2^3)
⋮
décima remessa de listas → 1.024 pessoas (2^{10})
etc.

Naquela época o Brasil possuía cerca de 120.000.000 de habitantes. Observando que $2^{27} = 134.217.728$, percebe-se que apenas a 27ª remessa de listas já esgotaria a população do Brasil, isto é, todo cidadão brasileiro já teria sua lista e não teria mais para quem passar. Desse modo, apenas algumas pessoas receberiam os cheques.

A corrente milionária foi, certamente, obra de uma mente criminosa e conhecedora da teoria das **progressões geométricas**, assunto que desenvolvemos, honestamente, neste capítulo.

5. REPRESENTAÇÃO GENÉRICA DE UMA P.G.

Do mesmo modo, como no estudo da P.A., é importante sabermos representar uma P.G. genericamente.

Exemplos

a) P.G. de três termos, (x, xq, xq^2), em que a razão é q:

$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$, com razão q, se $q \neq 0$.

b) P.G. de quatro termos, (x, xq, xq^2, xq^3), com razão q;

$\left(\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3\right)$, com razão q^2, se $q \neq 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.11 Determinar a P.G. de três termos, sabendo que o produto desses termos é 8 e que a soma do segundo com o terceiro termo é 10.

Resolução

Quando se conhece o produto dos termos, a representação mais cômoda é $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$. Pelo enunciado temos que:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \therefore x = 2 \quad \text{(I)} \\ x + xq = 10 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), $2 + 2q = 10 \Rightarrow q = 4$.

Assim, para $x = 2$ e $q = 4$, temos que a P.G. $\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$ é igual a $\left(\frac{1}{2}, 2, 8\right)$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.19 Em uma P.G. de três termos, o produto dos termos é -1.000 e a soma deles é 15. Qual é a P.G.?

B.20 Determine a P.G. de três termos, sabendo que o produto desses termos é $\frac{1}{8}$ e que a soma dos dois primeiros é 2.

Exercícios complementares C.8 e C.9

6. SOMA DOS *n* PRIMEIROS TERMOS DE UMA P.G.

Teorema

Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, temos:

- se $q = 1$, então $S_n = na_1$
- se $q \neq 1$, então $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

Demonstração

Indiquemos por S_n a soma dos n primeiros termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \text{ ou seja:}$$
$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} \quad \text{(I)}$$

Consideremos dois casos: 1º) $q = 1$; 2º) $q \neq 1$.

1º) $q = 1$

Neste caso temos a soma:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + ... + a_1 \cdot 1^{n-1}$$
$$\therefore S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1}_{n \text{ parcelas iguais a } a_1}$$

$$\therefore S_n = na_1$$

2º) $q \neq 1$

Multiplicando por q ambos os membros da igualdade (I), obtemos:

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^n \quad \text{(II)}$$

Subtraindo, membro a membro, as igualdades (I) e (II), temos:

$$S_n - S_nq = a_1 - a_1q^n$$
$$\therefore S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

Como $q \neq 1$, podemos escrever:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

(c.q.d)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.12 Calcular a soma dos dez primeiros termos da P.G. (3, 6, 12, ...).

Resolução

$$a_1 = 3, \ q = 2, \ n = 10, \ S_{10} = ?$$

Como $q \neq 1$, aplicamos a fórmula $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ para $n = 10$:

$$S_{10} = \frac{a_1(1 - q^{10})}{1 - q} \therefore S_{10} = \frac{3(1 - 2^{10})}{1 - 2}$$

$$\therefore S_{10} = \frac{-3.069}{-1} \therefore S_{10} = 3.069$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.21 Calcule a soma dos onze primeiros termos da P.G. (2, 4, 8, ...).

B.22 Determine a soma dos dez primeiros termos da P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$.

B.23 Qual é a soma dos dez primeiros termos da P.G. $(2, -4, 8, -16, ...)$?

B.24 Obtenha a soma dos trinta primeiros termos da P.G. $(2, -2, 2, -2, ...)$.

B.25 A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é 5.115. Determine n, sabendo que $a_1 = 5$ e $q = 2$.

B.26 Na P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão $q = 2$, sabe-se que a soma dos oito primeiros termos é 765. Determine o valor de a_1.

Exercícios complementares de C.10 a C.19

7. SOMA DOS INFINITOS TERMOS DE UMA PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

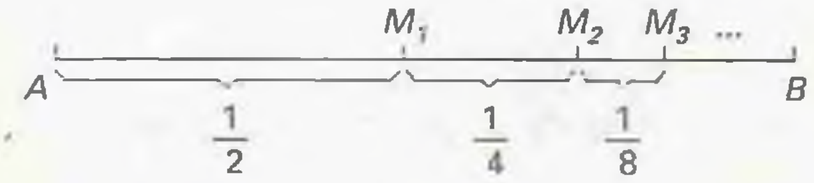
O segmento de reta $\overline{AB}$ tem 1 unidade de comprimento, e os infinitos pontos $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, ...$ são tais que:

- M_1 é ponto médio de $\overline{AB}$;
- M_2 é ponto médio de $\overline{M_1B}$;
- M_3 é ponto médio de $\overline{M_2B}$;

⋮

- M_{n+1} é ponto médio de $\overline{M_n B}$;

etc.



Observemos que as medidas dos infinitos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$, ... formam, nessa ordem, a progressão geométrica $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$.

Notemos, ainda, que:

- somando as medidas dos três primeiros segmentos, $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$ e $\overline{M_2M_3}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

- somando as medidas dos quatro primeiros segmentos, $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ e $\overline{M_3M_4}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

- somando as medidas dos cinco primeiros segmentos, $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_3M_4}$ e $\overline{M_4M_5}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$$

E assim sucessivamente, somando uma quantidade cada vez maior de medidas dos segmentos $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, ..., nos aproximaremos "tanto quanto quisermos" da medida 1, do segmento $\overline{AB}$. Por isso dizemos que o **limite da soma dos infinitos termos** da P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$ é 1.

Indicando esse limite pelo símbolo S_∞, temos $S_\infty = 1$. Para abreviar, chamaremos esse limite simplesmente de **soma dos infinitos termos** da P.G. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$.

Assim, temos que:

$$S_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = 1$$

Cálculo da soma dos infinitos termos de uma P.G.

Teorema

O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de razão q, $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$

Demonstração

A soma S_n dos n primeiros termos de uma P.G. de razão q, $q \neq 1$, é dada por:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \therefore S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1 - q}$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1q^n}{1 - q}$$

Como $-1 < q < 1$, temos que q^n tende a zero quando n tende a mais infinito $(+\infty)$ e, portanto, a expressão $\frac{a_1q^n}{1 - q}$ também tende a zero. Logo, a expressão $S_n = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1q^n}{1 - q}$ tende a $\frac{a_1}{1 - q}$ quando n tende a $+\infty$, isto é, $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$.

Indicando esse limite simplesmente por S_∞, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q} \quad \text{(c.q.d.)}$$

Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão q se, e somente se, $-1 < q < 1$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Calcular a soma dos infinitos termos da P.G. $\left(5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, ...\right)$.

Resolução

Calculando a razão da P.G., obtemos:

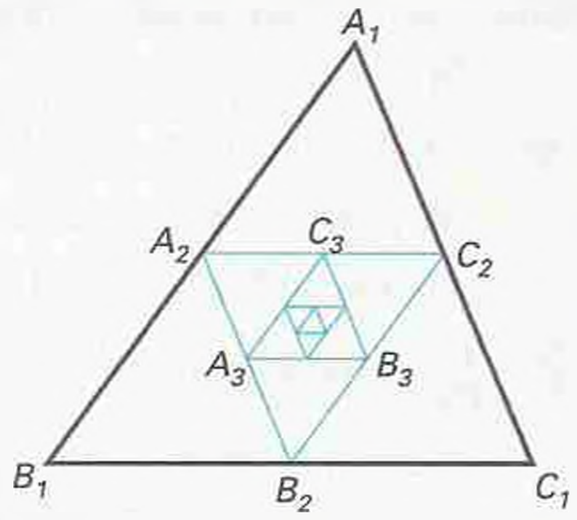
$$q = \frac{5}{2} : 5 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Como $-1 < \frac{1}{2} < 1$, então existe a soma S_∞.

Pela fórmula $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$, concluímos que:

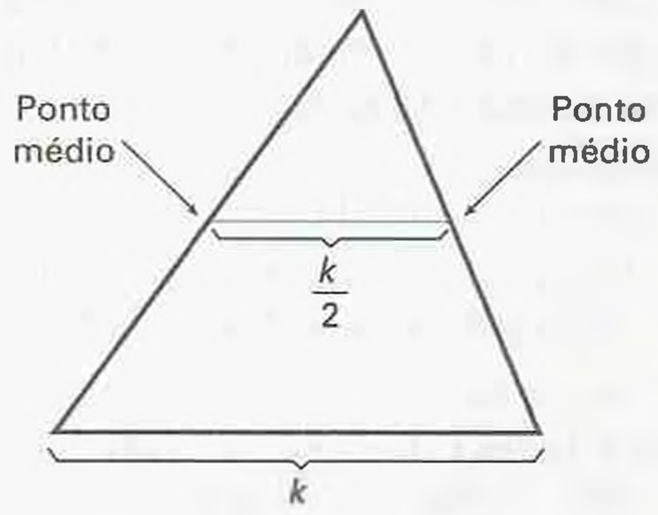
$$S_\infty = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \frac{5}{\frac{1}{2}} \therefore S_\infty = 10$$

R.14 Considerar a seqüência de infinitos triângulos $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, ...)$, sendo que os vértices de cada triângulo, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo precedente (conforme figura). Sendo 20 cm o perímetro do triângulo $A_1B_1C_1$, calcular a soma dos perímetros desses infinitos triângulos.



Resolução

Da geometria, sabemos que "a medida de um segmento de reta cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é igual à metade da medida do terceiro lado".



Assim, o perímetro de cada triângulo, a partir do segundo, é igual à metade do perímetro do triângulo precedente. Portanto a seqüência dos perímetros, em centímetros, é $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, ...\right)$. Tal seqüência é uma P.G. infinita de razão $\frac{1}{2}$. Como $-1 < \frac{1}{2} < 1$, segue-se que existe a soma S_∞. Isto é:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{20}{1-\frac{1}{2}} \therefore S_\infty = 40 \text{ cm}$$

R.15 Determinar a geratriz da dízima periódica $D = 4{,}8888...$

Resolução

$$D = 4 + \underbrace{0{,}8 + 0{,}08 + 0{,}008 + 0{,}0008 + ...}_{\text{P.G. infinita de razão 0,1}}$$

$$\therefore D = 4 + \frac{0{,}8}{1-0{,}1} \therefore D = 4 + \frac{8}{9} \therefore D = \frac{44}{9}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.27 Calcule a soma dos infinitos termos da P.G. (45, 15, 5, ...).

B.28 Qual é a soma dos infinitos termos da P.G. (32, 8, 2, ...)?

B.29 A soma dos infinitos termos da P.G. $\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, ...\right)$ é 5. Determine x.

B.30 Determine a geratriz da dízima periódica $D = 1{,}323232...$

B.31 Obtenha a geratriz da dízima periódica $D = 2{,}83333...$

B.32 A soma dos infinitos termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é $\frac{9}{2}$. Determine a razão dessa P.G. sabendo que $a_1 = 3$.

B.33 (ITA-SP) Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ uma progressão geométrica infinita de razão a_1, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos dessa progressão geométrica é:

a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{20}{27}$ c) $\frac{26}{27}$ d) $\frac{30}{27}$ e) $\frac{38}{27}$

Exercícios complementares de C.20 a C.24

8. PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS EM CÁLCULOS DE JURO COMPOSTO

Apliquei a quantia de R$ 500,00 na caderneta de poupança. Ao final de um mês, resgatei R$ 525,00.

- A quantia aplicada, isto é, R$ 500,00, é chamada de **capital inicial** da aplicação.
- A diferença entre a quantia que resgatei e a que apliquei, isto é: R$ 525,00 − R$ 500,00 = R$ 25,00 é chamada de **juro** produzido pela aplicação.
- A soma do capital inicial com o juro produzido, isto é, R$ 500,00 + R$ 25,00 = R$ 525,00, é chamada de **montante** acumulado no período de aplicação.
- O quociente do juro pelo capital inicial, isto é, $\frac{25{,}00}{500{,}00} = 0{,}05 = 5\%$, é chamado de **taxa de juro** durante o período da aplicação.

Nota

Na verdade, o rendimento da caderneta de poupança é a soma da correção monetária com o juro; porém, para facilitar a compreensão, chamaremos esse rendimento simplesmente de **juro**.

Juro composto

O tipo de juro mais usado nas transações financeiras é o **juro composto**. Para entender esse tipo de juro, observemos o exemplo seguinte.

Aplicando R$ 100.000,00 durante 3 meses à taxa de juro de 10% ao mês, qual o **juro composto** produzido?

Calculemos:

Mês	Capital	Juro	Montante
1º	R$ 100.000,00	R$ 10.000,00	R$ 110.000,00
2º	R$ 110.000,00	R$ 11.000,00	R$ 121.000,00
3º	R$ 121.000,00	R$ 12.100,00	R$ 133.100,00

Portanto o juro composto produzido foi R$ 33.100,00. Note que, em cada mês, a partir do segundo, a taxa de juro incide sobre o montante acumulado no mês anterior. Por isso, esse tipo de rendimento é chamado de **juro composto**.

Há um outro tipo de juro, chamado de **juro simples**, em que a taxa de juro incide apenas sobre o capital inicial.

Fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa constante

Um capital C é aplicado durante n unidades de tempo à taxa i por unidade de tempo. Calcule o montante acumulado ao final da aplicação.

A tabela a seguir mostra o montante acumulado no final de cada unidade de tempo.

Unidades de tempo	Capital	Juro	Montante
1	C	iC	$C + iC = C(1 + i)$
2	$C(1 + i)$	$iC(1 + i)$	$C(1 + i) + iC(1 + i) = C(1 + i)^2$
3	$C(1 + i)^2$	$iC(1 + i)^2$	$C(1 + i)^2 + iC(1 + i)^2 = C(1 + i)^3$
4	$C(1 + i)^3$	$iC(1 + i)^3$	$C(1 + i)^3 + iC(1 + i)^3 = C(1 + i)^4$
⋮	⋮	⋮	⋮

Observe que a coluna dos montantes apresenta a P.G. $(C(1 + i), C(1 + i)^2, C(1 + i)^3, C(1 + i)^4, ...)$, de razão $q = 1 + i$.

Ao final de n unidades de tempo, o montante M acumulado fica igual ao enésimo termo da P.G., isto é:

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow M = C(1 + i)(1 + i)^{n-1} \therefore M = C(1 + i)^n$

Chegamos então à fórmula do montante M:

$$M = C(1 + i)^n$$

Nota

Se a taxa não for constante, os montantes na última coluna da tabela anterior não formarão uma P.G., porém, raciocinando de modo análogo, chegaremos à fórmula para o cálculo do montante com juro composto e taxa variável:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$$

em que $i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ são as taxas variáveis por unidade de tempo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.16 Calcular o montante acumulado por um capital inicial de R$ 10.000,00 aplicado durante 6 meses a juros compostos de 5% ao mês. Dado: $(1,05)^6 \simeq 1,34$.

Resolução

Aplicamos a fórmula $M = C(1 + i)^n$, em que
C = R$ 10.000,00, i = 5% ao mês = 0,05 ao mês e n = 6 meses.

Temos, então:

$M = 10.000(1 + 0,05)^6 \therefore M = 10.000(1,05)^6$

$\therefore M = 10.000 \cdot 1,34 \therefore M = 13.400$

Logo, o montante é M = R$ 13.400,00, aproximadamente.

R.17 Calcular o juro composto gerado por um capital inicial de R$ 4.000,00 aplicado durante 1,5 ano à taxa de 8% ao mês. Dado: $(1,08)^{18} \simeq 3,99$.

Resolução

Utilizamos a fórmula $M = C(1 + i)^n$, em que
C = R$ 4.000,00, n = 1,5 ano = 18 meses,
i = 8% ao mês = 0,08 ao mês.

Nota

Para aplicar a fórmula $M = C(1 + i)^n$, deve-se ter n e i na mesma unidade de tempo.

Temos, então:

$M = 4.000(1 + 0,08)^{18} \therefore M = 4.000(1,08)^{18}$

$\therefore M = 4.000 \cdot 3,99 \therefore M = 15.960$

O juro j é a diferença entre o montante e o capital inicial, isto é:

j = R$ 15.960,00 − R$ 4.000,00 $\therefore j$ = R$ 11.960,00

Logo, o juro é j = R$ 11.960,00, aproximadamente.

R.18 Houve época em que a axa de inflação no Brasil era de 25% ao mês. Qual era a taxa de inflação anual no Brasil, nessa época? Supor a taxa constante em cada mês. Dado: $(1,25)^{12} \simeq 14,55$.

Resolução

Para calcular tal inflação, vamos obter o juro composto produzido por um capital inicial C aplicado durante 12 meses à taxa de 25% ao mês.

$M = C(1 + 0,25)^{12} \therefore M = C(1,25)^{12} \therefore M = 14,55C$

Assim, o juro j gerado no período de 12 meses é:

$$j = 14,55C - C = 13,55C$$

A razão $\frac{j}{C}$ é a taxa durante o período de 12 meses.

$$\frac{j}{C} = \frac{13,55C}{C} = 13,55 = \frac{1.355}{100} = 1.355\%$$

Logo, a taxa de inflação era de 1.355% ao ano, aproximadamente.

R.19 Apliquei R$ 1.000,00 na caderneta de poupança durante 3 anos. No primeiro ano o rendimento foi 15%; no segundo, 14%; e no terceiro, 20%. Qual foi o montante acumulado no final da aplicação?

Resolução

Utilizamos a fórmula

$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$, em que:
C = R$ 1.000,00, $n = 3$, $i_1 = 0,15$, $i_2 = 0,14$, $i_3 = 0,20$

Temos, então:

$M = 1.000(1 + 0,15)(1 + 0,14)(1 + 0,20)$

$\therefore M = 1.000 \cdot 1,15 \cdot 1,14 \cdot 1,20 \therefore M = 1.573,20$

Logo, o montante acumulado foi R$ 1.573,20.

R.20 O preço de um produto era R$ 600,00. O comerciante deu um desconto de 12% sobre esse preço, reduzindo-o para um novo preço p. A seguir, o comerciante deu um desconto de 8% sobre o preço p. Qual foi o preço final do produto?

Resolução

Aplicamos a fórmula

$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot ... \cdot (1 + i_n)$, em que:

C = R$ 600,00, $n = 2$, $i_1 = -0,12$, $i_2 = -0,08$

Nota

i_1 e i_2 são negativas porque são taxas de desconto.

Temos, então:

$M = 600(1 - 0,12)(1 - 0,08)$

$\therefore M = 600 \cdot 0,88 \cdot 0,92 \therefore M = 485,76$

Assim, o preço final do produto foi R$ 485.76.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.34 Aplica-se um capital inicial de R$ 25.000,00 durante 9 meses à taxa de juro composto de 5% ao mês. Qual será o montante acumulado no final da aplicação? Dado: $(1,05)^9 \simeq 1,55$.

B.35 Calcule o juro composto gerado por um capital de R$ 10.000,00 aplicado durante 10 meses à taxa de 3% ao mês. Dado: $(1,03)^{10} \simeq 1,34$.

B.36 Tendo sido aplicados R$ 1.000,00 a juro composto, depois de 3 anos, recebeu-se o montante de R$ 1.728,00. Calcule a taxa anual de juro, sabendo que ela foi constante nos 3 anos. Dado: $12^3 = 1.728$.

B.37 Qual o tempo necessário para que um capital C, aplicado a juro composto de 5% ao mês, produza um montante igual a $2C$? Dados: $\log 2 \simeq 0{,}301$; $\log 105 \simeq 2{,}021$.

B.38 Calcule o capital inicial que, aplicado a juro composto com taxa de 9% ao ano, acumulou ao final de 7 anos o montante de R$ 36.400,00. Dado: $(1{,}09)^7 \simeq 1{,}82$.

B.39 Aplica-se um capital de R$ 20.000,00 a juro composto com taxa de 6% ao mês. Qual será o montante acumulado em 2 anos? Dado: $(1{,}06)^{24} \simeq 4{,}04$.

B.40 Apliquei um capital de R$ 10.000,00 durante 3 anos, a juro composto, tal que a taxa de juro no primeiro ano foi 10%, no segundo foi 12% e no terceiro foi 8%. Qual foi o montante acumulado nesses 3 anos?

B.41 Um terreno comprado por R$ 100.000,00 valorizou 10% no primeiro mês, 8% no segundo mês, 9% no terceiro mês e 6% no quarto mês, após a compra.

a) Qual deve ser o preço do terreno após 4 meses de sua compra?

b) Qual foi o porcentual de valorização nesses 4 meses?

B.42 Na compra de um imóvel por R$ 50.000,00, tive um prejuízo de 5% no primeiro mês e outro prejuízo de 3% no segundo mês, após a compra.

a) Qual foi o preço do imóvel após os 2 meses da compra?

b) Qual foi o porcentual do prejuízo nesses 2 meses?

Sugestão.

$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_n)$, usando as taxas negativas: $i_1 = -0{,}05$ e $i_2 = -0{,}03$, pois são taxas de prejuízo.

B.43 Um comerciante, para acabar com seu estoque, deu 12% de desconto sobre o preço p de um produto, que passou a custar p_1. Por falta de compradores o comerciante descontou 5% sobre o preço p_1, e o novo preço passou a ser p_2. A seguir descontou 3% sobre o preço p_2.

a) Qual foi o preço final do produto, após esses três descontos sucessivos?

b) Qual foi o porcentual de desconto sobre o preço inicial p, após os três descontos sucessivos?

Exercícios complementares de C.25 a C.29

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFRO) O quarto, o sétimo e o décimo termo de uma P.G. são 20, $4x + 2$ e $1 + x^2$, respectivamente. A soma desses três termos é:

a) 55 b) 50 c) 40 d) 35 e) 30

C.2 (UFCE) Sejam x e y números positivos. Se os números 3, x e y formam, nesta ordem, uma progressão geométrica; e se os números x, y e 9 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, então $x + y$ é igual a:

a) $\frac{43}{4}$ b) $\frac{45}{4}$ c) $\frac{47}{4}$ d) $\frac{49}{4}$ e) $\frac{35}{4}$

C.3 Um fabricante de sabão em pó estima um crescimento de 2% ao ano nas vendas do produto fabricado. Sabendo que no ano de 1999 foram vendidas x toneladas de sabão em pó, calcule, em função de x, a quantidade, em toneladas, que será vendida no ano:

a) 2004 b) 2010 c) n, sendo $n > 1999$

(Não é preciso efetuar os cálculos, deixe a resposta indicada.)

C.4 Há bactérias que se reproduzem por bipartição, isto é, cada uma delas se divide em duas ao atingir determinado tamanho. Suponha que em uma cultura há $3 \cdot 2^7$ dessas bactérias e cada uma delas se divida em duas dando origem à 1ª geração; cada bactéria da 1ª geração se divida em duas dando origem à 2ª geração, e assim por diante. Em que geração o número de indivíduos será $3 \cdot 2^{25}$?

C.5 (Fuvest-SP) Num torneio aberto de tênis estão inscritos 4.096 jogadores. Em cada rodada as duplas são formadas por sorteio e os perdedores são eliminados. No final restarão 2 jogadores que disputarão entre si o título de campeão. Quantas partidas o campeão terá disputado?

C.6 (FEI-SP) Qual é a razão da progressão geométrica oscilante que se obtém interpolando-se 5 meios geométricos entre 4 e 6, nessa ordem?

C.7 Na P.G. de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, com $a_1 \neq 0$, tem-se que $a_{12} = 32a_7$. Determine a razão dessa P.G.

C.8 (Mackenzie-SP) Dados os números reais a, b, c e d, se (a, c, d) é uma progressão aritmética cuja soma dos termos é $\frac{15}{2}$ e (a, b, d) é uma progressão geométrica cujo produto dos termos é 8, então, sabendo que $a < d$:

a) $bc = 4$ c) $ad = 2$ e) $cd = 10$

b) $ab = \frac{5}{2}$ d) $ac = 5$

C.9 (Cesgranrio) Em um triângulo retângulo, as medidas, em uma mesma unidade de comprimento, do cateto menor, do cateto maior e da hipotenusa formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. A razão q dessa P.G. satisfaz a condição:

a) $0{,}7 < q < 0{,}9$ c) $1 < q < 2$ e) $3 < q < 3{,}2$

b) $0{,}9 < q < 1$ d) $2 < q < 3$

C.10 (Faap-SP) A soma dos 50 primeiros termos da seqüência $(1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots)$ é:

a) 2^{51} b) 2^{50} c) 2^{49} d) $2^{49} - 1$ e) $2^{50} - 1$

C.11 (Cesgranrio) Indicando por X_{10} e Y_{10} as somas dos 10 primeiros termos das progressões geométricas $(3^2, 3^4, 3^6, \ldots)$ e $(3, 3^2, 3^3, \ldots)$, respectivamente, o quociente $\frac{X_{10}}{Y_{10}}$ é igual a:

a) $3^{10} + 1$ c) $\frac{3^{11} + 1}{2}$ e) $\frac{3^{11}}{2}$

b) $\frac{3^{10} - 3}{2}$ d) $\frac{3 + 3^{11}}{4}$

C.12 (FGV-SP) Considere a progressão geométrica abaixo:

$$(1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^{n-1})$$

A soma de seus termos em função de n vale:

a) 3^{n+1} c) $\frac{3^n - 1}{2}$ e) 3^{n-1}

b) $\frac{3^{n-1} - 1}{2}$ d) $\frac{3^{n+1}}{2}$

C.13 O crescimento anual nas vendas de calculadoras de uma fábrica é 20%. No ano de 1986 a fábrica vendeu 20.000 unidades. Qual foi o total de vendas no quinqüênio de 1986 a 1990? Dado: $(1{,}2)^5 = 2{,}48832$.

C.14 Para que valor de n, $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se que $\sum_{j=1}^{n} 2^j = 4.094$?

C.15 (UFES) Em um rebanho de 15.000 reses, uma foi infectada pelo vírus "mc_1". Cada animal infectado vive apenas dois dias, ao final dos quais infecciona outros três animais. Se cada rês é infectada uma única vez, em quanto tempo o vírus "mc_1" exterminará metade do rebanho?

C.16 A progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$, de razão q, pode ser representada por $(a_1q^0, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, ..., \underbrace{a_1q^{n-1}}_{a_n}, ...)$. O produto de seus n primeiros termos é indicado por P_n, isto é:

$$P_n = a_1q^0 \cdot a_1q^1 \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot ... \cdot \underbrace{a_1q^{n-1}}_{a_n}$$

Mostre que essa expressão pode ser representada pela fórmula:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Sugestão. Conserve a base a_1 e adicione seus expoentes; conserve a base q e adicione seus expoentes.

C.17 Usando a fórmula do exercício anterior, calcule o produto dos 18 primeiros termos da P.G.

$\left(\frac{1}{256}, \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, ...\right)$.

C.18 (UCG) Os termos da P.G. $(x, x^3, x^5, ... x^{199})$ são tais que $\log_2^x + \log_2^{x^3} + \log_2^{x^5} + ... + \log_2^{x^{199}} = 20.000$. Determine o valor de x.

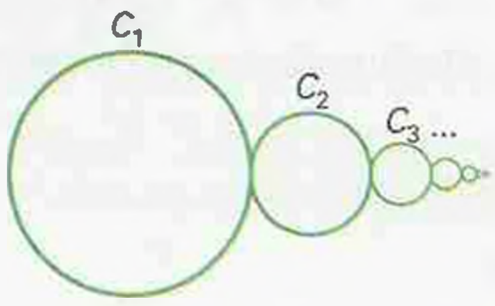
C.19 (Fuvest-SP) Uma progressão geométrica tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

C.20 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{2^j} = 5$.

C.21 Duas empresas A e B farão doações a uma creche. A empresa A pagará, durante dez anos, quantias anuais da seguinte forma: no primeiro ano 100.000 dólares e, em cada ano seguinte, metade da doação do ano anterior. A empresa B pagará, "eternamente", quantias anuais da seguinte forma: no primeiro ano, 98.000 dólares e, em cada ano posterior, metade da doação do ano anterior. Qual é a empresa mais generosa? Por quê?

C.22 Considere a seqüência $(C_1, C_2, C_3, ...)$ de infinitas circunferências. Se o diâmetro da circunferência C_1 é 80 cm e, a partir da segunda, o diâmetro de cada circunferência é $\frac{1}{4}$ do diâmetro da anterior, calcule a soma dos perímetros das infinitas circunferências.



C.23 Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio da estrada e aciona os freios a 100 m de distância da pedra. Após a freada, o veículo percorre 20 m no primeiro segundo e, durante alguns segundos, percorre, em cada segundo, $\frac{1}{4}$ da distância que percorreu no segundo anterior. Haverá o choque entre o veículo e a pedra? Justifique.

C.24 (ITA-SP) Se a soma dos termos da progressão geométrica infinita dada por 0,3; 0,03; 0,003; ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos dessa progressão aritmética vale:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

C.25 (UFPR) Um produto que há dezoito meses custava R$ 56.00 aumentou 2% ao mês, de lá para cá. O preço desse produto hoje, em reais, é:

a) $56 \cdot (1,2)^{17}$ d) $56 \cdot (1,2)^{18}$
b) $56 \cdot (1,02)^{18}$ e) $56 \cdot (1,02)^{17}$
c) $56 \cdot 2^{-18}$

C.26 A ariranha e o mico-leão-dourado são espécies em extinção no Brasil. Com o objetivo de preservar essas espécies, foram reunidos numa reserva florestal 120 ariranhas e 80 micos-leões-dourados. Constatou-se, após alguns anos, que o crescimento da população de ariranhas foi 5% ao ano e que a população de micos cresceu à taxa de 10% ao ano. Em quanto tempo, após a reunião desses animais na reserva, o número de micos deve chegar ao dobro do número de ariranhas?
Dados: log 3 = 0,477; log 1,047 = 0,019.

FÁBIO COLOMBINI / KINO

Ariranha (*Pteronura brasiliensis*), mamífero encontrado em regiões pouco desbravadas da Amazônia e do Brasil Central.

GLÓRIA JAFET / KINO

Mico-leão-dourado (*Leontopithecus rosalia rosalia*), pequeno primata que habita a América tropical.

C.27 (Fuvest-SP) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 30% em relação ao seu valor anterior. Se v for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será:

a) $(0,7)^7v$ d) $(0,3)^8v$
b) $(0,3)^7v$ e) $(0,3)^9v$
c) $(0,7)^8v$

C.28 (Vunesp) Se a taxa de inflação mensal for 10% durante 12 meses seguidos, então a taxa de inflação anual durante esses 12 meses será:

a) 120% d) 313%
b) $100[(1,2)^{10} - 1]\%$ e) $100(1,1)^{12}\%$
c) $100[(1,1)^{12} - 1]\%$

C.29 (PUC-RS) A caixa beneficente de uma entidade rende, a cada mês, 10% sobre o saldo do mês anterior. Se, no início de um mês, o saldo era x, e considerando-se que não haja retiradas, depois de 4 meses o saldo será de:

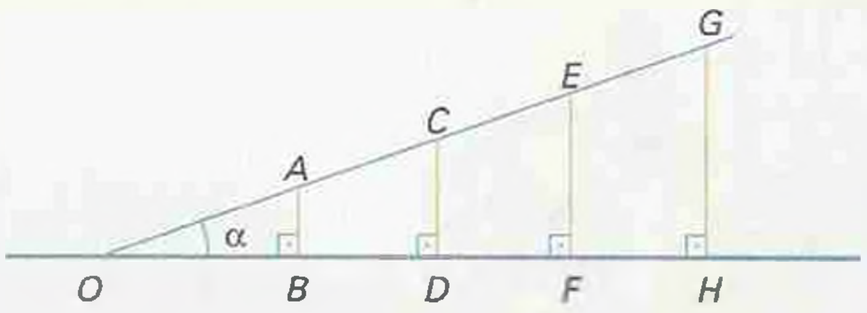
a) $\left(\frac{11}{10}\right)^4 x$ c) $x + \left(\frac{11}{10}\right)^4 x$ e) $x + \left(\frac{1}{10}\right)x$
b) $\left(\frac{11}{10}\right)^3 x$ d) $x + \left(\frac{11}{10}\right)x$

Capítulo 26

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

1. SENO, CO-SENO E TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

Dado um ângulo agudo qualquer de medida α, considere os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo de medida α. Alguns desses triângulos são:



Observe que os triângulos OAB, OCD, OEF e OGH são semelhantes. Assim, a razão entre dois lados quaisquer de um deles é igual à razão entre os lados correspondentes dos outros, ou seja:

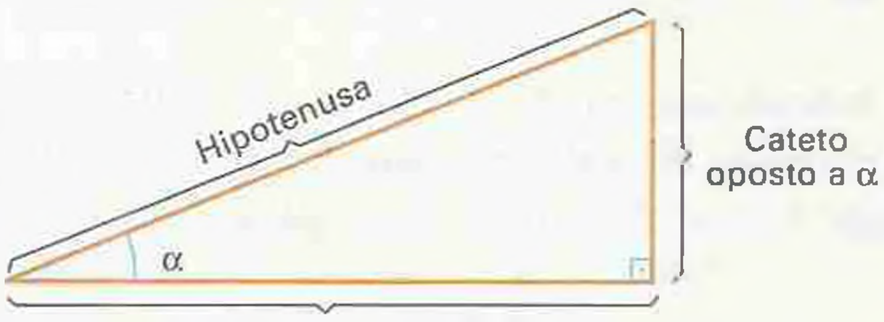
$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} = r_1$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = r_2$$

$$\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = r_3$$

Note que as constantes r_1, r_2 e r_3 dependem exclusivamente da medida α, e não das dimensões do triângulo escolhido para obtê-las.

Como os infinitos triângulos retângulos que possuem o ângulo agudo de medida α são semelhantes entre si, temos que as constantes r_1, r_2 e r_3 podem ser obtidas, de maneira análoga, a partir de qualquer um deles, ou seja:



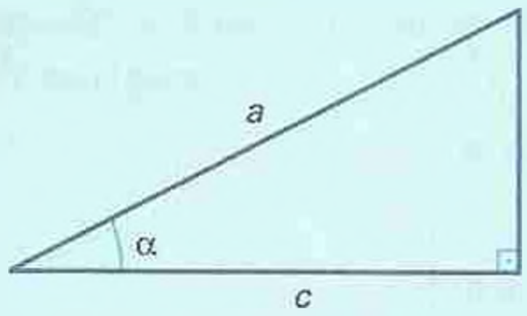
$$r_1 = \frac{\text{Medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{Medida da hipotenusa}}$$

$$r_2 = \frac{\text{Medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{Medida da hipotenusa}}$$

$$r_3 = \frac{\text{Medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{Medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

As razões (trigonométricas) r_1, r_2 e r_3 são chamadas respectivamente de: seno do ângulo α (sen α), co-seno do ângulo α (cos α) e tangente do ângulo α (tg α).

Em resumo, temos:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

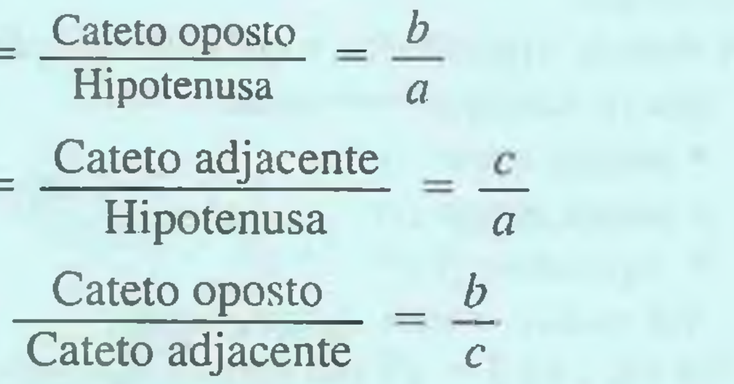
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

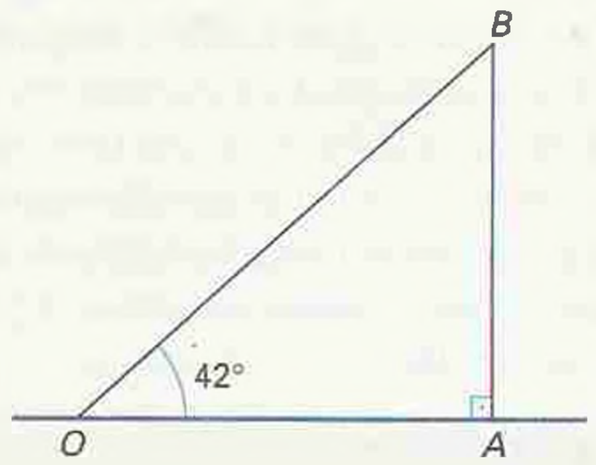
R.1 Com o auxílio de régua graduada e transferidor, calcular sen 42°, cos 42° e tg 42°.

Resolução

Construímos um ângulo de 42°:



Traçamos uma perpendicular a um dos lados desse ângulo:



Medimos, com auxílio da régua, os lados do triângulo ABO. Temos:

$AB = 2{,}7$ cm; $AO = 3{,}0$ cm; $BO = 4{,}1$ cm

Assim, calculamos:

$$\text{sen } 42° = \frac{2{,}7}{4{,}1} \simeq 0{,}6; \quad \cos 42° = \frac{3{,}0}{4{,}1} \simeq 0{,}7;$$

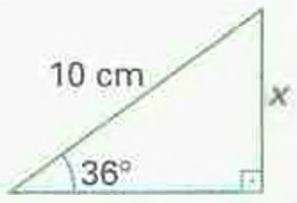
$$\text{tg } 42° = \frac{2{,}7}{3{,}0} = 0{,}9$$

Nota

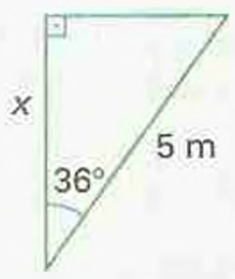
Quando medimos um segmento de reta com uma régua graduada, cometemos, inevitavelmente, erros de aproximação. Portanto os resultados obtidos para sen 42°, cos 42° e tg 42° são valores aproximados. Existem métodos, mais eficientes, que calculam esses valores com qualquer precisão desejada.

R.2 Sabendo que sen 36° = 0,58, cos 36° = 0,80 e tg 36° = 0,72, calcular o valor de x em cada figura.

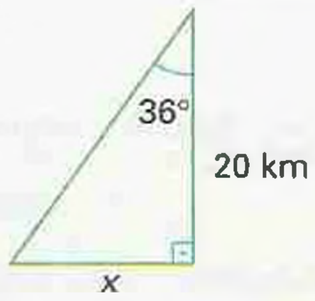
a)



b)



c)



Resolução

a) A razão trigonométrica que deve ser aplicada é aquela que relaciona os elementos:
- ângulo agudo (36°);
- cateto oposto (x);
- hipotenusa (10).

Tal razão é o **seno**. Assim, temos:

$$\text{sen } 36° = \frac{x}{10} \Rightarrow 0{,}58 = \frac{x}{10} \therefore x = 5{,}8$$

Logo, $x = 5{,}8$ cm.

b) As medidas relacionadas no triângulo retângulo são:
- ângulo agudo (36°);
- cateto adjacente (x);
- hipotenusa (5).

Dessa forma, a razão trigonométrica adequada é o **co-seno**. Assim, temos:

$$\cos 36° = \frac{x}{5} \Rightarrow 0{,}80 = \frac{x}{5} \therefore x = 4$$

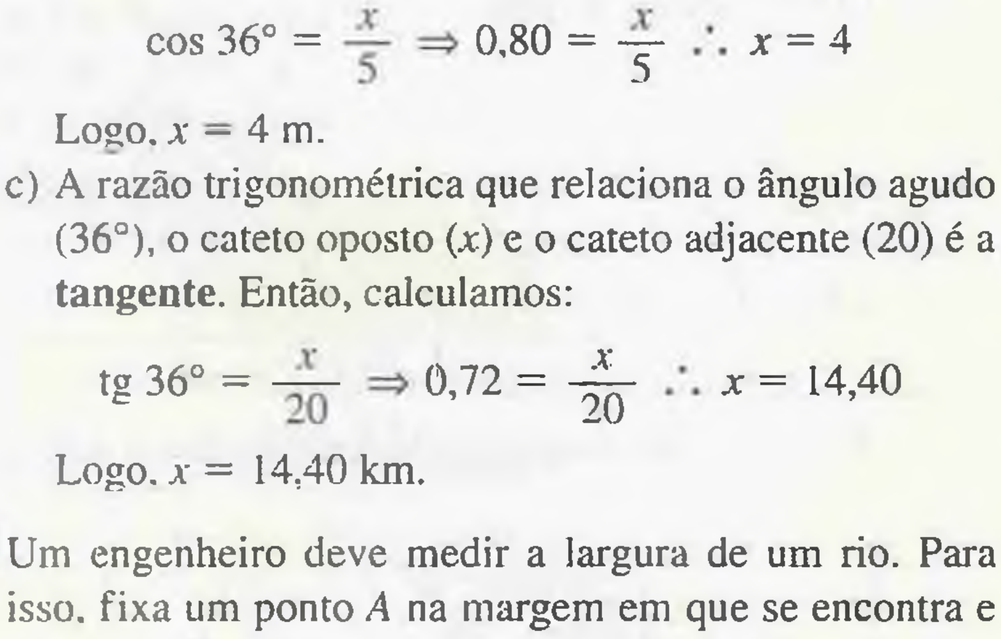
Logo, $x = 4$ m.

c) A razão trigonométrica que relaciona o ângulo agudo (36°), o cateto oposto (x) e o cateto adjacente (20) é a **tangente**. Então, calculamos:

$$\text{tg } 36° = \frac{x}{20} \Rightarrow 0{,}72 = \frac{x}{20} \therefore x = 14{,}40$$

Logo, $x = 14{,}40$ km.

R.3 Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que se encontra e um ponto B na margem oposta (conforme figura). A seguir, desloca-se 40 m perpendicularmente à reta $\overline{AB}$ até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44°. Qual é a largura do rio? (Dados: sen 44° = 0,69, cos 44° = 0,71 e tg 44° = 0,96.)



Resolução

No triângulo retângulo ABC, estão relacionados o ângulo agudo (44°), o cateto oposto (ℓ) e o cateto adjacente (40 m).

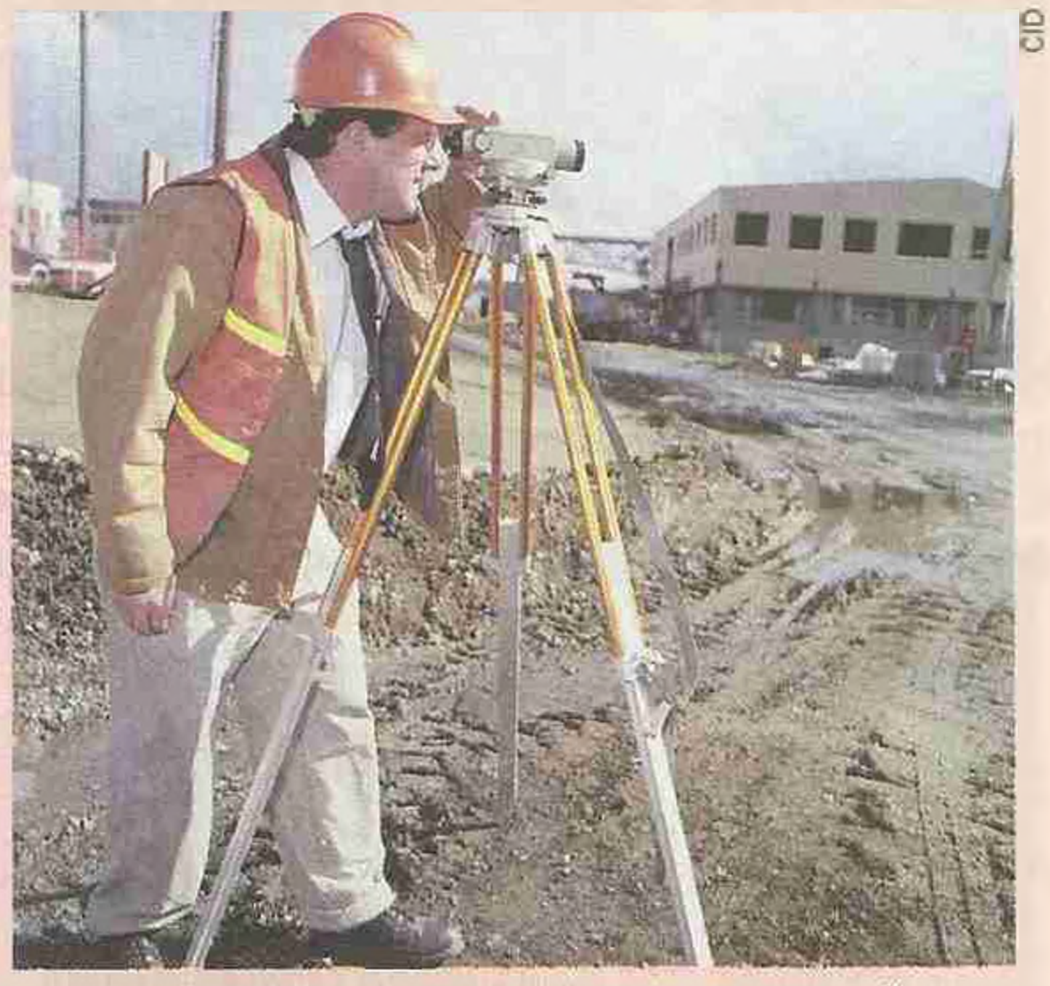
A razão trigonométrica que relaciona tais medidas é a tangente. Logo, temos:

$$\text{tg } 44° = \frac{\ell}{40} \Rightarrow 0{,}96 = \frac{\ell}{40} \therefore \ell = 38{,}4 \text{ m}$$

Assim, a largura do rio é 38,4 m.

Calculando distâncias a pontos inacessíveis

Com o auxílio de um teodolito para medir ângulos, podem ser calculadas, através da trigonometria, alturas de montanhas, larguras de rios, distâncias entre corpos celestes etc. No exercício C.3 veremos como calcular a medida do raio da Terra.



CID

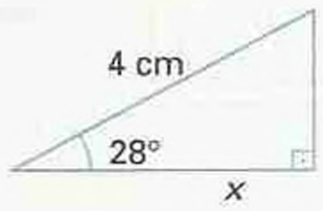
Teodolito: instrumento portátil utilizado em topografia e em astronomia com a finalidade de medir ângulos.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

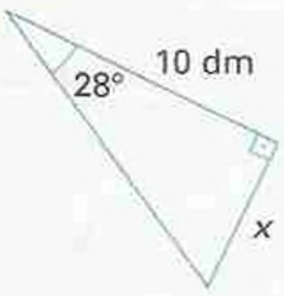
B.1 Com o auxílio de régua graduada e transferidor, calcule sen 35°, cos 35° e tg 35°.

B.2 Sabendo que sen 28° = 0,46, cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53, calcule o valor de x em cada figura:

a)



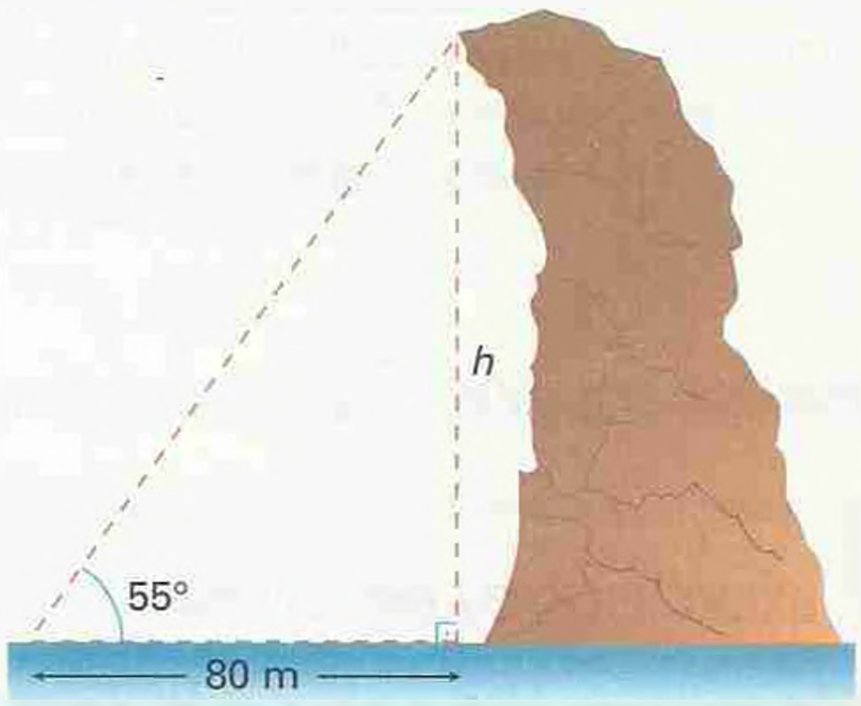
c)



b)

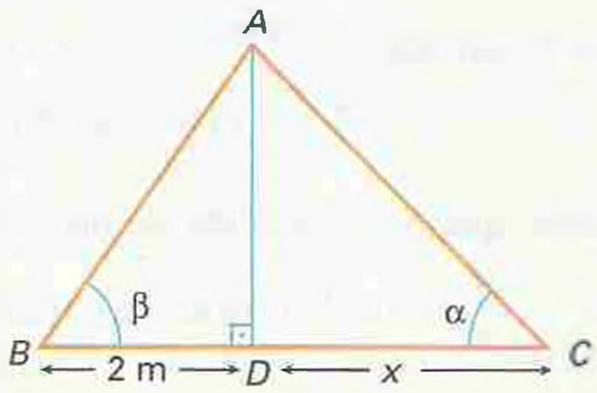
B.3 Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80 m

do pé da encosta (conforme figura) e visualiza o topo sob um ângulo de 55° com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. (Dados: sen 55° = 0,81, cos 55° = 0,57 e tg 55° = 1,42.)



B.4 Uma escada deve ser construída para unir dois pisos de um prédio. A altura do piso mais elevado em relação ao piso inferior é de 8 m. Para isso, foi construída uma rampa plana unindo os dois pisos. Sabendo que o ângulo formado pela rampa com um plano horizontal é 33°, calcule o comprimento da rampa.
(Dados: sen 33° = 0,54, cos 33° = 0,83 e tg 33° = 0,64.)

B.5 Sabendo que tg α = 3 e tg β = 4, calcule o valor de x na figura:



Sugestão. Indique por y a medida AD e monte um sistema de equações em x e y.

Exercícios complementares de C.1 a C.4

2. RELAÇÃO ENTRE O SENO, O CO-SENO E A TANGENTE DE UM ÂNGULO AGUDO

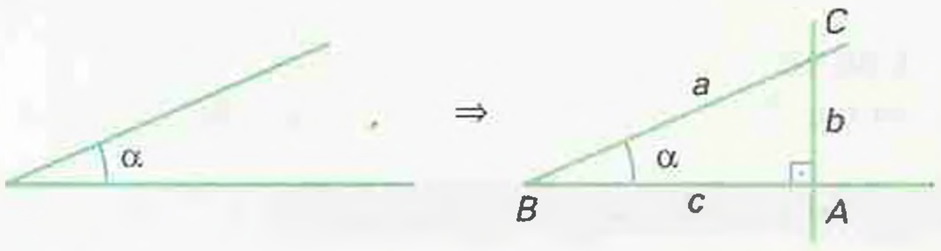
Teorema

Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Demonstração

Construindo um ângulo agudo de medida α e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo (conforme figura), temos:



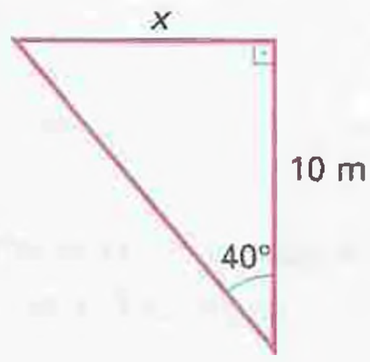
Calculando sen α e cos α, e efetuando o quociente $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, concluímos que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg}\alpha$$

(c.q.d.)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Dados sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,76, determinar o valor de x na figura:



Resolução

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{x}{10}$$

Como temos os valores sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,76, podemos determinar o valor da tg 40°, ou seja:

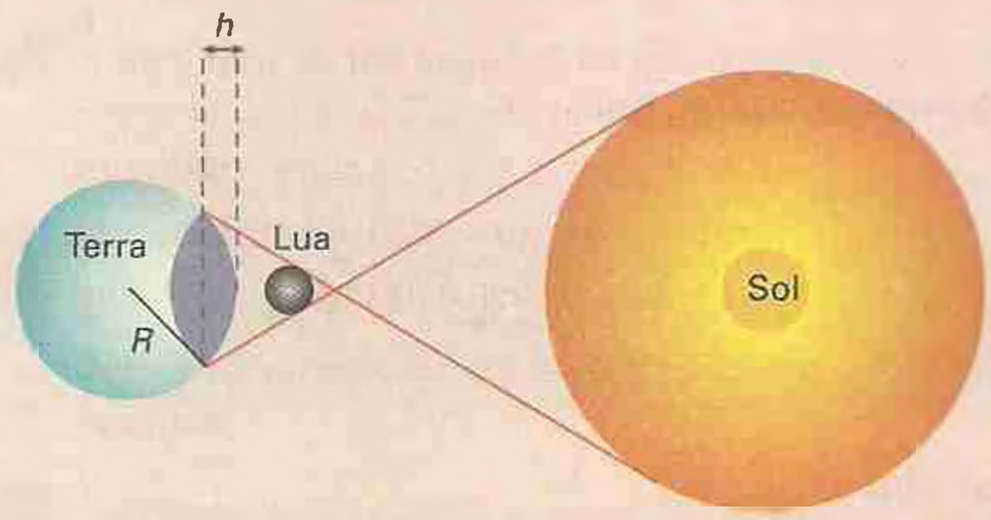
$$\operatorname{tg} 40° = \frac{\operatorname{sen} 40°}{\cos 40°} = \frac{0{,}64}{0{,}76} \simeq 0{,}84$$

Assim, $0{,}84 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 8{,}4$.

Logo, $x = 8{,}4$ m.

Eclipse solar

Quando a Lua se interpõe entre a Terra e o Sol, ocorre um eclipse solar.



As relações trigonométricas, auxiliadas por outros recursos, nos permitem calcular a medida h. A área A da calota da superfície terrestre de onde o eclipse pode ser observado é dada por $A = 2\pi Rh$.

3. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Lembre-se de que dois ângulos agudos de medidas α e β são complementares se, e somente se, α + β = 90°.

Nota

Se α e β são medidas de ângulos complementares, dizemos que α e β são medidas complementares.

Exemplos

a) 20° é o complemento de 70°.

b) 32° é o complemento de 58°.

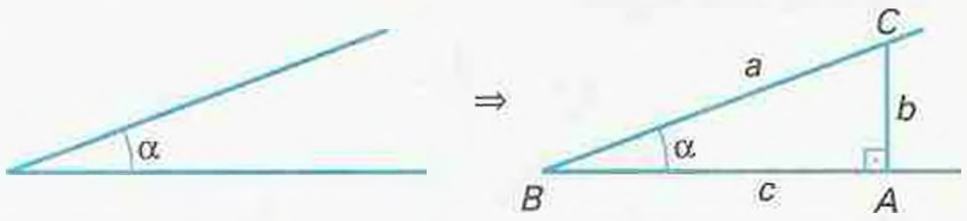
c) 90° − α é o complemento de α.

Teorema

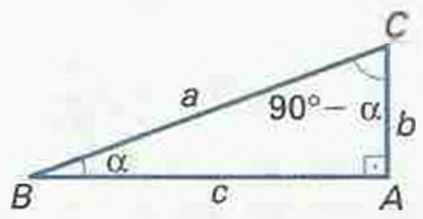
Se α é a medida de um ângulo agudo, então sen α = cos (90° − α) e cos α = sen (90° − α).

Demonstração

Construindo um ângulo agudo de medida α e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo, temos:



Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar de $\hat{B}$, pois $\alpha + \text{med}(\hat{C}) = 90° \Rightarrow \text{med}(\hat{C}) = 90° - \alpha$.



Assim, temos que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{b}{a} \\ \\ \cos (90° - \alpha) = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \alpha = \dfrac{c}{a} \\ \\ \text{sen } (90° - \alpha) = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$$

(c.q.d.)

Provamos, assim, que:

Se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao co-seno do outro.

Exemplos

a) 20° é o complemento de 70°; logo, sen 20° = cos 70° e cos 20° = sen 70°.

b) 32° é o complemento de 58°; logo, sen 32° = cos 58° e cos 32° = sen 58°.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Sabendo que cos 23° = 0,92, calcular o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen } 23° + \cos 67°}{4 \text{ tg } 23°}$$

Resolução

Como 23° é o complemento de 67°, temos que cos 67° = sen 23°. Assim, temos:

$$E = \frac{\text{sen } 23° + \text{sen } 23°}{4 \dfrac{\text{sen } 23°}{\cos 23°}}$$

$$\therefore E = 2 \text{ sen } 23° \cdot \frac{\cos 23°}{4 \text{ sen } 23°}$$

$$\therefore E = \frac{\cos 23°}{2} = \frac{0{,}92}{2}$$

Logo, $E = 0{,}46$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.6 Sabendo que sen 55° = 0,81 e cos 55° = 0,57, determine o valor de x na figura.

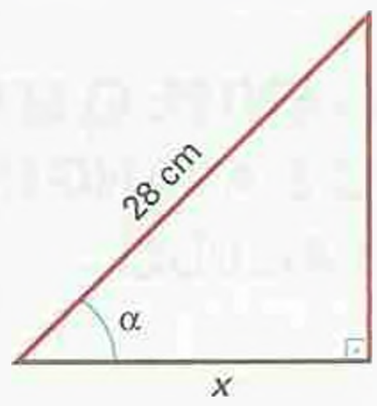
B.7 Sabendo que sen 37° = 0,6, calcule o valor da expressão:

$$E = 2 \text{ tg } 37° \text{ sen } 53°$$

B.8 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que sen $\alpha = \frac{3}{5}$, calcule o valor da expressão:

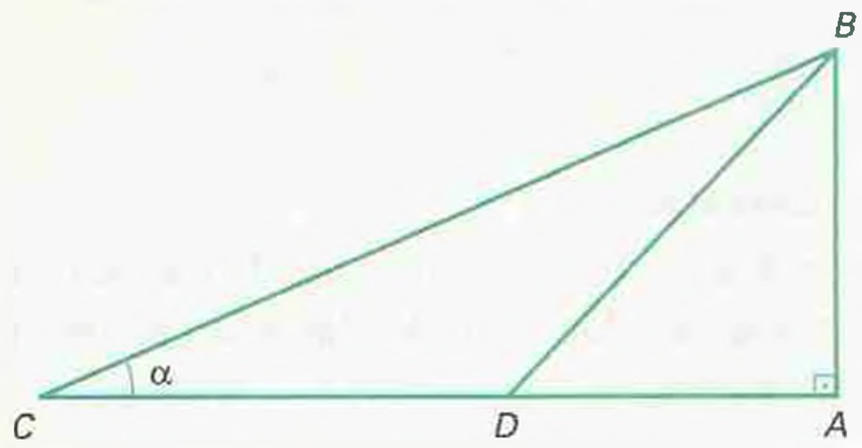
$$E = \frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } (90° - \alpha)}{\cos \alpha \cos (90° - \alpha)} + \cos (90° - \alpha)$$

B.9 Na figura abaixo tem-se que sen $(90° - \alpha) = \frac{4}{7}$. Determine o valor de x.



B.10 Na figura a seguir, tem-se:

$CD = BD = 5$ cm e $DA = 3$ cm



Calcule:

a) cos 2α

b) tg (90° − α)

Exercícios complementares C.5 e C.6

4. A TRIGONOMETRIA E O TEOREMA DE PITÁGORAS

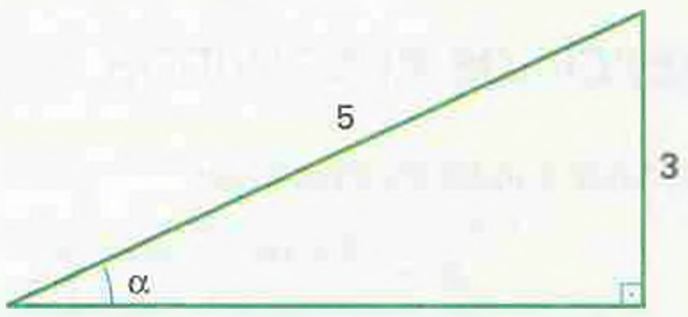
Dado um dos valores sen α, cos α ou tg α, em que α é a medida de um ângulo agudo, é possível determinar os outros dois valores com o auxílio do teorema de Pitágoras, conforme veremos nos exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, calcular cos α.

Resolução

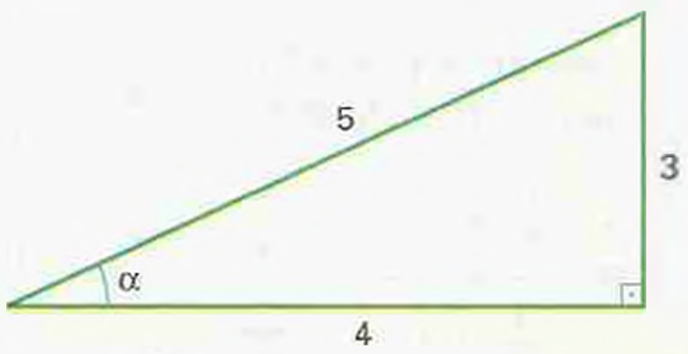
Se α é um ângulo agudo e $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, então existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo de medida α tal que o cateto oposto a α mede 3 e a hipotenusa mede 5, conforme figura a seguir.



Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x do cateto adjacente a α:

$$x^2 + 3^2 = 5^2 \therefore x^2 = 16 \therefore x = 4$$

Temos, então:

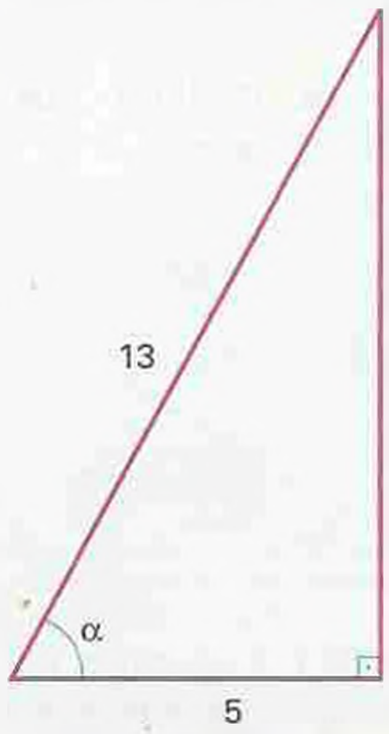


Assim, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

R.7 Sabendo que α é um ângulo agudo e que $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, calcular tg α.

Resolução

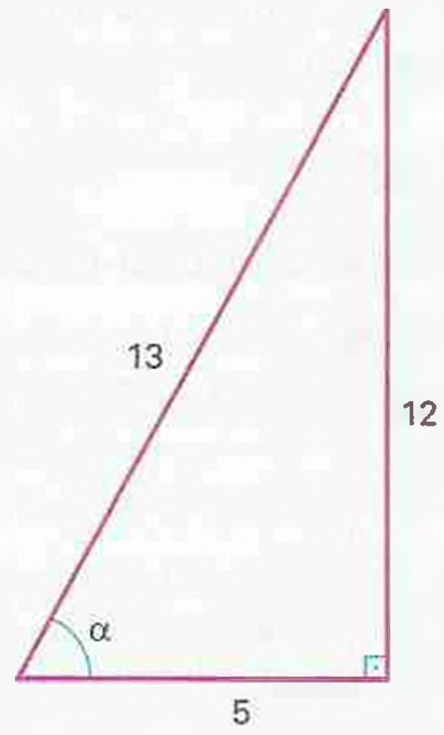
Existe um triângulo retângulo com um ângulo agudo α tal que o cateto adjacente a α mede 5 e a hipotenusa mede 13 conforme figura abaixo.



Pelo teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida x do cateto oposto a α:

$$x^2 + 5^2 = 13^2 \therefore x^2 = 144 \therefore x = 12$$

Temos, então:



Assim, $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e que $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, calcule sen α.

B.12 Determine o valor de tg α, sabendo que α é a medida de um ângulo agudo e $\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$.

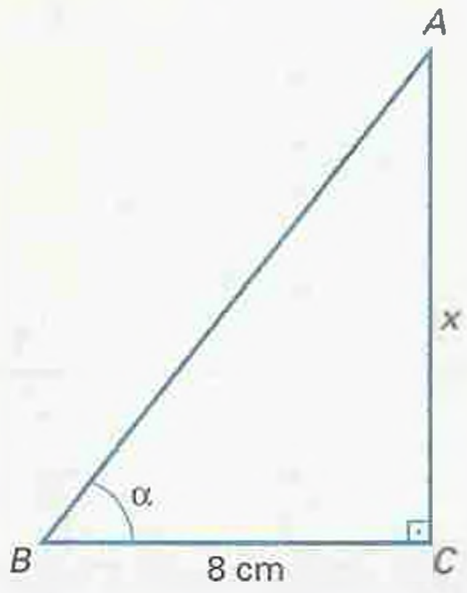
B.13 A medida de um ângulo agudo é α. Obtenha os valores de sen α e cos α de modo que $\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$.

B.14 Dado que α é a medida de um ângulo agudo e que tg α = 2, calcule sen α e cos α.

B.15 A medida α de um ângulo é tal que $0° < \alpha < 90°$ e sen α = 3 cos α. Calcule os valores de sen α e cos α.
Sugestão. sen α = 3 cos α ⇒ tg α = 3.

B.16 Prove que, se α é a medida de um ângulo agudo, então $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. **Nota**. Os símbolos $\text{sen}^2 \alpha$ e $\cos^2 \alpha$ devem ser entendidos como $(\text{sen } \alpha)^2$ e $(\cos \alpha)^2$, respectivamente.

B.17 Na figura, tem-se $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ e $BC = 8$ cm. Determine o valor de x.



Exercícios complementares de C.7 a C.9

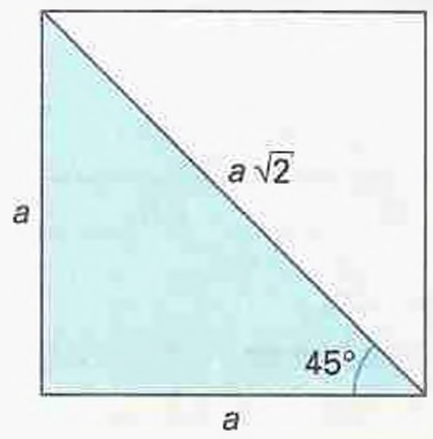
5. ÂNGULOS NOTÁVEIS

Para estudar os conceitos que vêm nos próximos itens, convém conhecermos o seno, o co-seno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos, pela facilidade das demonstrações, os ângulos de medidas 30°, 45° e 60°, que chamaremos de ângulos notáveis.

Ângulo de 45°

Já estudamos que a medida de cada diagonal de um quadrado de lado a é $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido em dois de 45° por uma diagonal.

Assim, temos:



$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

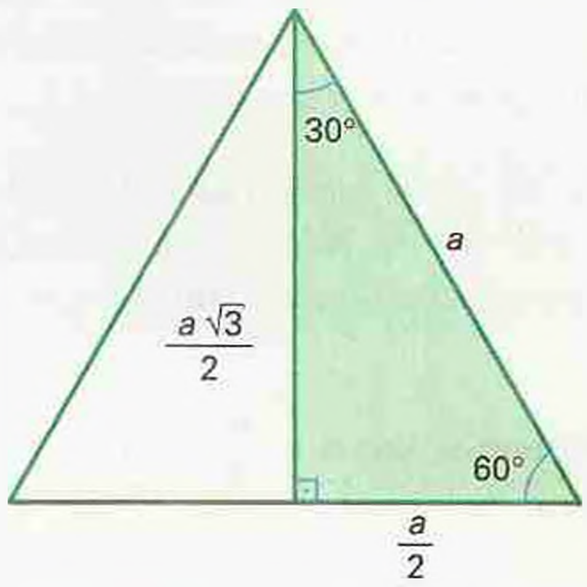
$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1$$

Ângulos de 30° e 60°

Conforme já estudamos, a medida de cada altura de um triângulo equilátero de lado a é $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vimos que cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana. Como cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°, temos:

Assim, temos:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como 60° é o complemento de 30°, temos:

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}.$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\text{sen } 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Tabela dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Calcular o valor da expressão:

$$E = \frac{\cos 60° + \cos^2 30°}{\text{sen}^3 30° + \text{tg}^5 45°}$$

Resolução

Por convenção, dado um ângulo de medida α, tem-se:

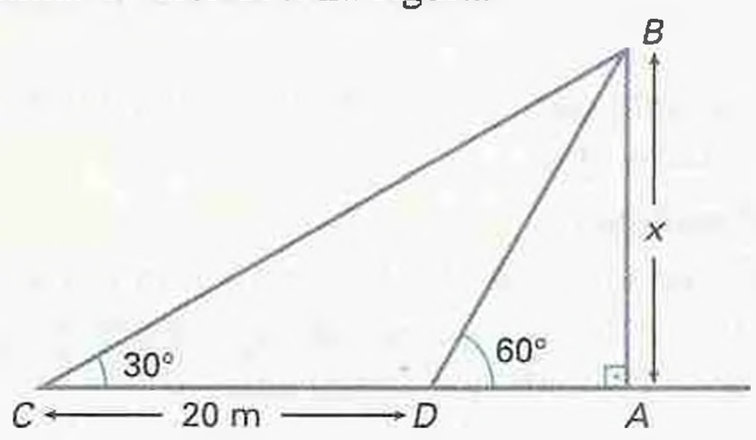
$$\text{sen}^n \alpha = (\text{sen } \alpha)^n, \cos^n \alpha = (\cos \alpha)^n, \text{tg}^n \alpha = (\text{tg } \alpha)^n$$

Assim, calculamos:

$$E = \frac{\cos 60° + (\cos 30°)^2}{(\text{sen } 30°)^3 + (\text{tg } 45°)^5} \therefore E = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + (1)^5}$$

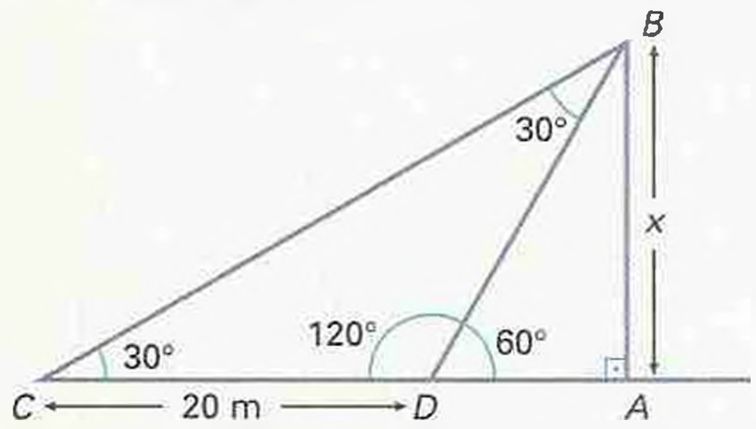
$$\therefore E = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{8} + 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{8}} \therefore E = \frac{10}{9}$$

R.9 Determinar o valor de x na figura:



Resolução

Calculando as medidas dos ângulos internos do triângulo BCD, temos:



O triângulo BCD é isósceles, pois possui dois ângulos de mesma medida; logo, $CD = BD = 20$ m.

Assim, do triângulo ABD, temos que:

$$\text{sen } 60° = \frac{x}{BD} = \frac{x}{20} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20} \therefore x = 10\sqrt{3}$$

Logo, $x = 10\sqrt{3}$ m.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

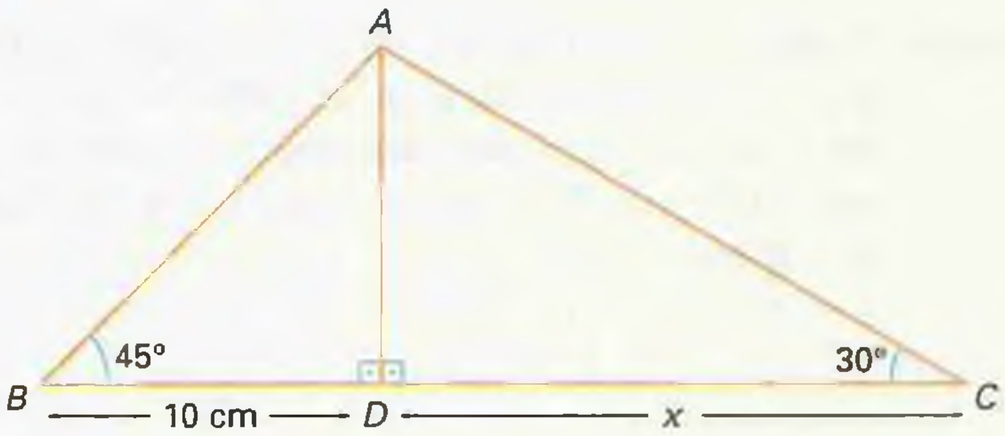
B.18 Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}^2\ 45° + \cos^4 60°}{\text{tg}^4\ 60°}$$

B.19 Sendo $x = 10°$, qual é o valor da expressão:

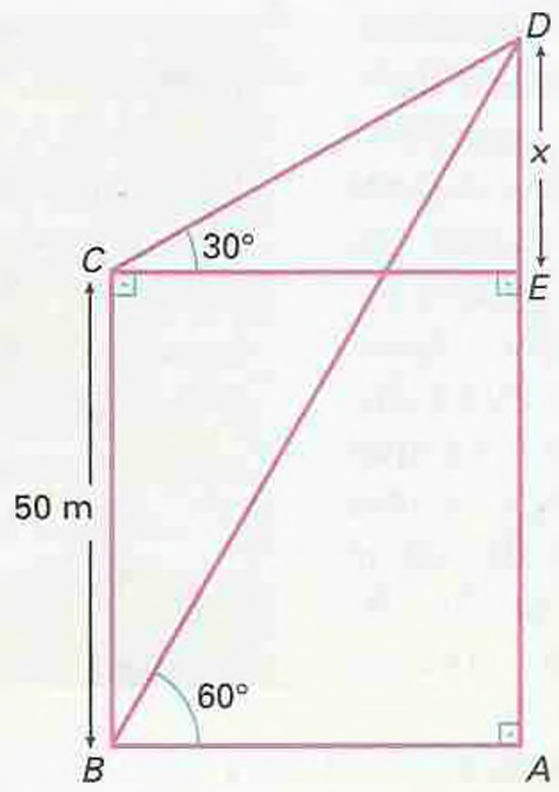
$$E = \frac{\text{sen } 3x + \cos \frac{3x}{2} - \text{sen } \frac{15x}{2}}{\text{tg}^2\ 6x}$$

B.20 Determine o valor de x na figura:



Sugestão. Prove que o triângulo ABD é isósceles.

B.21 Calcule a medida x do segmento $\overline{DE}$ na figura:



Sugestão. Prove que o triângulo BCD é isósceles.

B.22 Um teleférico deve unir um ponto A de um terreno plano e horizontal ao topo D de um morro cuja base se apóia sobre esse terreno. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária para unir A e D, um engenheiro marcou, no terreno, um ponto B entre o ponto A e o ponto C da base do morro, tal que $\overline{CD}$ é vertical. A seguir obteve as medidas: $m(D\hat{A}C) = 30°$, $m(D\hat{B}C) = 60°$ e $AB = 200$ m. Calcule:

a) a altura do morro; b) a distância entre A e D.

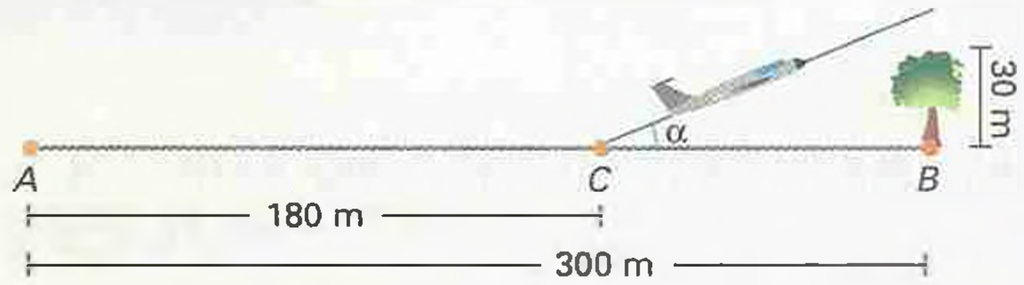
CID

Exercícios complementares de C.10 a C.15

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

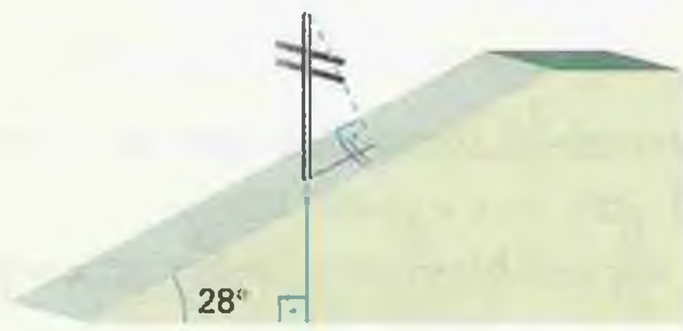
C.1 A polícia federal localizou na floresta amazônica uma pista de pouso clandestina com as seguintes características:

- a pista media 300 m de comprimento, era plana e horizontal;
- no final da pista havia uma árvore de 30 m de altura, conforme figura.

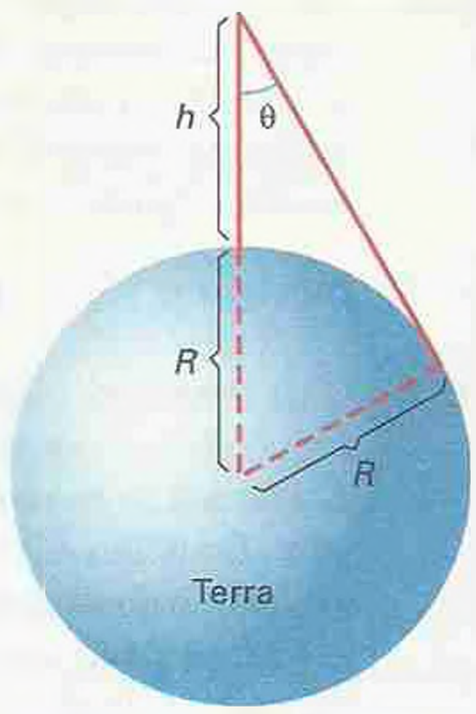


Se um pequeno avião partir do ponto A, no sentido de B, e exatamente no ponto C levantar vôo em linha reta, de modo que essa reta forme um ângulo α com o plano horizontal, qual deve ser a tangente de α (tg α) para que a aeronave passe exatamente 10 m acima da árvore?

C.2 Um poste localiza-se numa rampa plana que forma um ângulo de 28° com o plano horizontal (conforme figura). Num instante em que os raios solares são perpendiculares à rampa, o poste projeta sobre essa rampa uma sombra de 2,3 m de comprimento. Calcule a altura do poste. (Dados: sen 28° = 0,46, cos 28° = 0,88 e tg 28° = 0,53.)



C.3 (FEI-SP) Um observador, do alto de uma torre vertical, de altura h, enxerga a linha do horizonte. Sabendo que um raio visual forma com a vertical da torre um ângulo de medida θ, determine, em função de h e θ, a medida do raio da Terra. **Sugestão.** O raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.



C.4 Os triângulos ABC e ABD estão inscritos numa semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$, como mostra a figura. A razão entre as medidas dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, nessa ordem, é:

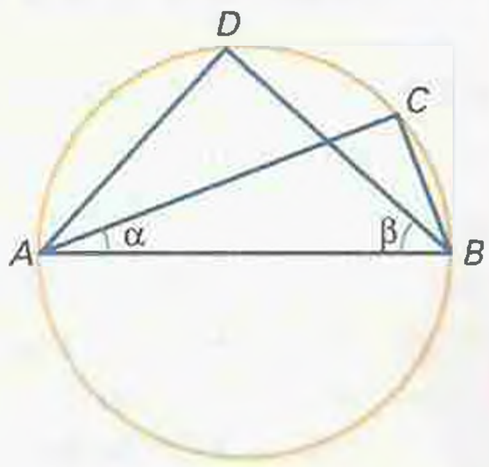
a) $\frac{2 \text{ sen } \alpha}{\cos \beta}$

b) $\frac{\text{sen } \alpha}{2 \cos \beta}$

c) $\frac{\text{sen } \beta}{\cos \alpha}$

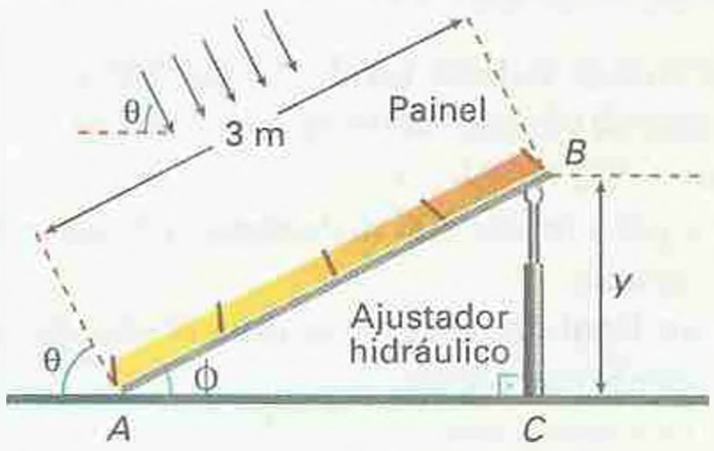
d) $\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha}$

e) $\frac{1}{2 \text{ sen } \alpha \cos \beta}$



C.5 (Faap-SP) A figura a seguir mostra um painel solar de 3 metros de largura equipado com um ajustador hidráulico. À medida que o Sol se eleva, o painel é ajustado automa-

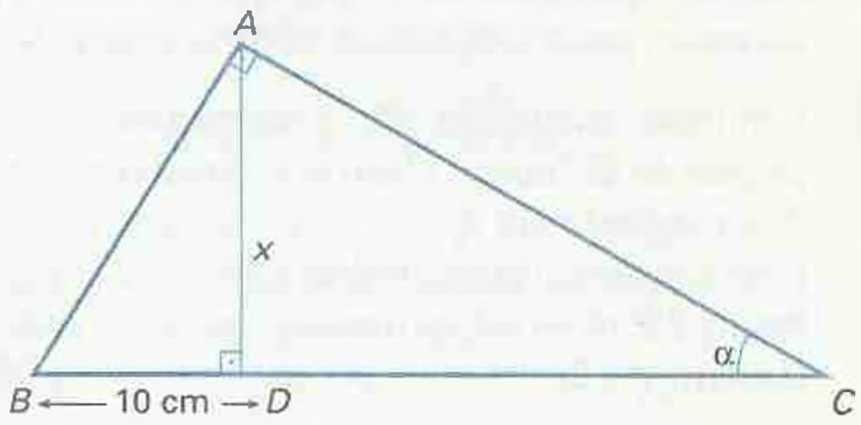
ticamente de modo que os raios do Sol incidam perpendicularmente nele.



O valor de y (em metros) em função de θ é:

a) $y = 3 \operatorname{sen} \theta$
b) $y = 3 \operatorname{sen} \theta + 3$
c) $y = 3 \operatorname{tg} \theta$
d) $y = 3 \cos \theta$
e) impossível de ser determinado.

C.6 Calcule a medida x do segmento $\overline{AD}$ da figura abaixo, sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13}$ e $\cos \alpha = \frac{12}{13}$.

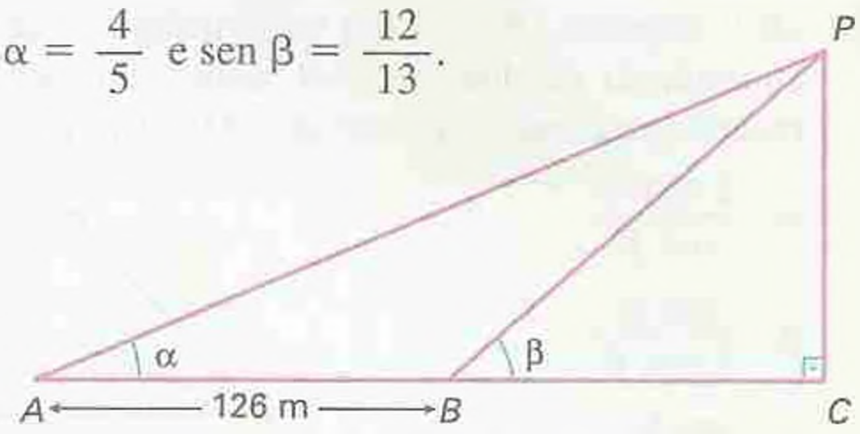


C.7 (UERJ) Dado que α é a medida de um ângulo agudo com $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$, o valor da expressão $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$ é:

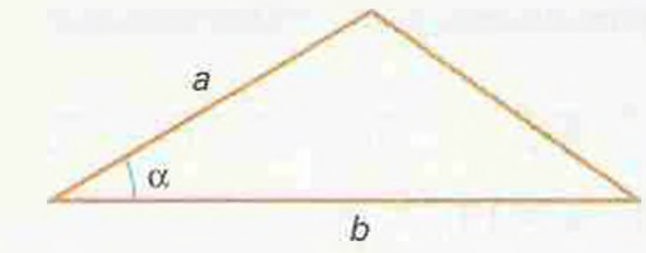
a) $\frac{21}{20}$ b) $\frac{28}{15}$ c) $\frac{28}{75}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{7}{15}$

C.8 Para medir a largura de um rio, de margens paralelas, um topógrafo marcou dois pontos A e B, numa margem, distantes 52 m um do outro. Na outra margem, o topógrafo tomou um ponto C tal que os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}B$ têm medidas iguais e o ângulo agudo $A\hat{B}C$ tem medida α, com $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$. Qual é a largura do rio?

C.9 Uma torre está localizada em um terreno plano e horizontal. Sobre esse terreno tomam-se dois pontos A e B, distantes 126 m um do outro, alinhados com a base da torre. Do ponto A, vê-se o ponto P mais alto da torre, sob um ângulo de medida α com o plano horizontal. Do ponto B vê-se P sob um ângulo de medida β com o plano horizontal. Calcule a altura da torre, sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen} \beta = \frac{12}{13}$.



C.10 (PUC-MG) Um ângulo interno de um triângulo tem medida α, e os lados que determinam esse ângulo medem a e b, conforme figura. Nessas condições, a área desse triângulo é:

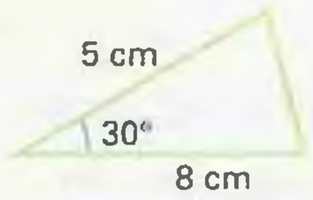


a) $\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \alpha$ c) $\frac{1}{2}ab \operatorname{tg} \alpha$ e) $\frac{1}{2}a^2b \operatorname{sen} \alpha$
b) $\frac{1}{2}ab \cos \alpha$ d) $\frac{1}{2}a^2b \cos \alpha$

Sugestão. Trace a altura de medida h, relativa ao lado de medida b.

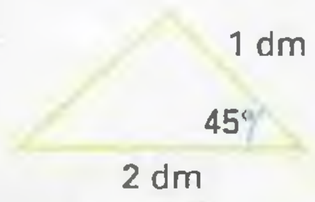
C.11 Usando a fórmula deduzida no exercício anterior, calcule a área dos seguintes triângulos:

a)



b)

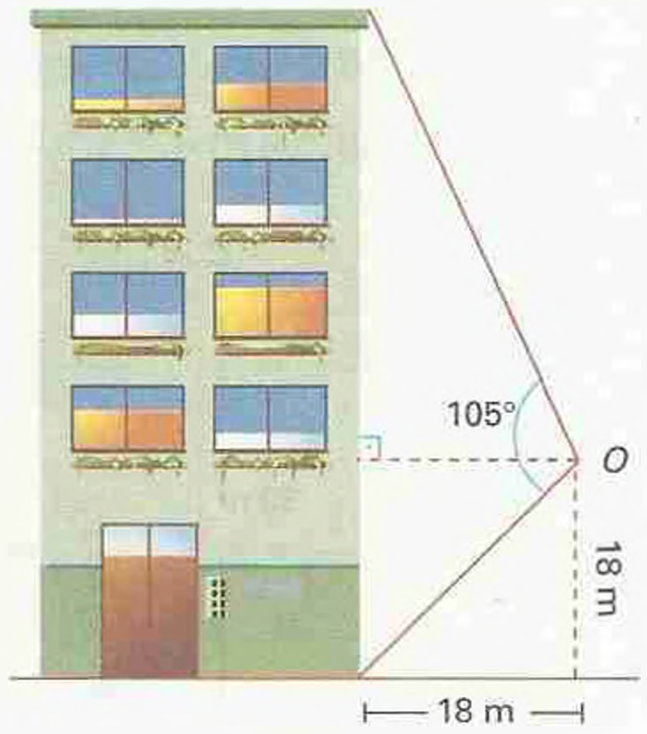
c)



C.12 (Fuvest-SP) Dois pontos A e B estão situados na margem de um rio e distantes 40 m um do outro. Um ponto C, na outra margem do rio, está situado de tal modo que o ângulo $C\hat{A}B$ mede 75° e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 75°. Determine a largura do rio.

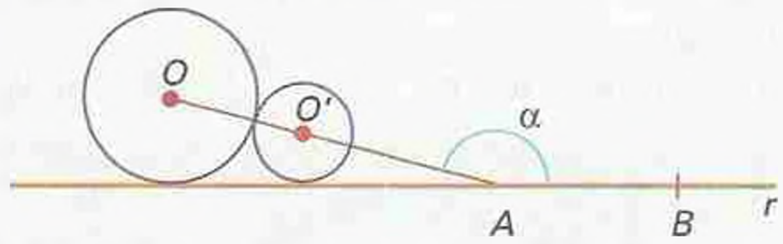
a) 40 m
b) 20 m
c) $20\sqrt{3}$ m
d) 30 m
e) 25 m

C.13 Um observador, no ponto O da figura a seguir, vê o prédio segundo um ângulo de 105°. Se esse observador está situado a uma distância de 18 m do prédio e a uma altura de 18 m em relação ao terreno horizontal, então a altura do prédio é:

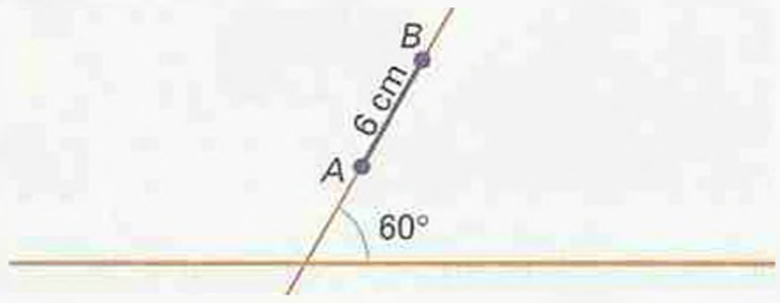


a) $18(\sqrt{3} + 1)$ m
b) $(10\sqrt{3} + 9)$ m
c) $(2 + \sqrt{3})$ m
d) 58 m
e) $(\sqrt{3} + 28)$ m

C.14 A figura mostra duas circunferências de raios 12 cm e 4 cm, tangentes entre si e tangentes a uma reta r. Determine a medida α do ângulo $O\hat{A}B$.



C.15 Determine a medida da projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta r.



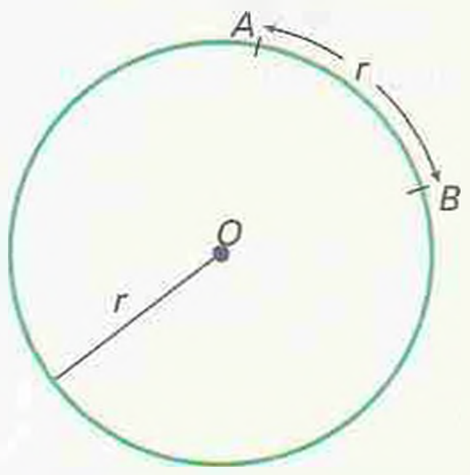
Capítulo 27

O SISTEMA TRIGONOMÉTRICO

1. O RADIANO, UNIDADE DE MEDIDA DE ARCO E ÂNGULO

Até aqui utilizamos apenas o **grau** como unidade de medida de ângulo. Neste capítulo vamos estudar uma outra unidade: o **radiano**.

Consideremos um arco $\overset{\frown}{AB}$, contido numa circunferência de raio r, tal que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ seja igual a r.

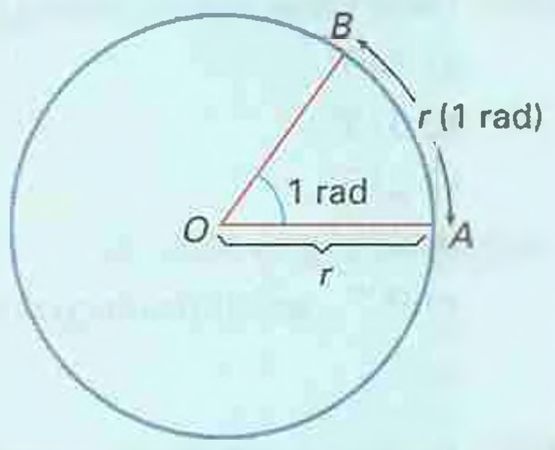


Dizemos que a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 1 radiano (1 rad).

Definições

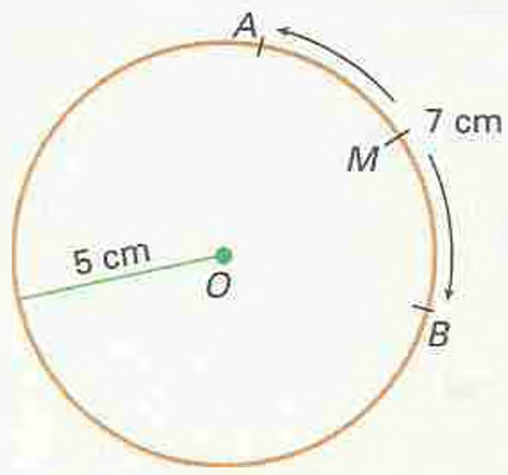
1. Um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

2. Um ângulo $A\hat{O}B$ mede 1 rad se, e somente se, determina numa circunferência de centro O um arco de 1 rad.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Determinar a medida do arco $\overset{\frown}{AMB}$ da figura, em radianos.



Resolução

Pela regra de três:

rad		cm
1	———	5
x	———	7

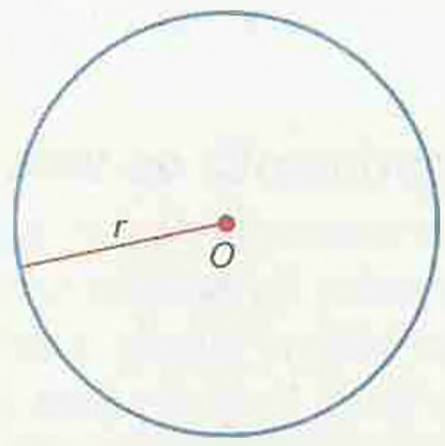
temos $x = \frac{7}{5}$ rad = 1,4 rad.

Logo, a medida do arco $\overset{\frown}{AMB}$ é 1,4 rad.

2. A MEDIDA DA CIRCUNFERÊNCIA EM RADIANOS

Sabemos que uma circunferência mede 360°. Qual será sua medida em radianos?

Pensemos...



O comprimento de uma circunferência de raio r, numa certa unidade u, é $2\pi r$. Logo, sendo x a medida da circunferência em radianos, temos, pela regra de três:

rad		u
1	———	r
x	———	$2\pi r$

$$\therefore\ x = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} \text{ rad}$$

$$\therefore\ x = 2\pi \text{ rad}$$

Assim, temos:

> A medida de uma circunferência é 2π rad.

Como $\pi \simeq 3{,}14$, a conclusão anterior nos diz que o comprimento da circunferência equivale a $2\pi \simeq 6{,}28$ raios dessa circunferência.

3. TRANSFORMAÇÕES DE UNIDADES

Dizemos que uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se são medidas de um mesmo arco, por exemplo, 2π rad é equivalente a 360°, pois ambas são medidas de um arco de uma volta completa. Conseqüentemente, temos:

> π rad é equivalente a 180°

Essa equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, dada a medida de um arco em graus, podemos obter a medida desse arco em radianos e vice-versa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Determinar, em radianos, a medida equivalente a 120°.

Resolução

Lembrando que π rad equivalem a 180°, basta resolvermos a regra de três:

rad		graus
π	———	180
x	———	120

$\therefore 180x = 120\pi$

$\therefore x = \frac{120\pi}{180}$ rad

$\therefore x = \frac{2\pi}{3}$ rad

R.3 Determinar, em graus, a medida equivalente a $\frac{\pi}{6}$ rad.

Resolução

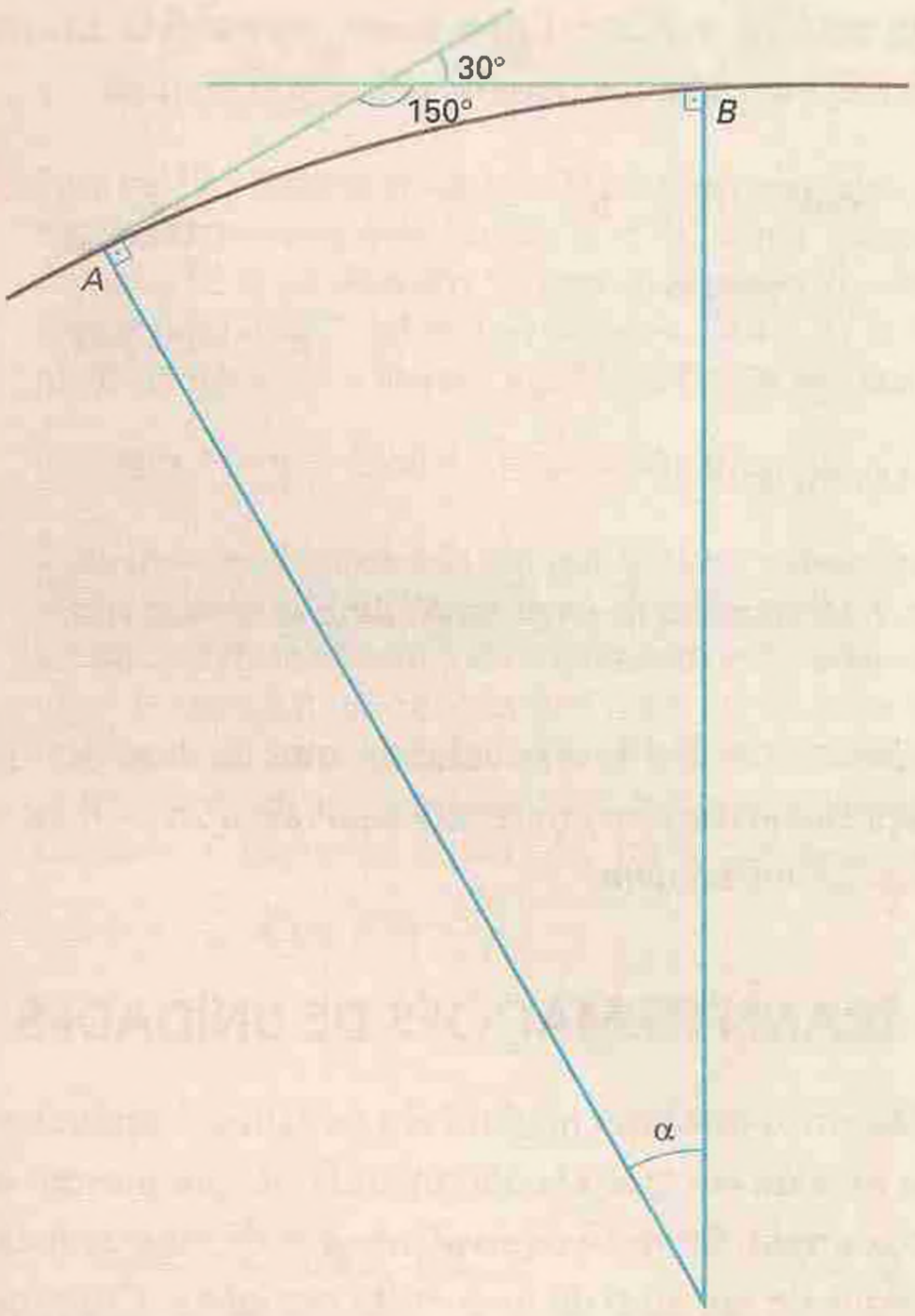
rad		graus
π	———	180
$\frac{\pi}{6}$	———	x

$\therefore x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi}$ graus

$\therefore x = 30°$

O comprimento de uma curva

No projeto de uma estrada, um engenheiro prevê que uma curva terá o formato de um arco de circunferência de raio 500 m. Desde o ponto *A*, início da curva, até o ponto *B*, final da curva, a estrada muda sua direção em 30°. Observe como o profissional calcula o comprimento que terá a curva:



Cálculo da medida α do ângulo central:

$150° + 90° + 90° + \alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 30°$

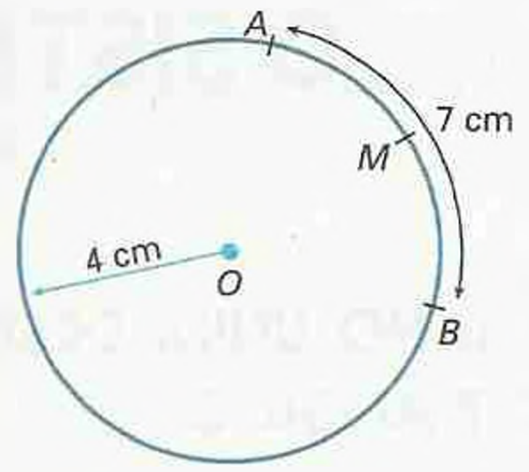
Regra de três usada no cálculo do comprimento x da curva:

360°	——	$2 \cdot \pi \cdot 500$ m
30°	——	x

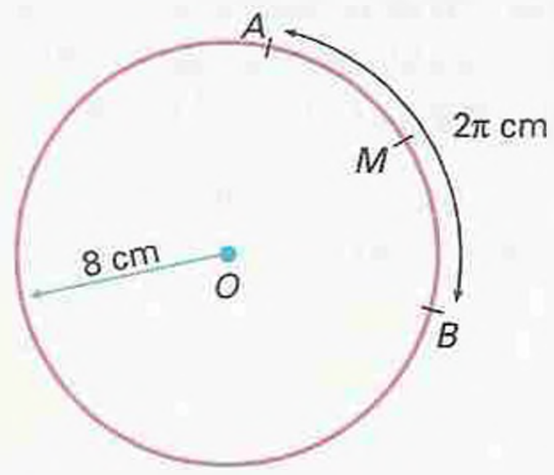
$\therefore x \simeq 261{,}7$ m

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine, em radianos, a medida do arco $\overset{\frown}{AMB}$.



B.2 Determine, em graus, a medida do arco $\overset{\frown}{AMB}$, da figura abaixo.



B.3 Determine, em radianos, a medida equivalente a:

a) 240°
b) 315°
c) 210°
d) 45°
e) 90°
f) 270°
g) 30°
h) 300°
i) 20°
j) 40°

B.4 Expresse, em graus, a medida equivalente a:

a) $\frac{\pi}{5}$ rad

b) $\frac{5\pi}{6}$ rad

c) $\frac{3\pi}{4}$ rad

d) $\frac{7\pi}{4}$ rad

e) $\frac{2\pi}{3}$ rad

f) $\frac{\pi}{2}$ rad

g) $\frac{4\pi}{3}$ rad

h) $\frac{5\pi}{9}$ rad

i) $\frac{11\pi}{6}$ rad

j) 1 rad

k) 1,5 rad

l) 0,7 rad

Sugestão. Para os itens j, k e l, substitua π, na regra de três, por um valor aproximado. Por exemplo, no item j:

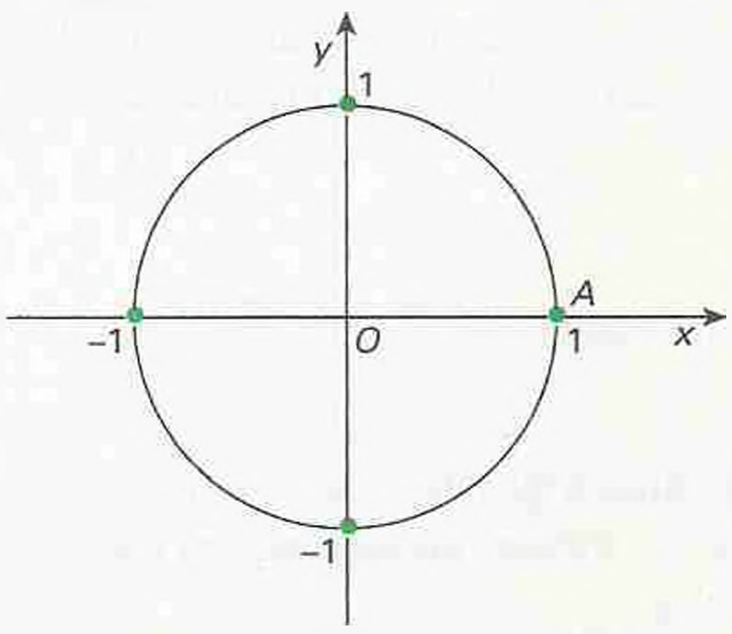
rad		graus
3,14	———	180
1	———	x

Exercícios complementares de C.1 a C.3

4. CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Até aqui, definimos seno, co-seno e tangente somente para ângulos agudos. Vamos estender esses conceitos para ângulos não-agudos. Para isso é necessária a construção de um sistema chamado **circunferência trigonométrica**.

Consideremos uma circunferência de raio unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.



Essa estrutura, juntamente com as convenções a seguir, é chamada de circunferência trigonométrica.

Convenções

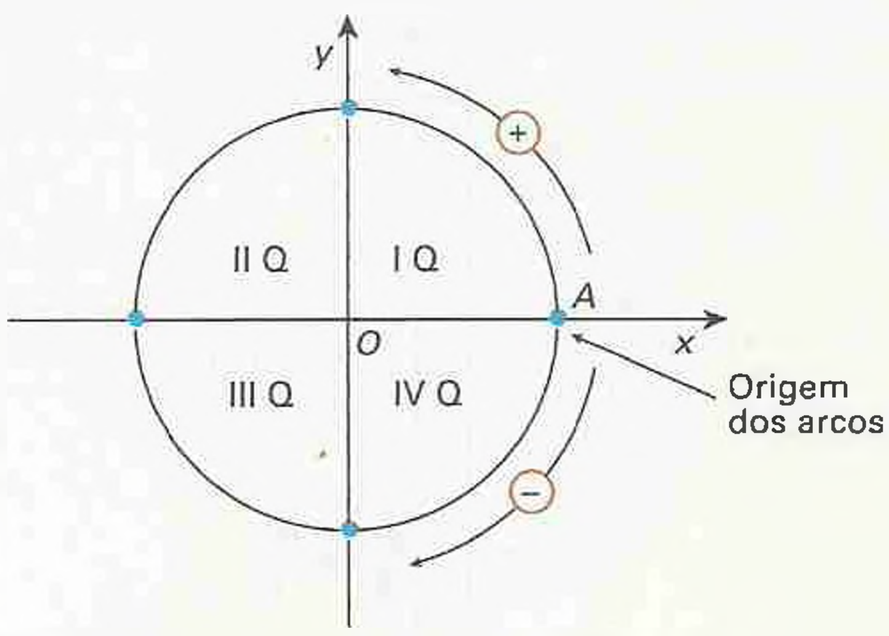
I. O ponto $A(1, 0)$ é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.

II. Se um arco for medido no **sentido horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **negativo** (−).

III. Se um arco for medido no sentido **anti-horário**, então a essa medida será atribuído o sinal **positivo** (+).

IV. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas **quadrantes**; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário, a partir do ponto A.

Em resumo:

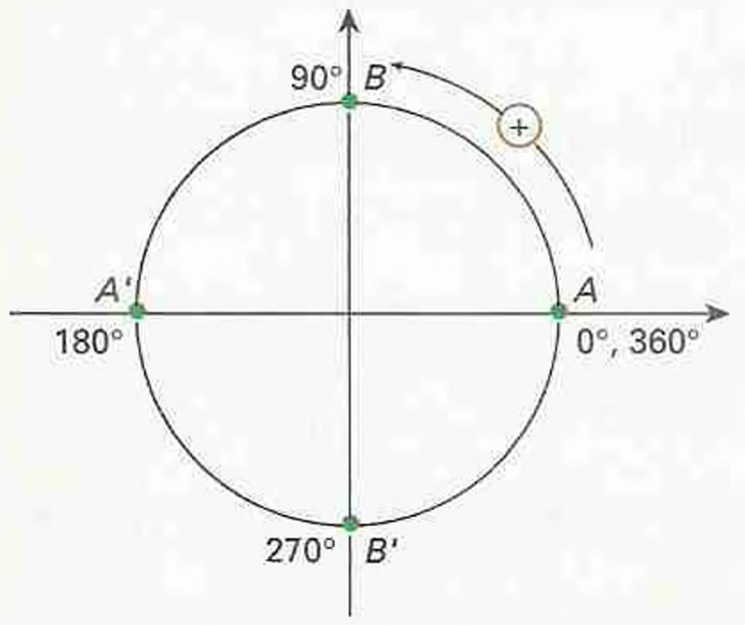


5. ARCOS TRIGONOMÉTRICOS

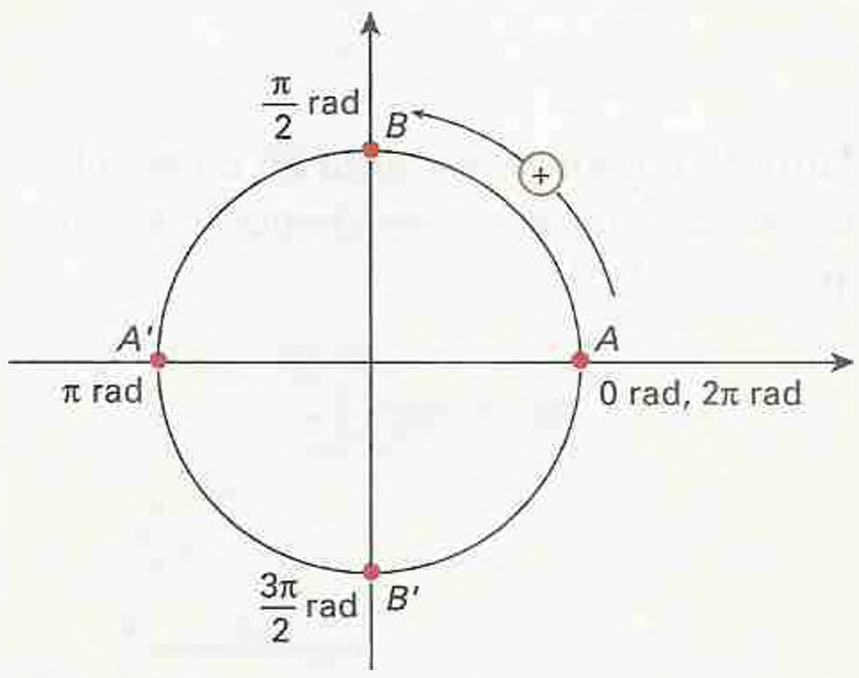
A cada ponto M da circunferência trigonométrica associamos medidas em graus ou radianos do arco $\overset{\frown}{AM}$.

Exemplos

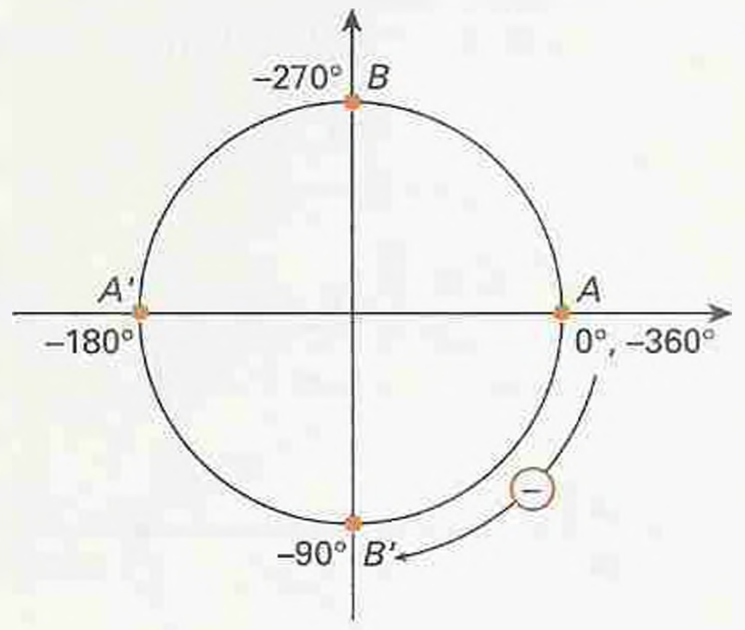
a) Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido anti-horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':



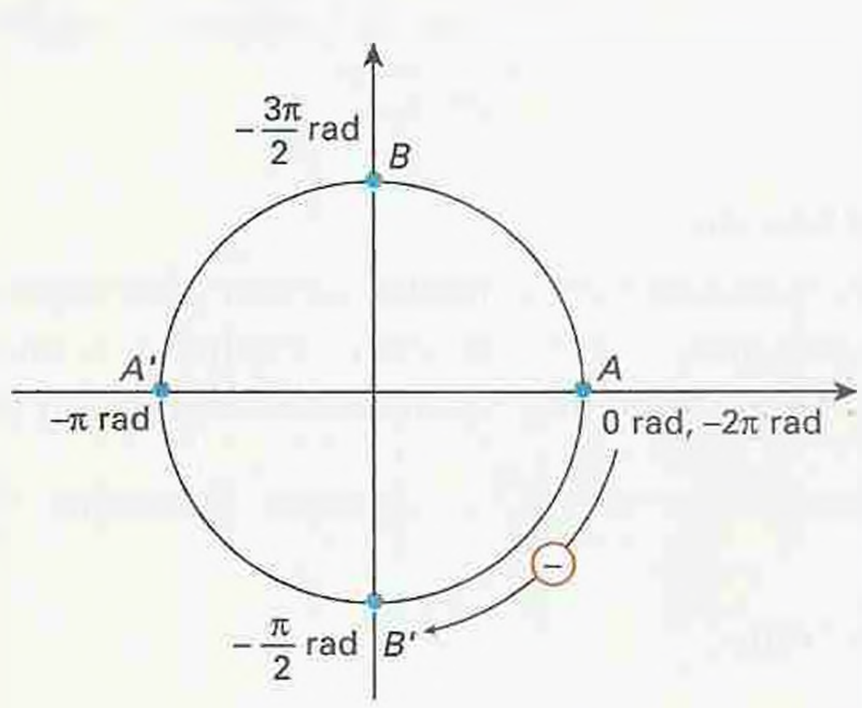
ou



b) Partindo do ponto A e girando uma volta completa no sentido horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':



ou



Arcos côngruos

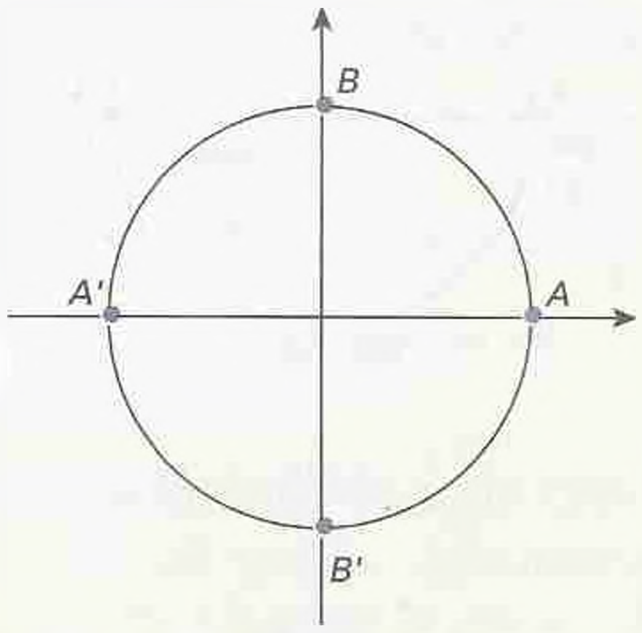
Definição

Dois arcos trigonométricos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AN}$ são **côngruos** se, e somente se, as extremidades M e N coincidem.

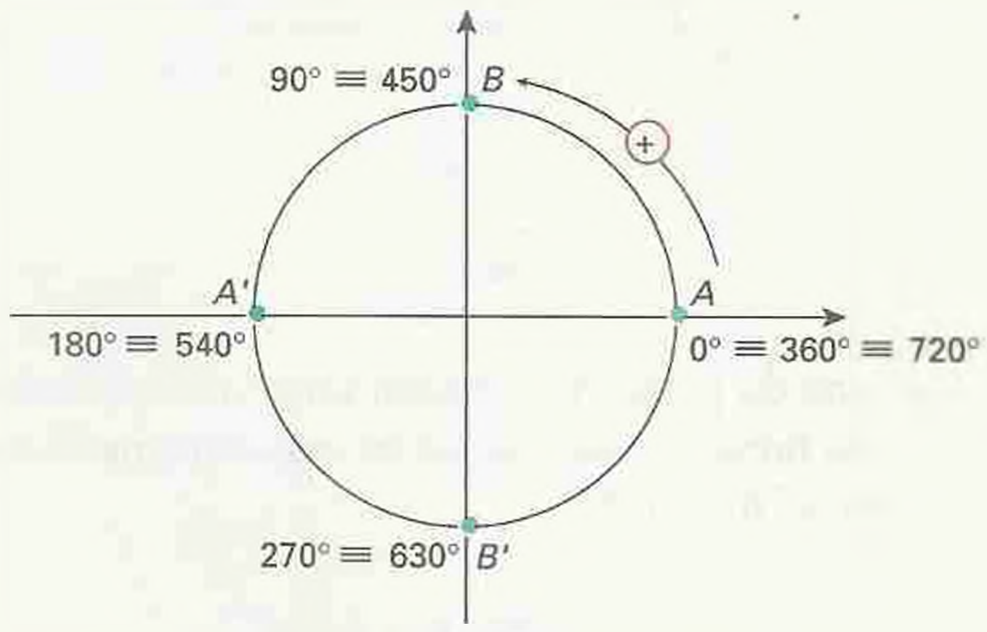
Indicaremos que α e β são medidas de arcos **côngruos** por $\alpha \equiv \beta$ (lê-se "α é côngruo a β").

Exemplo

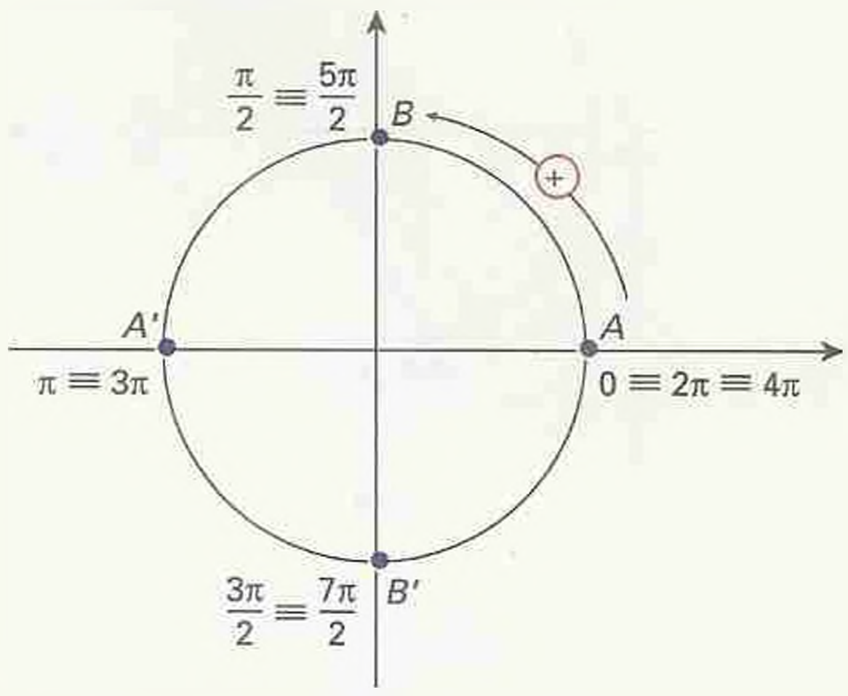
Consideremos a circunferência trigonométrica:



Partindo do ponto A e girando duas voltas completas no sentido anti-horário, associamos as seguintes medidas aos pontos A, B, A' e B':



ou



Convenção

Para indicarmos a medida de um arco trigonométrico, em radianos, não é necessário explicitar a unidade **rad**. No exemplo anterior, quando associamos ao ponto B os valores $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$, deve-se entender $\frac{\pi}{2}$ rad e $\frac{5\pi}{2}$ rad.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

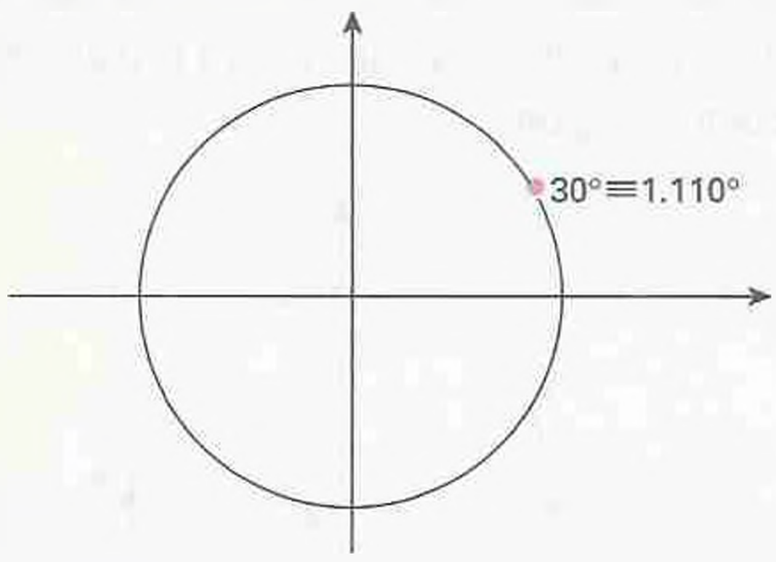
R.4 Determinar a medida x do arco da primeira volta positiva ($0° \leq x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de 1.110°.

Resolução

Basta eliminarmos do arco de 1.110° todas as suas voltas completas. Para isso, dividimos 1.110° por 360°:

1.110°	360°
30°	3

Assim, $1.110° = 3 \cdot 360° + 30°$.
O arco de 1.110° possui três voltas completas e mais 30°.
Portanto $x = 30°$. Dizemos que 30° é côngruo a 1.110°.



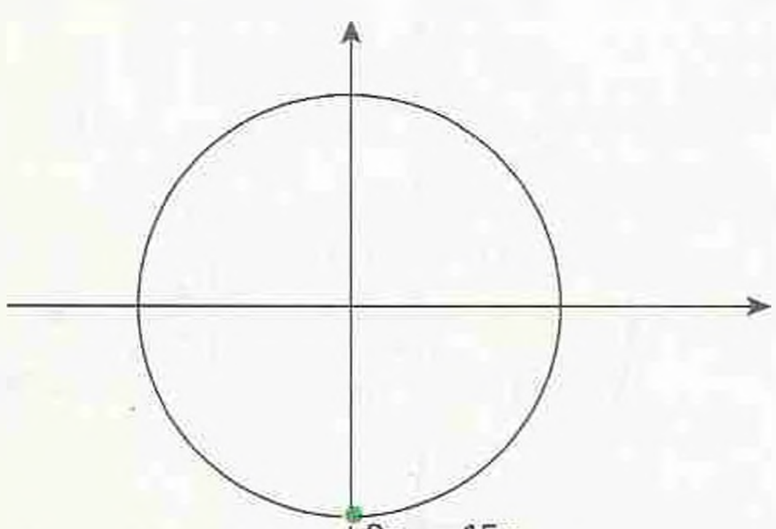
R.5 Determinar a medida x do arco da primeira volta positiva ($0 \leq x < 2\pi$) que possui a mesma extremidade do arco de $\frac{15\pi}{2}$ rad.

Resolução

Como no exercício anterior, vamos eliminar as voltas completas de $\frac{15\pi}{2}$ rad. Para isso vamos transformar esse arco numa soma de dois outros tal que um deles seja o total de voltas completas contidas em $\frac{15\pi}{2}$ rad.

Isto é, $\frac{15\pi}{2} = \underbrace{\frac{12\pi}{2}}_{\text{três voltas completas}} + \frac{3\pi}{2}$

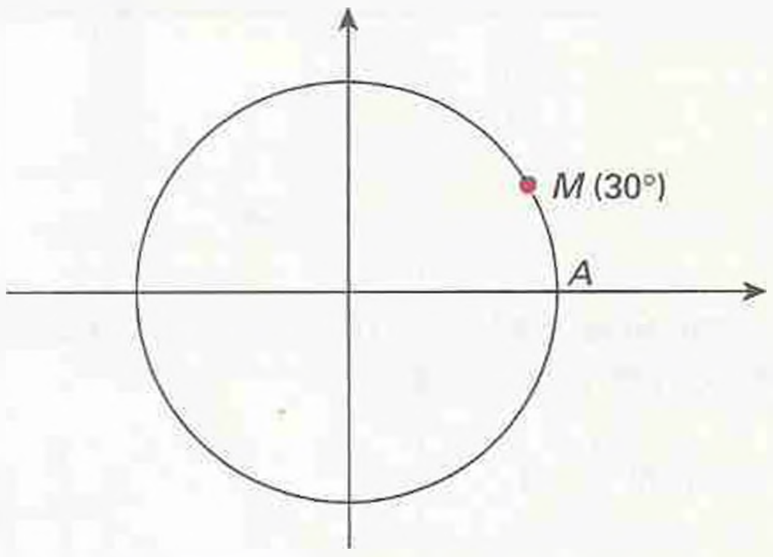
Logo, $x = \frac{3\pi}{2}$. Dizemos que $\frac{3\pi}{2}$ é côngruo a $\frac{15\pi}{2}$.



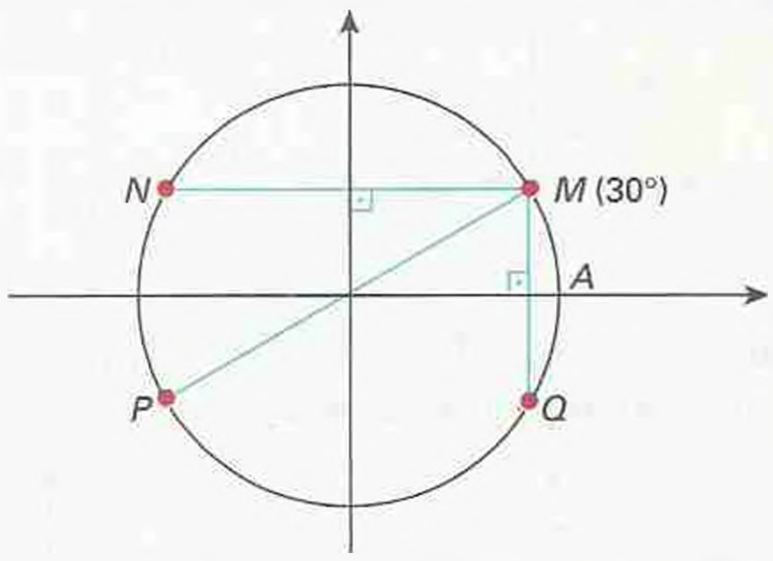
6. SIMETRIAS

É muito útil sabermos relacionar medidas de arcos trigonométricos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano, pois isso nos ajudará, mais adiante, a calcular os senos e os co-senos desses arcos.

Consideremos, por exemplo, o ponto M da figura abaixo associado à medida 30°.

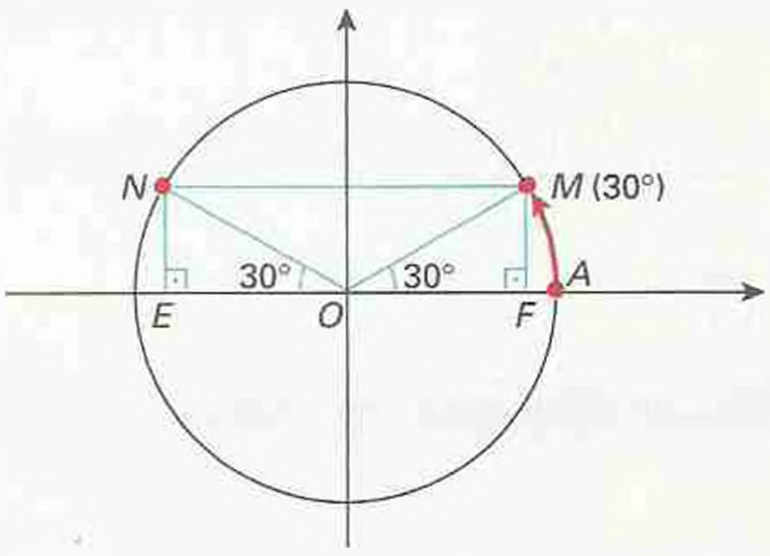


Pelo ponto M, tracemos três retas: a perpendicular ao eixo das ordenadas, a que passa pela origem do sistema e a perpendicular ao eixo das abscissas. Essas retas interceptam a circunferência nos pontos N, P e Q, respectivamente.

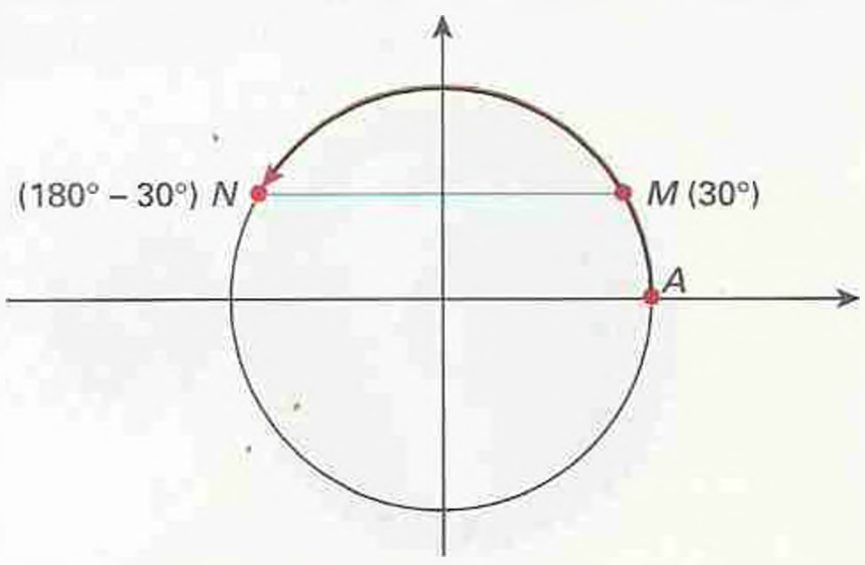


Os pontos N, P e Q são chamados de **simétricos** (ou correspondentes) do ponto M.

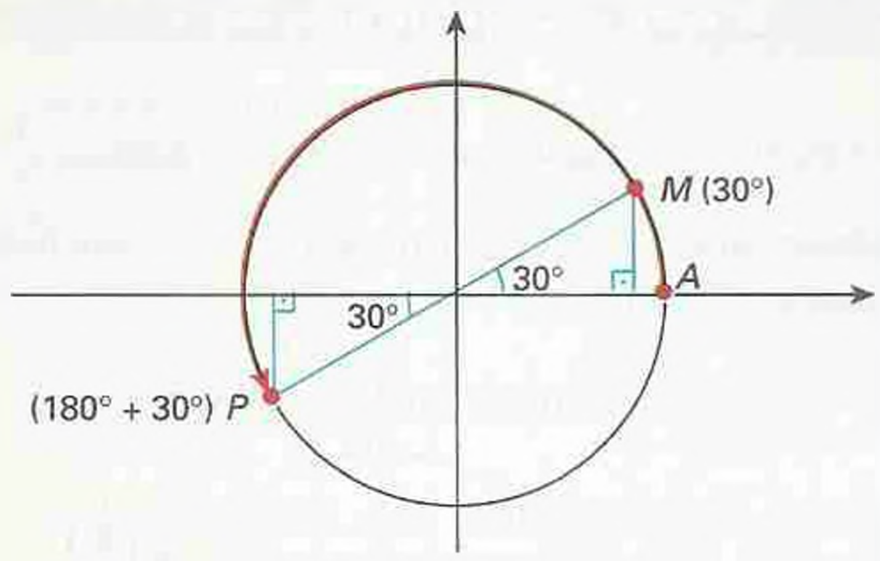
Determinemos as medidas x ($0° \leqslant x < 360°$) associadas aos pontos N, P e Q.



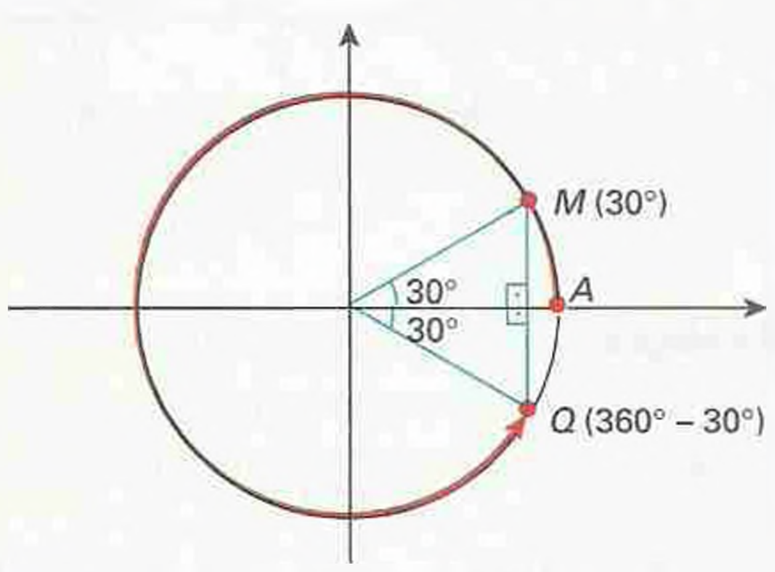
Os ângulos $N\hat{O}E$ e $M\hat{O}F$ têm a mesma medida (pois os triângulos NOE e MOF são congruentes). Logo, o arco trigonométrico $\overset{\frown}{AN}$ mede $180° - 30° = 150°$.



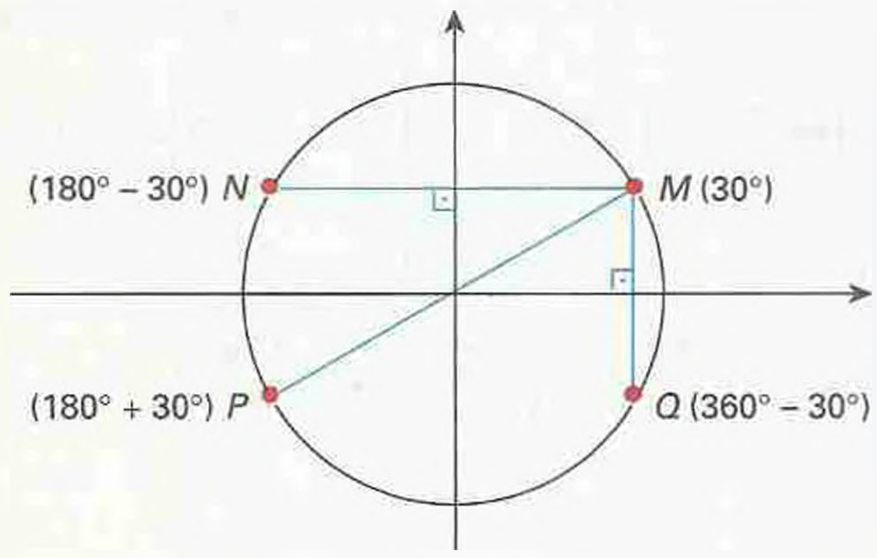
Analogamente, temos:



e

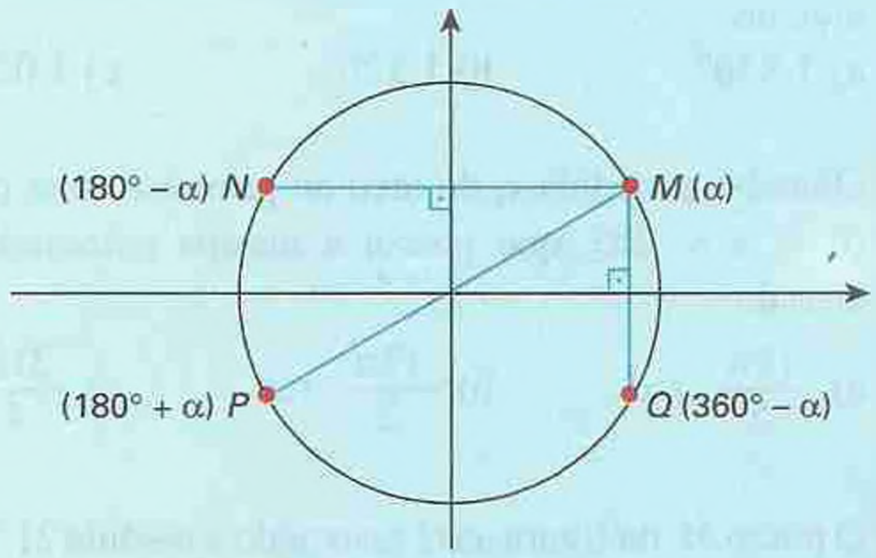


Resumindo:

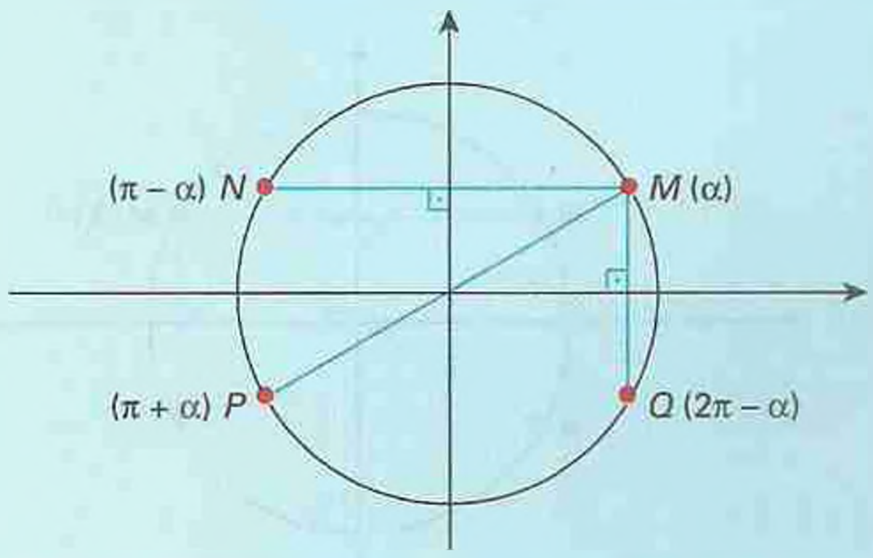


Generalizando o resultado anterior, temos:

I. Sendo α uma medida em graus:



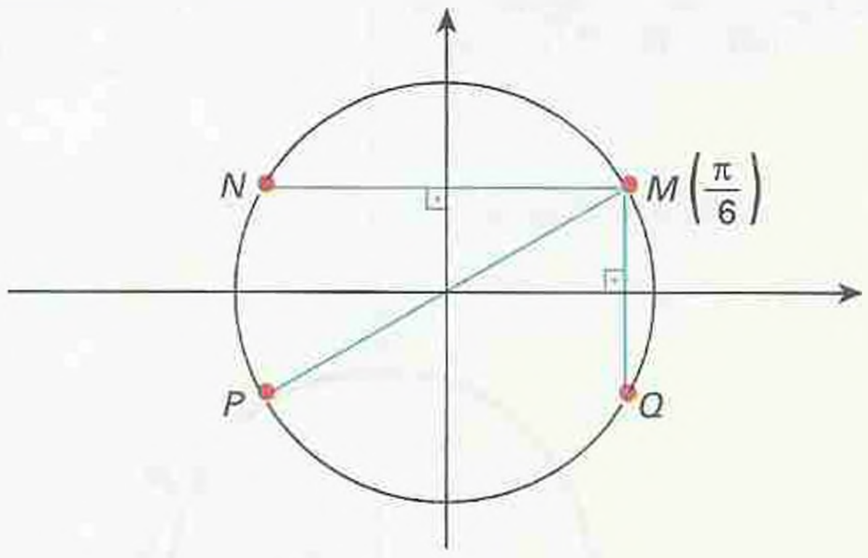
II. Sendo α uma medida em radianos:



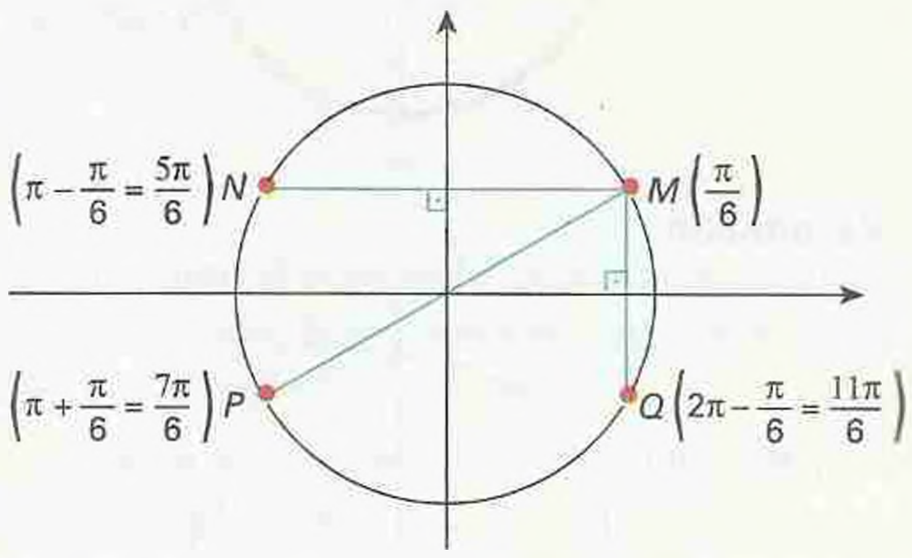
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 O ponto M da figura está associado à medida $\frac{\pi}{6}$ rad.

Determinar as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos pontos N, P e Q.



Resolução



Logo, $N\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ e $Q\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

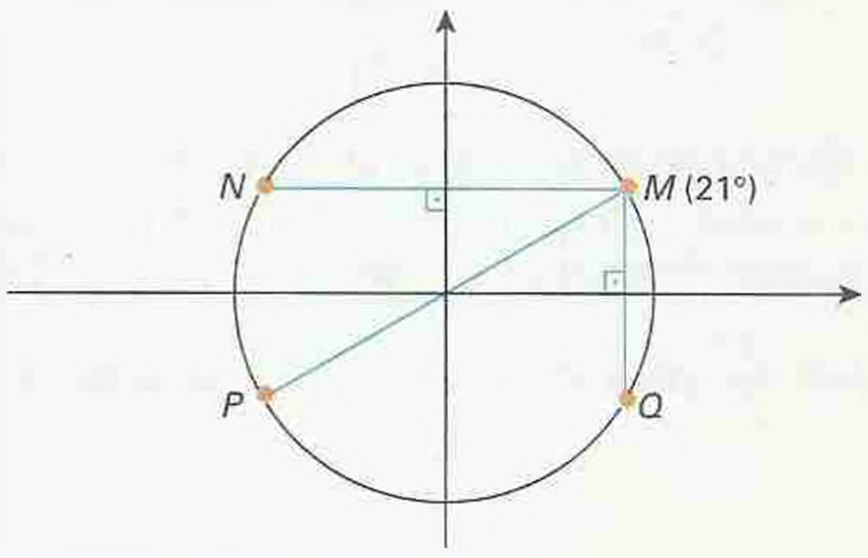
B.5 Determine a medida x, do arco da primeira volta positiva ($0° \leq x < 360°$), que possui a mesma extremidade do arco de:

a) 1.850° b) 1.320° c) 1.020°

B.6 Obtenha a medida x, do arco da primeira volta positiva ($0 \leq x < 2\pi$), que possui a mesma extremidade do arco de:

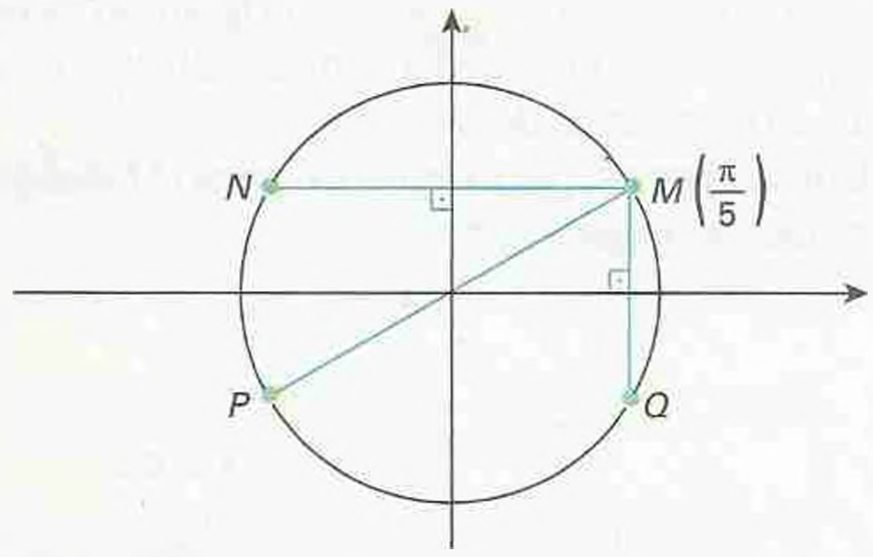
a) $\frac{18\pi}{5}$ rad b) $\frac{13\pi}{2}$ rad c) $\frac{21\pi}{4}$ rad

B.7 O ponto M, da figura, está associado à medida 21°. Quais são as medidas x ($0° \leq x < 360°$) associadas aos pontos N, P e Q?



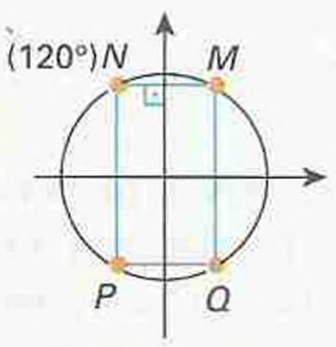
B.8 O ponto M, da figura, está associado à medida $\frac{\pi}{5}$ rad.

Calcule as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos pontos N, P e Q.

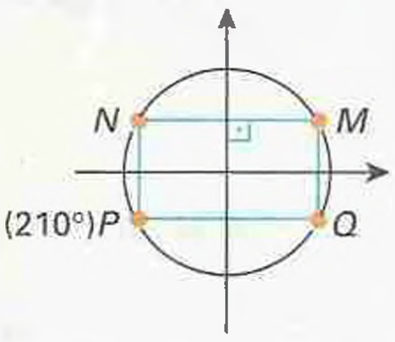


B.9 Determine as medidas x ($0° \leq x < 360°$) associadas aos vértices dos retângulos:

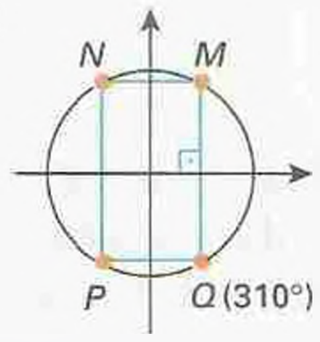
a)



b)

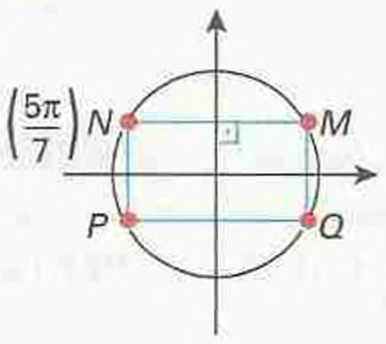


c)

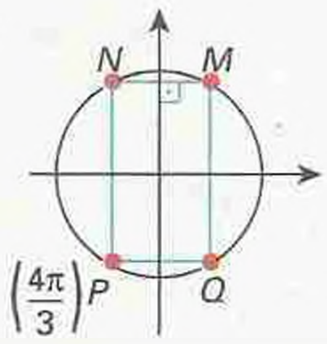


B.10 Quais são as medidas x ($0 \leq x < 2\pi$) associadas aos vértices dos retângulos abaixo?

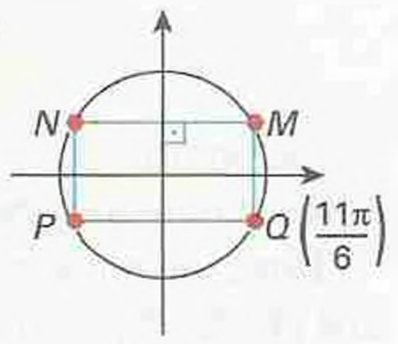
a)



b)



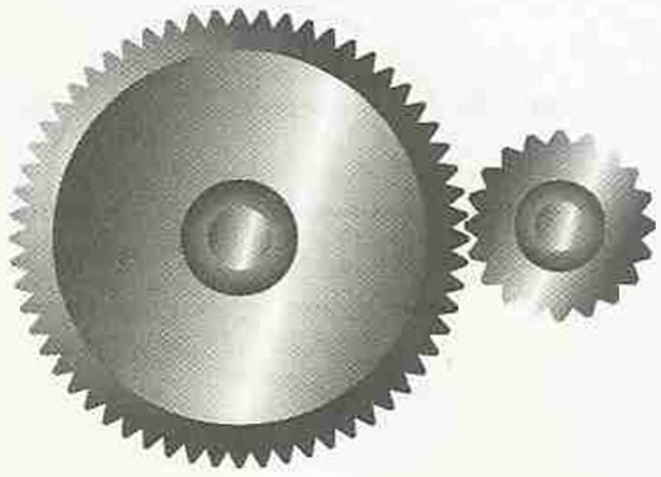
c)



Exercícios complementares de C.4 a C.9

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

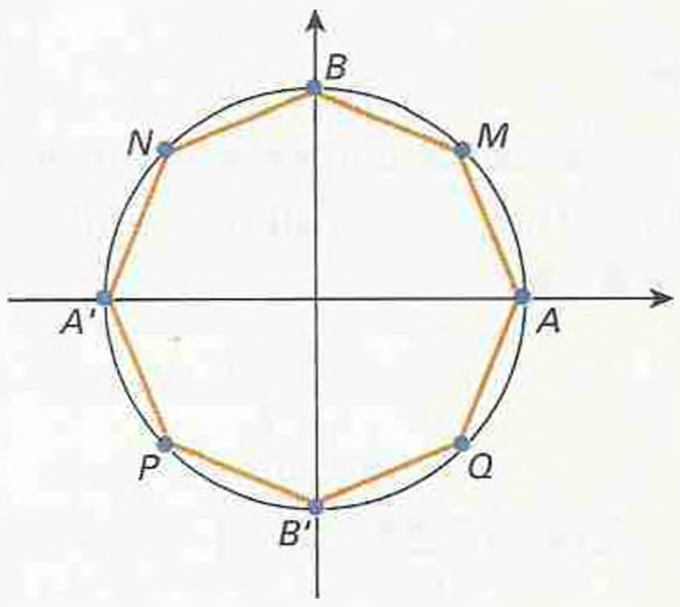
C.1 Duas rodas dentadas, com sessenta dentes a maior e vinte dentes a menor, estão engrenadas entre si. Quando a maior girar 32π rad, quantas voltas dará a menor?



C.2 (Fuvest-SP) Quantos graus mede, aproximadamente, um arco de 0,105 rad?

C.3 (UnB-DF) Quanto mede em radianos um arco de 2°15′?
Sugestão. Transforme 15′ em grau.

C.4 O polígono $AMBNA'PB'Q$, abaixo, é um octógono regular. Determine os valores x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, associados aos pontos A, M, B, N, A', P, B', Q.



C.5 Se α e β são duas medidas, em graus, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:
a) $\alpha = \beta$
b) $\alpha = \beta + 360°$
c) $\alpha = \beta + 2 \cdot 360°$
d) $\alpha = \beta - 2 \cdot 360°$
e) $\alpha = \beta + k \cdot 360°$, para algum k, $k \in \mathbb{Z}$

C.6 Se α e β são duas medidas, em radianos, associadas a um mesmo ponto da circunferência trigonométrica, então podemos afirmar que:
a) $\alpha = \beta$
b) $\alpha = \beta + 2\pi$
c) $\alpha = \beta + 4\pi$
d) $\alpha = \beta - 2\pi$
e) $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi$, para algum k, $k \in \mathbb{Z}$

C.7 Qual é a medida x do arco da primeira volta positiva ($0° \leq x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de $-40°$?

C.8 Determine a medida x do arco da primeira volta positiva ($0° \leq x < 360°$) que possui a mesma extremidade do arco de $-1.110°$.

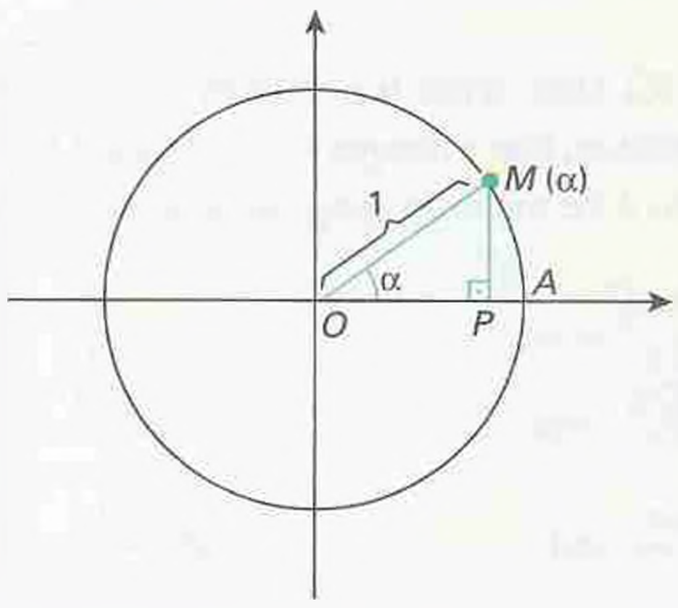
C.9 (UFCE) Dois arcos trigonométricos são côngruos se, e somente se, têm a mesma extremidade. Qual das medidas abaixo é de um arco côngruo ao arco trigonométrico de $\frac{\pi}{7}$ rad?

a) $\frac{22\pi}{7}$ rad
b) $\frac{6\pi}{7}$ rad
c) $\frac{8\pi}{7}$ rad
d) $\frac{29\pi}{7}$ rad
e) $\frac{13\pi}{7}$ rad

Capítulo 28
SENO E CO-SENO DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

1. EXTENSÕES DOS CONCEITOS DE SENO E CO-SENO

Consideremos na circunferência trigonométrica um arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, $0° < \alpha < 90°$.



No triângulo retângulo OMP, temos:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

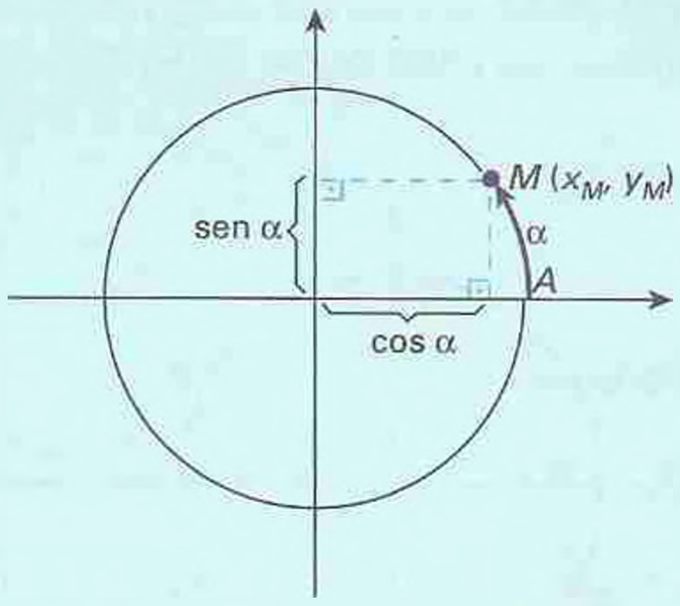
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{MP}{1} = MP$$

Note que as medidas OP e MP são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto M.

Veremos a seguir como ampliar os conceitos de seno e de co-seno de um arco (ou ângulo) para qualquer arco trigonométrico.

Definição

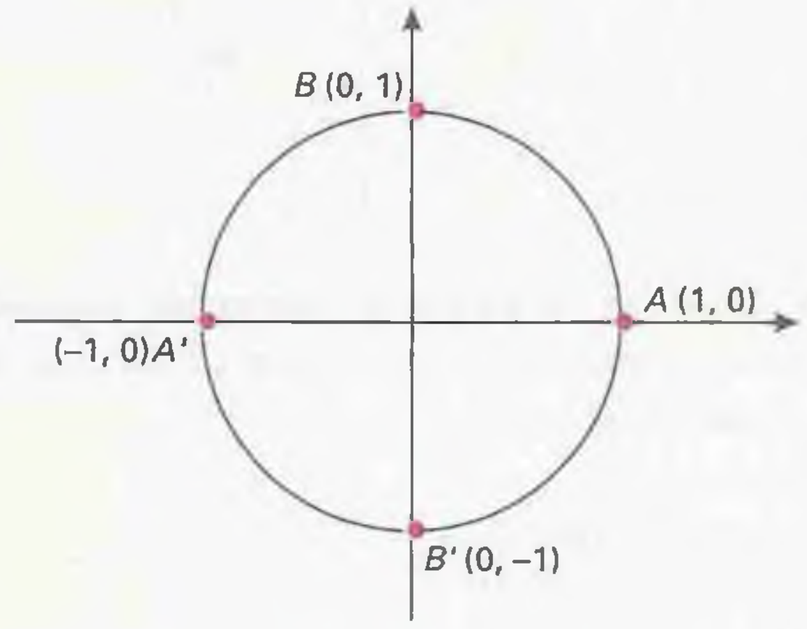
Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, chamam-se co-seno e seno de α a abscissa e a ordenada do ponto M, respectivamente:



- $\cos \alpha$ = Abscissa de $M = x_M$
- $\operatorname{sen} \alpha$ = Ordenada de $M = y_M$

Exemplo

Como o raio da circunferência trigonométrica é unitário (medida igual a 1), temos que as coordenadas dos pontos A, B, A' e B' são:

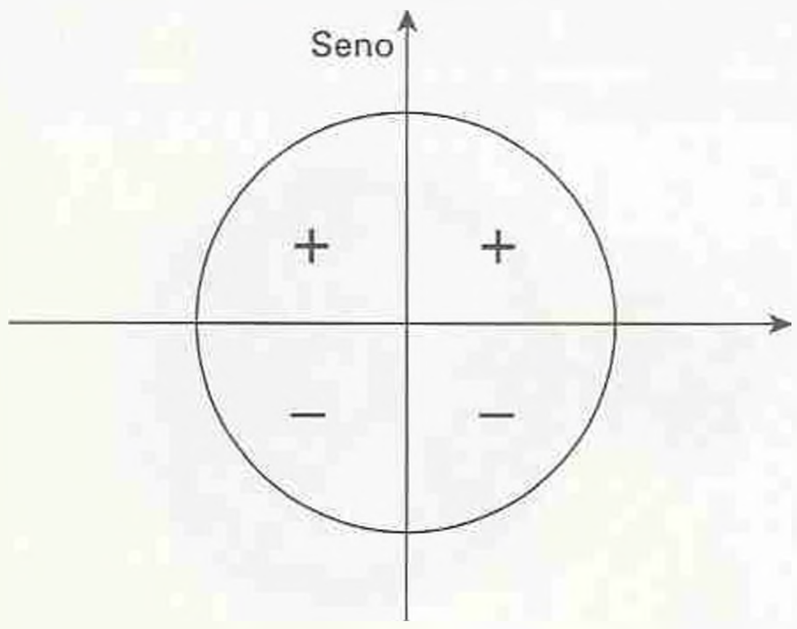


Note que:

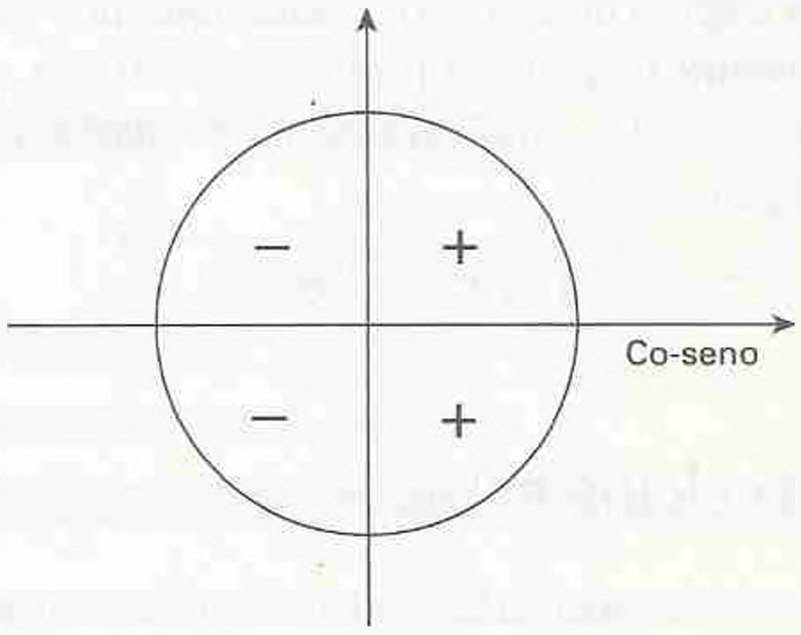
$\cos 0° = x_A = 1$	$\operatorname{sen} 0° = y_A = 0$
$\cos 90° = x_B = 0$	$\operatorname{sen} 90° = y_B = 1$
$\cos 180° = x_{A'} = -1$	$\operatorname{sen} 180° = y_{A'} = 0$
$\cos 270° = x_{B'} = 0$	$\operatorname{sen} 270° = y_{B'} = -1$
$\cos 360° = x_A = 1$	$\operatorname{sen} 360° = y_A = 0$

2. VARIAÇÃO DE SINAL DO SENO E DO CO-SENO

I. O seno de um arco é a ordenada da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1º e os do 2º quadrante e os pontos de ordenadas negativas são os do 3º e os do 4º quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o seno:



II. O co-seno de um arco é a abscissa da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1º e os do 4º quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2º e os do 3º quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o co-seno:



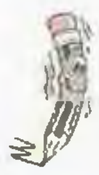
3. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

O objetivo desse estudo é relacionar o seno e o co-seno de um arco do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com o seno e o co-seno do arco correspondente no 1º quadrante. Para exemplificar, utilizaremos a tabela dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Observe que essa tabela apresenta senos e co-senos de alguns arcos do 1º quadrante. Vejamos como utilizá-la nos demais quadrantes.

Redução do 2º para o 1º quadrante

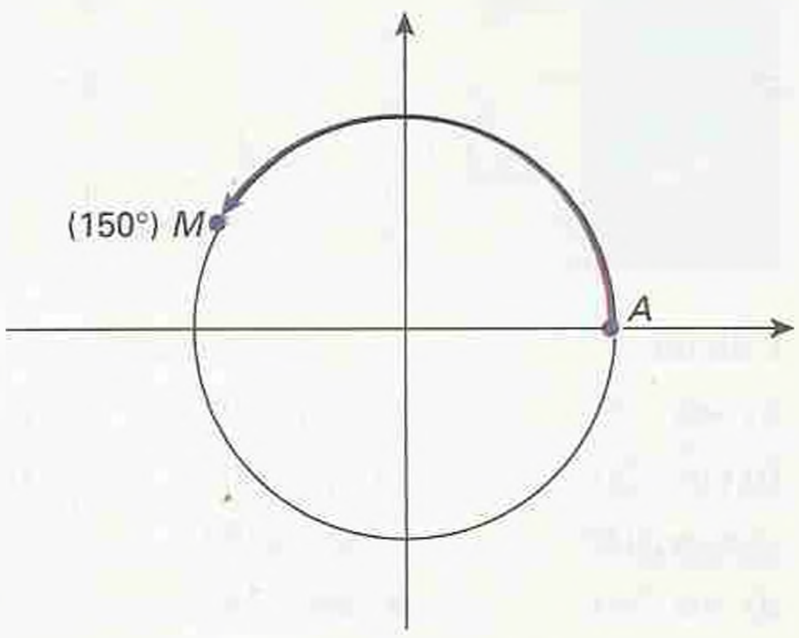


EXERCÍCIO RESOLVIDO

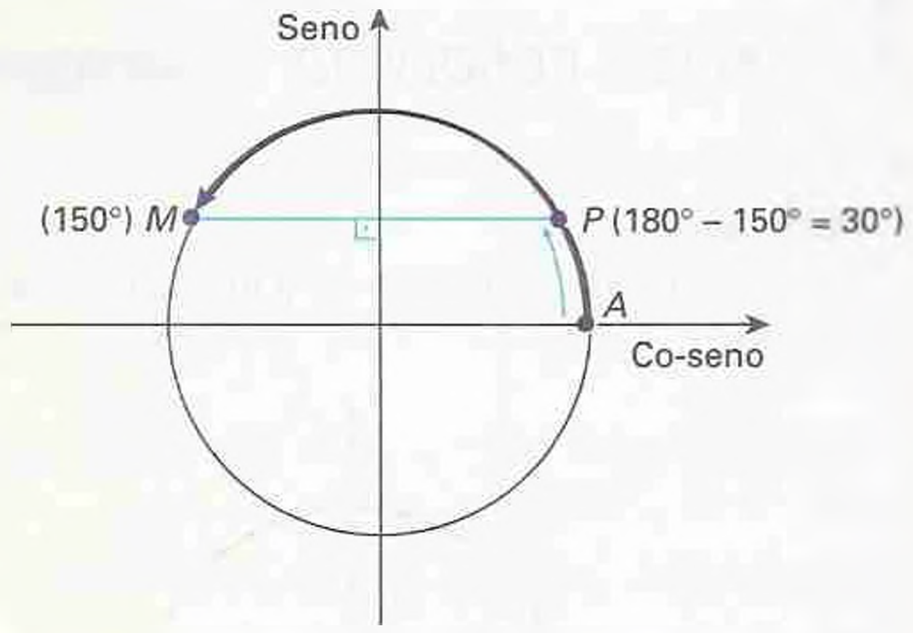
R.1 Calcular sen 150° e cos 150°.

Resolução

A extremidade M do arco de 150° pertence ao 2º quadrante:



Traçando por M a perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura abaixo.



Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas.

Logo, temos $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ e

$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

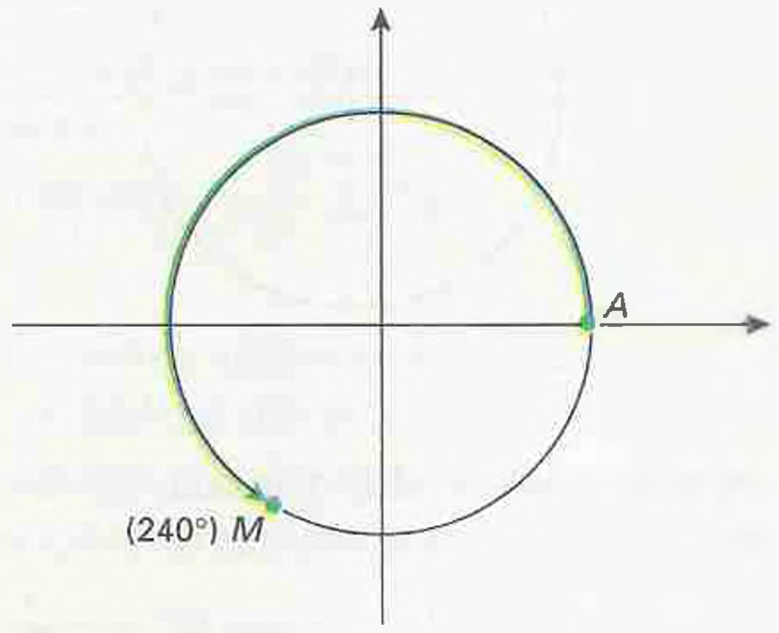
Redução do 3º para o 1º quadrante

EXERCÍCIO RESOLVIDO

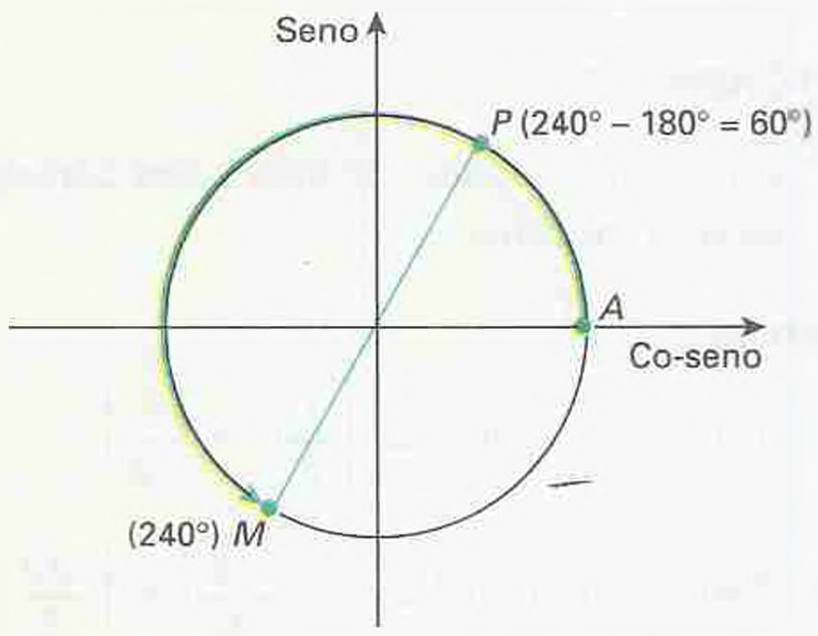
R.2 Calcular sen 240° e cos 240°.

Resolução

A extremidade M do arco de 240° pertence ao 3º quadrante:



Traçando por M a reta que passa pelo centro da circunferência, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura abaixo.



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas.

Temos, então, $\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

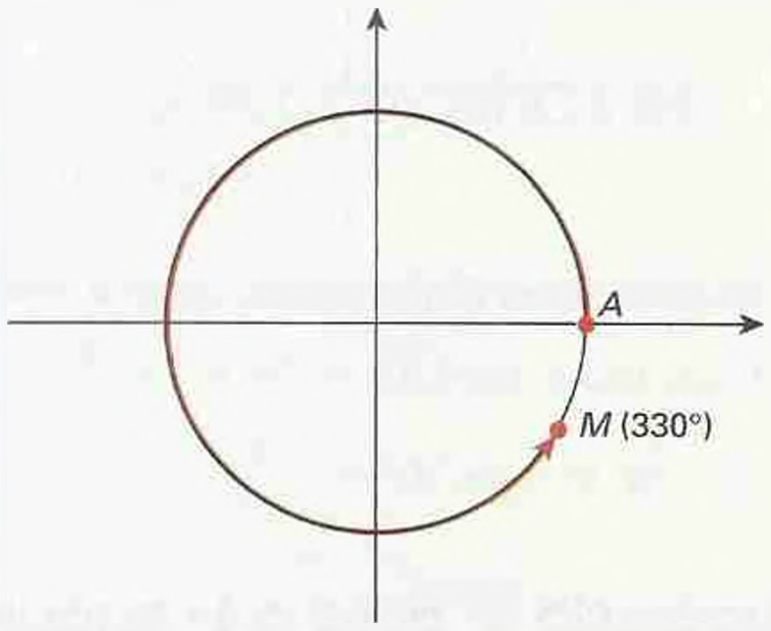
Redução do 4º para o 1º quadrante

EXERCÍCIO RESOLVIDO

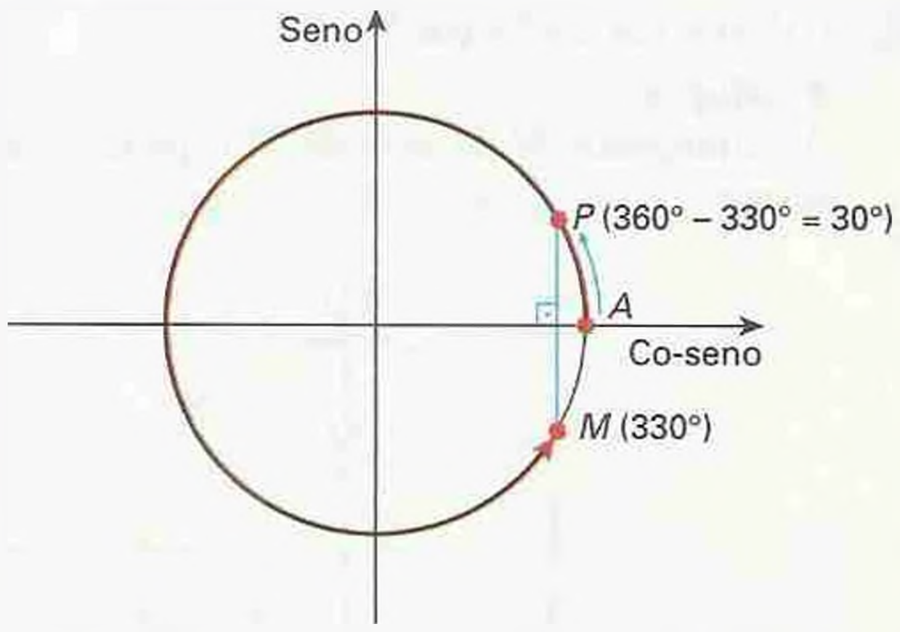
R.3 Calcular sen 330° e cos 330°.

Resolução

A extremidade M do arco de 330° pertence ao 4º quadrante:



Traçando por M a perpendicular ao eixo dos co-senos, obtemos o ponto P, correspondente de M no 1º quadrante, conforme figura abaixo.



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais.

Logo, temos $\text{sen } 330° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$ e

$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Conclusões

Os senos (ou co-senos) de dois arcos correspondentes têm o **mesmo módulo**.

Exemplos

a) $|\text{sen } 150°| = |\text{sen } 30°| \Rightarrow \left|\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

b) $|\text{sen } 240°| = |\text{sen } 60°| \Rightarrow \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

c) $|\cos 330°| = |\cos 30°| \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$

d) $|\cos 240°| = |\cos 60°| \Rightarrow \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

Assim sendo, conhecendo-se o seno (ou co-seno) de um arco do 1º quadrante, o cálculo do seno (ou do co-seno) do arco correspondente num outro quadrante se resume, simplesmente, ao estudo do sinal.

Exemplo

Para o cálculo do sen 210°, basta obtermos o seno do correspondente de 210° no 1º quadrante, ou seja, sen 30°, e atribuirmos a ele o sinal do seno no 3º quadrante, isto é, o sinal negativo:

$$\text{sen } 210° = -\text{sen } 30°$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Observe a circunferência trigonométrica e calcule:

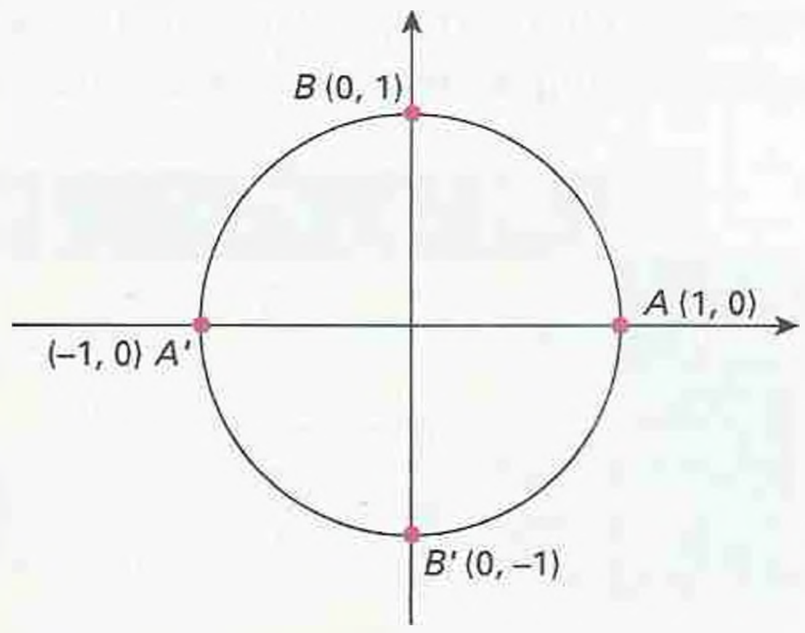
a) cos 0 e sen 0

b) $\cos \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } \frac{\pi}{2}$

c) $\cos \pi$ e $\text{sen } \pi$

d) $\cos \frac{3\pi}{2}$ e $\text{sen } \frac{3\pi}{2}$

e) $\cos 2\pi$ e $\text{sen } 2\pi$



B.2 Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\cos 0° \text{ sen } 270° + \text{sen } 90° \cos 180°}{\text{sen}^2 90° + \cos^2 180°}$$

B.3 Obtenha o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen } 2x + \cos 8x}{\text{sen}^2 3x}, \text{ para } x = \frac{\pi}{2}$$

B.4 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Calcule:

a) sen 120°
b) cos 120°
c) sen 210°
d) cos 210°
e) sen 300°
f) cos 300°
g) sen 135°
h) cos 135°
i) sen 225°
j) cos 225°
k) sen 315°
l) cos 315°

B.5 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

a) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}$ d) $\cos \frac{4\pi}{3}$

b) $\cos \frac{5\pi}{6}$ e) $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}$

c) $\operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}$ f) $\cos \frac{11\pi}{6}$

B.6 Determine o valor da expressão:

$$E = \frac{\operatorname{sen} 330° + \cos^2 300°}{\operatorname{sen} 200° + \cos 70° + \operatorname{sen}^2 240°}$$

Sugestão. Ângulos complementares.

B.7 (UFPA) O valor da expressão

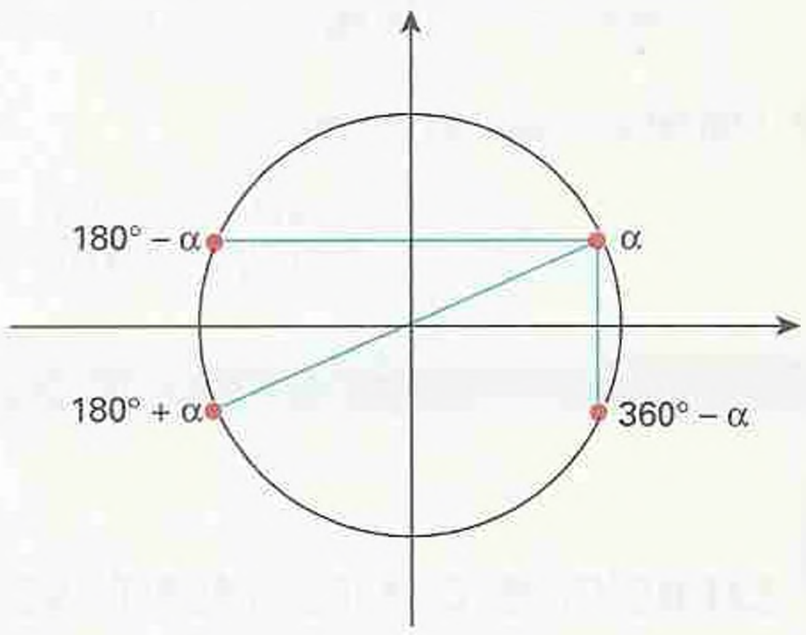
$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \cdot \cos\frac{5\pi}{6} + \left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)^2 \text{ é:}$$

a) 1 c) $\frac{5}{4}$

b) 0 d) $-\frac{1}{4}$

B.8 Observando a figura, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações:

a) $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
b) $\operatorname{sen}(180° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
c) $\operatorname{sen}(180° + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
d) $\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
e) $\operatorname{sen}(360° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
f) $\operatorname{sen}(360° - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
g) $\cos(180° - \alpha) = \cos\alpha$
h) $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
i) $\cos(180° + \alpha) = \cos\alpha$
j) $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
k) $\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$
l) $\cos(360° - \alpha) = -\cos\alpha$



Nota
Mesmo que a extremidade do arco de medida α não esteja no primeiro quadrante, as relações anteriores que são verdadeiras continuarão verdadeiras. Verifique!

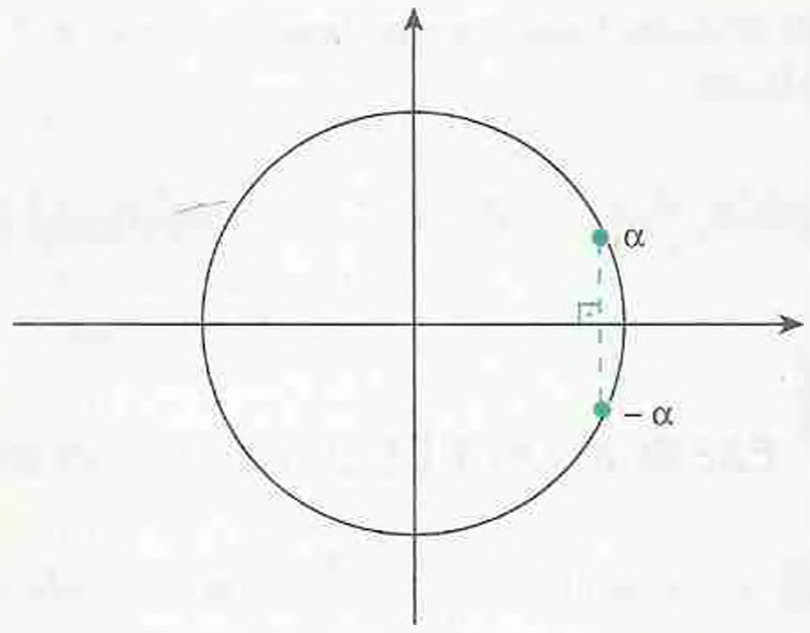
B.9 De acordo com suas conclusões no exercício anterior, simplifique a expressão:

$$E = \frac{\operatorname{sen}(180° - \alpha) - \operatorname{sen}(180° + \alpha)}{\operatorname{sen}(360° - \alpha)},$$

com $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

B.10 Dois arcos de medidas opostas, α e $-\alpha$, têm extremidades simétricas em relação ao eixo dos co-senos. Observando a figura, classifique como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das afirmações:

a) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ c) $\operatorname{sen}(-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
b) $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$ d) $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$



Nota
Mesmo que a extremidade do arco de medida α não esteja no primeiro quadrante, as relações anteriores que são verdadeiras continuarão verdadeiras. Verifique!

B.11 De acordo com suas conclusões no exercício anterior, calcule:

a) $\operatorname{sen}(-30°)$ c) $\operatorname{sen}(-210°)$
b) $\cos(-45°)$ d) $\cos(-300°)$

Exercícios complementares de C.1 a C.5

4. RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA

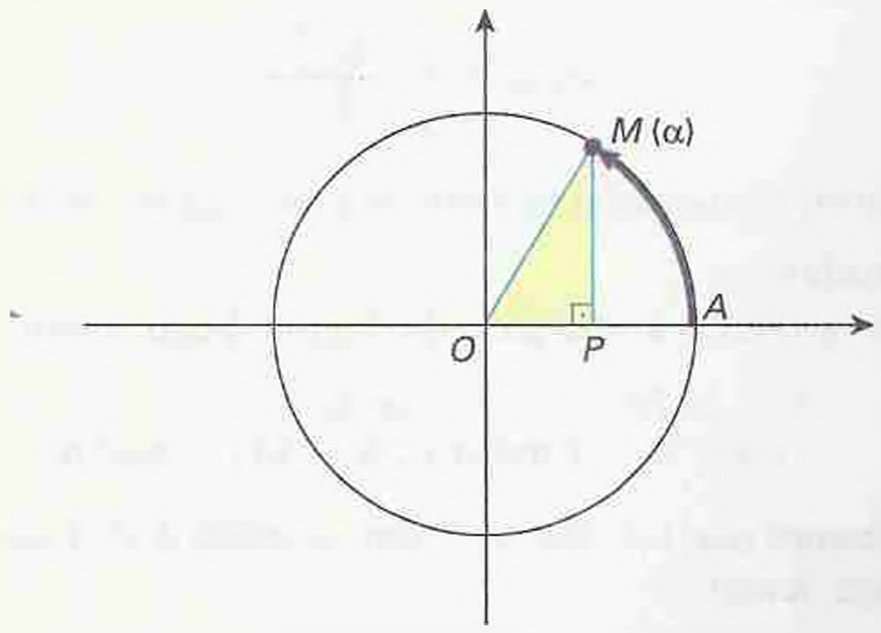
Dado um arco trigonométrico de medida α, tem-se:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Vamos demonstrar apenas o caso em que a extremidade do arco de medida α é um ponto do primeiro quadrante, porém é importante ressaltar que a relação continua verdadeira mesmo que essa extremidade não esteja no primeiro quadrante.

Demonstração

Seja α a medida de um arco com extremidade no 1º quadrante:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo OMP, temos $(PM)^2 + (OP)^2 = (OM)^2$. Mas sabemos que $PM = \operatorname{sen}\alpha$, $OP = \cos\alpha$ e $OM = 1$ (raio).

Logo, temos $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Conseqüências da relação fundamental

Da relação fundamental $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, obtemos as relações:

$$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \text{e} \quad \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Sendo $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular o valor do $\cos\alpha$.

Resolução

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \quad \therefore \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \quad \therefore \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, isto é, α é um arco do 2º quadrante, temos que $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

R.5 Sendo $\text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determinar os valores de $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$.

Resolução

$$\begin{cases} \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 & \text{(I)} \\ \text{sen}\,\alpha = 2\cos\alpha & \text{(II)} \end{cases}$$

(II) em (I) $\Rightarrow (2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \therefore 5\cos^2\alpha = 1$

$$\therefore \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \quad \therefore \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \quad \therefore \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Mas, como $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, isto é, α é um arco do 3º quadrante, temos que $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Fazendo $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ em (II), temos que:

$$\text{sen}\,\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

R.6 Resolver a equação na variável x: $x^2 - 2x + \cos^2\alpha = 0$.

Resolução

Na variável x, a equação é do 2º grau. Logo, temos:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \cos^2\alpha$$
$$\therefore \Delta = 4 - 4\cos^2\alpha \therefore \Delta = 4(1 - \cos^2\alpha)$$

Sabemos que $1 - \cos^2\alpha = \text{sen}^2\,\alpha$; então $\Delta = 4\,\text{sen}^2\,\alpha$. Logo, temos:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4\text{sen}^2\alpha}}{2} \quad \therefore x = \frac{2 \pm 2\,\text{sen}\,\alpha}{2}$$

$$\therefore x = 1 \pm \text{sen}\,\alpha$$

Então, $S = \{1 + \text{sen}\,\alpha,\ 1 - \text{sen}\,\alpha\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.12 Sendo $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule o valor de $\text{sen}\,\alpha$.

B.13 Calcule o valor de $\cos\alpha$, sabendo que $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{3}$ e que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

B.14 Quais são os valores de sen x e cos x, sendo $\text{sen}\,x = -2\cos x$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$?

B.15 Obtenha m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que:

$$\text{sen}\,x = \frac{m}{5} \text{ e } \cos x = \frac{m+1}{5}$$

B.16 Resolva a equação na variável x:

$$x^2 + 2x + \text{sen}^2\,\alpha = 0$$

B.17 Determine o valor do sen x, sabendo que $3\,\text{sen}^2\,x - 4\,\text{sen}\,x + 1 = 0$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. **Sugestão.** Faça a mudança de variável $\text{sen}\,x = y$ e resolva a equação do 2º grau $3y^2 - 4y + 1 = 0$.

B.18 Sabendo que $4\cos^2 x + 5\,\text{sen}\,x - 5 = 0$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule o valor de sen x. **Sugestão.** Substitua $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2\,x$.

B.19 Calcule o valor da expressão

$$E = \text{sen}^2\,10° + \text{sen}^2\,20° + \text{sen}^2\,30° + \text{sen}^2\,40° + \text{sen}^2\,50° + \text{sen}^2\,60° + \text{sen}^2\,70° + \text{sen}^2\,80°$$

B.20 Obtenha o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}^2\,240° + \cos 300°}{\text{sen}^2\,10° + \cos^2 350°}$$

Exercícios complementares de C.6 a C.12

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Calcule o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}\,450° - \cos 540°}{\text{sen}\,990°}$$

C.2 Obtenha o valor da expressão:

$$E = \frac{\text{sen}\frac{11\pi}{2} - \text{sen}\frac{9\pi}{2}}{\cos 48\pi - \cos 33\pi}$$

C.3 (U. Católica de Salvador-BA) É verdade que cos 5.240° é equivalente a:

a) cos (−20°)
b) cos 20°
c) −cos 160°
d) −cos 20°
e) cos 180°

C.4 (Fuvest-SP-modificado) Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) $\text{sen } 210° < \cos 210° < \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\cos 210° < \text{sen } 210° < \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3} < \text{sen } 210° < \cos 210°$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3} < \cos 210° < \text{sen } 210°$

e) $\text{sen } 210° < \frac{\sqrt{3}}{3} < \cos 210°$

C.5 (Unama) Se $x = \frac{2\pi}{3}$, o valor da expressão

$$\frac{\text{sen } x}{\cos x + \text{sen } x} + \frac{\text{sen } x}{\cos x - \text{sen } x} \text{ é:}$$

a) $-\sqrt{3}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\sqrt{3}$

b) -1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.6 (Cesgranrio) Se $\text{sen } x - \cos x = \frac{1}{2}$, o valor de $\text{sen } x \cdot \cos x$ é igual a:

a) $-\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{4}$

Sugestão. Eleve ao quadrado ambos os membros da igualdade.

C.7 (Unip-SP) Se $\text{sen } x = \frac{1}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então o valor de $\cos^4 x - \text{sen}^4 x$ será:

a) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{6}{9}$ d) $\frac{1}{5}$

C.8 (PUC-RJ) Sabe-se que θ é a medida em graus de um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo.

Se $\text{sen } \theta = \frac{k+1}{2}$, $\cos \theta = k$, e a hipotenusa do triângulo mede 20 cm, determine sua área.

C.9 (U. E. Londrina-PR) Um arco trigonométrico com extremidade no terceiro quadrante tem medida x e $\cos x = 3 \text{ sen } x$. O valor de $\text{sen } x + \cos x$ é:

a) $\frac{-2\sqrt{10}}{5}$

b) $\frac{-4\sqrt{10}}{5}$

c) $\frac{-\sqrt{5}}{10}$

d) $\frac{-\sqrt{5}}{5}$

e) $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

C.10 As raízes da equação do 2º grau $x^2 + x + k + 1 = 0$ são $\text{sen } \alpha$ e $\cos \alpha$. Determine k. **Sugestão.** A soma e o produto das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são, respectivamente, $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$.

C.11 A expressão $E = \frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$, para $\cos x \neq 1$, é equivalente a:

a) $E = 1 - \cos x$
b) $E = 1 + \cos x$
c) $E = 1$
d) $E = 1 + \text{sen } x$
e) $E = 1 - \text{sen } x$

C.12 Dê o conjunto solução da equação do 2º grau em x

$$x^2 + x \cos \alpha - \frac{\text{sen}^2 \alpha}{4} = 0$$

Capítulo 29
EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM SENO OU CO-SENO

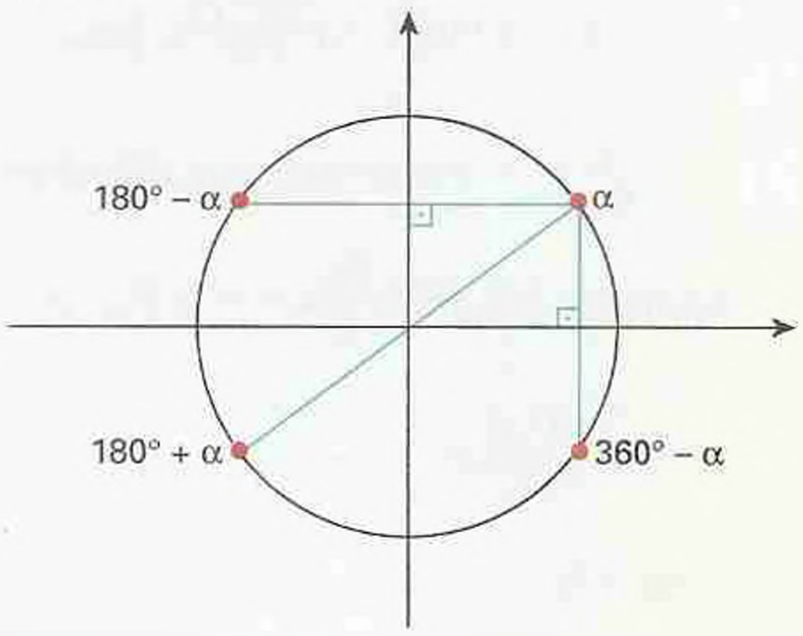
1. MÉTODO GRÁFICO PARA A RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO TRIGONOMÉTRICA IMEDIATA

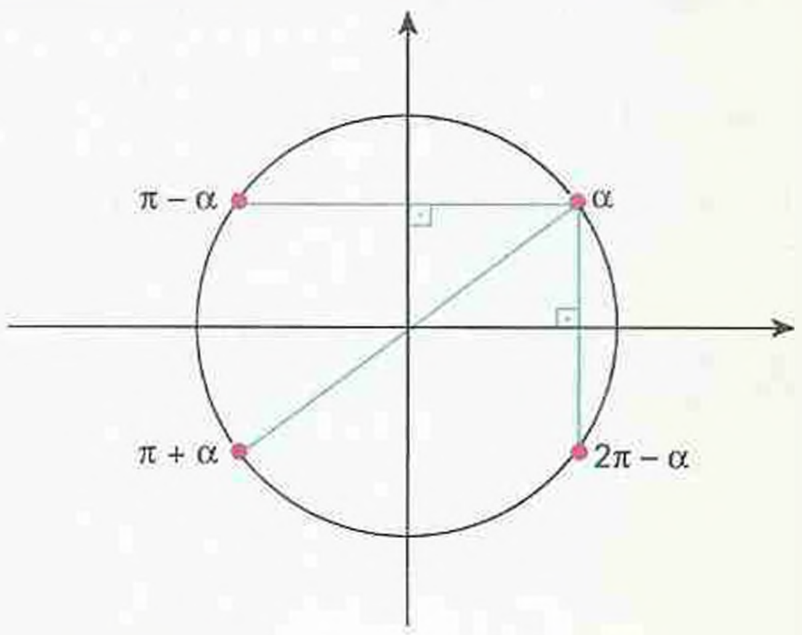
Uma equação do tipo sen $x = k$ (cos $x = k$), em que k é uma constante real, é chamada de **equação trigonométrica imediata**. Resolvê-la em um conjunto universo U significa obter o conjunto S formado por todos os valores pertencentes a U que, atribuídos à variável x, tornam verdadeira a sentença sen $x = k$ (cos $x = k$). Existem vários métodos para a resolução de uma equação imediata. Optamos pelo método gráfico, cujos requisitos são:

I. Tabela dos arcos notáveis

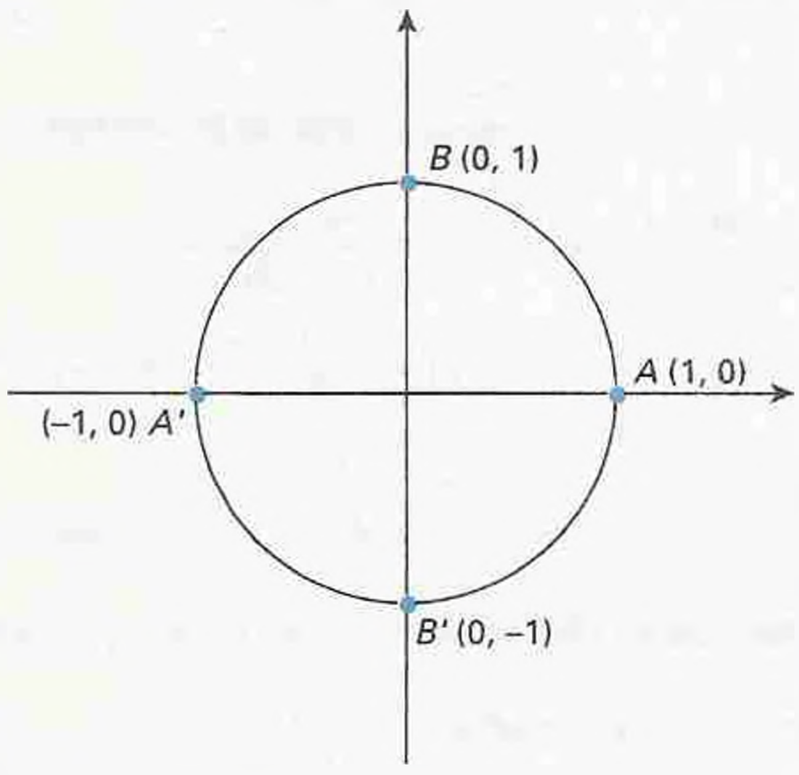
	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

II. Simetrias





III. Coordenadas dos pontos A, B, A' e B'

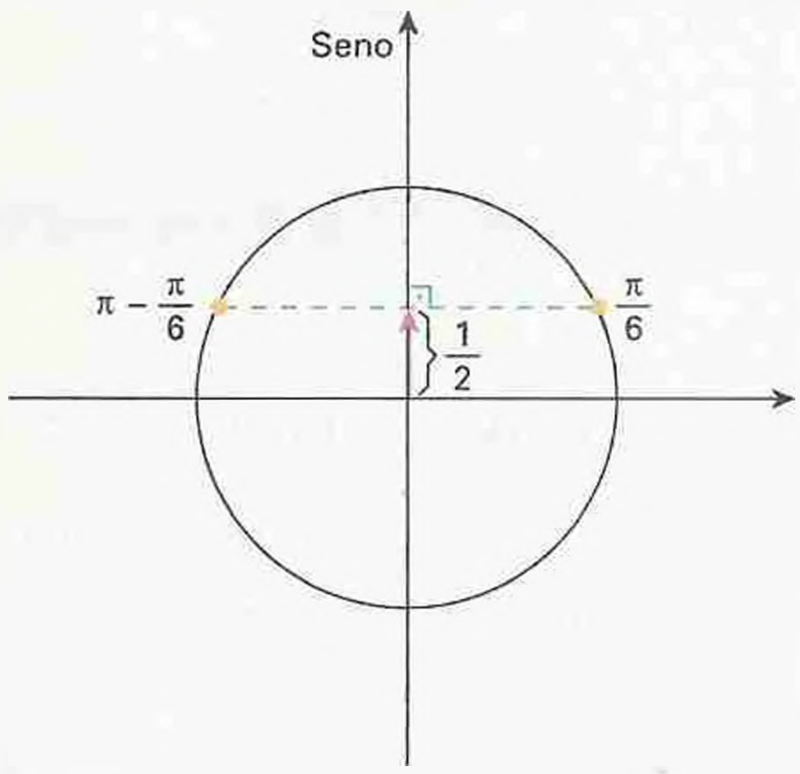


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Resolver a equação sen $x = \frac{1}{2}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada igual a $\frac{1}{2}$, conforme figura abaixo.



Assim, os valores de x da primeira volta positiva para os quais sen $x = \frac{1}{2}$ são:

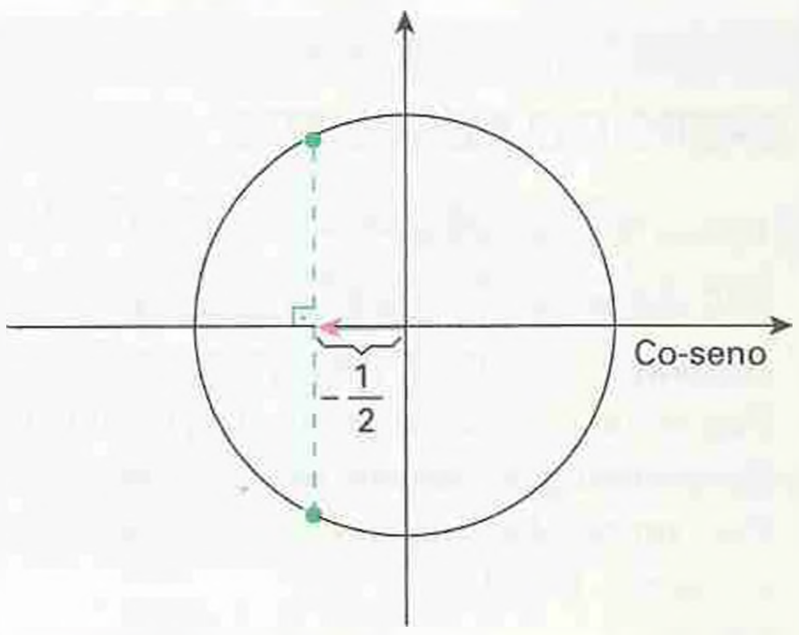
$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

R.2 Resolver a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

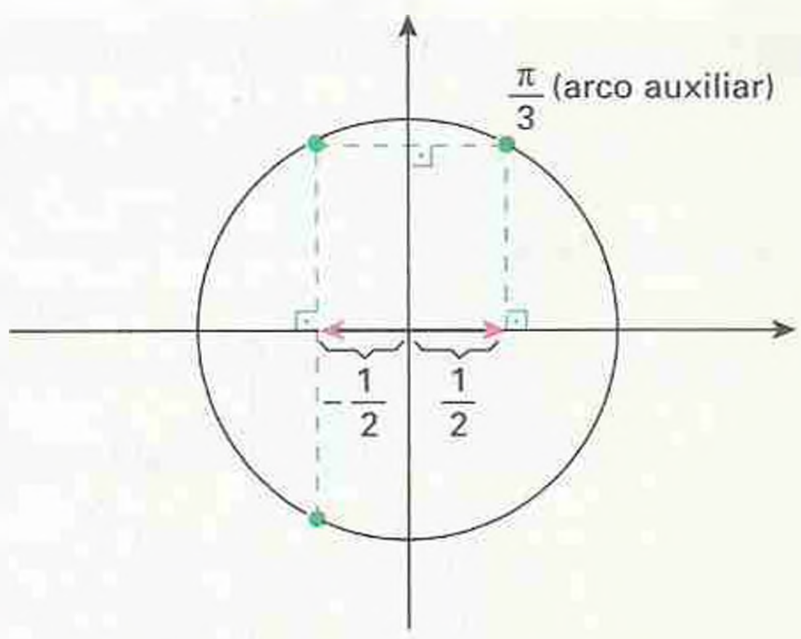
Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm abscissa igual a $-\frac{1}{2}$:

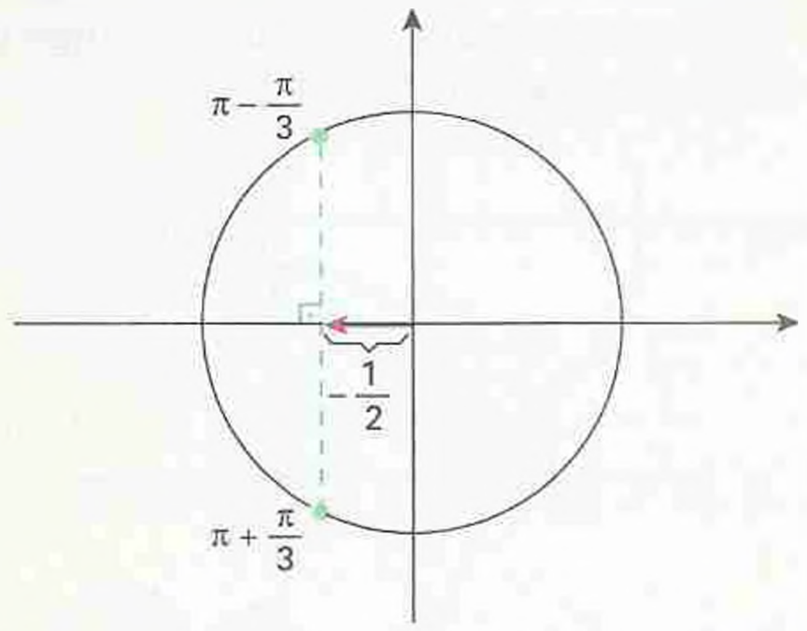


Observe que os pontos que possuem o co-seno igual a $-\frac{1}{2}$ pertencem ao 2º e 3º quadrante e, portanto, não estão na tabela dos arcos notáveis.

Para podermos utilizar a tabela, vamos buscar no 1º quadrante um **arco auxiliar**, isto é, o arco (da tabela) cujo co-seno é igual a $\frac{1}{2}$:



Finalmente, pelas simetrias, transportamos o **arco auxiliar** para o 2º e o 3º quadrante.



Assim:

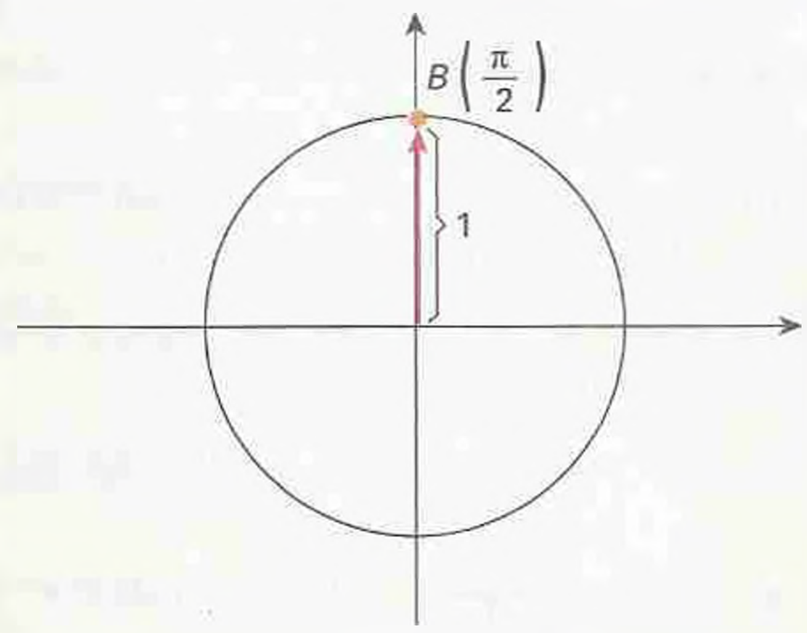
$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Logo, $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}$.

R.3 Resolver a equação $\operatorname{sen} x = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que possuem ordenada igual a 1, conforme figura abaixo. O único ponto da circunferência que tem ordenada 1 é o ponto B.

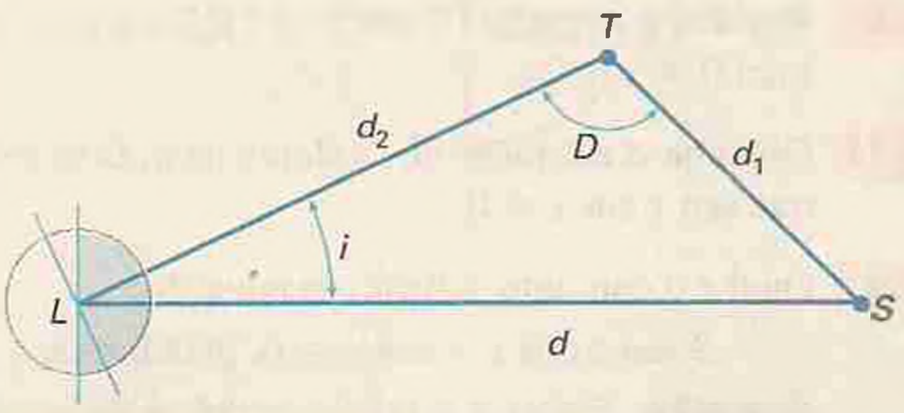


Portanto, $x = \frac{\pi}{2}$. Logo, $S = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

As fases da Lua

As fases da Lua resultam de sua posição em relação aos raios solares. Sendo o Sol (S), a Lua (L) e a Terra (T) os vértices de um triângulo cujas medidas dos lados e dos ângulos estão indicadas na figura abaixo, o seno e o co-seno nos permitem calcular a medida do ângulo *i*, chamado de **ângulo de fase**, através das equações:

$$\begin{cases} d \operatorname{sen} i = d_1 \operatorname{sen} D \\ d \cos i = d_2 - d_1 \cos D \end{cases}$$

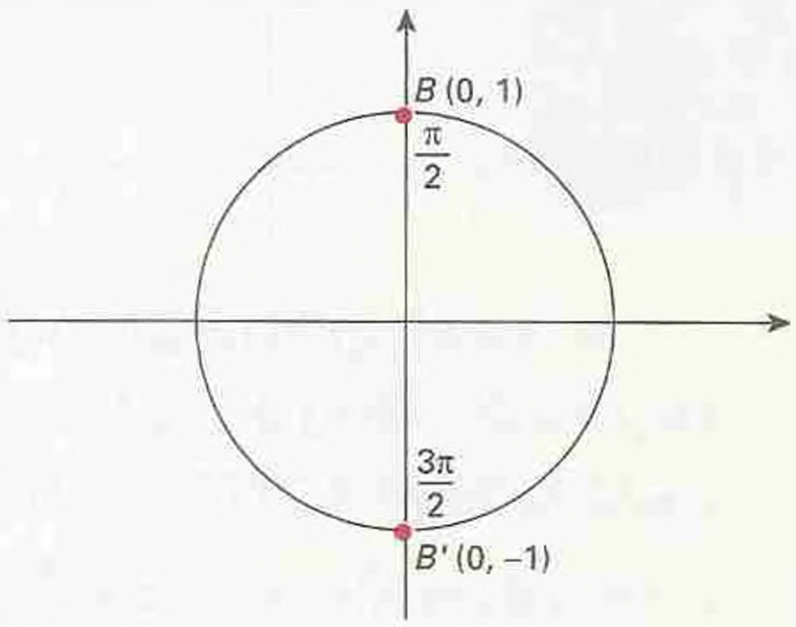


CID

R.4 Resolver a equação $\cos x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência que têm abscissa igual a zero, conforme figura abaixo. Os pontos de abscissa zero são B e B'.



Portanto:

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}$$

Logo, $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Resolva as equações para $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x = 1$

d) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\text{sen } x = -1$

g) $\cos x = -1$

h) $\text{sen } x = 0$

i) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\text{sen } x = 3$

k) $\cos x = -5$

B.2 Determine o conjunto solução de cada uma das equações, para $0° \leq x < 360°$.

a) $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen } x = 1$

d) $\cos x = 0$

e) $\text{sen } x = 0$

f) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\cos x = -1$

j) $\text{sen } x = -1$

B.3 Qual é o conjunto solução da equação $\cos x = \frac{1}{2}$, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

B.4 Considerando o universo $U = [0, 4\pi]$, resolva a equação $\cos x = -1$.

B.5 Dê o conjunto dos valores de x, $0 \leq x \leq \pi$, que satisfaçam a igualdade $\text{sen } x = -1$.

Exercícios complementares de C.1 a C.5

2. EQUAÇÕES NA FORMA FATORADA

A **propriedade do produto nulo** garante que o produto de números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores é igual a zero. Essa propriedade é muito útil na resolução de equações na forma fatorada, como veremos a seguir.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Resolver a equação:

$$2 \cos x \text{ sen } x - \text{sen } x = 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

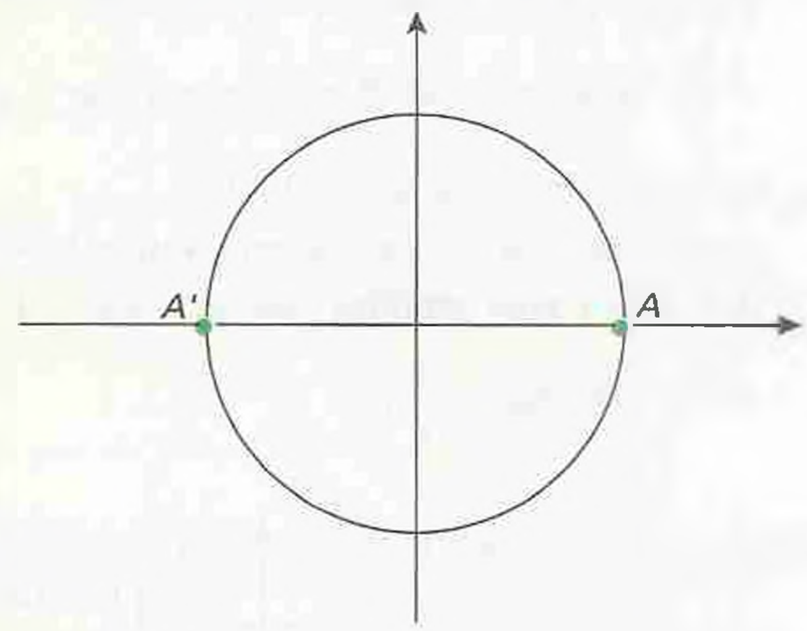
Resolução

Fatorando o primeiro membro da igualdade pelo caso do fator comum, temos que $\text{sen } x (2 \cos x - 1) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, temos $\text{sen } x = 0$ ou $2 \cos x - 1 = 0$.

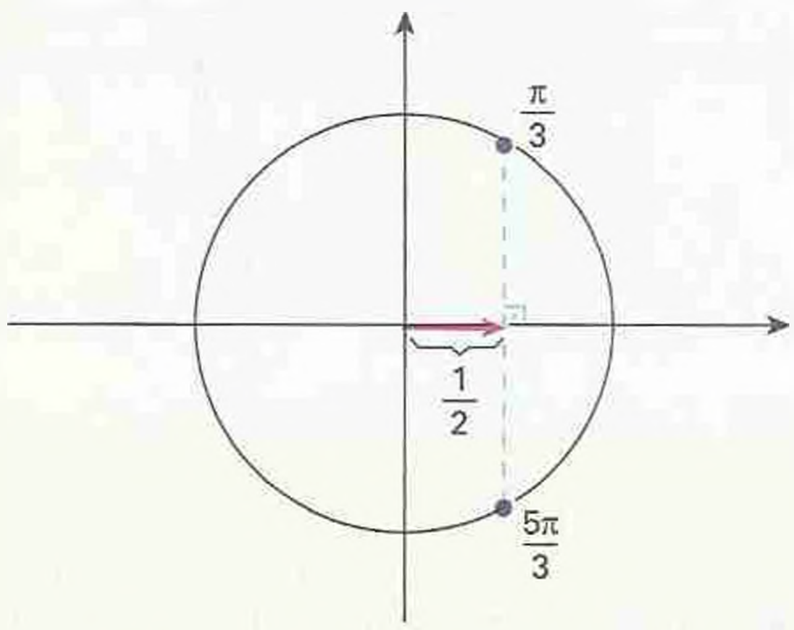
Isto é:

- $\text{sen } x = 0$



$\therefore \quad x = 0 \text{ ou } x = \pi$

- ou $\cos x = \frac{1}{2}$



$\therefore \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.6 Resolva a equação $(2 \text{ sen } x - 1)(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

B.7 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, tais que $\text{sen } x \cos x = 0$.

B.8 Qual é o conjunto solução da equação:

$$2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi?$$

Sugestão. Fatore o primeiro membro da igualdade.

B.9 Resolva a equação:

$$\text{sen}^2 x \cos x - \cos x = 0, \text{ para } 0 \leqslant x < 2\pi$$

B.10 Dê o conjunto solução da equação $2 \text{ sen } x \cos x - 2 \cos x - \text{sen } x + 1 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi[$. **Sugestão.** Fatore o primeiro membro por agrupamento.

Exercícios complementares de C.6 a C.9

3. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Equação polinomial é toda equação que pode ser representada por um polinômio igualado a zero.

Exemplos

a) $5t^2 - 4t - 1 = 0$ (equação do 2º grau)

b) $6t^3 - 2t^2 - 4t = 0$ (equação do 3º grau)

Certas equações trigonométricas podem ser resolvidas com o auxílio de uma equação polinomial, bastando para isso uma mudança de variável. Observe os exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Resolver a equação:

$$2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0, \text{ para } 0 \leqslant x < 2\pi$$

Resolução

Fazendo $\text{sen } x = t$, temos a equação do 2º grau:

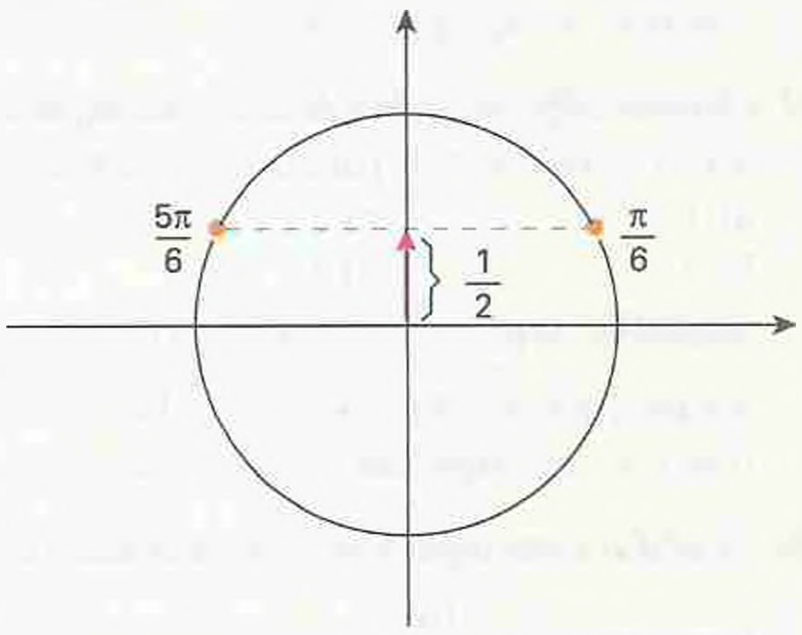
$$2t^2 + t - 1 = 0 \therefore \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2(-1) \therefore \Delta = 9$$

$$\therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -1$$

Como $\text{sen } x = t$, temos $\text{sen } x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = -1$.

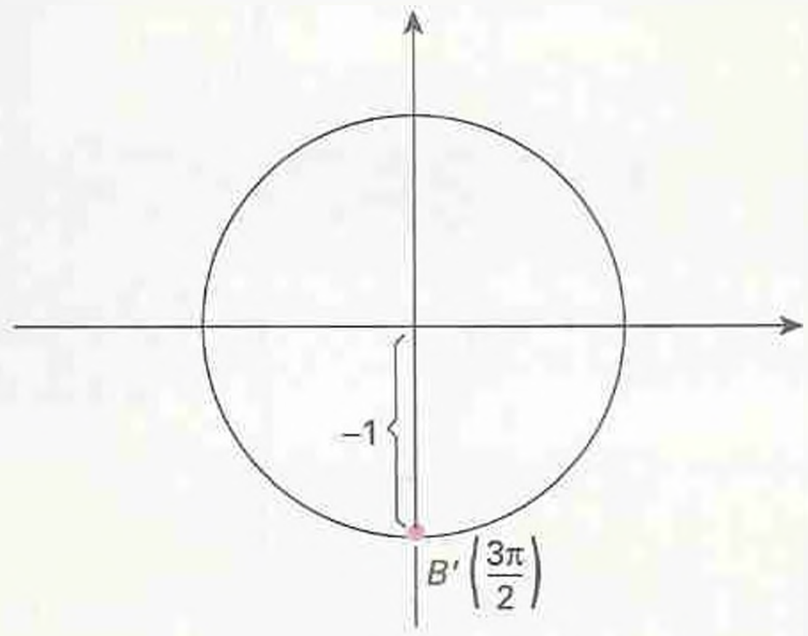
Resolvendo essas equações imediatas, na primeira volta positiva, temos:

- $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

- ou $\text{sen } x = -1$



$\therefore x = \frac{3\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

R.7 Resolver a equação:

$$2 \cos^2 x + \text{sen } x - 1 = 0, \text{ para } 0 \leqslant x < 2\pi$$

Resolução

Quando uma equação apresenta seno e co-seno, um recurso muito útil é usar uma das identidades:

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ ou } \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$

para transformar a equação noutra equivalente, que apresente somente seno ou somente co-seno.

Na equação proposta pelo exercício vamos substituir $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$.

Temos, então:

$$2(1 - \text{sen}^2 x) + \text{sen } x - 1 = 0$$

$$\therefore 2 - 2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$$

$$\therefore -2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x + 1 = 0$$

Fazendo $\text{sen } x = t$, temos:

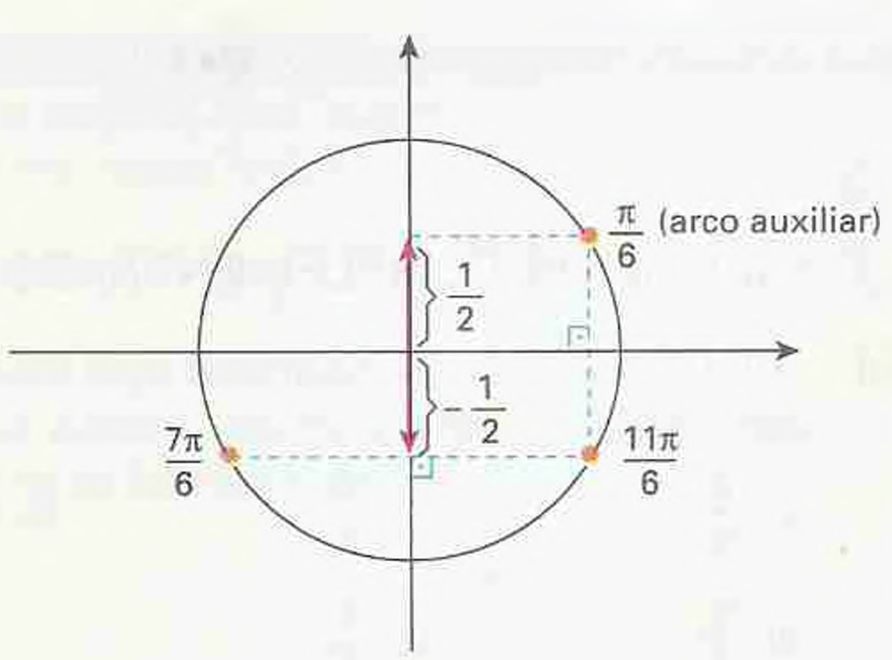
$$-2t^2 + t + 1 = 0 \therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 1$$

Assim, $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = 1$.

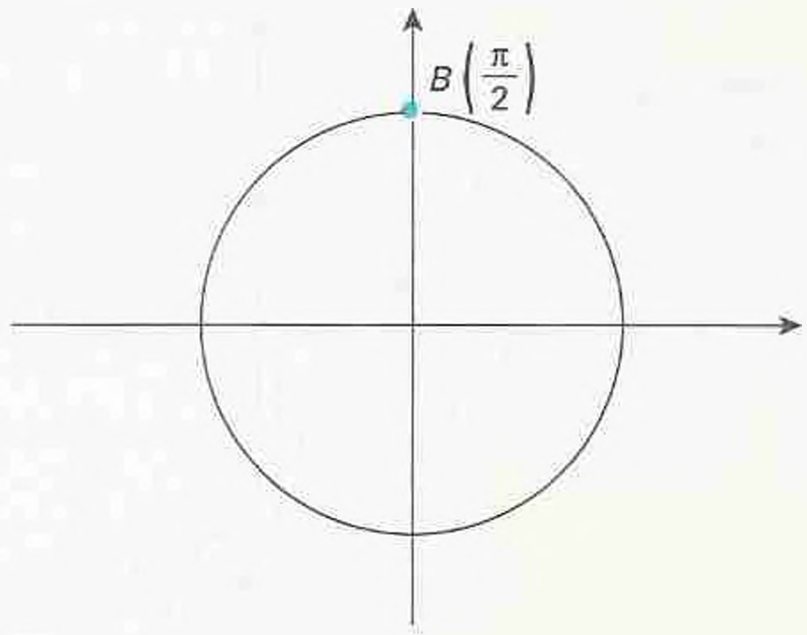
Resolvendo essas equações imediatas, na primeira volta positiva, temos:

- $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$



$\therefore x = \frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

• ou sen $x = 1$



$\therefore x = \frac{\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Resolva a equação:

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

B.12 (Fatec-SP) O conjunto solução da equação $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi]$, é:

a) $\left\{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{6}, \pi, \frac{5\pi}{6}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \pi\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

e) $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$

B.13 Obtenha os valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade $2\cos^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 3 = 0$.

B.14 Resolva a equação $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x = 0$, no universo $U = [0, 2\pi[$.

B.15 Qual é o conjunto solução da equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^2 x - 1 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$?

B.16 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1$.

Exercícios complementares de C.10 a C.16

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFAC) O menor valor positivo de x que satisfaz a equação $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ e) π

b) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$

C.2 (Ceeteps-SP) A soma das raízes da equação $\cos^4 x = \frac{9}{16}$ para $\pi < x < 2\pi$ é:

a) π c) 3π e) $\frac{3\pi}{2}$

b) 2π d) $\frac{5\pi}{2}$

C.3 Resolva a equação $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$, para $0 \leq x < 2\pi$.

C.4 Determine a soma das raízes da equação $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{9}$, para $0 \leq x < 2\pi$. **Sugestão.** Indique por α a raiz pertencente ao 1º quadrante.

C.5 Resolva a equação $\operatorname{sen} x = \cos x$, para $0 \leq x < 2\pi$. **Sugestão.** Procure na circunferência trigonométrica os pontos que têm abscissa e ordenada iguais.

C.6 Resolva a equação:

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

Cuidado! Não divida os dois membros por $\cos x$, pois, se o fizer, você perderá a possibilidade de o $\cos x$ ser igual a zero, e, portanto, perderá raiz da equação. Obtenha uma equação equivalente com um dos membros igual a zero.

C.7 Determine o conjunto solução da equação:

$$\cos x (2 \operatorname{sen} x + 3) = 2 \cos x, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

C.8 (Faap-SP) Resolva a equação:

$$\operatorname{sen}^3 x \cos x + \operatorname{sen} x \cos^3 x = 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

C.9 Dê o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade $\operatorname{sen} x + \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Cuidado! Imponha a condição de existência $\cos x \neq 0$.

C.10 (Faap-SP) Determine x com $0 \leq x < 2\pi$, tal que $4 \operatorname{sen}^4 x - 11 \operatorname{sen}^2 x + 6 = 0$. **Sugestão.** Faça $\operatorname{sen}^2 x = y$.

C.11 Determine, para $0 \leq x \leq 2\pi$, o conjunto solução da equação $3 \operatorname{sen}^2 x + 2 = 3 - \cos^4 x$.

C.12 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que satisfaçam a igualdade $8 \operatorname{sen}^6 x - 7 \operatorname{sen}^3 x - 1 = 0$. **Sugestão.** Faça $\operatorname{sen}^3 x = y$.

C.13 Resolva a equação $2\cos^3 x - 6\cos^2 x - \cos x + 3 = 0$, no universo $U = [0, 2\pi[$. **Sugestão.** Fatore o primeiro membro por agrupamento.

C.14 (Fuvest-SP) O número de raízes da equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, para $0 \leq x < 2\pi$, é:

a) 1 c) 3 e) infinito

b) 2 d) 4

Sugestão. $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 = (1 - \cos^2 x)^2$.

C.15 Resolva a equação $2 \operatorname{sen}^2 x + |\operatorname{sen} x| - 1 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$. **Sugestão.** $\operatorname{sen}^2 x = |\operatorname{sen} x|^2$.

C.16 (UFGO) Determine todo x no intervalo $[0, 2\pi[$ que satisfaça a equação $\frac{16^{\cos^2 x}}{4^{\cos x}} = 1$.

Capítulo 30
INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM SENO OU CO-SENO

1. MÉTODO GRÁFICO PARA A RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES IMEDIATAS EM SENO OU CO-SENO

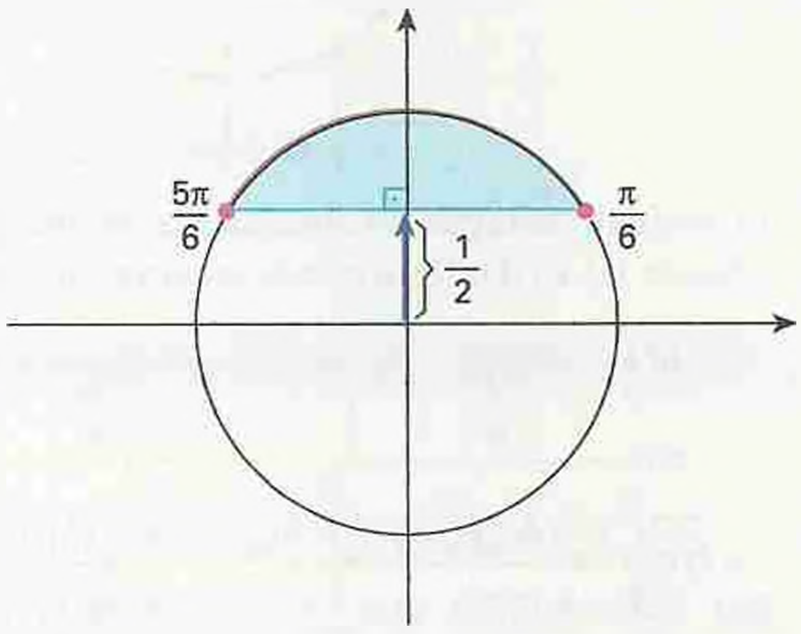
Inequações do tipo $\operatorname{sen} x > k$ ou $\cos x > k$ (ou com as relações $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ ou $\neq$), sendo k uma constante real, são chamadas de **inequações imediatas**. Para resolvê-las usaremos o método gráfico, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada maior ou igual a $\frac{1}{2}$:



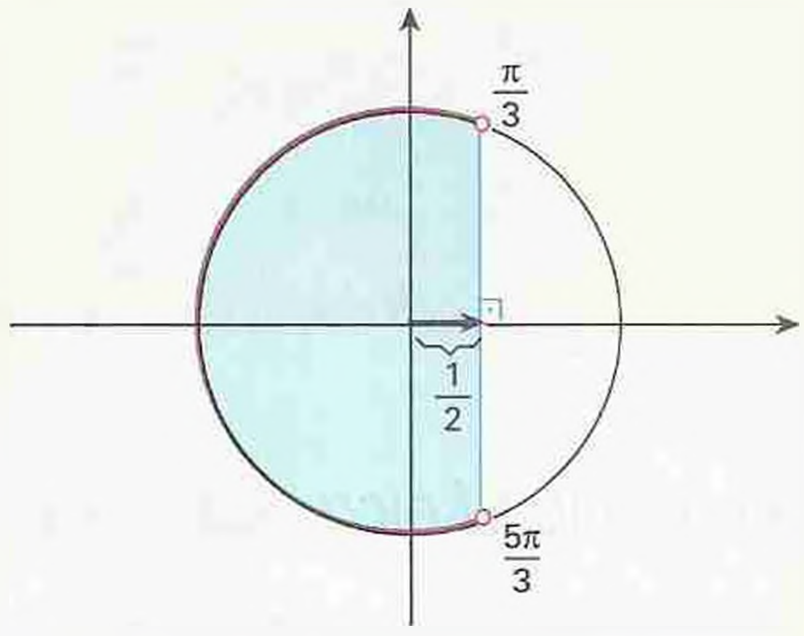
Os pontos que possuem ordenada $\frac{1}{2}$ são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, e os que têm ordenada maior do que $\frac{1}{2}$ são todos entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\right\}$.

R.2 Resolver a inequação $\cos x < \frac{1}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Os pontos que têm o co-seno menor que $\frac{1}{2}$, isto é, abscissa menor que $\frac{1}{2}$, são todos entre $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$, isto é:

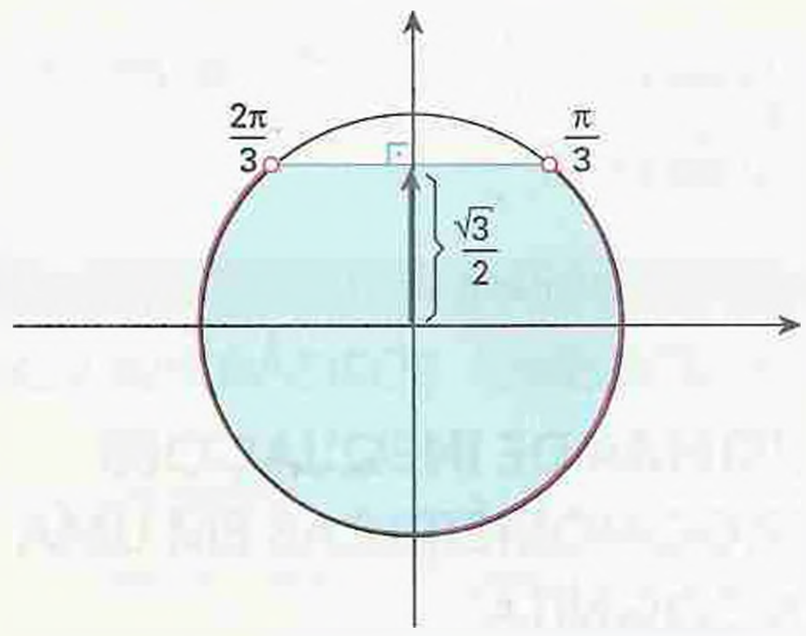


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$.

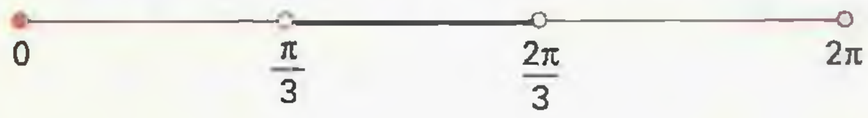
R.3 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{3}}{2}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Devemos determinar os pontos da circunferência trigonométrica que têm ordenada menor que $\frac{\sqrt{3}}{2}$:



A maior dificuldade dessa resolução é a maneira de se dar a resposta. Para entender o porquê da forma da resposta, vamos "esticar" (retificar) a circunferência:



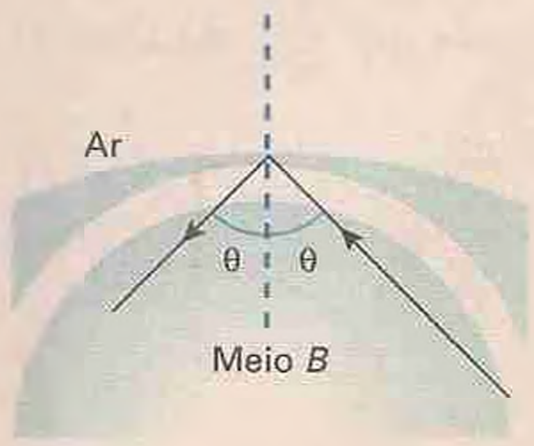
Dessa maneira, percebemos que o conjunto solução é a reunião de **dois** intervalos, ou seja:

$$\left[0, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right[$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

A reflexão total da luz

As inequações trigonométricas estão presentes no estudo da refração, reflexão e absorção da luz. Por exemplo, quando um raio de luz monocromática se propaga num meio *B* de índice de refração 2 e atinge a superfície que separa esse meio do ar, para que haja reflexão total da luz, a medida θ do ângulo de incidência deve satisfazer a inequação $\text{sen } \theta > \frac{1}{2}$.



EXERCÍCIO BÁSICO

B.1 Resolva as seguintes inequações, para $0 \leq x < 2\pi$:

a) $\text{sen } x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen } x \leq -\frac{1}{2}$

c) $\text{sen } x > 0$

d) $\text{sen } x \leq \frac{1}{2}$

e) $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos x \leq 0$

h) $\cos x > 0$

i) $\text{sen } x \geq 1$

j) $\cos x < 1$

k) $\cos x > 1$

l) $\text{sen } x \neq 1$

m) $\cos x \neq \frac{1}{2}$

Exercício complementar C.1

2. SISTEMA DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UMA INCÓGNITA

Um sistema de inequações trigonométricas em uma incógnita é um conjunto de inequações simultâneas.

Exemplo

$$\begin{cases} \text{sen } x > \frac{1}{2} \\ \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Resolver um sistema de inequações significa encontrar o conjunto dos valores da incógnita que satisfaçam todas as inequações do sistema, simultaneamente.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

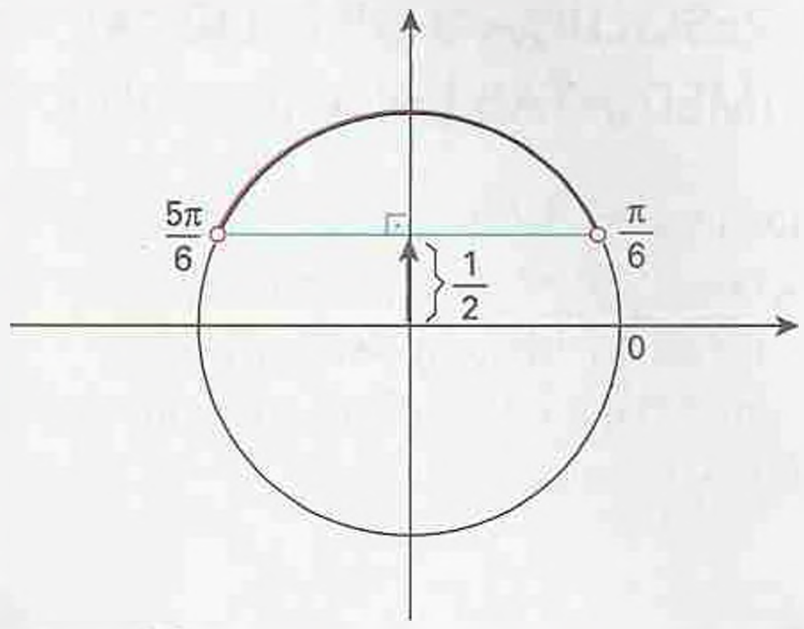
R.4 Resolver para $0 \leq x < 2\pi$, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} \text{sen } x > \frac{1}{2} \\ \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

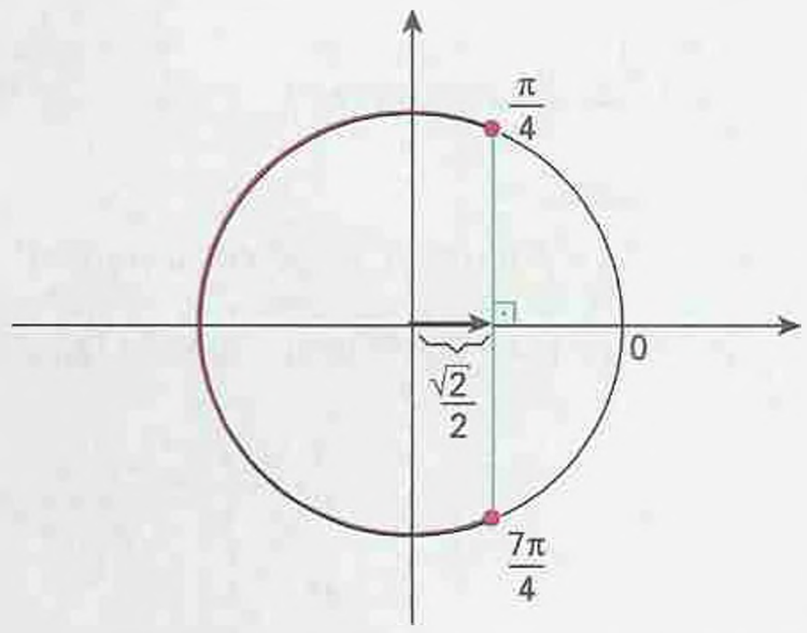
Resolução

Resolvendo cada uma das inequações do sistema, temos:

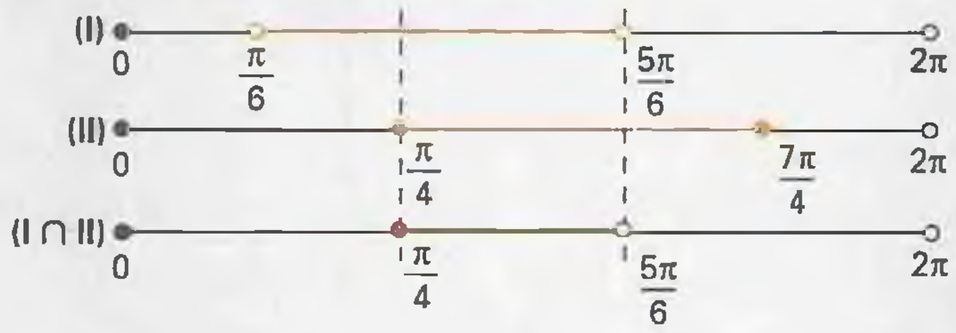
I. $\text{sen } x > \frac{1}{2}$



II. $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$



O conjunto solução do sistema é a intersecção das soluções de (I) e (II). Retificando as circunferências, temos:



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6}\right\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.2 (Mackenzie-SP) Resolvendo o sistema $\begin{cases} \text{sen } x \geq 0 \\ \cos x < \frac{1}{2} \end{cases}$ para $0 \leq x < 2\pi$, obtém-se:

a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{6} < x \leq \pi$

c) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{4} < x \leq \pi$

e) $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$

B.3 Resolva, para $0 \leq x < 2\pi$, o sistema $\begin{cases} \operatorname{sen} x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

B.4 Determine, para $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução do sistema $\begin{cases} \operatorname{sen} x > 0 \\ \cos x \leq 0 \end{cases}$

B.5 Resolva, para $0 \leq x < 2\pi$, o sistema $\begin{cases} \operatorname{sen} x > -\dfrac{1}{2} \\ \cos x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

B.6 (Cefet-PR) No universo $U = [0, 2\pi[$, o conjunto solução de $\dfrac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leq x < \dfrac{\pi}{3}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leq x < \dfrac{\pi}{3} \text{ e } \dfrac{2\pi}{3} \leq x < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leq x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} \leq x < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{3} \text{ e } \dfrac{2\pi}{3} \leq x < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{6} \leq x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } \dfrac{2\pi}{3} < x \leq \dfrac{5\pi}{6}\right\}$

Sugestão. A dupla desigualdade $\dfrac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} \operatorname{sen} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Exercícios complementares de C.2 a C.5

3. RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS ATRAVÉS DE INEQUAÇÕES POLINOMIAIS

Chama-se **inequação polinomial** na incógnita x toda inequação que pode ser colocada em uma das formas $P(x) > 0$, $P(x) \geq 0$, $P(x) < 0$, $P(x) \leq 0$, $P(x) \neq 0$, em que $P(x)$ é um polinômio.

Exemplos

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$ (inequação do 2º grau)

b) $x^3 - 4x^2 + 3x \leq 0$ (inequação do 3º grau)

Certas inequações trigonométricas podem ser resolvidas através de inequações polinomiais auxiliares, bastando para isso uma mudança de variável. Resolveremos algumas, como modelos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

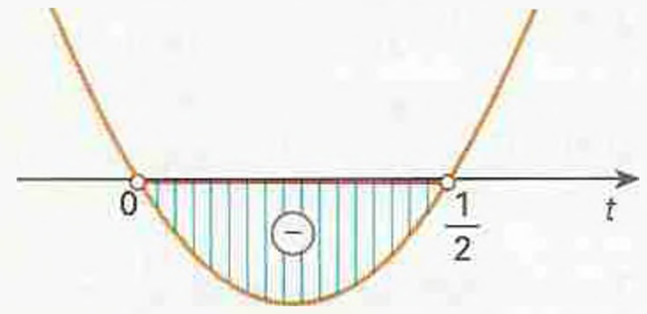
R.5 Resolver a inequação $2\cos^2 x - \cos x < 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Fazendo a mudança de variável $\cos x = t$, temos:

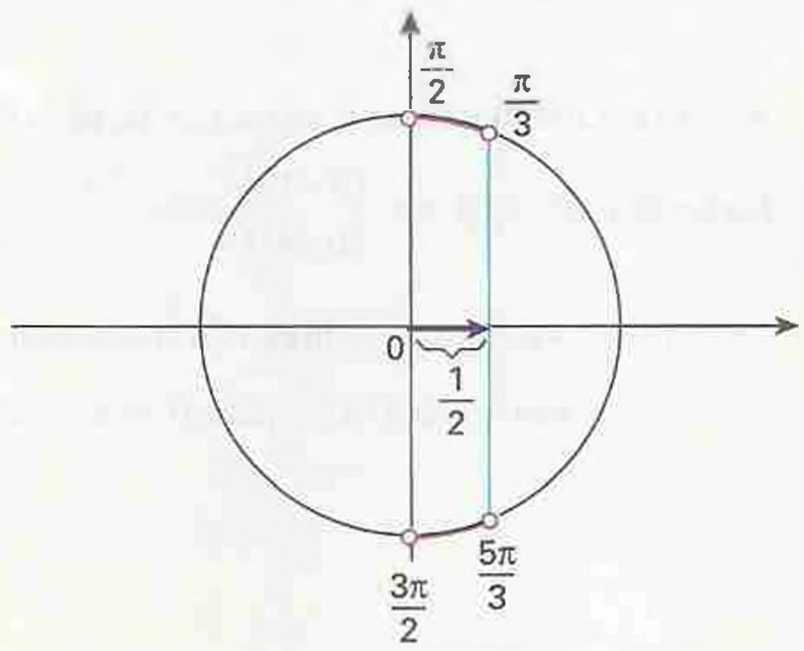
$$2t^2 - t < 0$$

A função $f(t) = 2t^2 - t$ tem o gráfico:



Observe que $f(t) < 0$ para $0 < t < \dfrac{1}{2}$.

Logo, $0 < \cos x < \dfrac{1}{2}$.



Assim, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 Resolva a inequação:

$$2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x < 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

B.8 Obtenha, para $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da inequação $2\operatorname{sen}^2 x - \sqrt{2} \operatorname{sen} x \geq 0$.

B.9 (U. F. Juiz de Fora-MG) Resolva a inequação:

$$2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 > 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

B.10 Determine o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, de modo que $2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x - 1 < 0$.

B.11 Resolva, para $0 \leq x < 2\pi$, a inequação:

$$2\operatorname{sen}^2 x + 5\cos x - 4 > 0$$

Exercícios complementares de C.6 a C.8

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (FGV-SP) Para que valores reais de a tem-se que $x^2 + 2x + 2 \text{ sen } a > 0$ para qualquer número real x?

a) Qualquer a, $a > \frac{\pi}{6}$

b) Qualquer a, $a > \frac{\pi}{3}$

c) Qualquer a, $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{3}$

d) Qualquer a, $\frac{\pi}{3} < a < \frac{2\pi}{3}$

e) Qualquer a, $\frac{\pi}{6} < a < \frac{5\pi}{6}$

C.2 (F. Taubaté-SP) Se $|\cos x| < \frac{1}{2}$ e $0 < x < \pi$, então:

a) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

b) $0 < x < \frac{\pi}{3}$

c) $0 < x < \frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

C.3 Resolva a inequação $\text{sen } x \cos x > 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Sugestão. $ab > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$

C.4 Determine o conjunto solução da inequação:

$$\text{sen } x \cos x \leq 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

C.5 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, que satisfaçam a desigualdade:

$$\left(\text{sen } x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Sugestão. $ab < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

C.6 (FGV-SP) A solução da inequação $\sqrt{2} \cos^2 x > \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

a) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$

b) $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leq x < \pi$

c) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$

d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

e) n.d.a.

C.7 (F. F. C. L. Santa Cecília-SP) Se $x \in]0°, 360°[$ e $\text{sen } x > \text{sen}^2 x$, então:

a) $0° < x < 90°$

b) $0° < x < 180°$

c) $90° < x < 270°$

d) $120° < x < 240°$

e) $0° < x < 180°$ e $x \neq 90°$

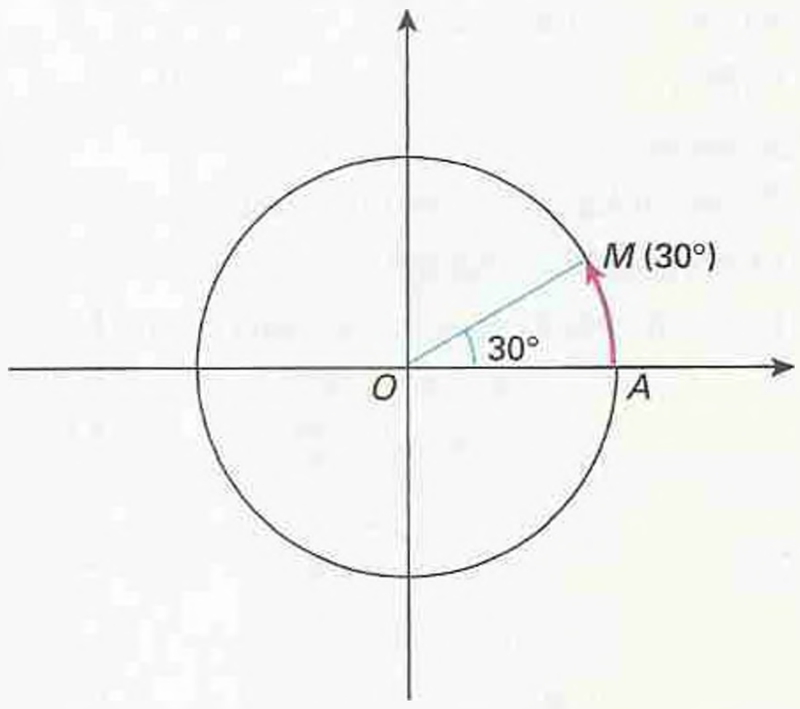
C.8 Resolva, para $0 \leq x < 2\pi$, o sistema $\begin{cases} 2 \text{ sen}^2 x - 1 < 0 \\ \cos x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Capítulo 31

TANGENTE DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

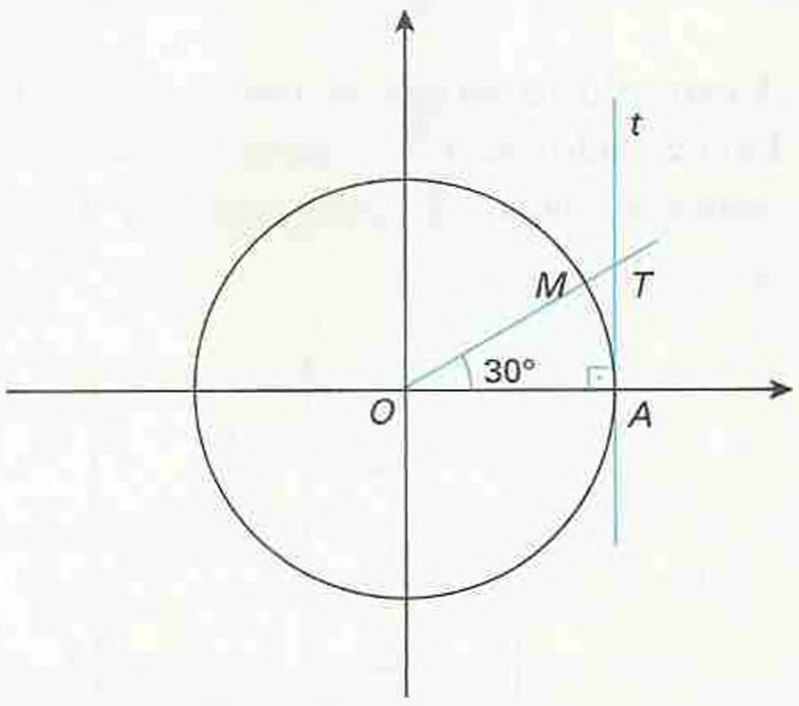
1. EXTENSÃO DO CONCEITO DE TANGENTE

Para compreendermos a definição que virá a seguir, consideremos na circunferência trigonométrica um arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida 30°:



A medida do ângulo $A\hat{O}M$ também é 30°.

Seja t a reta perpendicular ao eixo das abscissas pelo ponto A:



O prolongamento do raio $\overline{OM}$ intercepta a reta t no ponto T. No triângulo AOT, temos que:

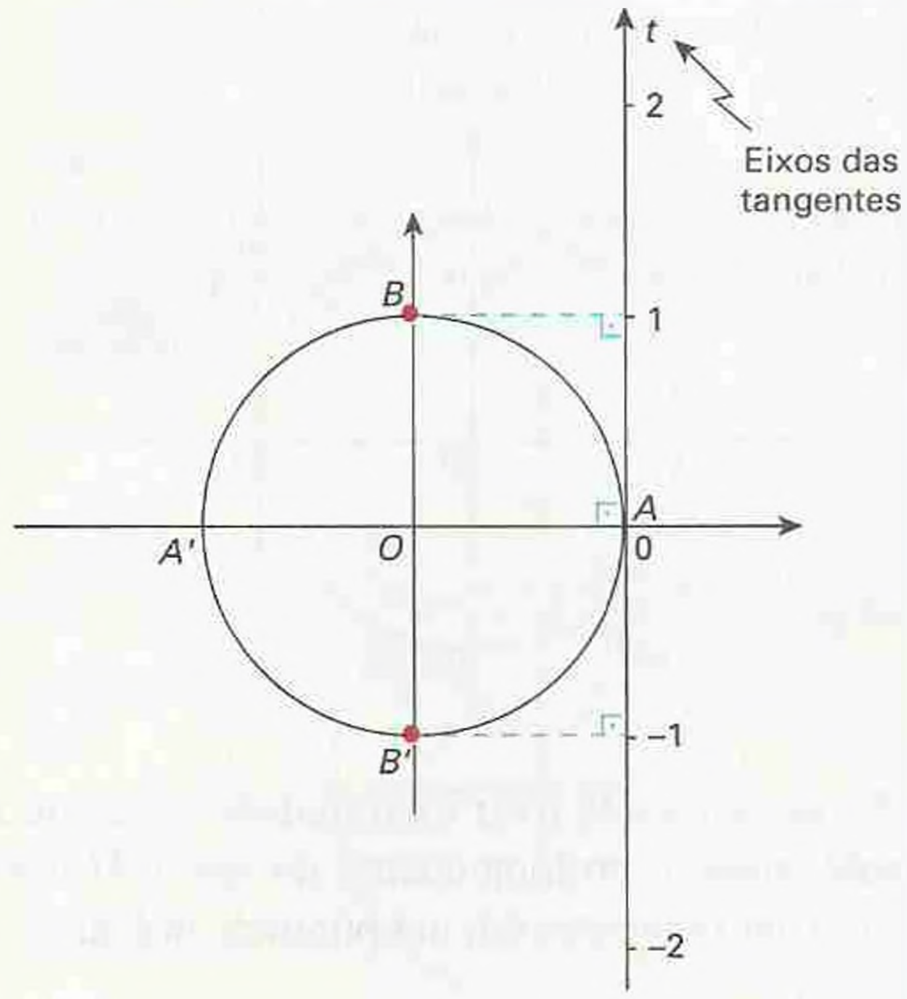
$$\text{tg } 30° = \frac{AT}{OA}$$

Como $OA = 1$, pois $\overline{OA}$ é o raio da circunferência trigonométrica, obtemos:

$$\text{tg } 30° = \frac{AT}{1} \Rightarrow \quad \text{tg } 30° = AT$$

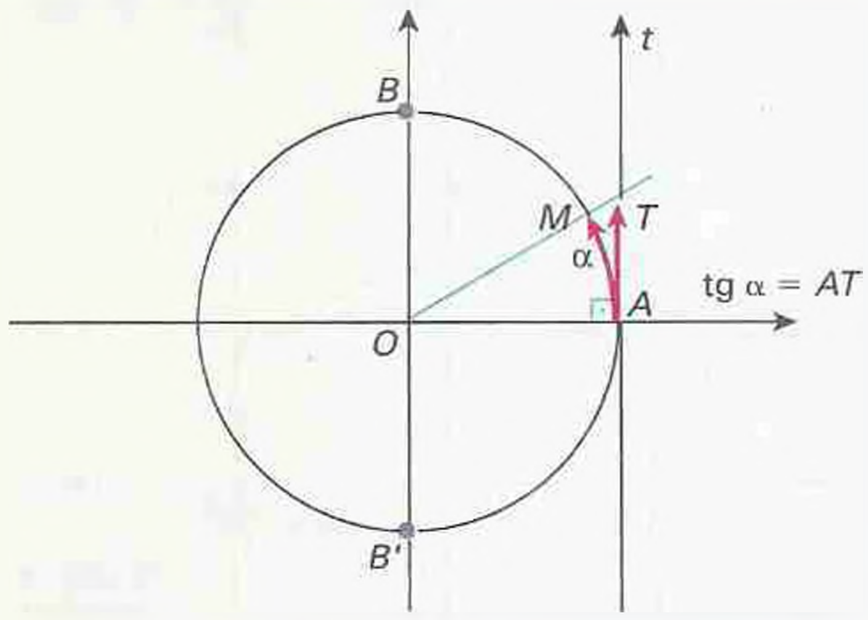
Assim, a tg 30° é a medida do segmento $\overline{AT}$.

Para estendermos o conceito de tangente de um arco trigonométrico, consideremos como **eixo das tangentes** o eixo real t, perpendicular ao eixo das abscissas, com origem A e a mesma orientação do eixo das ordenadas.



Definição

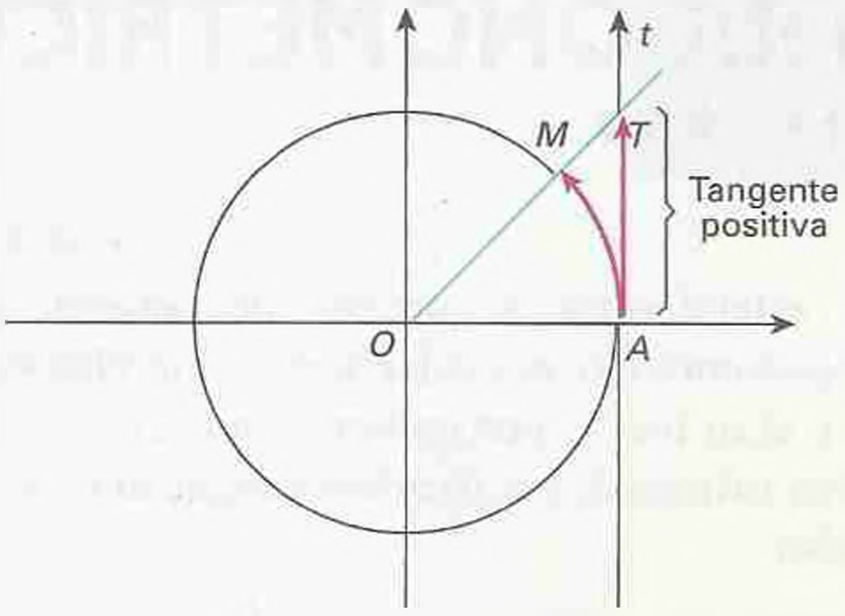
Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$, $M \neq B$ e $M \neq B'$, de medida α, chama-se **tangente de** α (tg α) a ordenada do ponto T obtido pela intersecção do prolongamento do raio $\overline{OM}$ com o eixo das tangentes.

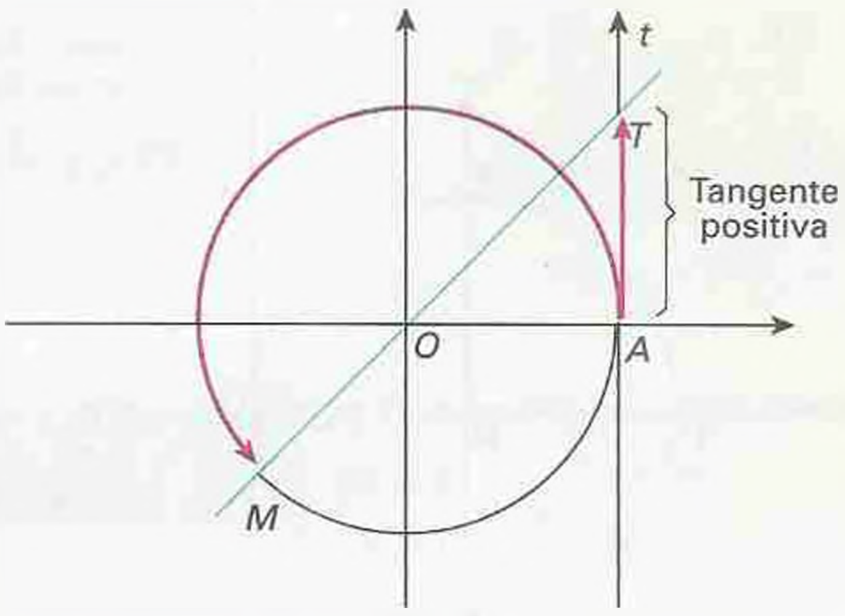


Observe que o ponto M não pode coincidir com B nem com B', pois os prolongamentos dos raios $\overline{OB}$ e $\overline{OB'}$ não interceptam o eixo das tangentes. Por isso dizemos que **não existe** tangente de um arco com extremidade em B ou B'.

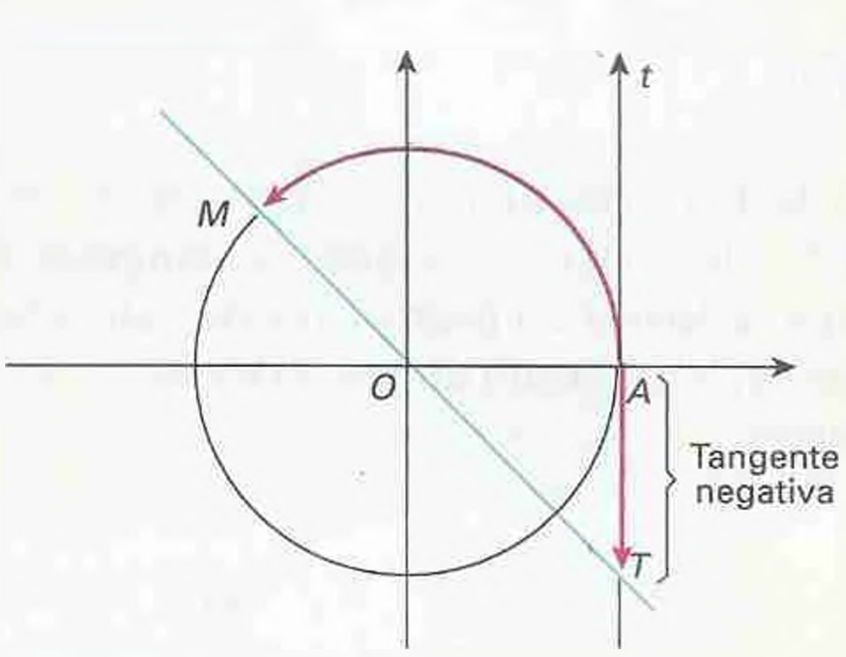
Variação de sinal da tangente

I. Se um arco $\overset{\frown}{AM}$ tiver extremidade no 1º ou no 3º quadrante, então o prolongamento do raio $\overline{OM}$ interceptará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada positiva:



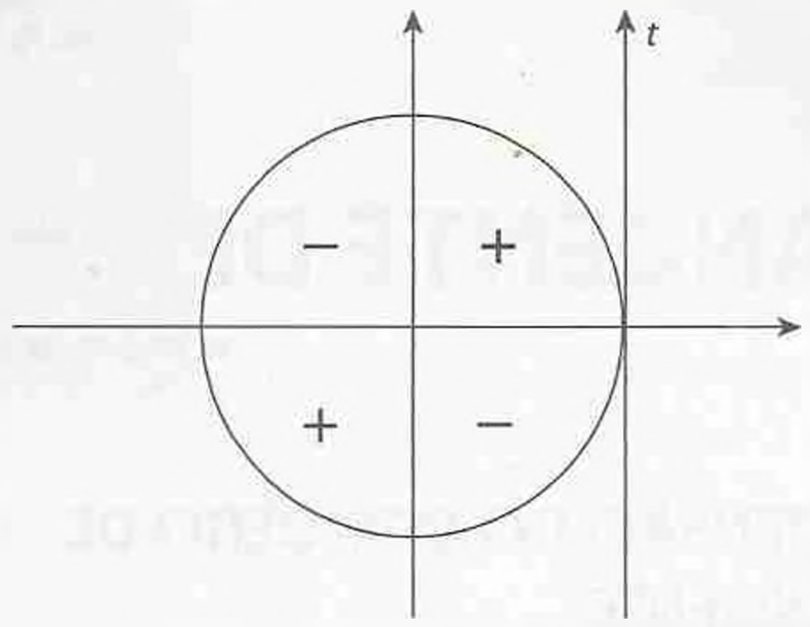


II. Se um arco $\overset{\frown}{AM}$ tiver extremidade no 2º ou no 4º quadrante, então o prolongamento do raio $\overline{OM}$ interceptará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada negativa:



Por (I) e (II) dizemos que a tangente é positiva para arcos do 1º e do 3º quadrante e negativa para arcos do 2º e do 4º quadrante.

Em resumo, a variação de sinal da tangente é dada por:



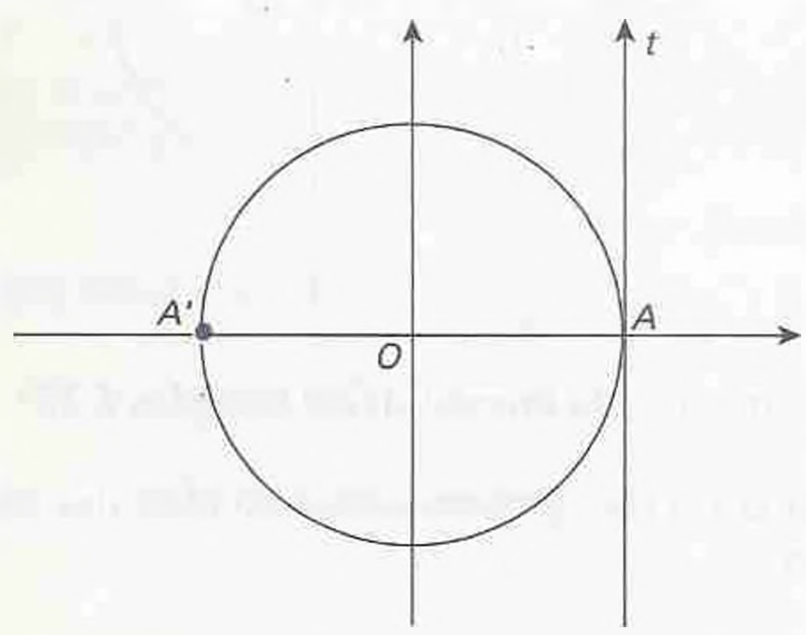
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular os valores de:

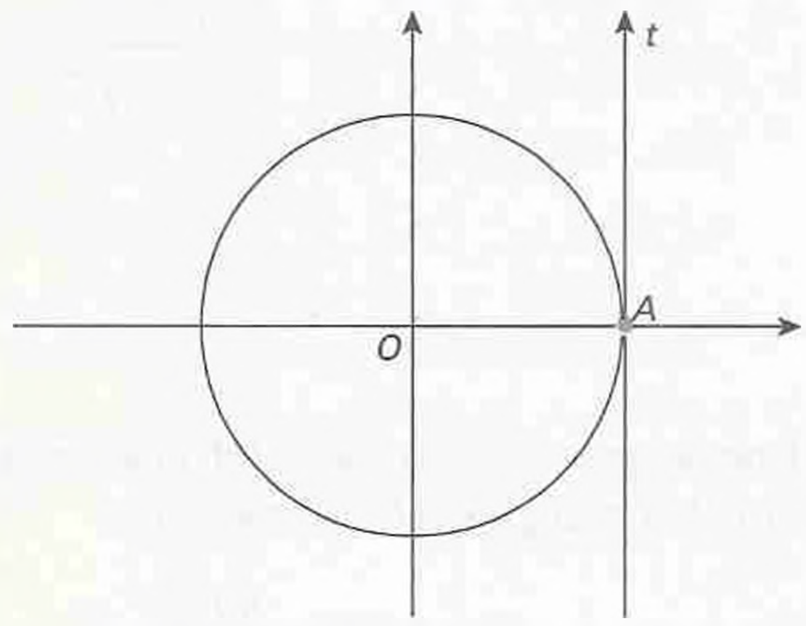
a) tg π b) tg 0

Resolução

a) A extremidade do arco de medida π rad é o ponto A'. Prolongando o raio $\overline{OA'}$, interceptamos o eixo das tangentes no ponto A, cuja ordenada é zero. Logo, tg π = 0.



b) A extremidade do arco de medida 0 rad é o ponto A. Prolongando o raio $\overline{OA}$, interceptamos o eixo das tangentes no ponto A, cuja ordenada é zero. Logo, tg 0 = 0.



R.2 Determinar o sinal do produto:

$$P = \text{tg } 13° \text{ tg } 190° \text{ tg } 352°$$

Resolução

Os arcos de medidas 13°, 190° e 352° têm extremidades no 1º, no 3º e no 4º quadrante, respectivamente.

Logo, tg 13° > 0; tg 190° > 0; tg 352° < 0.

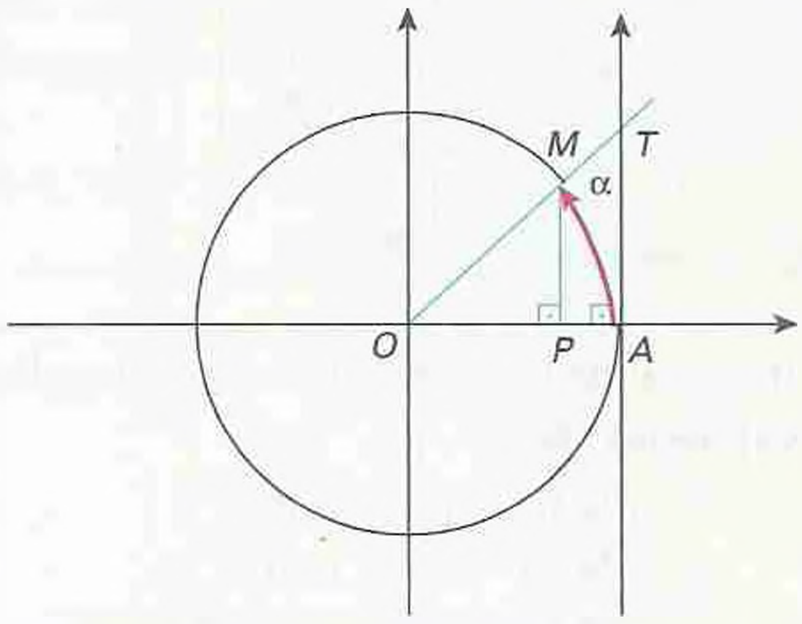
Assim, temos que $P < 0$.

Teorema

Se $\cos \alpha \neq 0$, então $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.

Demonstração

Faremos a demonstração apenas no 1º quadrante.



$$\triangle OTA \sim \triangle OMP \Rightarrow \frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

Mas temos que:

$AT = \operatorname{tg} \alpha$
$OA = 1$
$PM = \operatorname{sen} \alpha$
$OP = \cos \alpha$

Logo, $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{1} = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$.

(c.q.d.)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ e que $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, determinar os valores de sen α e cos α.

Resolução

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 2 \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 2 \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \operatorname{sen} \alpha = 2 \cos \alpha \ \text{(I)} \\ \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \ \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \therefore 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\therefore 5 \cos^2 \alpha = 1 \therefore \cos^2 \alpha = \dfrac{1}{5} \therefore \cos \alpha = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como α pertence ao 3º quadrante, temos

$\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Fazendo $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ em (I), temos

$\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Vamos estudar as relações existentes entre tangentes de arcos do 2º, do 3º ou do 4º quadrante com os arcos correspondentes no 1º quadrante.

Para exemplificar, usaremos a tabela de arcos notáveis:

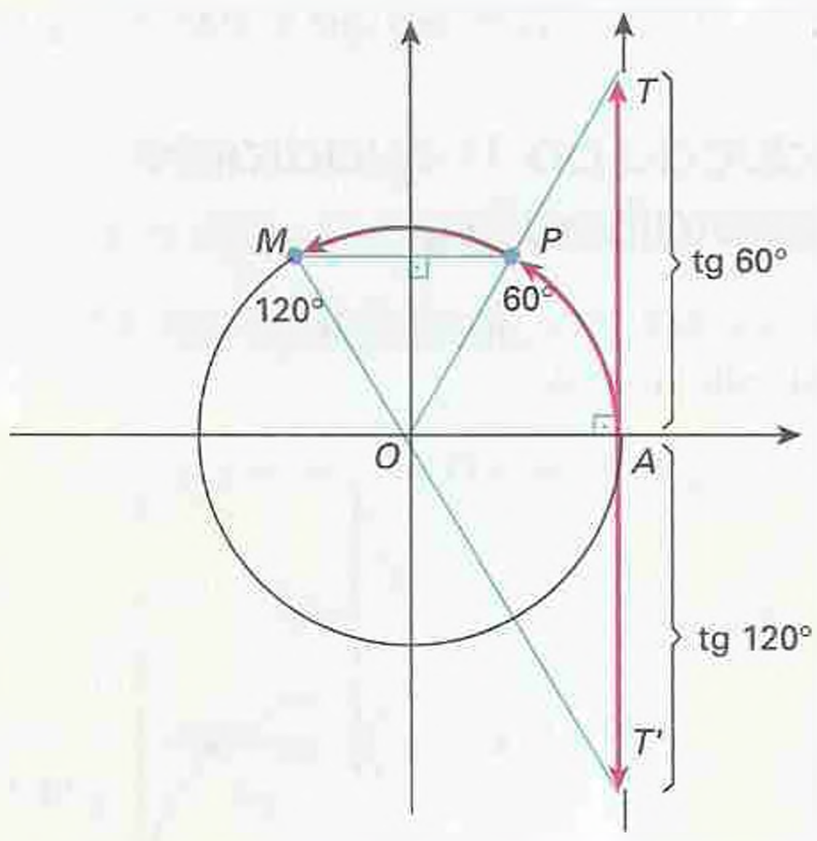
	30º	45º	60º
tg	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcular:
a) tg 120° b) tg 210° c) tg 300°

Resolução

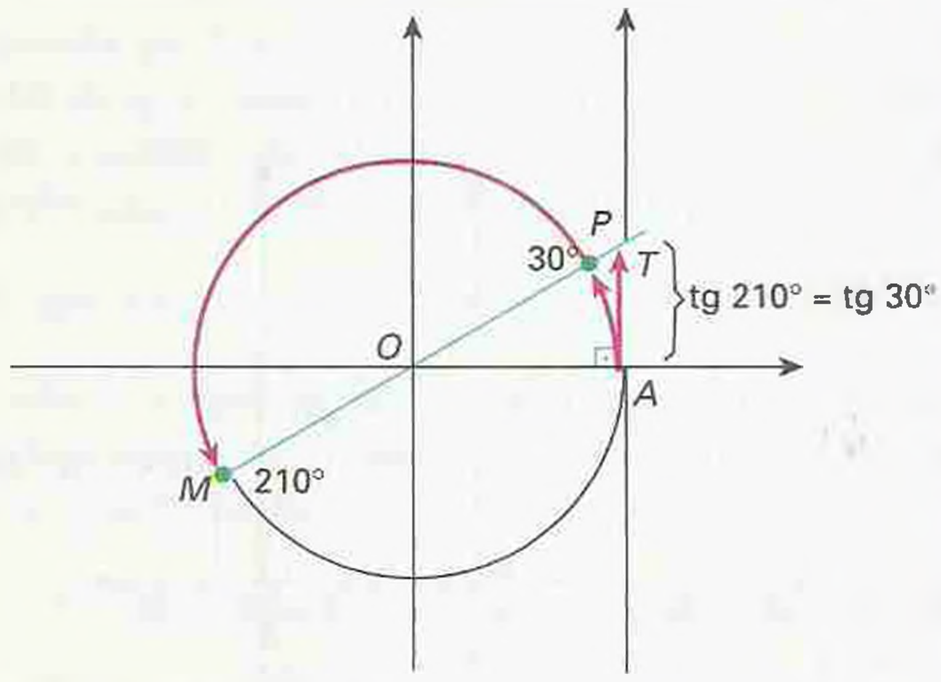
a) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 120° é o ponto *P*, extremidade do arco de 60°.



Como os triângulos *OTA* e *OT'A* são congruentes, segue-se que os pontos *T* e *T'* têm ordenadas opostas.

Logo, concluímos que $\operatorname{tg} 120° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$.

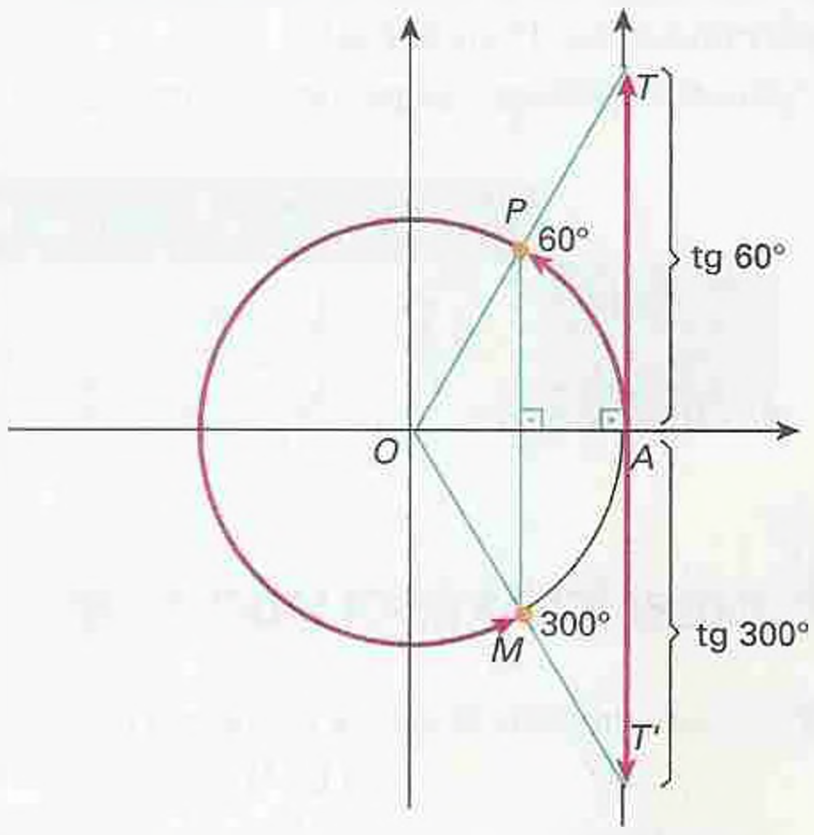
b) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade *M* do arco de 210° é o ponto *P*, extremidade do arco de 30°.



Observe que a ordenada do ponto *T* é simultaneamente a tg 210° e a tg 30°, isto é:

$$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

c) O correspondente, no 1º quadrante, da extremidade M do arco de 300° é o ponto P, extremidade do arco de 60°.

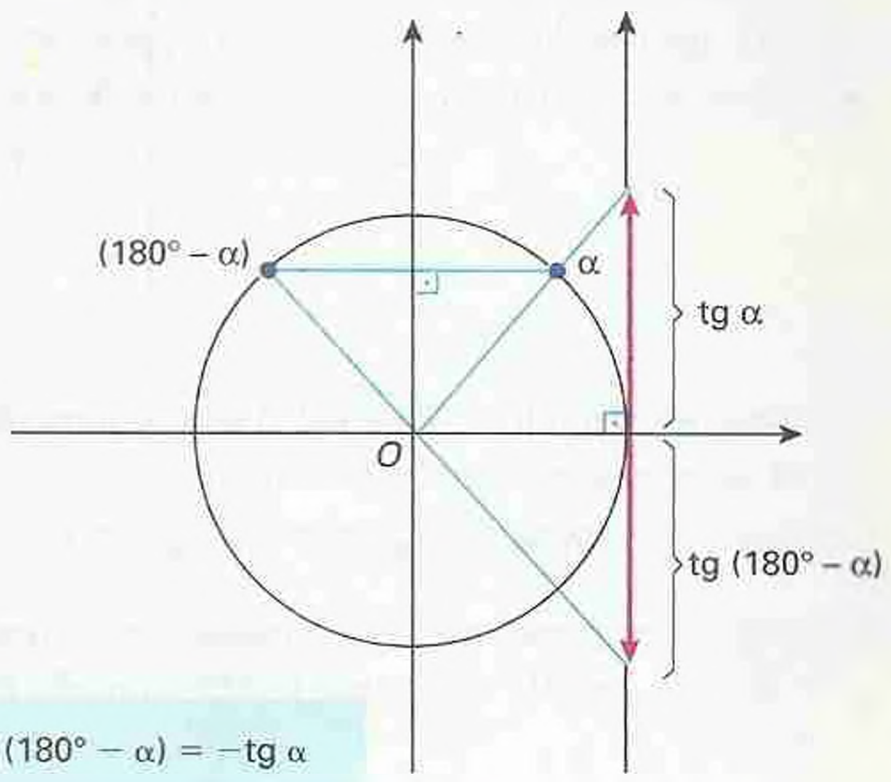


Como os triângulos OTA e $OT'A$ são congruentes, segue-se que os pontos T e T' têm ordenadas opostas.

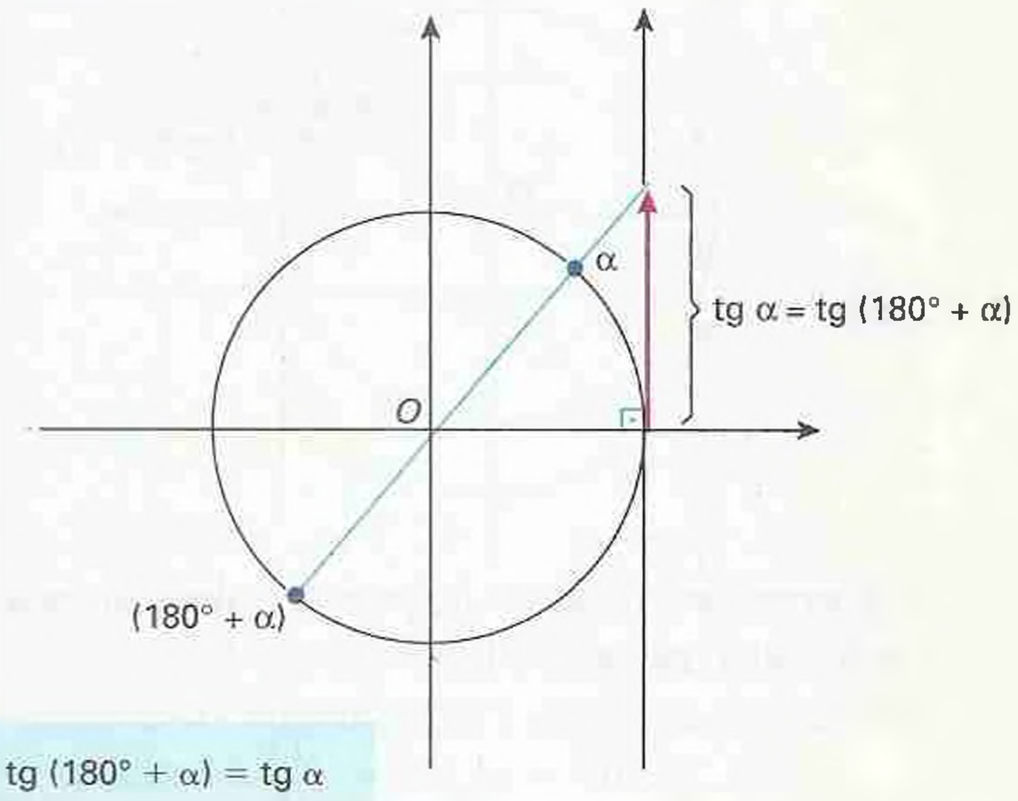
Logo, concluímos que $\text{tg } 300° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$.

Redução ao 1º quadrante (generalização)

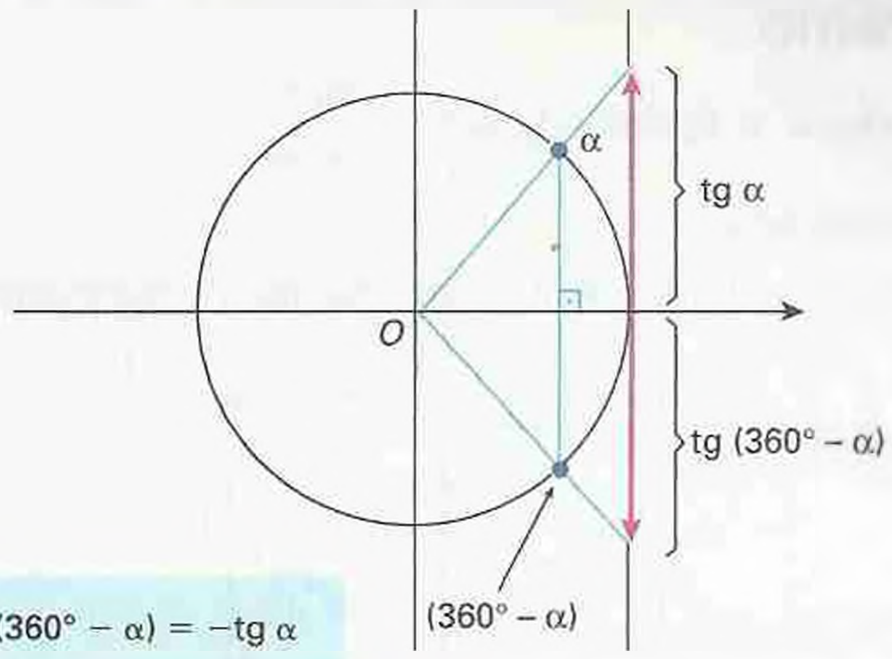
Dado um arco de medida α, com extremidade no 1º quadrante, temos:



tg (180° – α) = –tg α



tg (180° + α) = tg α



tg (360° – α) = –tg α

Se α for uma medida em radianos, essas relações devem ser expressas como:

$$\text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$
$$\text{tg } (\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$$
$$\text{tg } (2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$$

Nota

Existindo a tangente de α, mesmo que a extremidade do arco α não seja ponto do 1º quadrante, as três relações anteriores continuam verdadeiras. Verifique!

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Simplificar a expressão, com $\text{tg } \alpha \neq 0$:

$$E = \frac{\text{tg } (180° - \alpha) - \text{tg } (180° + \alpha)}{\text{tg } (360° - \alpha)}$$

Resolução

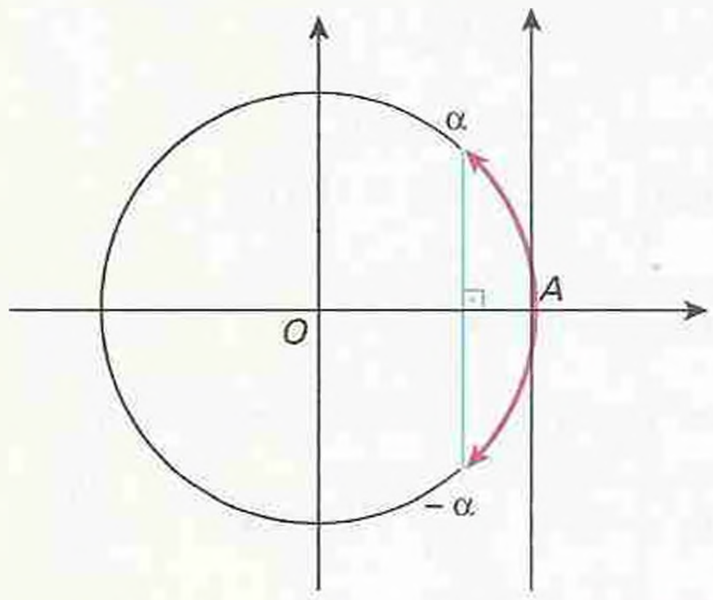
Sabemos que $\text{tg } (180° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$,
$\text{tg } (180° + \alpha) = \text{tg } \alpha$ e $\text{tg } (360° - \alpha) = -\text{tg } \alpha$.

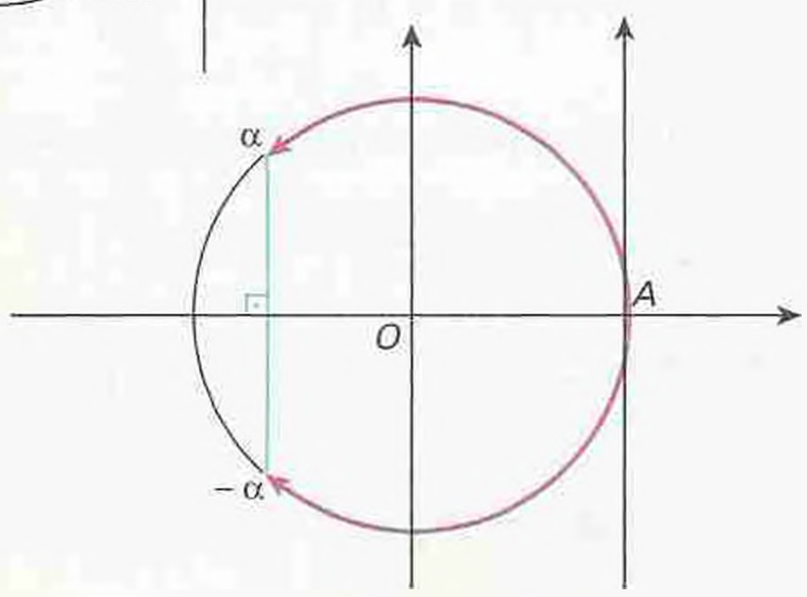
Assim, $E = \dfrac{-\text{tg } \alpha - \text{tg } \alpha}{-\text{tg } \alpha} \therefore E = \dfrac{-2 \text{ tg } \alpha}{-\text{tg } \alpha} \therefore E = 2.$

3. ARCOS DE MEDIDAS OPOSTAS (α E $-\alpha$)

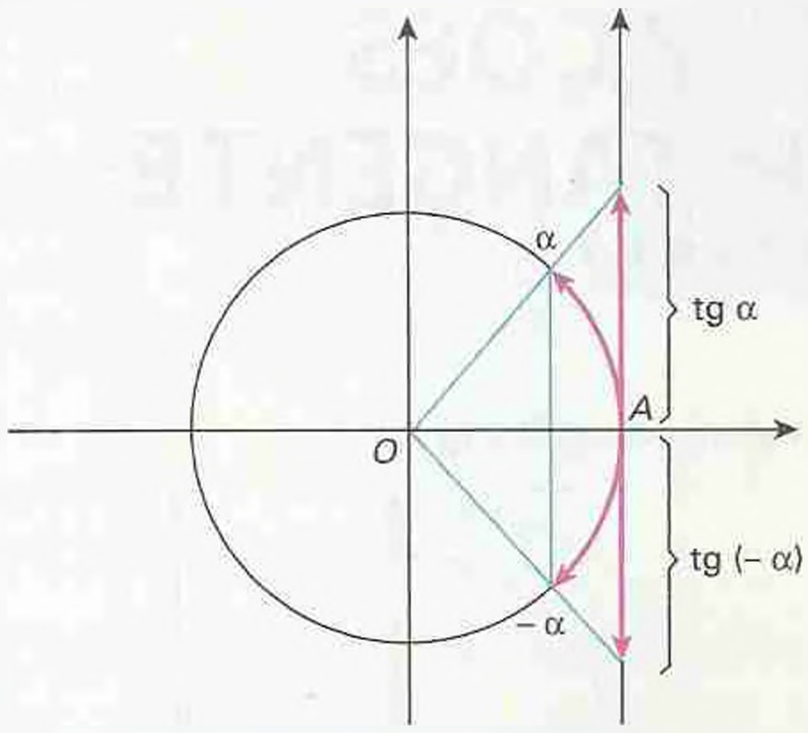
Dois arcos de medidas opostas (α e $-\alpha$) têm extremidades simétricas em relação ao eixo dos co-senos.

Observe:





Note que os prolongamentos dos raios que passam pelas extremidades dos arcos α e $-\alpha$ interceptam o eixo das tangentes em pontos de ordenadas opostas, conforme figura abaixo.



Assim, $\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Calcular o valor de tg $(-60°)$.

Resolução

Sabemos que $\text{tg}\,(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$.

Logo, $\text{tg}\,(-60°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule:

a) tg 180° b) tg 360° c) tg 270°

B.2 Sabendo que $\text{tg}\,\alpha = -3$ e que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule os valores de sen α e cos α.

B.3 Sabendo que $\text{sen}\,x = -\frac{3}{5}$ e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, determine tg x.

B.4 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

a) tg 150° c) tg 330° e) tg 225°

b) tg 240° d) tg 135° f) tg 315°

B.5 Calcule o valor da expressão $E = \frac{\text{tg}\,2x + \text{tg}\,3x}{1 - \text{tg}^2\,x}$, para $x = 120°$.

B.6 Com o auxílio da tabela dos arcos notáveis, calcule:

a) $\text{tg}\,\frac{2\pi}{3}$ c) $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4}$

b) $\text{tg}\,\frac{11\pi}{6}$ d) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$

B.7 (U. E. Londrina-PR) O valor da expressão $\cos\frac{2\pi}{3} + \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} + \text{tg}\,\frac{5\pi}{4}$ é:

a) $\frac{\sqrt{2} - 3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) 0

B.8 (U. E. Londrina-PR) A medida α de um ângulo é igual ao triplo da medida do seu suplemento. Nestas condições, tg α é igual a:

a) 1 c) 0 e) -1

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

B.9 Simplifique a expressão:

$$E = \frac{2\,\text{tg}\,(180° + \alpha) - \text{tg}\,(180° - \alpha)}{5\,\text{tg}\,(360° - \alpha)}, \text{ para tg } \alpha \neq 0$$

B.10 Simplifique a expressão:

$$E = \frac{\text{tg}\,(\pi + \alpha) - \text{tg}\,(2\pi - \alpha)}{\text{tg}\,(2\pi - \alpha) + \text{tg}\,(\pi - \alpha)}, \text{ para tg } \alpha \neq 0$$

B.11 Calcule:

a) tg $(-45°)$ b) tg $(-120°)$ c) tg $(-300°)$

B.12 Calcule:

a) $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ c) $\text{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

b) $\text{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (PUC-MG) O arco que tem medida x, em radianos, é tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\text{tg}\,x = -\sqrt{2}$. O valor do seno de x é:

a) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C.2 (Fuvest-SP) Se $\text{tg}\,x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de cos x − sen x é:

a) $\frac{7}{5}$ c) $-\frac{2}{5}$ e) $-\frac{1}{5}$

b) $-\frac{7}{5}$ d) $\frac{1}{5}$

C.3 Sabendo que 2 sen x + cos x = tg x cos x, determine o valor de tg x. **Sugestão.** Devemos ter cos $x \neq 0$, pois, caso contrário, não existiria tg x. Assim sendo, podemos dividir ambos os membros da igualdade por cos x.

C.4 Em que quadrantes o produto sen x tg x é positivo?

C.5 Sendo α a medida de um arco trigonométrico com cos $\alpha > 0$ e tg $\alpha < 0$, determine a que quadrante pertence a extremidade do arco de medida α.

C.6 (U. F. Uberlândia-MG) Obedecidas as condições de existência, a expressão $\frac{\text{tg}\,(-x)}{\text{sen}\,x} + \frac{1}{\cos\,(-x)}$ é idêntica a:

a) 2 cos x d) $-\cos x$

b) $-2\cos x$ e) 0

c) cos x

Capítulo 32
EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM TANGENTE

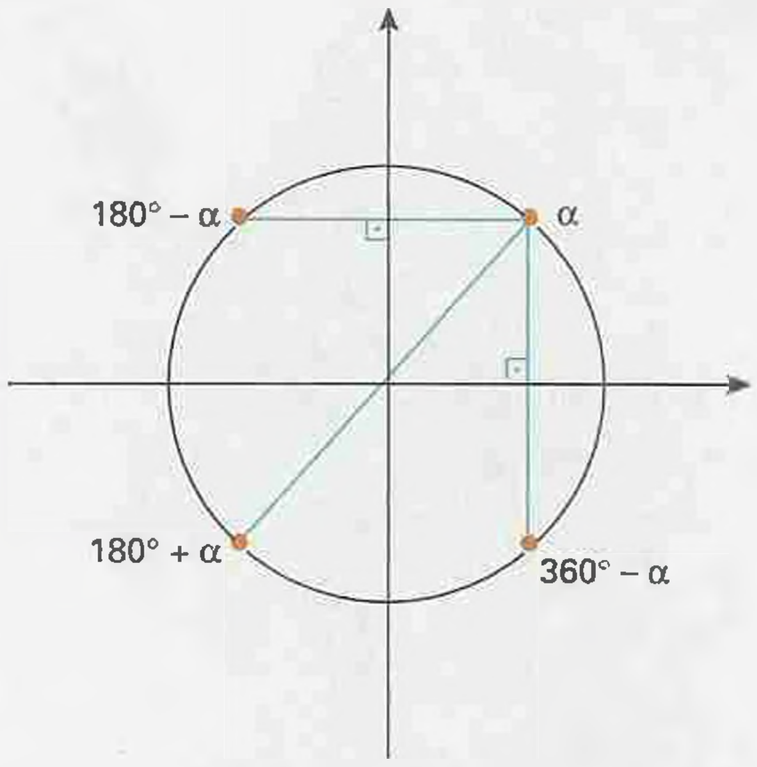
1. MÉTODO GRÁFICO PARA A RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO IMEDIATA EM TANGENTE

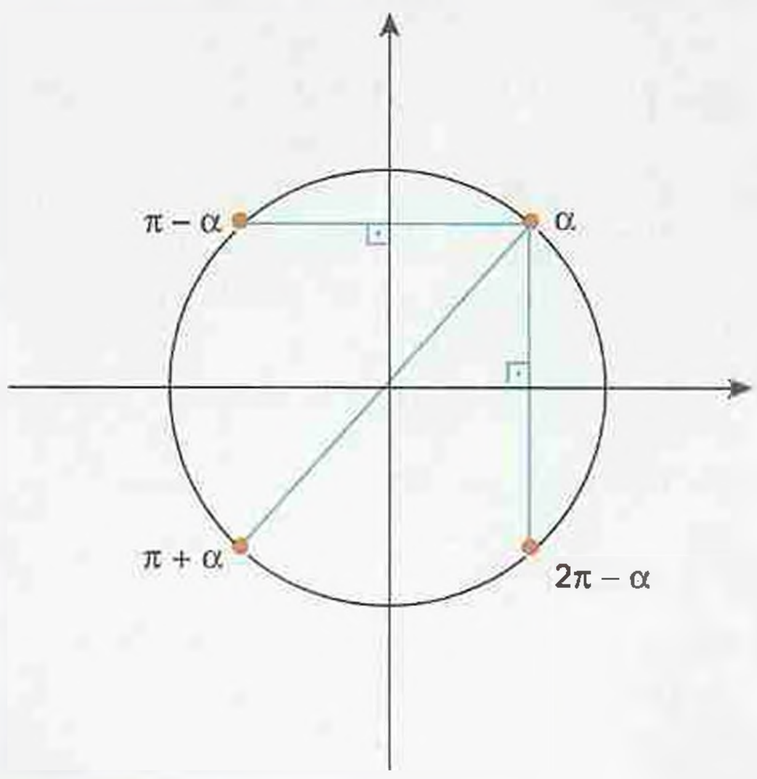
Equações do tipo tg $x = k$, sendo k uma constante real, são chamadas de **equações imediatas**. Para resolvê-las usaremos o método gráfico, do mesmo modo que fizemos para o seno e co-seno. Os requisitos para esse método são:

I. Tabela dos arcos notáveis

	$30° \left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$	$45° \left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$	$60° \left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

II. Simetrias





III. Os valores de tg 0 e tg π

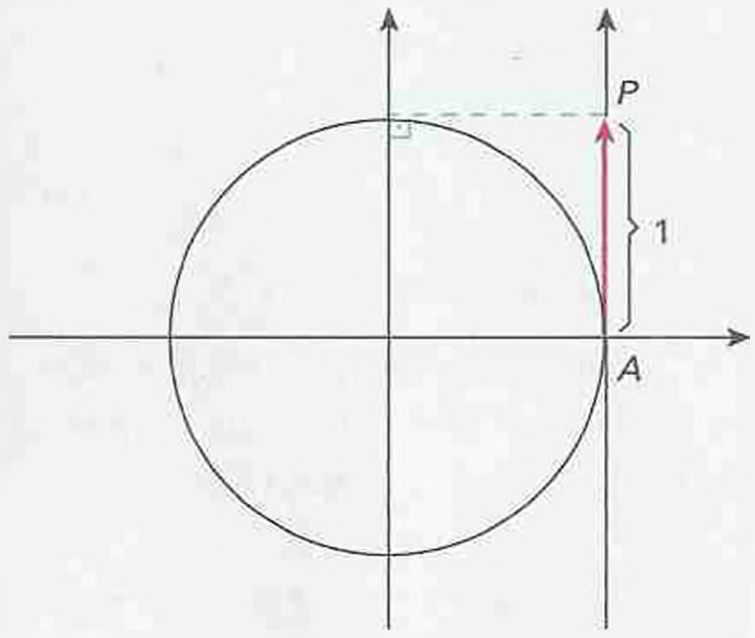
Os prolongamentos dos raios pelos pontos A ou A' encontram o eixo das tangentes no próprio ponto A. Logo, temos tg $0 = 0$ e tg $\pi = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

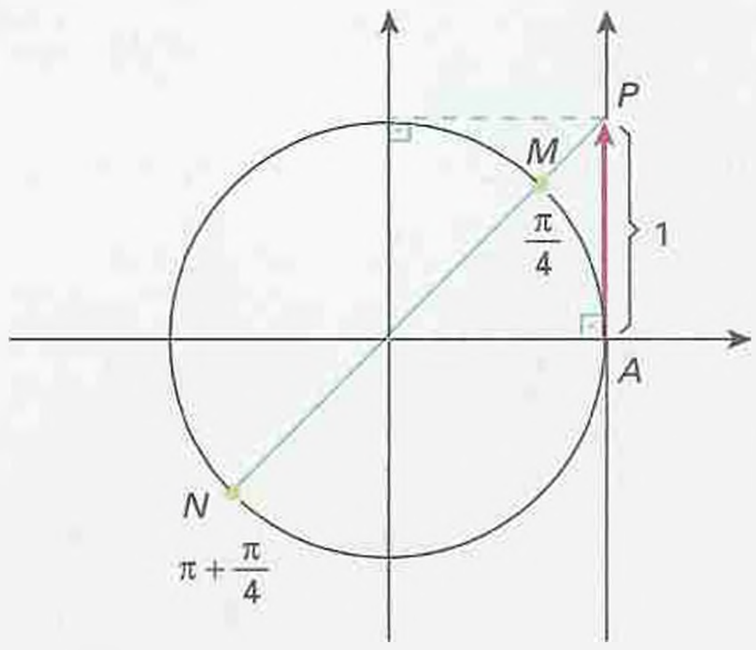
R.1 Resolver a equação tg $x = 1$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Marcamos no eixo das tangentes o ponto P de ordenada igual a 1.



Traçamos por P a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica. Tal reta intercepta a circunferência nos pontos M e N. Os valores da primeira volta positiva associados a M ou N são as raízes da equação.



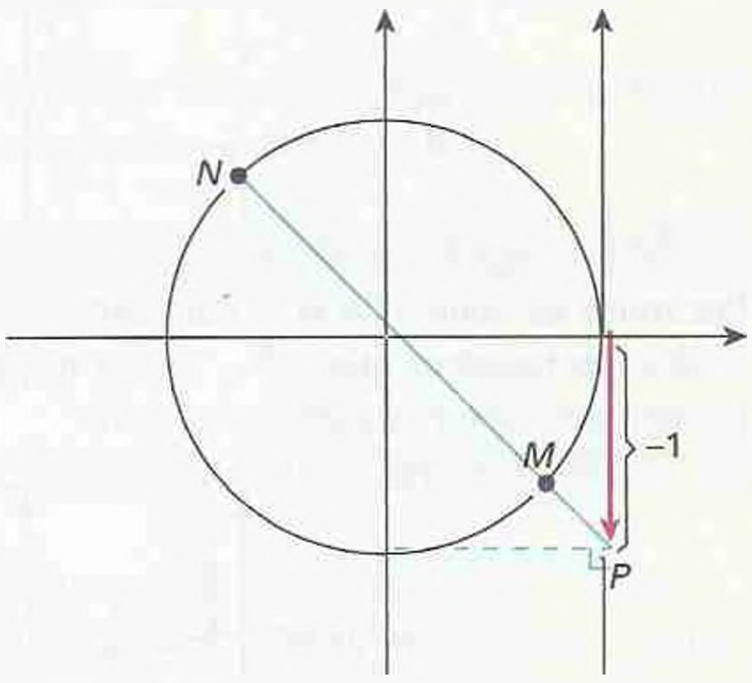
Logo, $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

Assim, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

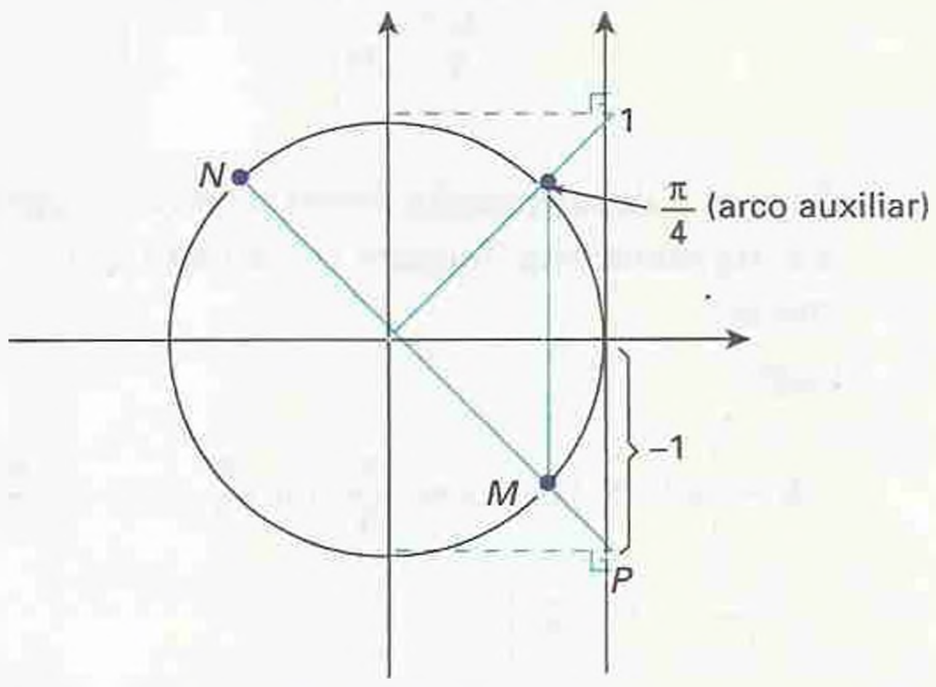
R.2 Resolver a equação $\operatorname{tg} x = -1$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

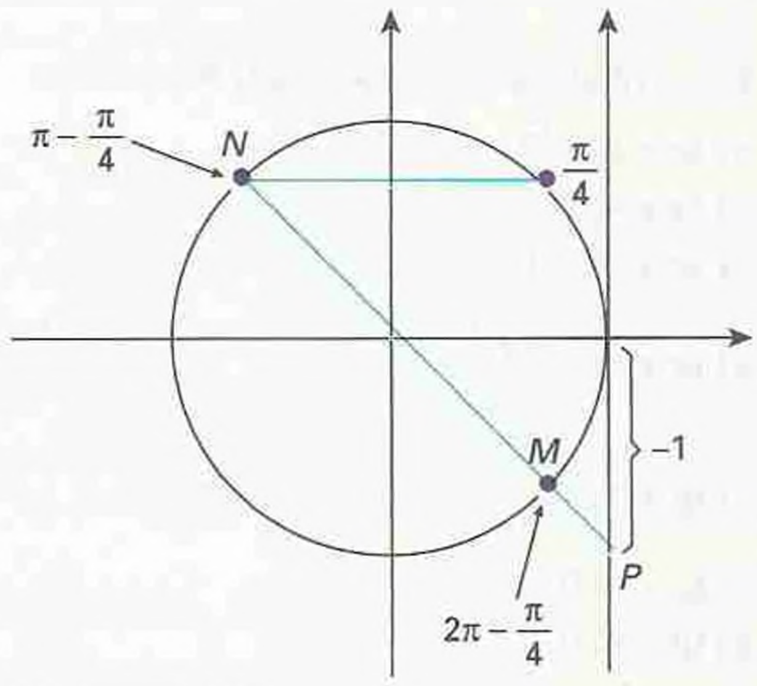
Marcamos no eixo das tangentes o ponto P de ordenada igual a -1 e traçamos por P a reta que passa pelo centro da circunferência, obtendo M e N.



As raízes da equação são os valores associados a M ou N, na primeira volta positiva. Tais valores não estão na tabela dos arcos notáveis, pois M e N estão fora do 1º quadrante. Busquemos, então, no 1º quadrante, o **arco auxiliar**, isto é, o arco (da tabela) cuja tangente é 1.



Finalmente, pelas simetrias, transportamos o arco auxiliar para o 2º e para o 4º quadrante.



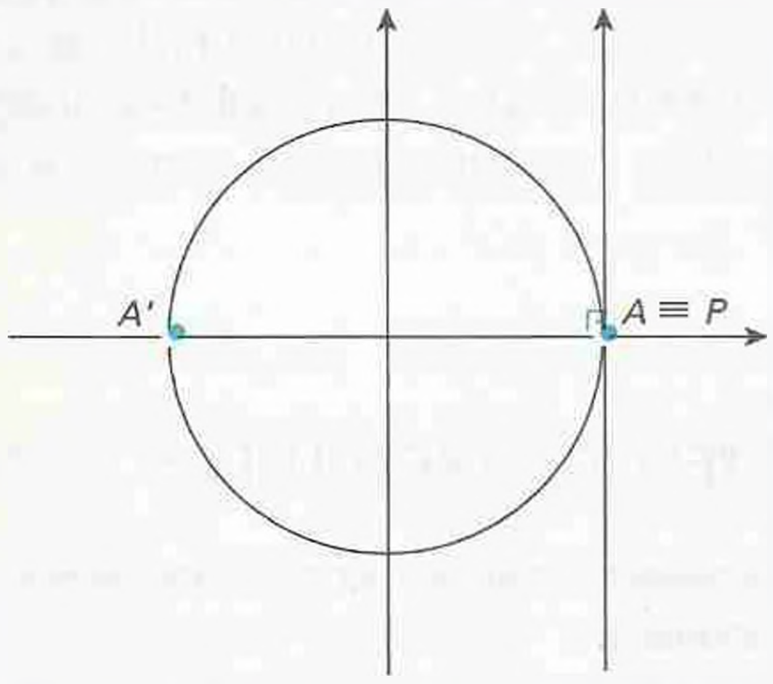
Logo, $x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

Assim, $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

R.3 Resolver a equação $\operatorname{tg} x = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Marcamos no eixo das tangentes o ponto P de ordenada zero e a seguir traçamos por P a reta que passa pelo centro da circunferência trigonométrica:



Tal reta intercepta a circunferência nos pontos A e A'.
Logo, $x = 0$ ou $x = \pi$.
Assim, $S = \{0, \pi\}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Resolva as equações para $0 \leq x < 2\pi$:

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

d) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\operatorname{tg} x = 0$

f) $\operatorname{tg}^2 x = 1$

B.2 Determine o conjunto solução da equação:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

Sugestão. Fatore o primeiro membro e aplique a propriedade do produto nulo.

B.3 (U. Católica de Salvador-BA) Quantas são as soluções reais da equação $3\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$, se x pertence ao intervalo $[0, 2\pi]$?

a) Uma. c) Três. e) Cinco.
b) Duas. d) Quatro.

B.4 (PUC-PR) A soma das raízes da equação $\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cdot \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) π c) $\frac{2\pi}{3}$ e) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{5\pi}{3}$ d) $\frac{7\pi}{3}$

Sugestão. Na equação, o valor do $\cos x$ é certamente diferente de zero, pois se $\cos x = 0$ tem-se que $\operatorname{sen} x = 1$ ou $\operatorname{sen} x = -1$, e, nos dois casos, a sentença $\operatorname{sen} x = \sqrt{3} \cos x$ é falsa. Assim, é permitido dividir ambos os membros da equação por $\cos x$.

B.5 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, resolva a equação $\operatorname{sen} x = \cos x$.

B.6 (Cesgranrio) O número de raízes da equação $\operatorname{tg} x = 4$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4 e) 0

Exercícios complementares de C.1 a C.4

2. MÉTODO GRÁFICO PARA A RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES IMEDIATAS EM TANGENTE

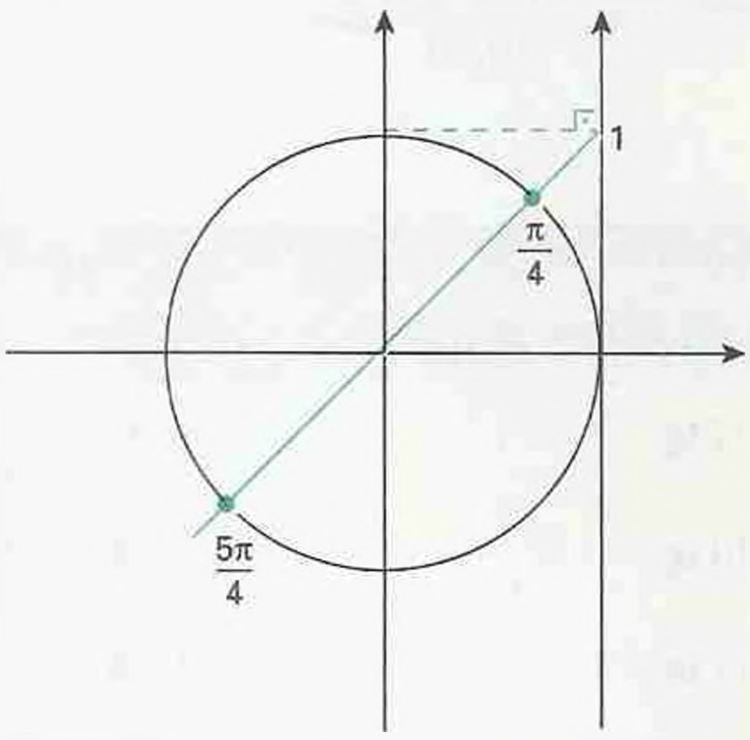
Inequações do tipo $\text{tg}\, x > k$ (ou com as relações $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ ou $\neq$), sendo k uma constante real, são chamadas de **inequações imediatas**. Para resolvê-las usaremos o método gráfico, como mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

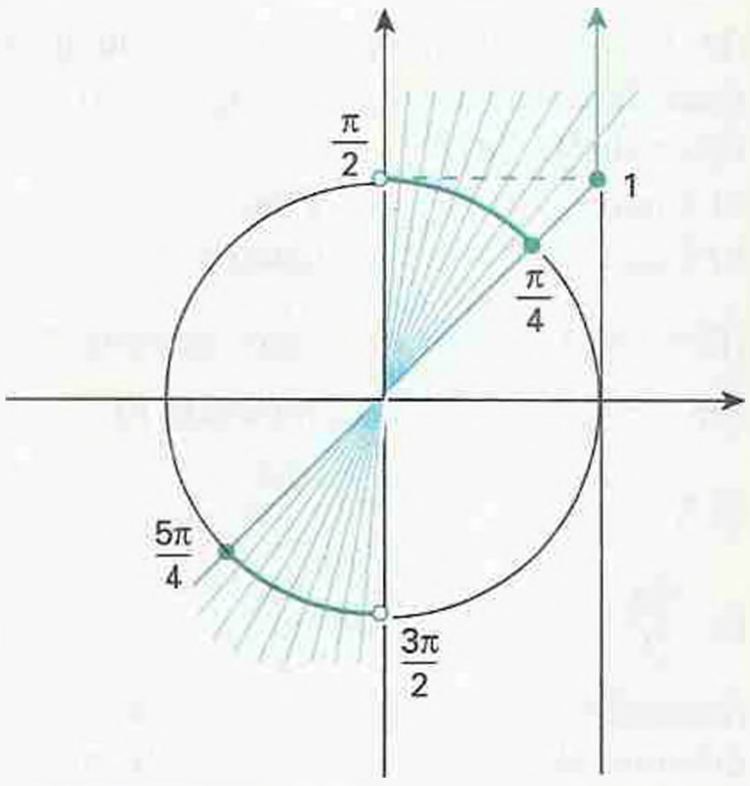
R.4 Resolver a inequação $\text{tg}\, x \geqslant 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Determinemos, inicialmente, os arcos que têm tangente igual a 1:



Pelo ponto de ordenada 1, do eixo das tangentes, e por todos os pontos, desse eixo, com ordenadas maiores que 1, vamos traçar retas que passam pelo centro da circunferência:



Os pontos de intersecção dessas retas com a circunferência trigonométrica formam o conjunto solução da inequação.

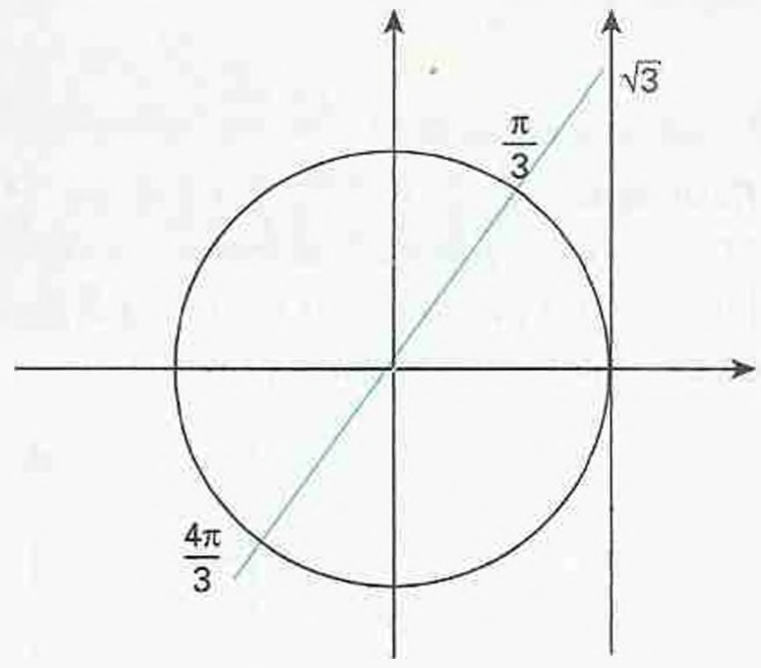
Logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}\right\}$$

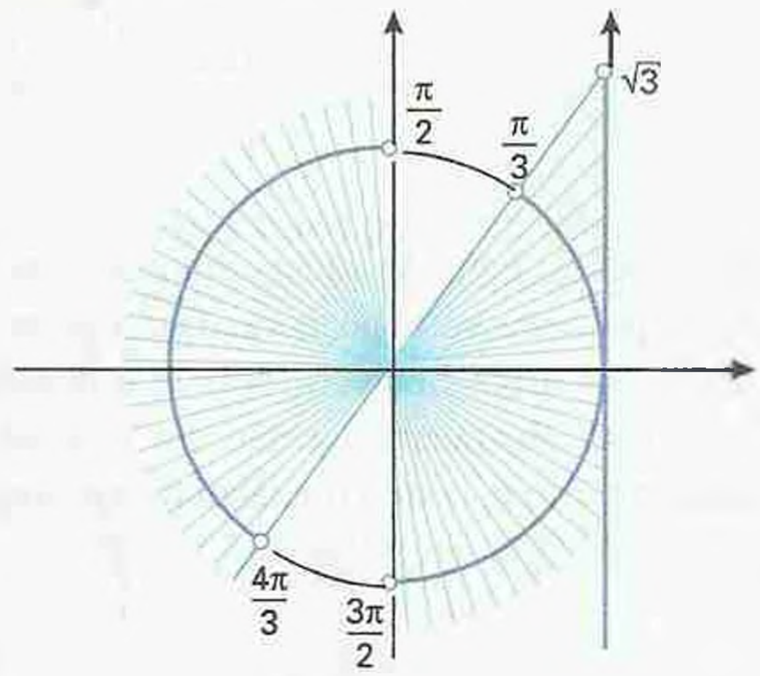
R.5 Resolver a inequação $\text{tg}\, x < \sqrt{3}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

Resolução

Determinemos, inicialmente, os arcos que têm tangente igual a $\sqrt{3}$:



Por todos os pontos do eixo das tangentes que possuem ordenadas menores que $\sqrt{3}$, vamos traçar as retas que passam pelo centro da circunferência:



Os pontos de intersecção dessas retas com a circunferência trigonométrica formam o conjunto solução da inequação.

Logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 Resolva as inequações para $0 \leqslant x < 2\pi$:

a) $\text{tg}\, x \geqslant \sqrt{3}$

b) $\text{tg}\, x < 1$

c) $\text{tg}\, x \geqslant -1$

d) $\text{tg}\, x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\text{tg}\, x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{tg}\, x \geqslant 0$

g) $\text{tg}\, x < 0$

B.8 (Mogi-SP) Resolvendo o sistema de inequações $\begin{cases} \text{tg}\, x \leqslant 1 \\ \text{sen}\, x > \frac{1}{2} \end{cases}$, para $0 \leqslant x < 2\pi$, obtém-se:

a) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{3\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{3}$

e) $\frac{\pi}{6} < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$

B.9 Considerando o universo $U = [0, 2\pi[$, determine o conjunto solução de $-1 < \text{tg } x \leqslant 1$.

Exercícios complementares de C.5 a C.7

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Dê o conjunto solução da equação $(\text{tg}^2 x - 3)(\text{sen } x + 1) = 0$, no universo $U = [\pi, 2\pi]$.

C.2 Resolva a equação $\text{tg}^2 x - (1 + \sqrt{3})\text{tg } x + \sqrt{3} = 0$, no conjunto universo $U = [0, 2\pi[$.
Sugestão. Faça a mudança de variável $\text{tg } x = y$ e calcule a soma e o produto das raízes da equação do 2º grau:

$$y^2 - (1 + \sqrt{3})y + \sqrt{3} = 0$$

C.3 (Acafe-SC) No intervalo $[0, 2\pi[$, a soma das raízes da equação $1 + \frac{1}{\text{tg}^2 x} = \frac{2}{\text{tg } x}$ é:

a) π

b) 2π

c) $\frac{5\pi}{4}$

d) $\frac{3\pi}{2}$

e) 0

C.4 Determine, para $0 \leqslant x < 2\pi$, o conjunto solução da equação $\text{sen } x \text{ tg } x + \text{sen } x - \text{tg } x \cos x - \cos x = 0$.

C.5 (UFBA) Determine os valores de x, $x \in [0, 2\pi]$ de modo que $|\text{tg } x| < \sqrt{3}$.

C.6 (UESC) Resolva a inequação $\text{tg}^2 x - \text{tg } x < 0$ para $0 \leqslant x < 2\pi$.

C.7 Determine α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, de modo que a equação do 2º grau $4x^2 - 4x - \text{tg } \alpha = 0$ admita raízes reais.

Capítulo 33
AS RAZÕES RECÍPROCAS DO SENO, DO CO-SENO E DA TANGENTE

1. CO-TANGENTE, SECANTE E CO-SECANTE DE UM ARCO TRIGONOMÉTRICO

Essas três "novas" relações têm relativa importância na trigonometria, pois sempre que exigidas podem ser substituídas por expressões em seno, co-seno ou tangente.

Indicamos a co-tangente de um arco α, a secante de α e a co-secante de α pelos símbolos cotg α, sec α e cossec α, respectivamente.

Definições

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ para } \cos \alpha \neq 0$$

$$\text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0$$

Observe, pela definição de cotg α, que, se além de sen $\alpha \neq 0$ tivermos também $\cos \alpha \neq 0$, então:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular:

a) cotg 30° b) sec 180° c) cossec 90°

Resolução

a) $\text{cotg } 30° = \dfrac{\cos 30°}{\text{sen } 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

b) $\sec 180° = \dfrac{1}{\cos 180°} = \dfrac{1}{-1} = -1$

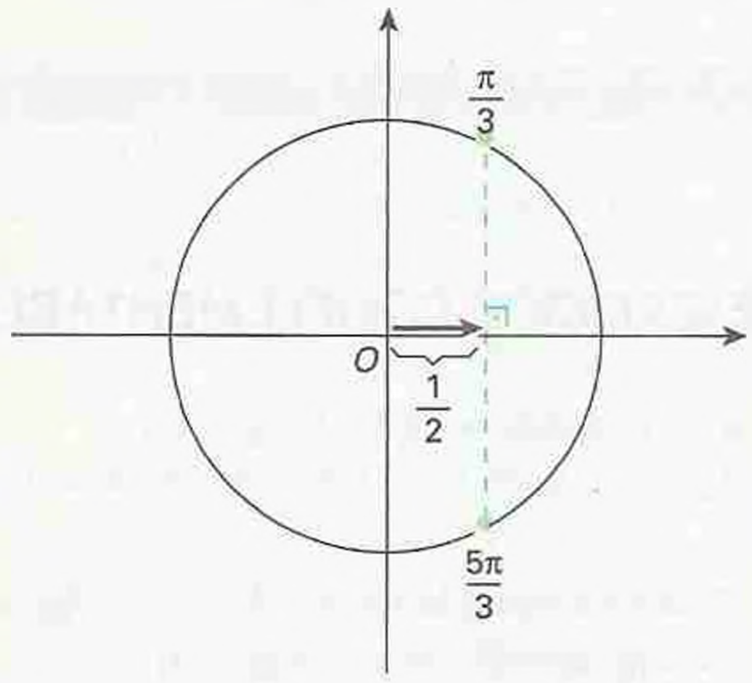
c) $\text{cossec } 90° = \dfrac{1}{\text{sen } 90°} = \dfrac{1}{1} = 1$

R.2 Resolver a equação $\sec x = 2$, para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Condição de existência $\cos x \neq 0$.

$$\sec x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \therefore \cos x = \frac{1}{2}$$



$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

R.3 Sabendo que $\text{cotg } x = 2$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular cossec x.

Resolução

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 2 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos x = 2 \text{ sen } x \text{ (I)} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\text{sen}^2 x + (2 \text{ sen } x)^2 = 1 \therefore \text{sen}^2 x + 4 \text{ sen}^2 x = 1$$

$$\therefore 5 \text{ sen}^2 x = 1 \therefore \text{sen}^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \text{sen } x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Como x é um arco do 1º quadrante, temos $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Logo, $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule:

a) cotg 45° b) sec 0° c) cossec 270°

B.2 Calcule o valor da expressão:

$$E = \sec 60° + \text{cossec } 30° - \text{cotg}^2 30°$$

B.3 (Cefet-PR) Se $f(x) = \sqrt{3} \cdot \text{cossec}\,(2x) + \cos(8x)$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é igual a:

a) $\frac{3}{2}$ c) 1 e) 2

b) 0 d) $\frac{5}{2}$

B.4 Resolva a equação $\text{cossec}\,x = \sqrt{2}$ para $0 \leq x < 2\pi$.

B.5 Determine o conjunto solução da equação:

$$\text{tg}\,x + \text{cotg}\,x = 2\sec x, \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

B.6 (U. E. Londrina-PR) Se x é tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\sec x = -\sqrt{5}$, então o valor do sen x é:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ e) $-\frac{\sqrt{30}}{5}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B.7 Sendo $\text{cossec}\,x = 3$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule tg x.

B.8 (U. Católica-GO-modificado) Simplificando-se a expressão $\frac{\sec x + \text{sen}\,x}{\text{cossec}\,x + \cos x}$, obedecidas as condições de existência, obtém-se:

a) tg x c) cossec x e) cotg x

b) sec x d) sen x

Exercícios complementares de C.1 a C.6

2. IDENTIDADES

Consideremos o conjunto universo $\mathbb{R}$, dos números reais. Observando as igualdades:

$$3x = 6 \text{ e } (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

percebemos que a primeira se torna uma proposição verdadeira **apenas para $x = 2$** e que a segunda se torna verdadeira para **qualquer valor real** atribuído à variável x. Por isso dizemos que a primeira igualdade **não é** uma identidade em $\mathbb{R}$ e que a segunda **é** uma identidade em $\mathbb{R}$.

Definição

Uma igualdade em uma variável x, $f(x) = g(x)$, é uma identidade num conjunto universo U se, e somente se, a sentença $f(\alpha) = g(\alpha)$ é verdadeira para qualquer valor de α, $\alpha \in U$.

Exemplos

a) São identidades no universo $U = \mathbb{R}$ as seguintes igualdades:
- $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $x + x = 2x$
- $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

b) Não são identidades no universo $U = \mathbb{R}$ as seguintes igualdades:
- $\frac{x}{x} = 1$, pois a sentença **não se torna** verdadeira para $x = 0$;
- $\sqrt{x^2} = x$, pois a sentença **não se torna** verdadeira para valores negativos de x, como, por exemplo, $x = -3$.
- tg x cos x = sen x, pois a sentença **não se torna** verdadeira para valores que não têm tangente, como, por exemplo, $x = \frac{\pi}{2}$.

Nota

Uma igualdade $f(x) = g(x)$ **pode não ser** identidade em um universo U e **ser** identidade em outro universo V.

Exemplo

A igualdade $\frac{x}{x} = 1$ não é identidade no universo $U = \mathbb{R}$, porém é identidade no universo $V = \mathbb{R}^*$.

Técnicas para demonstração de identidades

Existem várias técnicas para se demonstrar uma identidade. Apresentaremos duas.

I. Para provarmos que uma sentença $f(x) = g(x)$ é identidade em um universo U, podemos seguir os seguintes passos:
- *passo 1:* provamos que $f(x)$ e $g(x)$ estão definidos em U;
- *passo 2:* escolhemos um dos membros da igualdade $f(x) = g(x)$ e, a partir dele, obtemos o outro membro.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Demonstrar que a igualdade tg x + cotg x = sec x cossec x é identidade no universo:

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{sen}\,x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$$

Resolução

Passo 1: Para existir a expressão tg x + cotg x, deve-se ter cos $x \neq 0$ e sen $x \neq 0$. Logo, o primeiro membro da igualdade está definido em U.

Para existir a expressão sec x cossec x, deve-se ter cos $x \neq 0$ e sen $x \neq 0$. Logo, o segundo membro da igualdade está definido em U.

Passo 2: Partindo do primeiro membro da igualdade, temos:

$$\text{primeiro membro} = \text{tg}\,x + \text{cotg}\,x =$$

$$= \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x\,\text{sen}\,x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x\,\text{sen}\,x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\text{sen}\,x} =$$

$$= \sec x\,\text{cossec}\,x = \text{segundo membro}$$

Pelos passos 1 e 2, provamos que a igualdade é identidade em U. (c.q.d.)

II. Podemos provar que uma sentença $f(x) = g(x)$ é identidade em U, a partir de outra identidade $h(x) = t(x)$, em U.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Demonstrar que a igualdade $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ é identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

Resolução

Sabemos que a igualdade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é identidade em $\mathbb{R}$ e, portanto, também o é em U, pois $U \subset \mathbb{R}$. Dividindo-se ambos os membros dessa igualdade por $\cos^2 x$, com $\cos x \neq 0$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Verifique se as sentenças abaixo são ou não identidades nos respectivos conjuntos universo:

a) $2(x + 3) = 2x + 6$ em $U = \mathbb{R}$

b) $\frac{0}{x} = 0$ em $U = \mathbb{R}$

c) $\frac{0}{x} = 0$ em $U = \mathbb{R}^*$

d) $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$ em $U = \mathbb{R}$

e) $\operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = 1$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

B.10 Demonstre que cada uma das igualdades é identidade no respectivo universo U:

a) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \neq 0\}$

b) $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) \operatorname{sen} x = \sec x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \cos x \neq 0\}$

c) $(1 + \operatorname{sen} x)(\operatorname{cossec} x - 1) \sec x = \operatorname{cotg} x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \cos x \neq 0\}$

d) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$ em $U = \mathbb{R}$

e) $(\sec^2 x - 1)(\operatorname{cossec}^2 x - 1) = 1$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0\}$

f) $\operatorname{tg} x \cos x = \operatorname{cossec} x \operatorname{sen}^2 x$ em $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \cos x \neq 0\}$

Sugestão. Transforme essa igualdade na igualdade equivalente $\operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{cossec} x \operatorname{sen}^2 x = 0$.

B.11 A igualdade $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$ é uma identidade em $U = \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

B.12 Determine o mais amplo universo U, $U \subset \mathbb{R}$, de modo que a igualdade $\cos x \sec x = 1$ seja identidade em U.

Exercícios complementares de C.7 a C.9

3. IDENTIDADES NOTÁVEIS

Duas identidades merecem destaque devido a suas múltiplas aplicações em resoluções de problemas. São elas:

a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para $\cos x \neq 0$ e

b) $\operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$ para $\operatorname{sen} x \neq 0$

Demonstrações

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (I) é uma identidade em $\mathbb{R}$.

a) Supondo $\cos x \neq 0$ e dividindo ambos os membros de (I) por $\cos^2 x$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

(c.q.d.)

b) Supondo $\operatorname{sen} x \neq 0$ e dividindo ambos os membros de (I) por $\operatorname{sen}^2 x$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$$

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Sabendo que $\operatorname{tg} x = 3$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular $\sec x$.

Resolução

Sabemos que $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Substituindo a $\operatorname{tg} x$ por 3, temos:

$$\sec^2 x = 1 + 3^2 \therefore \sec^2 x = 10 \therefore \sec x = \pm\sqrt{10}$$

Como x é um arco do 3º quadrante e a secante tem o mesmo sinal do co-seno, temos:

$$\sec x = -\sqrt{10}$$

R.7 Resolver a equação $\sec^2 x + \operatorname{tg} x = 1$ para $0 \leq x < 2\pi$.

Resolução

Condição de existência $\cos x \neq 0$.

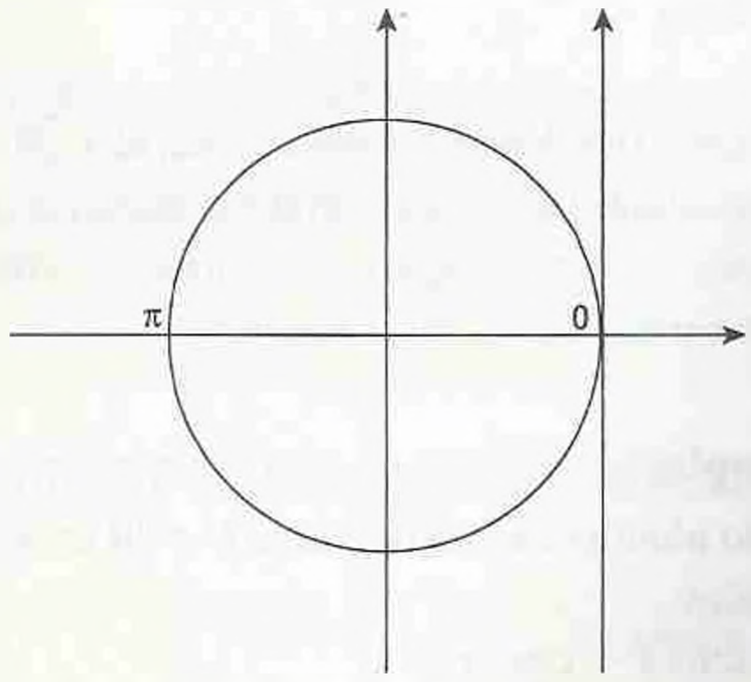
Substituindo $\sec^2 x$ por $1 + \operatorname{tg}^2 x$, temos:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$$

$$\therefore \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

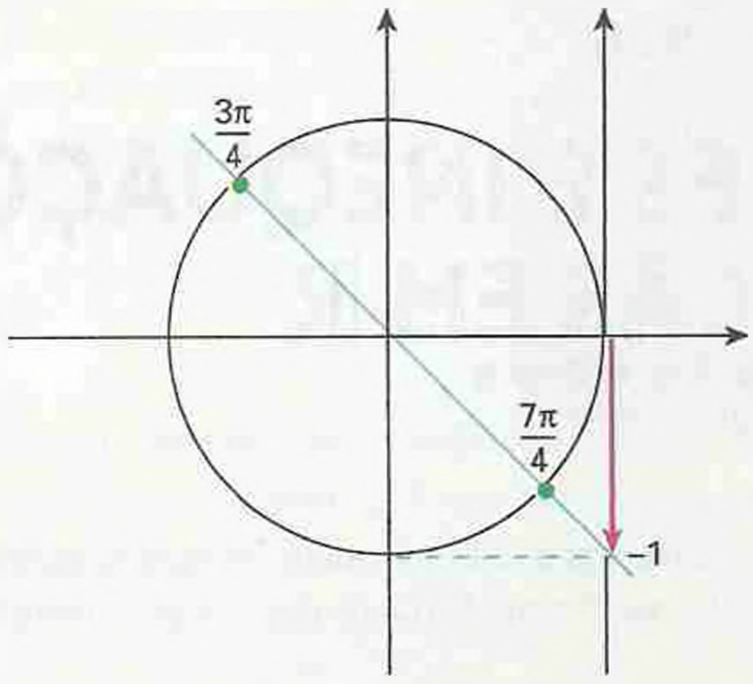
Então, temos:

• $\operatorname{tg} x = 0$



$\therefore x = 0$ ou $x = \pi$

• $\operatorname{tg} x = -1$



$$\therefore\ x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4}$$

Temos, então, como conjunto solução:

$$S = \left\{0, \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.13 Sabendo que $\operatorname{cotg} x = \sqrt{15}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da cossec x.

B.14 Determine o valor da tg x, sabendo que $\sec x = \sqrt{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

B.15 Determine o valor de a sabendo que $\sec x = a + 1$ e $\operatorname{tg} x = a$.

B.16 Simplifique a expressão $E = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \sec x}$, com $\cos x \neq 0$ e $\cos x \neq -1$.

B.17 (UFRS) A expressão $\operatorname{tg}^2 5° - \sec^2 5°$ vale:

a) 0 b) 1 c) −1 d) 5 e) −5

B.18 (Unicap-PE-modificado) Resolva a equação:

$$(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos x = 2 \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

B.19 Resolva a equação $\sec^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0$ para $0 \leq x < 2\pi$. **Sugestão.** $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Exercícios complementares C.10 e C.11

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (U. F. Uberlândia-MG) Se $\alpha = 4.520°$, qual é a afirmação verdadeira?

a) cossec $\alpha > 0$
b) cotg $\alpha = 0$
c) sen $\alpha < 0$
d) tg $\alpha = 0$
e) cos $\alpha > 0$

C.2 (UDESC) A expressão mais simples para

$$1 + \frac{1}{\cos^2 x \operatorname{cosec}^2 x} - \sec^2 x \text{ é:}$$

a) 1 c) 0 e) $\sec^2 x$
b) −1 d) tg x

Nota

A co-secante de um arco de medida x pode ser simbolizada por cossec x ou por cosec x.

C.3 (UFMG) Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $]0, \pi[$ que satisfazem a equação:

$$3 \operatorname{tg} x + 2 \cos x = 3 \sec x$$

C.4 Resolva a equação $\sec^2 x - 3 \sec x + 2 = 0$, para $0 \leq x < 2\pi$.

C.5 Obtenha o conjunto dos valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, de modo que $\operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{cotg} x = 0$.

C.6 Simplifique a expressão:

$$E = \frac{(\sec^2 x - 1)(\operatorname{cossec}^2 x - 1)}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

com sen $x \neq 0$ e cos $x \neq 0$.

C.7 Determine o valor de k de modo que a igualdade $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 + k \operatorname{sen} x \cos x - 1 = 0$ seja uma identidade em $\mathbb{R}$.

C.8 (FGV-SP) A expressão $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$, para sen $x \neq 0$, é idêntica a:

a) $\frac{2}{\cos x}$
b) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$
c) $\sec x$
d) 2 cossec x
e) $\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

C.9 (PUC-SP) A expressão $\frac{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x}{\sec x - \cos x}$, com cos $x \neq 0$ e sen $x \neq 0$, é identicamente igual a:

a) $\operatorname{cotg}^3 x$
b) $\sec^2 x$
c) $\operatorname{sen}^2 x + \cos x$
d) $\operatorname{tg}^2 x + \sec x$
e) $\operatorname{cossec}^3 x$

C.10 Determine o conjunto solução da equação:

$$\sec^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 x = 2 \text{ para } 0 \leq x < 2\pi$$

Sugestão. $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

C.11 (UFPR) Se cos $x \neq 0$, a expressão $\sec^4 x - \operatorname{tg}^4 x - 1$ é idêntica a:

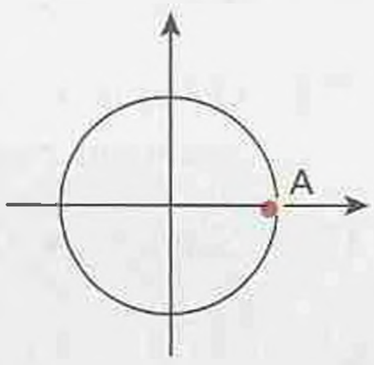
a) $\operatorname{tg}^2 x$
b) $-\operatorname{tg}^2 x$
c) $2\operatorname{tg} x$
d) $2\operatorname{tg}^2 x$
e) 1

Sugestão. $\sec^4 x = (\sec^2 x)^2$.

Capítulo 34
RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM $\mathbb{R}$

1. ASSOCIANDO NÚMEROS REAIS A PONTOS DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Cada ponto da circunferência trigonométrica é extremidade de infinitos arcos trigonométricos. Por exemplo, na circunferência ao lado, considerando as infinitas voltas que podemos girar nos dois sentidos, o ponto A é extremidade dos arcos de medidas:



... -4π rad, -2π rad, 0 rad, 2π rad, 4π rad, 6π rad, 8π rad, ...

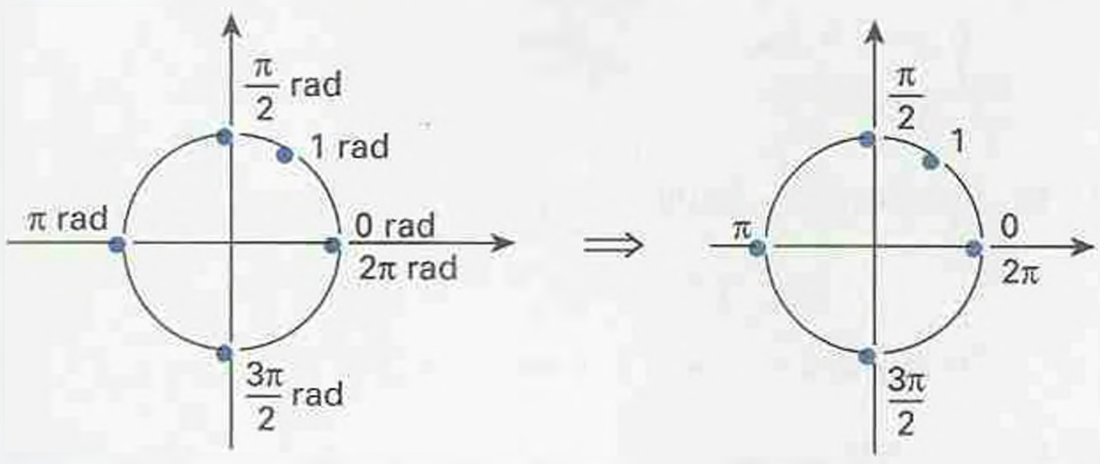
Associando cada número real x à extremidade do arco de medida x rad, vamos identificar o conjunto dos números reais com o conjunto das medidas em radianos, por exemplo, associamos:

- o número real 0 à extremidade do arco de medida 0 rad;
- o número real 1 à extremidade do arco de medida 1 rad;
- o número real $\frac{\pi}{2}$ à extremidade do arco de medida $\frac{\pi}{2}$ rad;
- o número real π à extremidade do arco de medida π rad;

etc.

Medidas em radianos associadas a pontos da circunferência trigonométrica

Números reais associados a pontos da circunferência trigonométrica

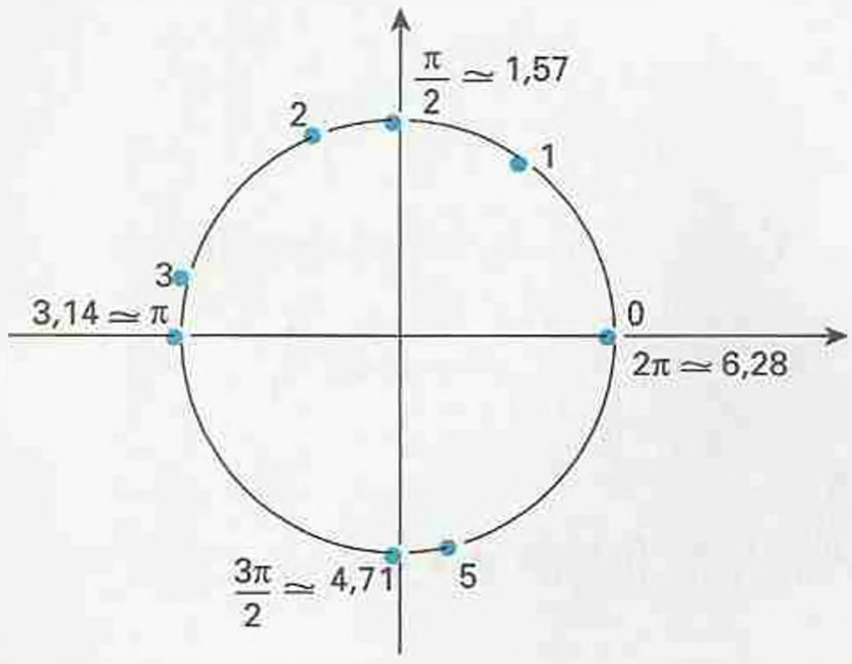


EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Determinar o sinal do produto $P = \text{sen } 1 \text{ sen } 2 \cos 3 \cos 5$.

Resolução

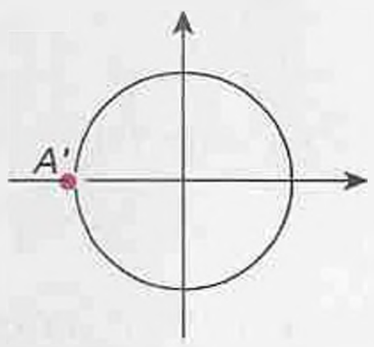
Os números reais 1, 2, 3 e 5 são identificados com as medidas 1 rad, 2 rad, 3 rad e 5 rad, que pertencem ao 1º, ao 2º, ao 2º e ao 4º quadrante, respectivamente.



Assim, sen 1 > 0; sen 2 > 0; cos 3 < 0; cos 5 > 0.
Logo, $P < 0$.

2. EXPRESSÃO GERAL DOS NÚMEROS REAIS ASSOCIADOS A UM PONTO DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Os infinitos números reais, em ordem crescente, associados ao ponto A' da circunferência trigonométrica ao lado são:



... -5π, -3π, $-\pi$, π, 3π, 5π, ...

Essa seqüência é uma **progressão aritmética**, infinita nos dois sentidos, cuja razão é 2π. Um termo geral dessa seqüência é representado pela expressão que indica a soma de um termo qualquer da P.A. com um múltiplo da razão. Por exemplo:

$$x = \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Note que atribuindo a k todos os valores do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, obtém-se todos os termos da P.A.

$$\begin{aligned}
&\vdots\\
k = -2 &\Rightarrow x = -3\pi\\
k = -1 &\Rightarrow x = -\pi\\
k = 0 &\Rightarrow x = \pi\\
k = 1 &\Rightarrow x = 3\pi\\
k = 2 &\Rightarrow x = 5\pi\\
&\vdots
\end{aligned}$$

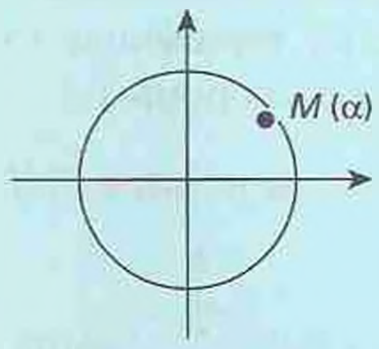
Por isso, a expressão $x = \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ representa **todos** os números reais associados ao ponto A'. Há outras

maneiras de se apresentar um termo geral dessa P.A. Observe:

$x = -\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$x = 3\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
$x = 5\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
etc.

Generalizando

Seja α um número real associado a um ponto M da circunferência trigonométrica. Uma expressão capaz de representar todos os números reais associados ao ponto M é $x = \alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



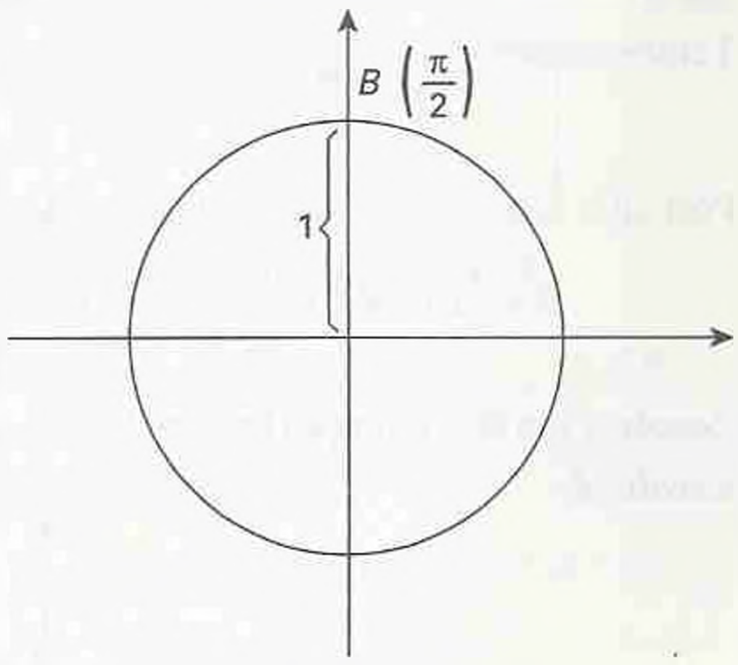
3. EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em capítulos anteriores, já estudamos a resolução de equações e inequações trigonométricas em intervalos limitados, como, por exemplo, $[0, 2\pi[$. Os exercícios resolvidos a seguir mostram a resolução de equações e inequações trigonométricas em $\mathbb{R}$, isto é, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{sen} x = 1$.

Resolução



O ponto da circunferência trigonométrica que possui o seno (ordenada) igual a 1 é o ponto B. O conjunto solução da equação é formado pelos infinitos números reais (medidas em radianos) associados ao ponto B. A expressão geral desses números é:

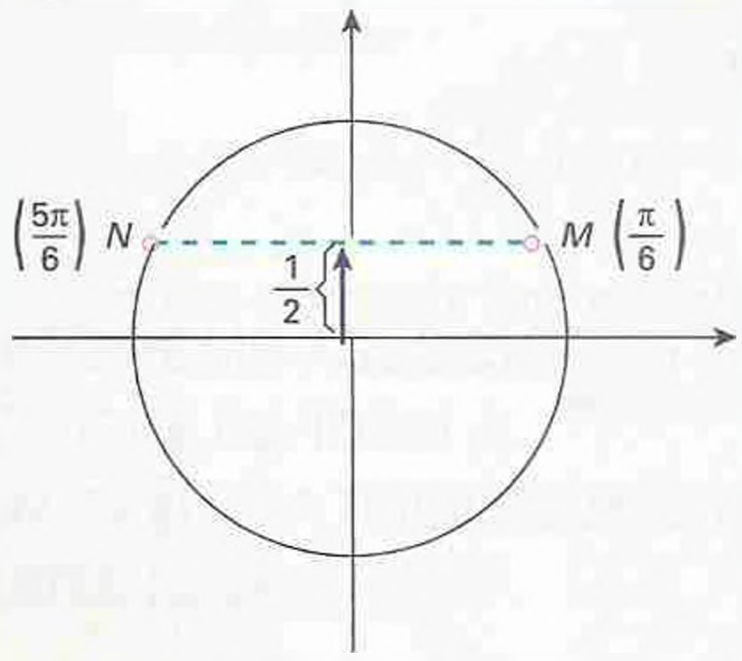
$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, temos como conjunto solução:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

R.3 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

Resolução



As expressões gerais dos números reais associados aos pontos M ou N são:

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Temos como conjunto solução:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO BÁSICO

B.1 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\operatorname{sen} x = -1$

b) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos x = -1$

d) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

e) $\cos x = 1$

f) $\sec x = 2$

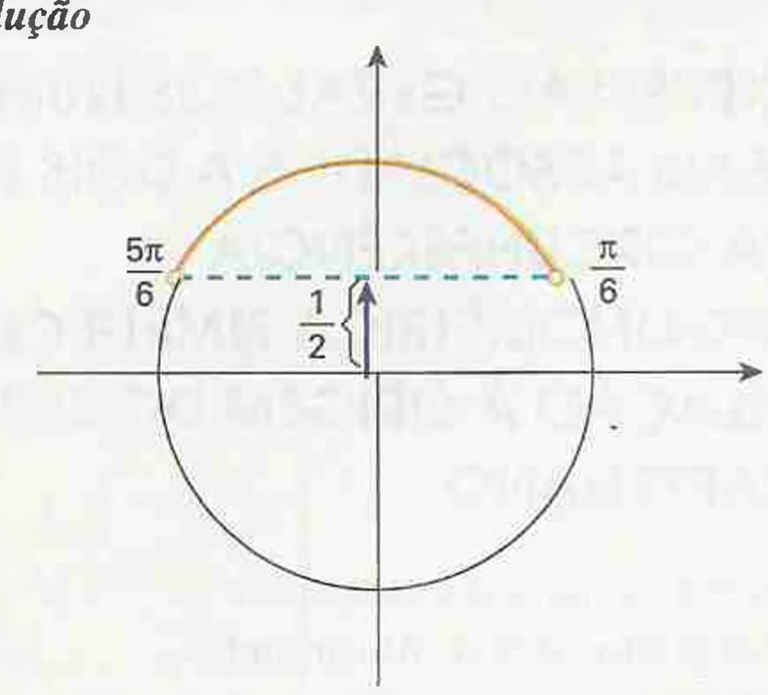
g) $2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

h) $\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos x + 2 = 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\operatorname{sen} x > \frac{1}{2}$.

Resolução



Na primeira volta positiva a solução é:

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

Nas infinitas voltas a solução é:

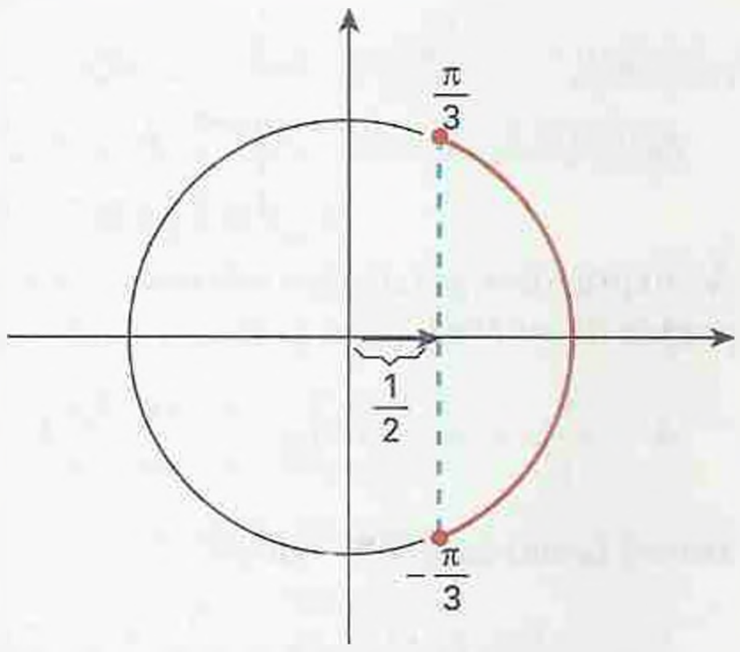
$$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Logo, temos:

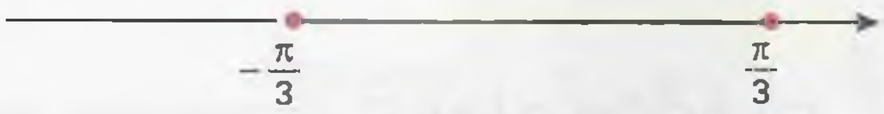
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

R.5 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$.

Resolução



Retificando as infinitas voltas da circunferência trigonométrica, um dos intervalos representados pelo arco colorido é:



Para descrever os infinitos intervalos que formam o conjunto solução S da inequação, basta adicionar $k \cdot 2\pi$ a cada extremo do intervalo acima. Assim, temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO BÁSICO

B.2 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$

c) $\cos x < -\frac{1}{2}$

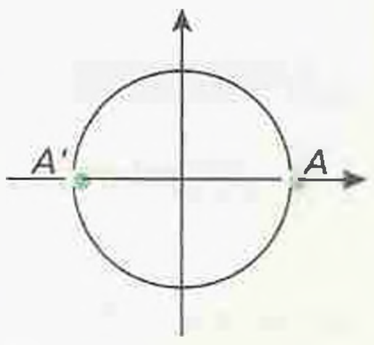
d) $\operatorname{sen} x \leqslant \frac{1}{2}$

e) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. EXPRESSÃO GERAL DOS NÚMEROS REAIS ASSOCIADOS A DOIS PONTOS DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA SIMÉTRICOS EM RELAÇÃO À ORIGEM DO SISTEMA CARTESIANO

Observe os números reais associados aos pontos A e A' da circunferência trigonométrica ao lado, colocados em ordem crescente:

... -3π, -2π, $-\pi$, 0, π, 2π, 3π, ...



Essa seqüência é uma **progressão aritmética** infinita nos dois sentidos cuja razão é π. Um termo geral dessa seqüência é representado por uma expressão que indica a soma de um termo qualquer da P.A. com um múltiplo da razão. Por exemplo:

$$x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

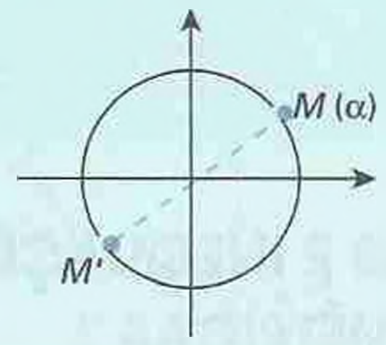
ou, simplesmente:

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Generalizando

Seja α um número real associado a um dos pontos M ou M' da circunferência trigonométrica, simétricos em relação à origem do sistema cartesiano. Uma expressão capaz de representar todos os números reais associados a esses pontos é:

$$x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

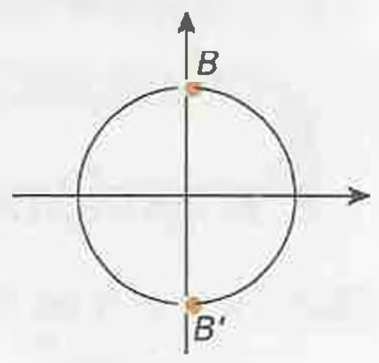


EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\cos x = 0$.

Resolução

O cos x é igual a zero se x for um número real associado ao ponto B ou B'. Esses pontos são simétricos em relação à origem do sistema; logo, os números reais associados a eles formam, em ordem crescente, uma P.A. de razão π.



Temos, então:

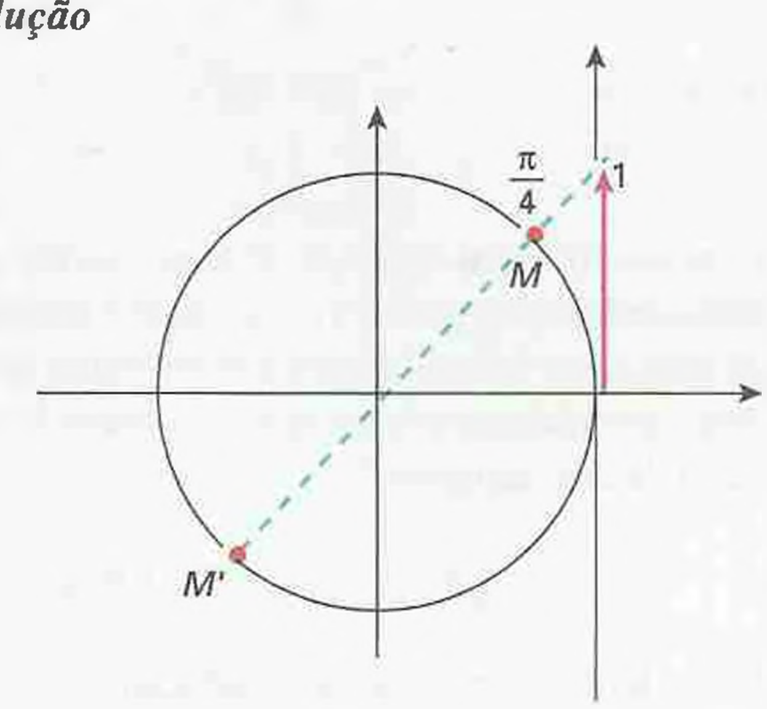
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

R.7 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{tg} x = 1$.

Resolução



Os pontos M e M' são simétricos em relação à origem do sistema; logo, os números reais associados a eles

formam, em ordem crescente, uma P.A. de razão π. Temos, então:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIO BÁSICO

B.3 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $\operatorname{sen} x = 0$

b) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} x = -1$

d) $\cos^2 x = 1$

e) $\operatorname{sen}^2 x = 1$

f) $|\operatorname{sen} x| = 1$

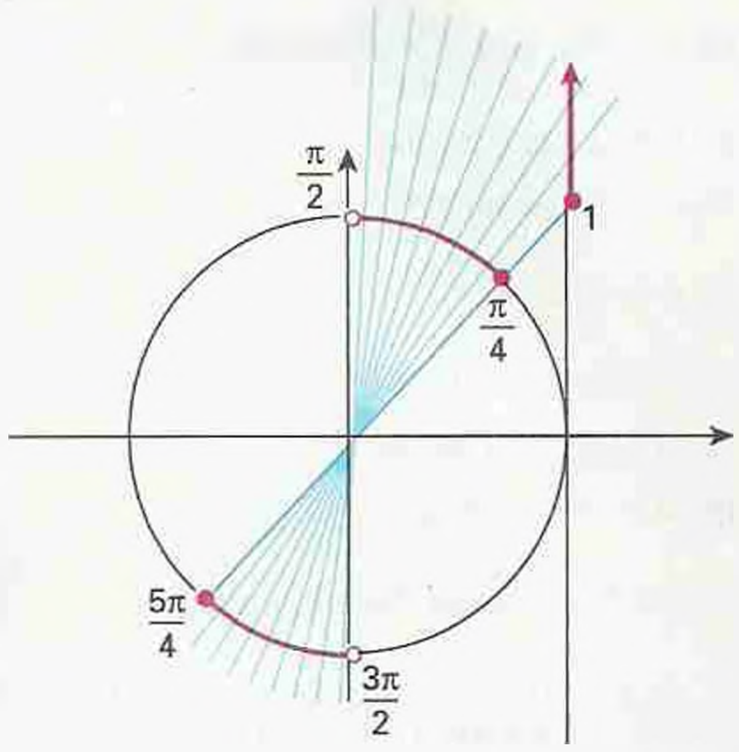
g) $2\cos^2 x - \cos x = 0$

h) $\operatorname{sen}^4 x - 2\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.8 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\operatorname{tg} x \geqslant 1$.

Resolução



Na primeira volta positiva a solução é:

$$\frac{\pi}{4} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$$

Nas infinitas voltas a solução é:

$$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Note, porém, que, como os dois intervalos na circunferência são simétricos em relação à origem do sistema, podemos dar uma única expressão para os dois intervalos, isto é:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

EXERCÍCIO BÁSICO

B.4 Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

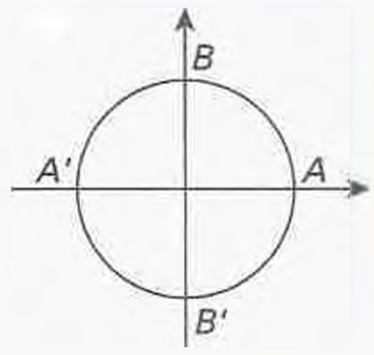
a) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} x \leqslant -\sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} x < 1$

5. NÚMEROS REAIS ASSOCIADOS A PONTOS QUE DIVIDEM A CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA EM PARTES IGUAIS

Observe os números reais associados aos pontos A, B, A' e B' da circunferência trigonométrica, colocados em ordem crescente:



$$..., -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, ...$$

Essa seqüência é uma **progressão aritmética** infinita nos dois sentidos cuja razão é $\frac{\pi}{2}$. Um termo geral dessa seqüência é representado por uma expressão que indica a soma de um termo qualquer da P.A. com um múltiplo da razão. Por exemplo:

$$x = 0 + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

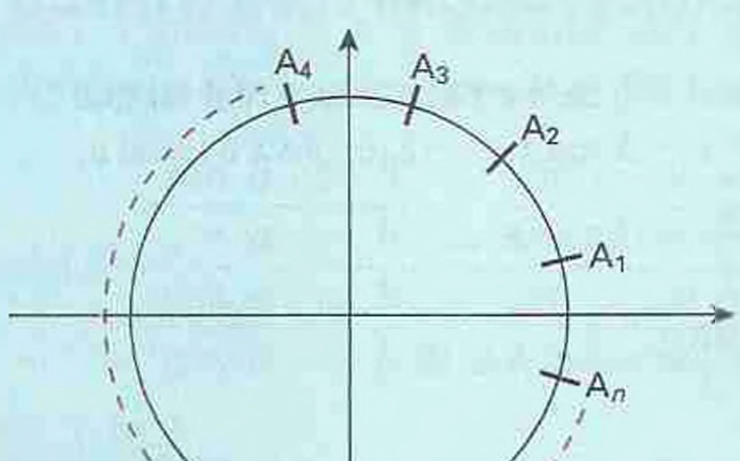
ou, simplesmente:

$$x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Generalizando

Seja α um número real associado a um dos n pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_n que dividem a circunferência trigonométrica em n partes iguais. Uma expressão capaz de representar todos os números reais associados a esses pontos é:

$$x = \alpha + \frac{k \cdot 2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$$



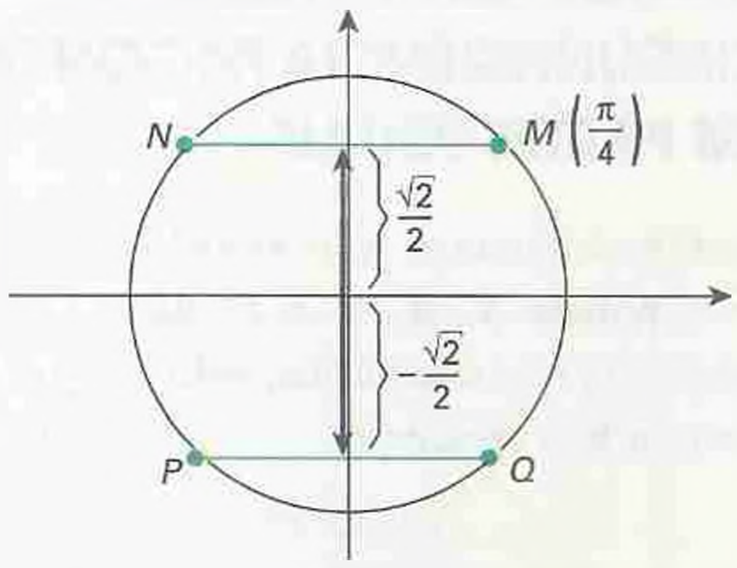
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.9 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$.

Resolução

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \therefore \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Os pontos M, N, P e Q dividem a circunferência em quatro arcos de medidas iguais; logo, os números reais associados a esses pontos, em ordem crescente, formam uma P.A. de razão $r = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Assim, $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. O conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.5 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, resolva a equação:

$$\operatorname{sen} x \cos x = 0$$

B.6 Dê o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade $(2 \cos^2 x - 1) \operatorname{sen} x \cos x = 0$.

B.7 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$.

B.8 Determine no universo $U =]-\infty, +\infty[$ o conjunto solução da equação $(\sec^2 x - 1)(\operatorname{cossec}^2 x - 1) = 0$.

B.9 No universo $U = \mathbb{R}$, qual é o conjunto solução da equação $2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Fatec-SP) Se x é um número real tal que $\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x = -2$, então x é igual a:

a) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{3\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c) $\frac{3\pi}{2} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{\pi}{2} + k\,2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e) $\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

C.2 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação:

$$\cos x \operatorname{sen} x - \sqrt{2} \cos x - \operatorname{sen} x + \sqrt{2} = 0$$

C.3 Resolva em $\mathbb{R}$ o sistema de inequações $\begin{cases} \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \\ \cos x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

C.4 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$.

C.5 Determine o domínio da função $f(x) = \operatorname{tg} x$.
Sugestão. Lembre-se da condição de existência.

C.6 Qual é o domínio da função $f(x) = \operatorname{cotg} x$?

C.7 (U. F. Ouro Preto-MG) As soluções gerais da equação $|\operatorname{sen} x| = |\cos x|$ são:

a) $x = (4k + 1)\frac{\pi}{4}$, k inteiro.

b) $x = (2k + 1)\frac{\pi}{4}$, k inteiro.

c) $x = 2k\pi$, k inteiro.

d) $x = k\pi$, k inteiro.

e) $x = (3k + 1)\frac{\pi}{2}$, k inteiro.

C.8 (U. F. São Carlos-SP) A solução de $\operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - 3 \cos^2 \theta = 0$ é:

a) $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ para todo k inteiro.

b) $\frac{k\pi}{4}$ para todo k inteiro.

c) $(2k + 1)\,\pi$ para todo k inteiro.

d) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ para todo k inteiro.

e) A equação não admite solução.

C.9 (U. E. Londrina-PR) A função dada por $f(x) = (\operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{cotg} x)$ está definida se, e somente se:

a) x é um número real qualquer.

b) $x \neq 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

c) $x \neq k\pi$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

d) $x \neq \frac{k\pi}{2}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

e) $x \neq \frac{k\pi}{4}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Capítulo 35

TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. SENO, CO-SENO E TANGENTE DOS ARCOS DE MEDIDAS $a + b$ E $a - b$

Dados dois arcos trigonométricos de medidas a e b, podemos calcular o seno, o co-seno e a tangente da soma ou da diferença desses arcos através das identidades a seguir, conhecidas por **fórmulas de adição de arcos**.

(I) $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

(II) $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

(III) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

(IV) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

(V) $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

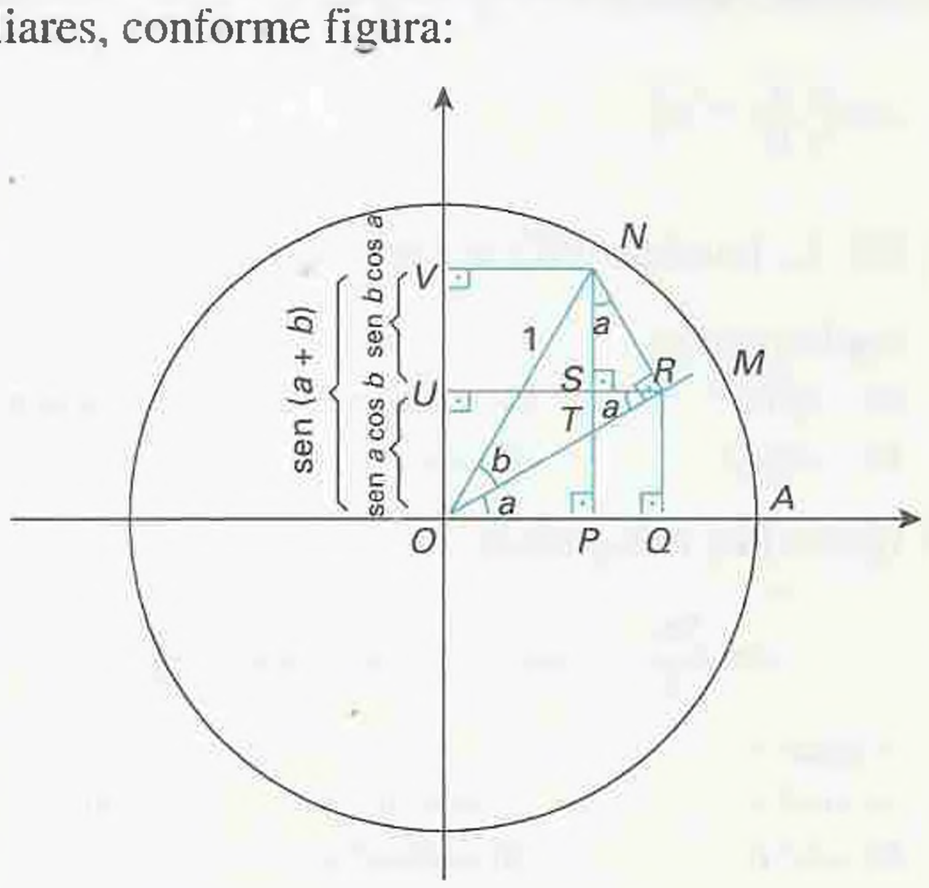
(Obedecidas as condições de existência.)

(VI) $\operatorname{tg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

(Obedecidas as condições de existência.)

Demonstração da identidade (I) (apenas no primeiro quadrante)

Dados os arcos trigonométricos $\overset{\frown}{AM}$ e $\overset{\frown}{AN}$ de medidas a e $a + b$, respectivamente, tracemos as perpendiculares auxiliares, conforme figura:



- $P\hat{O}T \cong S\hat{R}T$, pois $\overline{SR} \parallel \overline{OP}$
- $T\hat{N}R \cong T\hat{O}P$, pois os triângulos TNR e TOP são semelhantes

- $\Delta ONR \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} b = \dfrac{RN}{ON} = \dfrac{RN}{1} \therefore RN = \operatorname{sen} b \\ \cos b = \dfrac{OR}{ON} = \dfrac{OR}{1} \therefore OR = \cos b \end{cases}$

- $\Delta RUO \Rightarrow \operatorname{sen} a = \dfrac{OU}{OR} = \dfrac{OU}{\cos b} \therefore OU = \operatorname{sen} a \cos b$

- $\Delta RSN \Rightarrow \cos a = \dfrac{SN}{RN} = \dfrac{SN}{\operatorname{sen} b} \therefore SN = \operatorname{sen} b \cos a$

Como $\operatorname{sen}(a + b) = OV = OU + UV$ e $UV = SN$, concluímos que $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$.

(c.q.d.)

Notas

1. Essa demonstração pode ser repetida para os demais quadrantes com as devidas correções de sinais.

2. Demonstra-se a identidade (II), a partir da identidade (I), fazendo $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}[a + (-b)]$.

3. Demonstra-se a identidade (III), a partir da identidade (II), fazendo:

$\cos(a + b) = \operatorname{sen}[90° - (a + b)] = \operatorname{sen}[(90° - a) - b]$

4. Demonstra-se a identidade (IV), a partir da identidade (III), fazendo $\cos(a - b) = \cos[a + (-b)]$.

Demonstração da identidade (V)

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

Dividindo o numerador e o denominador da última expressão por $\cos a \cos b$ ($\cos a \cos b \neq 0$), temos:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\operatorname{sen} b \cos a}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

(c.q.d.)

A demonstração da identidade VI é análoga.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular cos 75°.

Resolução

Escrevendo 75° como a soma dos arcos notáveis 45° e 30°, temos:

$$\cos 75° = \cos (45° + 30°) =$$
$$= \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Logo, $\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

R.2 Calcular sen 15°.

Resolução

Escrevendo 15° como a diferença entre os arcos notáveis 45° e 30°, temos:

$$\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen} (45° - 30°) =$$
$$= \operatorname{sen} 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 30° \cos 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Logo, $\operatorname{sen} 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

R.3 Demonstrar que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

Resolução

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ e $\cos x$ estão definidos em $\mathbb{R}$
- primeiro membro $= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

$$= \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos x + \operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cos x + \operatorname{sen} x \cdot 0 =$$
$$= \cos x = \text{segundo membro}$$

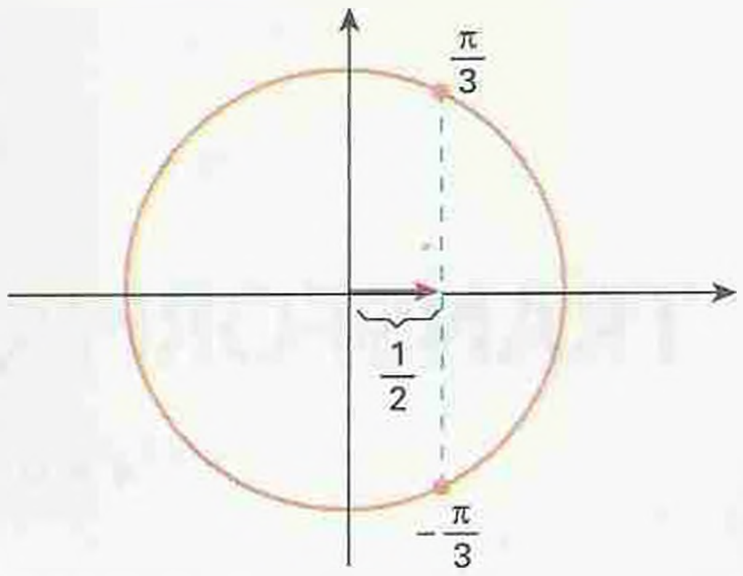
(c.q.d.)

R.4 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação:

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resolução

$$\operatorname{sen} x \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x +$$
$$+ \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x +$$
$$+ \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(: \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\therefore \cos x + \cos x = 1 \quad \therefore 2 \cos x = 1 \quad \therefore \cos x = \frac{1}{2}$$



$$\therefore x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.5 Calcular tg 75°.

Resolução

$$\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg} (45° + 30°) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 30°} =$$
$$= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

Racionalizando, temos $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$.

R.6 Sendo $\operatorname{tg} a = 3$, calcular $\operatorname{tg} (45° + a)$.

Resolução

$$\operatorname{tg} (45° + a) = \frac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} a} =$$
$$= \frac{1 + 3}{1 - 1 \cdot 3} = -2$$

Logo, $\operatorname{tg} (45° + a) = -2$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule:

a) cos 15°
b) sen 75°
c) cos 105°
d) sen 165°

B.2 Sabendo que $\operatorname{sen} a = \frac{3}{5}$ e que $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right)$.

B.3 Sabendo que $\cos x = \frac{1}{3}$ e que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

B.4 (U. E. Londrina-PR) A expressão $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ é equivalente a:

a) $-\operatorname{sen} x$
b) $-\cos x$
c) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$
d) $\cos x$
e) $\operatorname{sen} x$

B.5 (Cefet-PR) A expressão

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{2} + \cos (a + 7\pi) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{2} - a\right)$$

é igual a:

a) $\cos^2 a$
b) $\operatorname{sen}^2 a$
c) $\sec^2 a$
d) $\operatorname{cossec}^2 a$
e) $\operatorname{tg}^2 a$

B.6 (Unifor-CE) O valor da expressão

$\cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$, para $x = \frac{\pi}{5}$ e $y = \frac{\pi}{30}$, é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1

B.7 Demonstre as seguintes identidades:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

b) $\cos(-x) = \cos x$ **Sugestão.** $\cos(-x) = \cos(0 - x)$.

c) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

B.8 Resolva a seguinte equação em $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

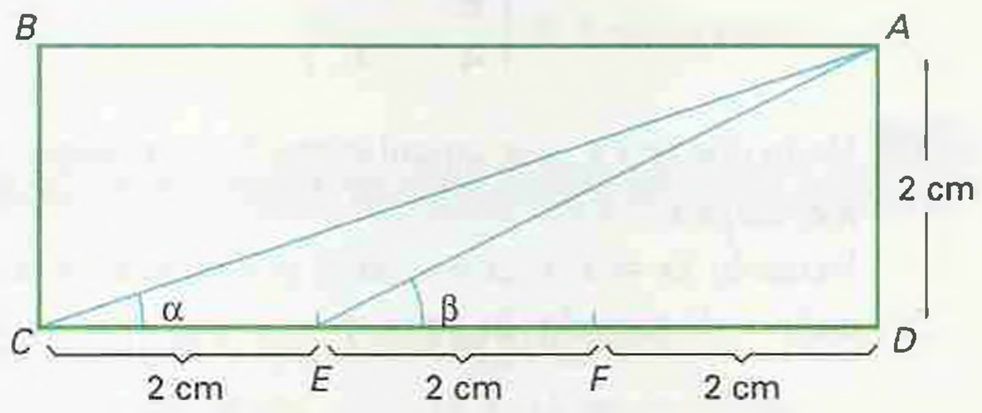
B.9 Determine, no universo $U = \mathbb{R}$, o conjunto solução da equação $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B.10 Calcule tg 15°.

B.11 Sendo $\operatorname{tg} a = 2\sqrt{3}$, calcule:

a) $\operatorname{tg}(60° + a)$ b) $\operatorname{tg}(60° - a)$

B.12 O quadrilátero $ABCD$ da figura abaixo é um retângulo. Calcule a soma $\alpha + \beta$.

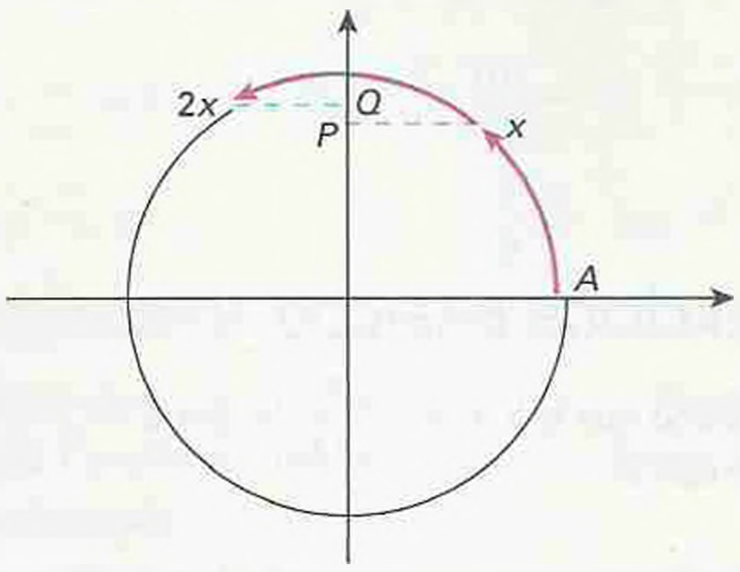


B.13 Sabendo que tg α e tg β são raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, determine o valor de tg $(\alpha + \beta)$ em função de a, b e c (sendo $a \neq c$).

Exercícios complementares de C.1 a C.10

2. SENO, CO-SENO E TANGENTE DO ARCO DUPLO

Observe os arcos de medidas x e $2x$ na circunferência trigonométrica a seguir:



A ordenada do ponto P é o sen x, e a ordenada do ponto Q é o sen $2x$.

Você acha que, para qualquer valor de x, o sen $2x$ é o dobro do sen x? Ou seja, sen $2x = 2$ sen x?

Facilmente se percebe que não, pela figura.

Aliás, para um valor conveniente de x, o sen $2x$ pode ser até igual a sen x. Por exemplo, se fizermos $x = 60°$, então $2x = 120°$ e teremos sen $120° =$ sen $60°$, ou seja, sen $2x =$ sen x para $x = 60°$. Conclusões análogas são obtidas para o co-seno e para a tangente.

Vamos estudar três identidades, em $\mathbb{R}$, que nos auxiliarão nos cálculos de sen $2x$, cos $2x$ e tg $2x$. São elas:

(I) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

(II) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

(III) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ (Obedecidas as condições de existência.)

Demonstrações

Fazendo $2x = x + x$ e usando as fórmulas de adição de arcos, temos:

(I) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x + x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

(II) $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

(III) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular sen $2x$.

Resolução

Sabemos que sen $2x = 2$ sen x cos x.

Pela relação fundamental $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \;\therefore\; \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

Como x é um arco do 2º quadrante, temos $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Assim, $\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \frac{3}{5}\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Logo, $\operatorname{sen} 2x = -\frac{24}{25}$.

R.8 Sabendo que $\cos x = \frac{1}{3}$, calcular cos $2x$.

Resolução

Sabemos que $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

Substituindo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, temos:

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

Logo, $\cos 2x = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1$.

$$\therefore \cos 2x = -\frac{7}{9}$$

R.9 Sendo $\cos x = \frac{1}{4}$, calcular $\cos 4x$.

Resolução

$$\cos 4x = \cos (2 \cdot 2x) = \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x =$$
$$= \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) = 2 \cos^2 2x - 1 =$$
$$= 2 (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 - 1 =$$
$$= 2 [\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)]^2 - 1 =$$
$$= 2 [2 \cos^2 x - 1]^2 - 1$$

Substituindo $\cos x$ por $\frac{1}{4}$, temos:

$$\cos 4x = 2 \left[2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1\right]^2 - 1$$

Logo, $\cos 4x = \frac{17}{32}$.

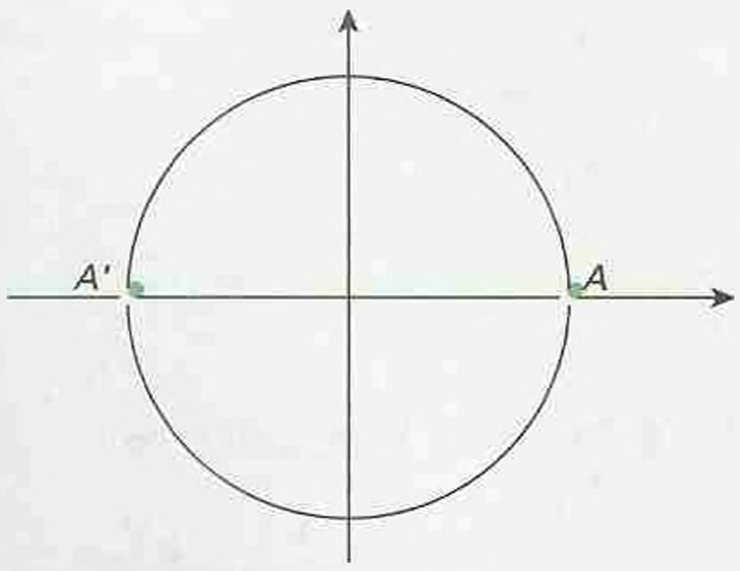
R.10 Resolver em $\mathbb{R}$ a equação $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$.

Resolução

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \quad \textbf{(: 2)}$$
$$\therefore \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x$$
$$\therefore \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$$
$$\therefore \operatorname{sen} x (\cos x - 1) = 0$$

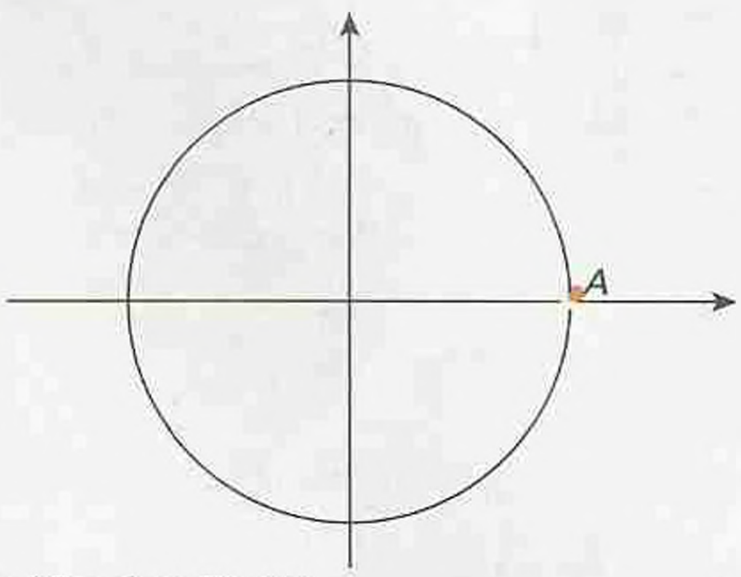
Então, temos:

• $\operatorname{sen} x = 0$



$\therefore x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **(I)**

• ou $\cos x = 1$



$\therefore x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **(II)**

Observe que o conjunto (II) dos valores da forma $x = k2\pi$ está contido no conjunto (I) dos valores da forma $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como o conjunto solução deve ser a reunião de (I) e (II), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

R.11 Resolver a equação $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}$:

a) em $\mathbb{R}$ b) para $0 \leq x < 2\pi$

Resolução

a) Multiplicando por 2 ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$2 \operatorname{sen} x \cos x = 1$$
$$\therefore \operatorname{sen} 2x = 1$$

Para facilitar, vamos fazer a mudança de variável $2x = \alpha$. Feito isso, resolvemos a equação $\operatorname{sen} \alpha = 1$ nas infinitas voltas da circunferência, obtendo:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, retornamos à variável original x. Para isso, basta substituir por $2x$ a variável auxiliar α da igualdade anterior, isto é:

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o conjunto solução da equação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) Para obter as raízes da equação na primeira volta positiva, basta atribuir a k, na igualdade anterior, valores inteiros de modo que $0 \leq x < 2\pi$. Observe:

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

Nenhum outro valor de k nos interessa, pois para qualquer outro inteiro k teremos um valor de x fora do intervalo $[0, 2\pi[$. Portanto, o conjunto solução, nesse intervalo, é $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

R.12 Dado que $\operatorname{sen} x = a$, calcular $\operatorname{sen} 3x$, em função de a.

Resolução

Fazendo $3x = x + 2x$ e usando as fórmulas de adição de arcos e de arco duplo, temos:

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} (x + 2x) =$$
$$= \operatorname{sen} x \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \cos x =$$
$$= \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x =$$
$$= \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x =$$
$$= \operatorname{sen} x (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) + 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) =$$
$$= \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x + 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x =$$
$$= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

Finalmente, temos que $\operatorname{sen} 3x = 3a - 4a^3$.

R.13 Sendo $\operatorname{tg} x = 5$, calcular $\operatorname{tg} 2x$.

Resolução

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot 5}{1 - 5^2} =$$

$$= -\frac{10}{24} \therefore \operatorname{tg} 2x = -\frac{5}{12}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.14 Sabendo que $\operatorname{sen} x = -\frac{5}{13}$ e que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} 2x$.

B.15 Sabendo que $\cos x = \frac{1}{5}$, calcule $\cos 2x$.

B.16 Sabendo que $\operatorname{sen} x = 2 \cos x$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule:

a) $\operatorname{sen} 2x$ b) $\cos 2x$

B.17 Sabendo que $\cos x = a$, calcule em função de a:
a) $\cos 2x$ b) $\cos 4x$

B.18 Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$ e que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} 4x$.

B.19 Demonstre que $\frac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \cos x = \operatorname{sen} x$ é identidade no universo $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \neq \cos x\}$.

B.20 Demonstre que $\cos x \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen}^3 x$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

B.21 Resolva a equação $\operatorname{sen} 2x = 2 \cos x$, em $\mathbb{R}$.

B.22 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação:

$$\operatorname{sen} 2x - 3 \cos x = 0$$

B.23 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, resolva a equação:

$$\cos 2x - \operatorname{sen} 2x + 1 = 0$$

B.24 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade $\cos 2x = \operatorname{sen} x$.

B.25 Sendo $\operatorname{tg} x = 2$, calcule $\operatorname{tg} 2x$.

B.26 (Mackenzie-SP) Se $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{tg} x < 0$, então $\operatorname{tg} 2x$ vale:
a) $\frac{24}{7}$ c) $-\frac{8}{3}$ e) $-\frac{4}{3}$
b) $-\frac{24}{7}$ d) $\frac{8}{3}$

Exercícios complementares de C.11 a C.20

3. FÓRMULAS DE TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

Você já estudou, em álgebra, alguns casos de fatoração, como, por exemplo, a diferença de dois quadrados, isto é, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Vamos estudar agora quatro casos de fatoração de expressões trigonométricas:

I. $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

II. $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

III. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

IV. $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$

Essas fórmulas são conhecidas como **fórmulas de prostaférese** (*prosthaphaeresis*, que, em grego, significa "adição e subtração").

Demonstração

Sabemos que:
A) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$
B) $\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \operatorname{sen} y \cos x$
C) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
D) $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Somando, membro a membro, (A) e (B):
I. $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y$

Subtraindo, membro a membro, (A) e (B):
II. $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2 \operatorname{sen} y \cos x$

Somando, membro a membro, (C) e (D):
III. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$

Subtraindo, membro a membro, (C) e (D):
IV. $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Façamos agora em cada uma das igualdades (I), (II), (III) e (IV) as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{cases} x + y = p \\ x - y = q \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$x = \frac{p+q}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{p-q}{2}$$

Então efetuamos as mudanças de variáveis em (I), (II), (III) e (IV):

I. $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

II. $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

III. $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

IV. $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.14 Fatorar a expressão $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$.

Resolução

Pela fórmula (I) de transformação em produto:

$$\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{5x + 3x}{2} \cos \frac{5x - 3x}{2} =$$
$$= 2 \operatorname{sen} 4x \cos x$$

R.15 Fatorar a expressão $\cos 3x + \cos 7x$.

Resolução

Pela fórmula (III) de transformação em produto:

$$\cos 3x + \cos 5x =$$
$$= 2 \cos \frac{3x + 5x}{2} \cos \frac{3x - 5x}{2} =$$
$$= 2 \cos 4x \cos(-x)$$

Sabemos que $\cos(-x) = \cos x$. Então, substituindo, temos $\cos 3x + \cos 5x = 2 \cos 4x \cos x$.

R.16 Fatorar a expressão $\cos 10° - \cos 40°$.

Resolução

Pela fórmula (IV) de transformação em produto:

$$\cos 10° - \cos 40° =$$
$$= -2 \operatorname{sen} \frac{10° + 40°}{2} \operatorname{sen} \frac{10° - 40°}{2} =$$
$$= -2 \operatorname{sen} 25° \operatorname{sen} (-15°)$$

Sabemos que $\operatorname{sen} (-15°) = -\operatorname{sen} 15°$. Logo, temos:

$$\cos 10° - \cos 40° = 2 \operatorname{sen} 25° \operatorname{sen} 15°$$

R.17 Fatorar a expressão $1 - \operatorname{sen} 80°$.

Resolução

Fazendo $1 = \operatorname{sen} 90°$ e aplicando a fórmula (II) de transformação em produto:

$$\operatorname{sen} 90° - \operatorname{sen} 80° =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{90° - 80°}{2} \cos \frac{90° + 80°}{2} =$$
$$= 2 \operatorname{sen} 5° \cos 85°.$$

R.18 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 3x$.

Resolução

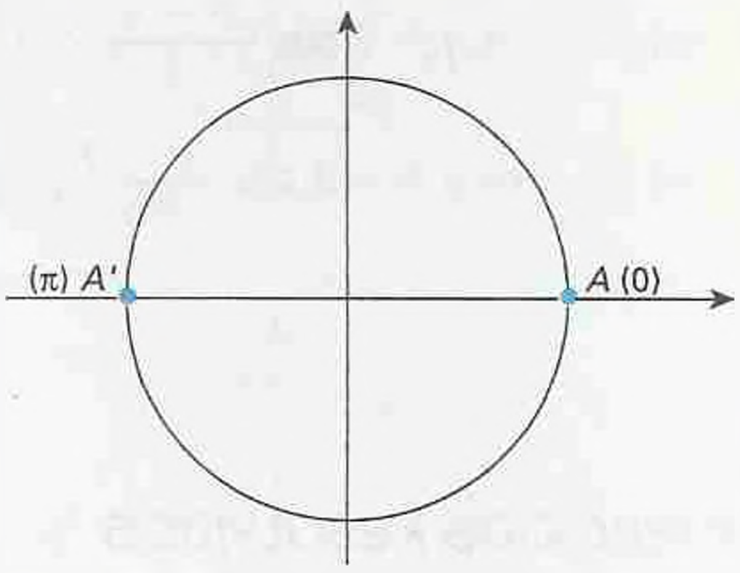
$$\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x = 0$$

Fatorando o primeiro membro da igualdade, temos:

$$2 \operatorname{sen} x \cos 4x = 0$$

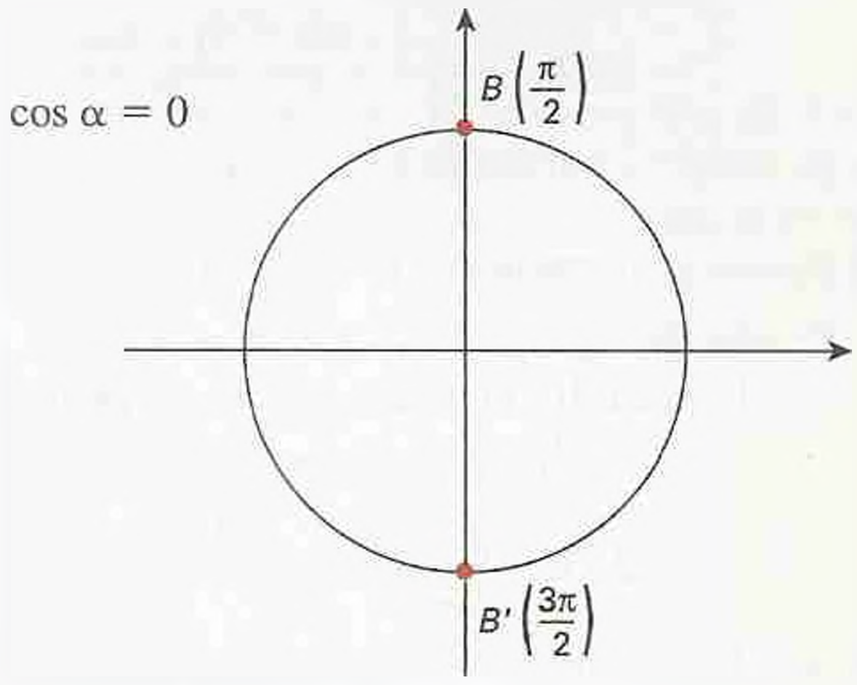
Então:

- $\operatorname{sen} x = 0$



$\therefore x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- ou $\cos 4x = 0$ (fazemos $4x = \alpha$)



$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Substituindo α por $4x$:

$$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \therefore \ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

R.19 Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = 2 \cos 2x$.

Resolução

$$\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x - 2 \cos 2x = 0$$

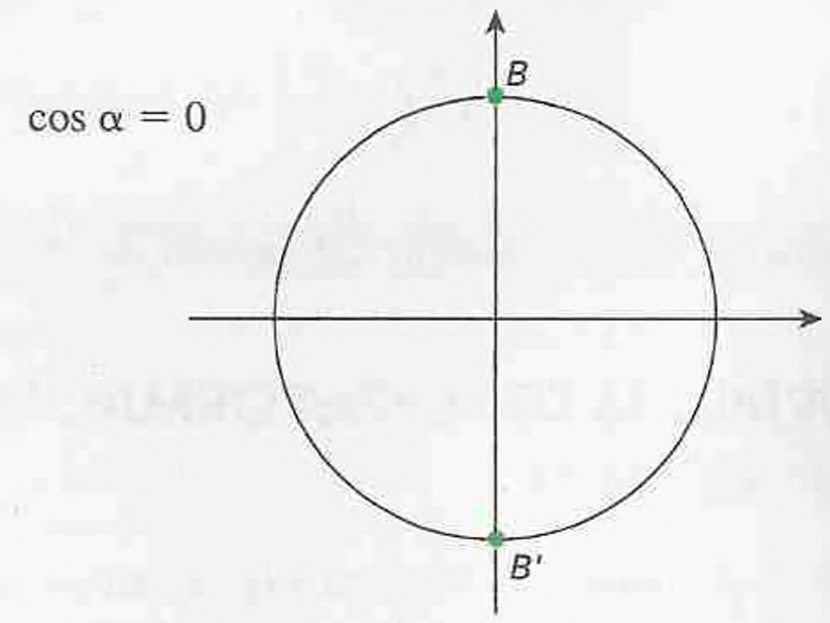
Fatorando o primeiro membro:

$$\underbrace{(\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x)}_{\text{Aplica-se a fórmula II de transformação em produto}} - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos 2x - 2 \cos 2x = 0$
$\therefore 2 \cos 2x (\operatorname{sen} x - 1) = 0$
$\therefore \cos 2x = 0$ ou $\operatorname{sen} x = 1$

Resolvendo cada uma dessas equações:

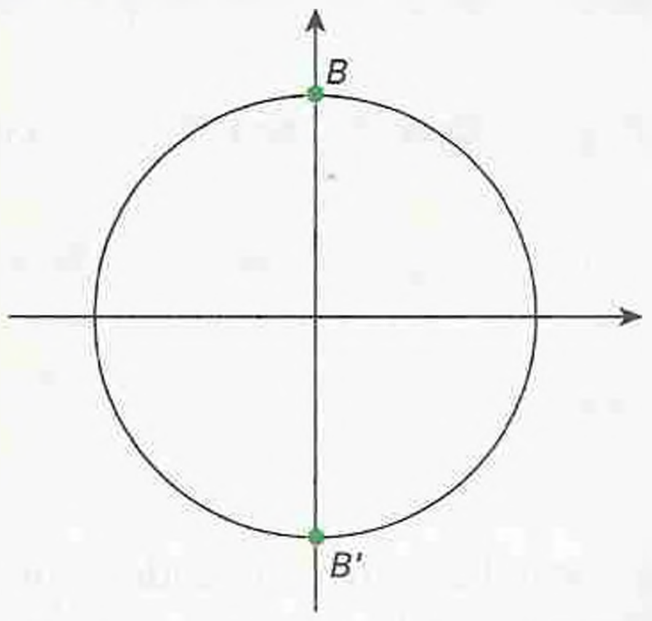
- $\cos 2x = 0$ (fazemos $2x = \alpha$)



$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\therefore 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ \therefore x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$

- $\operatorname{sen} x = 1$



$\therefore x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

A trigonometria e a astronomia

Até o final do século XVI o desenvolvimento da astronomia esbarrava em cálculos longos e tediosos, tais como o produto sen 16° · cos 4°, em que sen 16° = 0,275637355 e cos 4° = 0,99756405. Nessa época, os astrônomos passaram a usar as fórmulas de prostaférese que transformam a multiplicação em adição ou subtração. Afinal, adicionar ou subtrair é, geralmente, mais rápido do que multiplicar. Uma dessas fórmulas é:

$$\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos y$$

Por exemplo, usando a fórmula acima e os valores sen 20° = 0,34202014 e sen 12° = 0,20791169, pode-se calcular o produto sen 16° · cos 4° da seguinte maneira:

$$\text{sen}(16° + 4°) + \text{sen}(16° - 4°) = 2 \cdot \text{sen}\, 16° \cdot \cos 4°$$
$$\therefore \text{sen}\, 20° + \text{sen}\, 12° = 2 \cdot \text{sen}\, 16° \cdot \cos 4°$$
$$\therefore 0{,}34202014 + 0{,}20791169 = 2 \cdot \text{sen}\, 16° \cdot \cos 4°$$
$$\therefore 0{,}54993183 = 2 \cdot \text{sen}\, 16° \cdot \cos 4°$$
$$\therefore \frac{0{,}54993183}{2} = \text{sen}\, 16° \cdot \cos 4°$$
$$\therefore \text{sen}\, 16° \cdot \cos 4° = 0{,}274965915$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.27 Fatore as expressões:
a) sen $4x$ + sen $2x$
b) sen $6x$ − sen $4x$
c) cos $8x$ + cos $2x$
d) cos $5x$ − cos x
e) sen 10° + sen 20°
f) −1 + sen 20°
g) cos 10° − 1
h) 1 − cos x

B.28 Fatore a expressão sen 10° + cos 20°. **Sugestão**. Transforme a expressão numa soma de senos (ou co-senos) usando a propriedade: "Se dois arcos são complementares, então o seno de um deles é igual ao co-seno do outro".

B.29 Transforme em produto a expressão:

$$\cos 5x + \cos x - 2 \cos 3x$$

B.30 Escreva a expressão a seguir na forma fatorada:

$$\text{sen}\, 6x + 2\, \text{sen}\, 4x + \text{sen}\, 2x$$

B.31 Obtenha uma expressão fatorada equivalente a:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$$

B.32 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, x}{\text{sen}\, 2x}$.

B.33 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\text{sen}\, 4x + \text{sen}\, 2x}{\cos 4x - \cos 2x}$.

B.34 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\cos 5x = \cos x$.

B.35 Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da equação:

$$\text{sen}\, 3x = \text{sen}\, x$$

B.36 Obtenha o conjunto dos valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfaçam a igualdade $\cos x + \cos 5x = 2 \cos 3x$.

B.37 Considerando o universo $U = \mathbb{R}$, resolva a equação:

$$\text{sen}\, 5x - \text{sen}\, x = 2 \cos 3x$$

B.38 Dê o conjunto solução da equação sen $5x$ = sen x, para $0 \leq x < 2\pi$. **Sugestão**. Inicialmente resolva a equação em $\mathbb{R}$, e, depois, atribua valores inteiros convenientes à variável k do termo geral.

Exercícios complementares de C.21 a C.25

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Calcule o valor da expressão:

$$E = \text{sen}\, 3x \cos x - \text{sen}\, x \cos 3x \text{ para } x = \frac{\pi}{8}$$

C.2 Sabendo que $\cos x = \dfrac{3}{5}$ e que $270° < x < 360°$, calcule o valor da expressão $E = \cos(\pi + x) + \text{sen}\, x$.

C.3 Sabendo que $\cos a = \dfrac{4}{5}$, $\text{sen}\, b = \dfrac{5}{13}$ e que a e b são medidas de arcos do 1º quadrante, calcule:
a) sen $(a + b)$
b) cos $(a - b)$

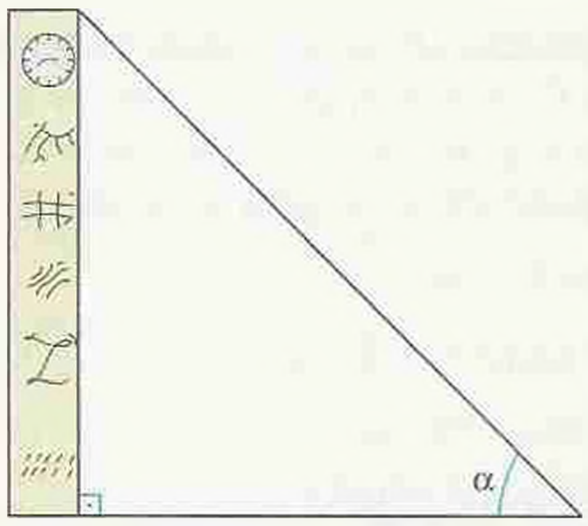
C.4 (UFPE) Indique o valor da constante A na identidade:

$$\cos\theta + \sqrt{3}\ \text{sen}\,\theta = A \cos(\theta - 60°)$$

C.5 (FEI-SP) A expressão sen $(a + b)$ sen $(a - b)$ é equivalente a:
a) cos b − cos a
b) sen b − sen a
c) $\cos^2 b - \cos^2 a$
d) $\text{sen}^2 b - \text{sen}^2 a$
e) $\cos^2 a - \cos^2 b$

C.6 (U. F. Pelotas-RS) Sendo $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$, determine o valor de $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2$.

C.7 (Fuvest-SP)



x^o	sen x^o	cos x^o	x^o	sen x^o	cos x^o
10	0.174	0,985	21	0.358	0,934
11	0.191	0.982	22	0,375	0,927
12	0,208	0,978	23	0.391	0,921
13	0,225	0,974	24	0,407	0,914
14	0.242	0,970	25	0,423	0,906
15	0,259	0,966	26	0,438	0,899
16	0,276	0,961	27	0,454	0,891
17	0,292	0,956	28	0,470	0,883
18	0,309	0,951	29	0,485	0,875
19	0,326	0,946	30	0.500	0,866
20	0,342	0,940			

A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo α, como mostra a figura.

a) Usando a tabela dada, determine a altura da torre, supondo $\alpha = 20°$. Efetue os cálculos.

b) Se o ângulo α valesse 40°, como se poderia calcular a altura usando os dados da tabela? Indique os cálculos.

C.8 Simplifique a expressão $E = \dfrac{\text{tg } x - \text{tg } (x - y)}{1 + \text{tg } x \text{ tg } (x - y)}$, satisfeitas as condições de existência.

C.9 Demonstre que $\text{tg } (90° + \alpha) = -\text{cotg } \alpha$, satisfeitas as condições de existência. **Cuidado!**

C.10 (UFCE) Se $x + y = \dfrac{\pi}{4}$, então, o produto $(1 + \text{tg } x)(1 + \text{tg } y)$ é igual a:

a) 10 b) 8 c) 6 d) 4 e) 2

C.11 (U. F. Santa Maria-RS) O valor da expressão $4 \text{ sen } x \cos x \cos 2x$ para $x = \dfrac{\pi}{16}$ é:

a) 1 c) 0 e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) -1 d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C.12 (U. F. Santa Maria-RS) Se $\text{tg } x = -\dfrac{5}{3}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{4}$, então cos $2x$ vale:

a) $\dfrac{9}{34}$

b) $\dfrac{8}{17}$

c) 1

d) $-\dfrac{8}{17}$

e) $-\dfrac{9}{34}$

C.13 (PUC-RJ) Se $\text{tg } 3x = 4$, então tg $6x$ é igual a:

a) 8

b) $-\dfrac{8}{15}$

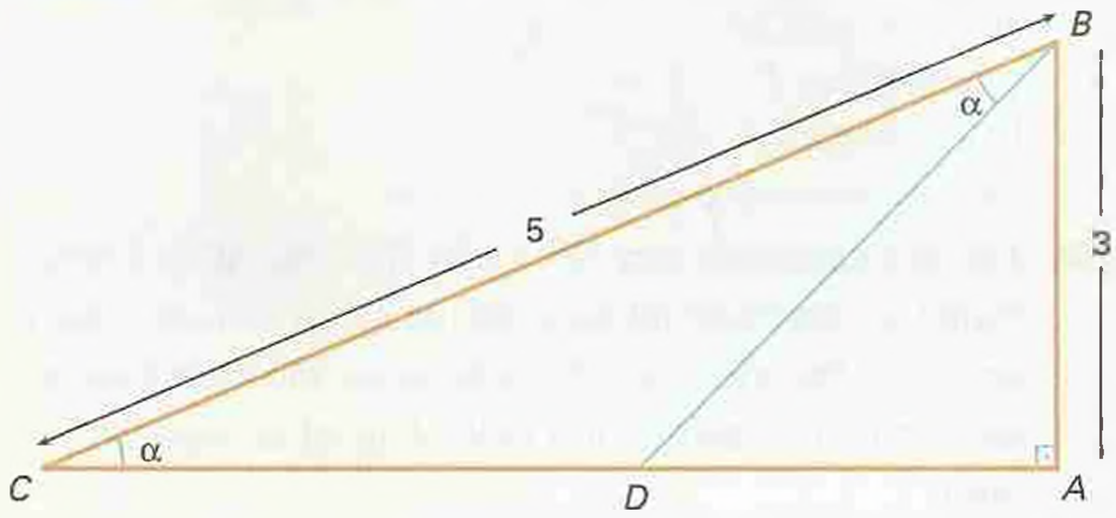
c) $\dfrac{3}{4}$

d) $-\dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{5}{8}$

Sugestão. $\text{tg } 6x = \text{tg } (2 \cdot 3x)$.

C.14 Determine a medida do segmento $\overline{AD}$ na figura:



Sugestão. Teorema do ângulo externo de um triângulo.

C.15 (UFCE) Sabendo que $\cos x = a$, calcule $\cos 3x$, em função de a. **Sugestão**. Veja exercício R.12.

C.16 (Fuvest-SP) O valor de $(\text{sen } 22°30' + \cos 22°30')^2$ é:

a) $\dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}$

d) 1

e) 2

C.17 (Fuvest-SP) O valor de $(\text{tg } 10° + \text{cotg } 10°) \text{ sen } 20°$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$

b) 1

c) 2

d) $\dfrac{5}{2}$

e) 4

C.18 (Vunesp) Determine todos os valores de x, $0 \leq x < 2\pi$, para os quais se verifica a igualdade $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1$.
Sugestão. Veja exercício R.11.

C.19 (UFPI) Se α é a medida de um arco do primeiro quadrante trigonométrico e $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, então o valor do $\operatorname{sen} \alpha$ é:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

b) $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

Sugestão. $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right)$.

C.20 (Fuvest-SP) Se $\cos \frac{x}{2} = \frac{3}{4}$, então $\cos x$ vale:

a) $-\frac{3}{8}$

b) $\frac{3}{8}$

c) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

d) $\frac{1}{8}$

e) $\frac{\sqrt{34}}{4}$

C.21 (F. R. Nuno Lisboa-RJ) Sendo $a - b = \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão $y = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a + \cos b}$.

C.22 (U. F. Pelotas-RS) A expressão $\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$ é equivalente a:

a) $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$

b) $\operatorname{tg} (2x + 2y) \operatorname{tg} (2x - 2y)$

c) 1

d) $\frac{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}$

e) 0

C.23 (Cefet-PR) Transformando em produto a expressão $\operatorname{sen}^2 4x - \operatorname{sen}^2 2x$, obtém-se:

a) $-\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 6x$
b) $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 6x$
c) $-\operatorname{sen} 2x \cos 6x$
d) $\operatorname{sen} 2x \cos 6x$
e) $\operatorname{sen} 6x \cos 2x$

Sugestão. Diferença de dois quadrados.

C.24 Adições e subtrações de tangentes também podem ser transformadas em produto. Demonstre as seguintes fórmulas de transformação em produto. em que são obedecidas as condições de existência:

a) $\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} (p+q)}{\cos p \cos q}$

b) $\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} (p-q)}{\cos p \cos q}$

C.25 Usando as fórmulas do exercício anterior, transforme em produto as expressões:

a) $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x$
b) $\operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 2x$

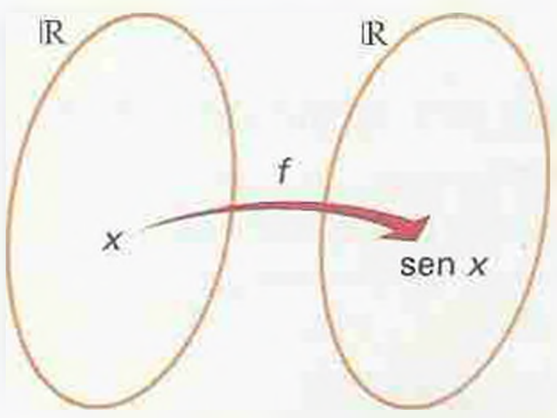
Capítulo 36

AS FUNÇÕES SENO, CO-SENO E TANGENTE

1. CONCEITUAÇÃO

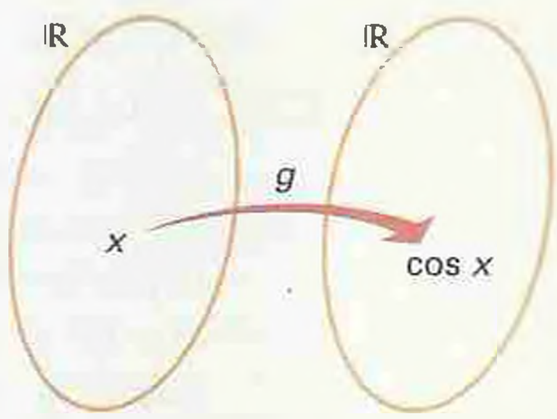
A cada número real x podemos associar um único seno, um único co-seno e uma única tangente. Desse modo, definimos três funções trigonométricas $f(x) = \text{sen } x$, $g(x) = \cos x$ e $h(x) = \text{tg } x$:

$f(x) = \text{sen } x$



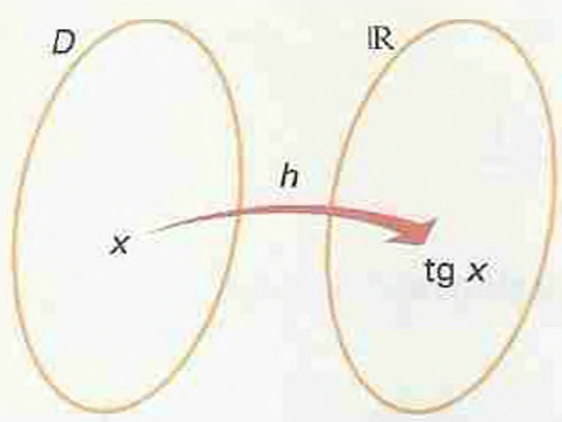
$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

$g(x) = \cos x$



$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

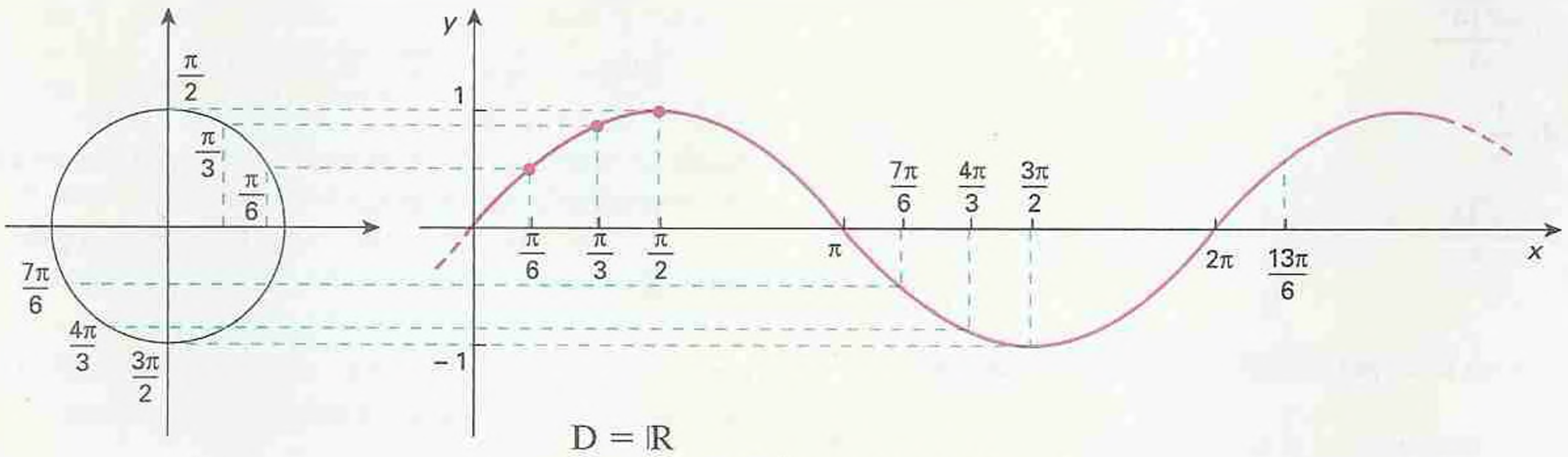
$h(x) = \text{tg } x$



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Im = \mathbb{R}$

2. GRÁFICO DA FUNÇÃO $y = \text{sen } x$



$D = \mathbb{R}$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Note que a função seno satisfaz as condições:

$$\text{sen } (2\pi + x) = \text{sen } x$$

$$\text{sen } (4\pi + x) = \text{sen } x$$

$$\text{sen } (6\pi + x) = \text{sen } x$$

$$\vdots$$

$$\text{sen } (k \cdot 2\pi + x) = \text{sen } x, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

O menor número positivo p tal que $\text{sen } (p + x) = \text{sen } x$ é $p = 2\pi$. Por isso, dizemos que a função seno é periódica e seu período é 2π.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

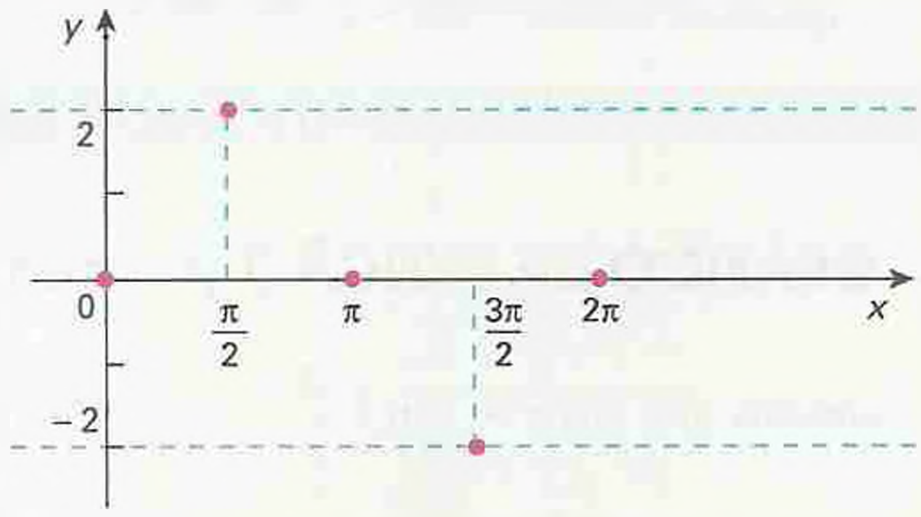
R.1 Esboçar o gráfico da função $y = 2 \text{ sen } x$.

Resolução

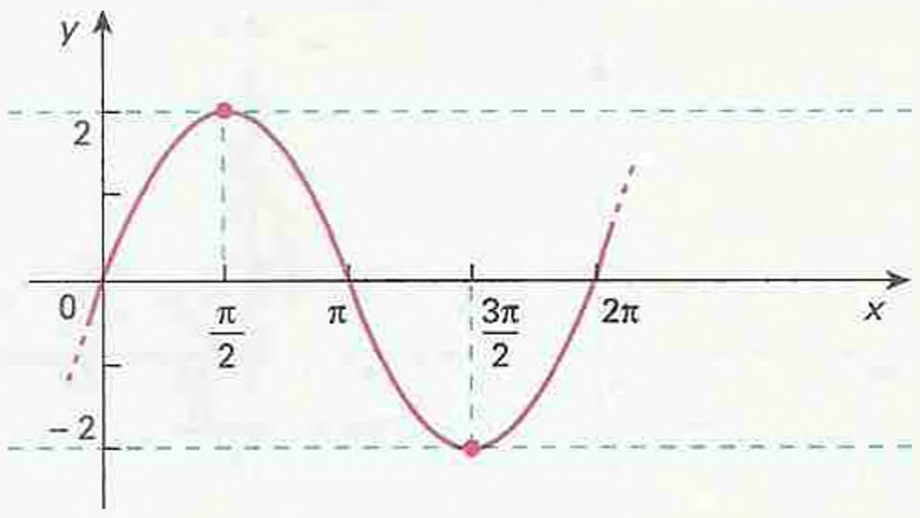
Para um esboço do gráfico, basta atribuirmos ao arco x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π e calcularmos os correspondentes valores de y:

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	2
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-2
2π	0

Marcando no plano cartesiano os pontos (0, 0), $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$, $(\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$ e $(2\pi, 0)$, temos:



O gráfico da função passa por esses pontos e tem a forma:



$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$; $p = 2\pi$

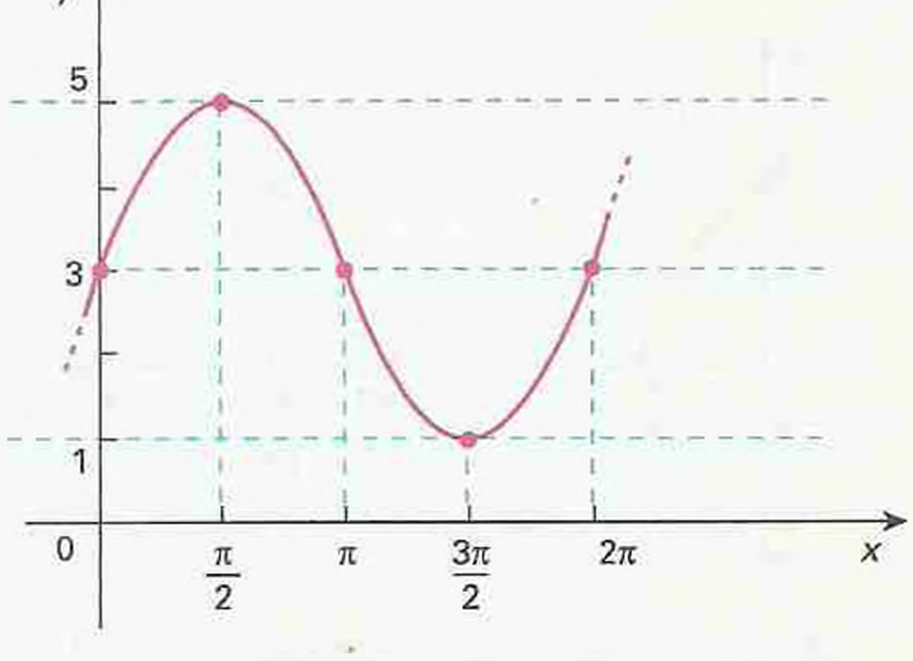
Observação

Construímos apenas um período do gráfico, porém não perca de vista que essa figura se repete tanto até o $+\infty$ como até o $-\infty$ na direção do eixo das abscissas.

R.2 Esboçar o gráfico da função $y = 3 + 2 \operatorname{sen} x$.

Resolução

x	y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	5
π	3
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3



$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\}$; $p = 2\pi$

R.3 Esboçar o gráfico da função $y = \operatorname{sen} 2x$.

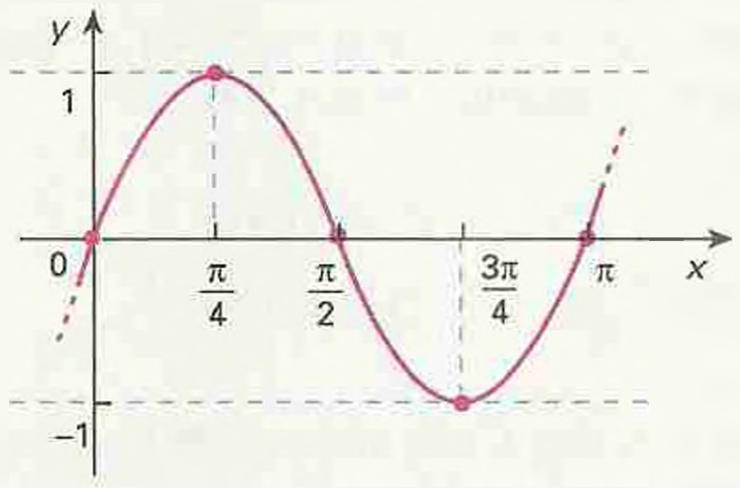
Resolução

Quando o arco da função seno for da forma $ax + b$, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$ ou $a = 1$ e $b \neq 0$, devemos construir uma tabela com três colunas: a primeira para o arco $ax + b$, a segunda para valores de x e a terceira para valores de y. No exercício em questão, a tabela deve ter a forma:

$2x$	x	y

Para obtermos um período da função, atribuímos ao arco $2x$ os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, e a seguir determinamos os valores correspondentes de x e y:

$2x$	x	y
0	(0	0)
$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}\right.$	1$\left.\right)$
π	$\left(\frac{\pi}{2}\right.$	0$\left.\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}\right.$	$-1\left.\right)$
2π	(π	0)

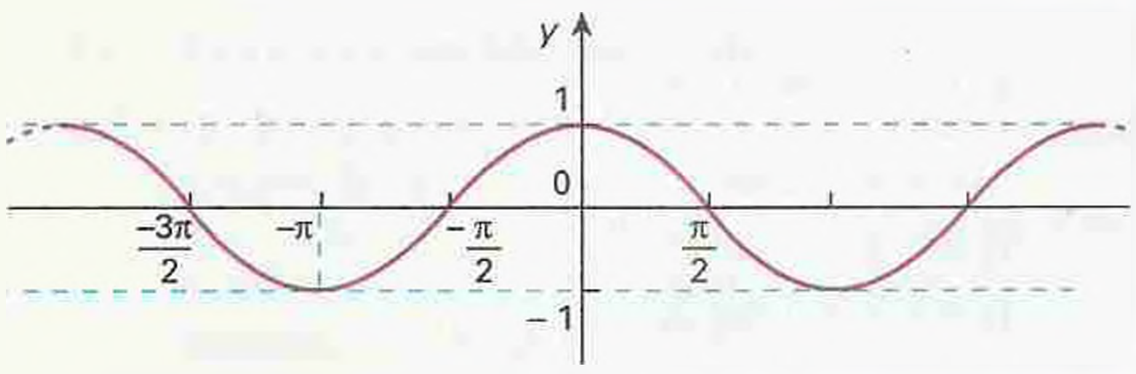


$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$; $p = \pi$

R.4 Esboçar o gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Resolução

$\frac{\pi}{2} - x$	x	y
0	$\left(\frac{\pi}{2}\right.$	0$\left.\right)$
$\frac{\pi}{2}$	(0	1)
π	$\left(-\frac{\pi}{2}\right.$	0$\left.\right)$
$\frac{3\pi}{2}$	($-\pi$	-1)
2π	$\left(-\frac{3\pi}{2}\right.$	0$\left.\right)$



$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$; $p = 2\pi$

R.5 Determinar os valores reais de m de modo que exista a igualdade $\operatorname{sen} x = 5m - 1$.

Resolução

Sabemos que $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$. Logo, $-1 \leqslant 5m - 1 \leqslant 1$. Somando 1 a cada membro dessa dupla desigualdade, temos:

$$\begin{array}{rcrcr} -1 & \leqslant & 5m & - & 1 \leqslant 1 \\ +1 & & & + & 1 \quad + 1 \\ \hline 0 & \leqslant & 5m & & \leqslant 2 \end{array}$$

Dividindo os membros dessa última desigualdade por 5, obtemos $0 \leqslant m \leqslant \frac{2}{5}$.

Portanto, a igualdade $\operatorname{sen} x = 5m - 1$ só existe para $m \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant m \leqslant \frac{2}{5}$.

O processo respiratório

Em um modelo para descrever o processo respiratório, considera-se que o fluxo de ar F na traquéia, em ambos os sentidos — inspiração e expiração —, e a pressão interpleural P — pressão existente na caixa torácica produzida pelo diafragma e por músculos intercostais — são funções periódicas do tempo t, havendo entre elas uma diferença de fase. Essas funções são descritas, para $t > 0$, por:

$$\begin{cases} F(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) \\ P(t) = C - BF\left(t + \dfrac{k}{\omega}\right) \end{cases}$$

em que k, A, B e C são constantes reais positivas e ω é a freqüência respiratória.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = 4 \operatorname{sen} x$

b) $y = -4 \operatorname{sen} x$

c) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}$

d) $y = \operatorname{sen} 4x$

e) $y = 3 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

f) $y = 3 \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

g) $y = -2 \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

h) $y = 4 + 2 \operatorname{sen} x$

i) $y = 3 - 2 \operatorname{sen} x$

j) $y = 2 + 5 \operatorname{sen} 2x$

k) $y = -3 + 2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

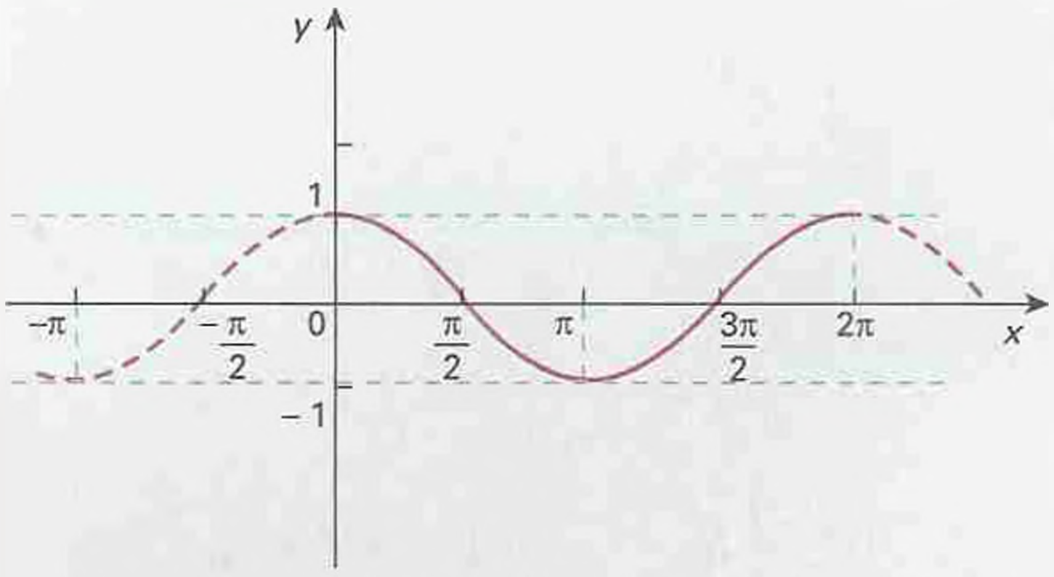
B.2 Para que valores reais de m a equação $\operatorname{sen} x = 3m - 1$ admite solução?

B.3 Determine os valores reais de m de modo que exista a igualdade $2 \operatorname{sen} x = 3m + 1$.

Exercícios complementares de C.1 a C.3

3. GRÁFICO DA FUNÇÃO $y = \cos x$

Sabemos que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; então o gráfico $y = \cos x$ é o gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. No exercício R.4 vimos que esse gráfico é:



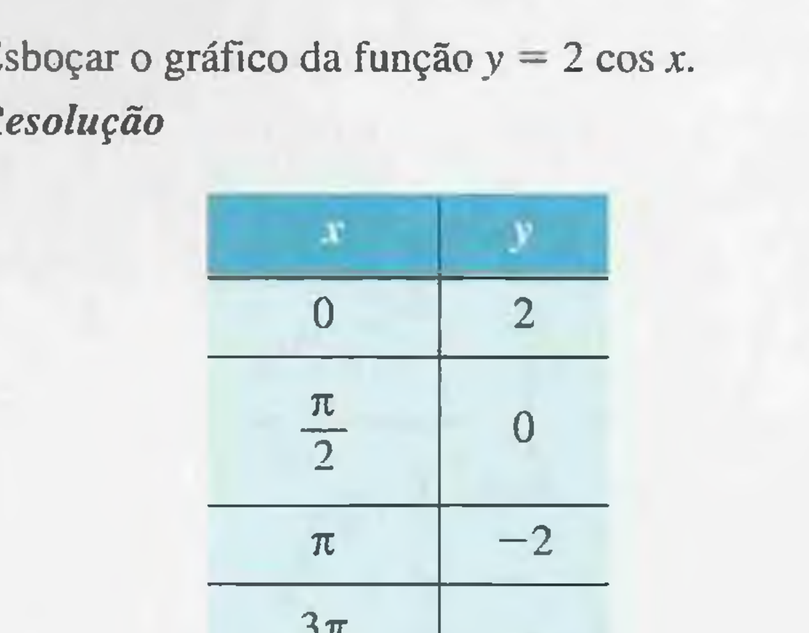
$D = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 1\}$; $p = 2\pi$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Esboçar o gráfico da função $y = 2 \cos x$.

Resolução

x	y
0	2
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-2
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	2

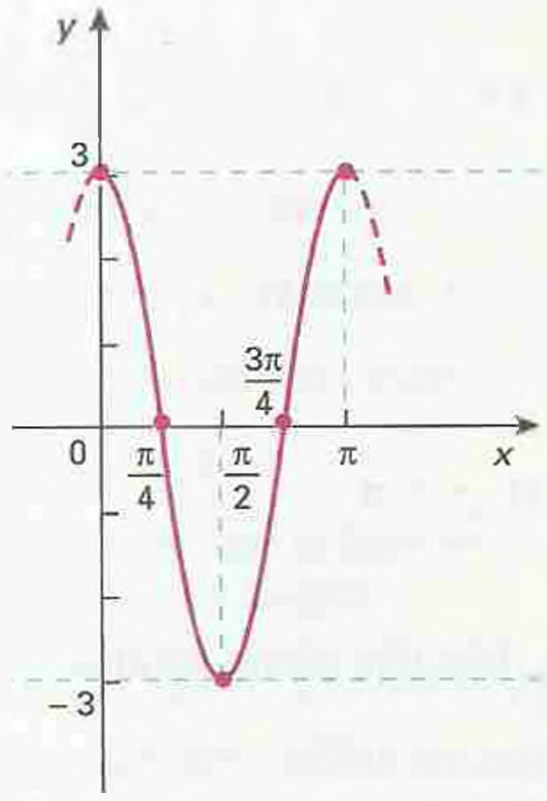


$D = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 2\}$; $p = 2\pi$

R.7 Esboçar o gráfico da função $y = 3 \cos 2x$.

Resolução

$2x$	x	y
0	$(0$	$3)$
$\frac{\pi}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}\right.$	$0\Big)$
π	$\left(\frac{\pi}{2}\right.$	$-3\Big)$
$\frac{3\pi}{2}$	$\left(\frac{3\pi}{4}\right.$	$0\Big)$
2π	$(\pi$	$3)$



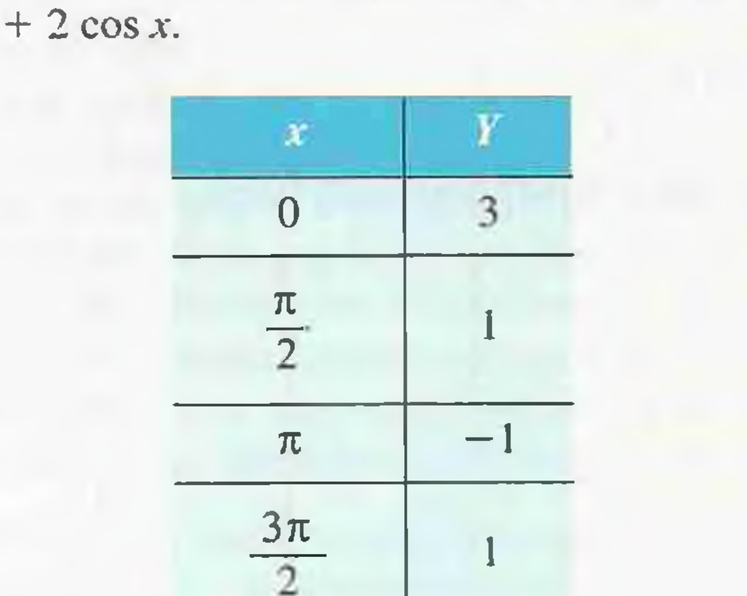
$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$; $p = \pi$

R.8 Esboçar o gráfico da função $y = |1 + 2 \cos x|$.

Resolução

Fase 1. Inicialmente, vamos construir o gráfico auxiliar $Y = 1 + 2 \cos x$.

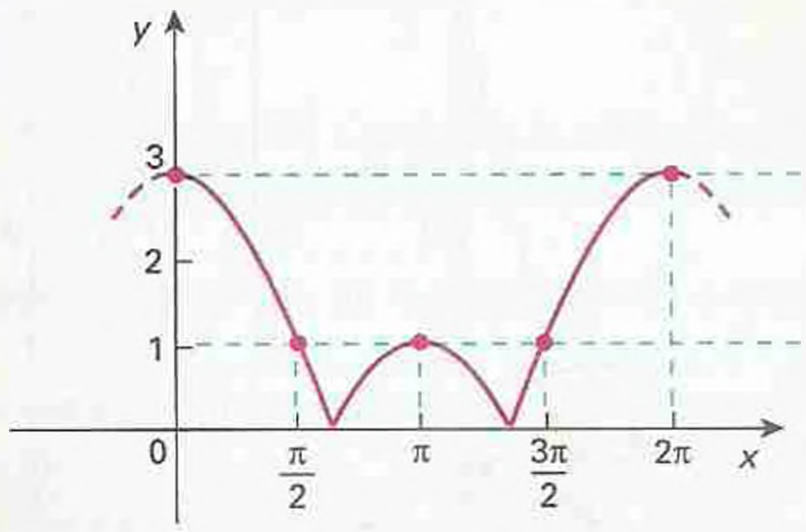
x	Y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	1
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	1
2π	3



Fase 2. Agora vamos construir o gráfico de $y = |1 + 2 \cos x|$. Para isso, basta, no gráfico anterior:

- conservar os pontos de ordenada não-negativa;
- transformar cada ponto de ordenada negativa em seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.

Assim, teremos o gráfico de $y = |1 + 2 \cos x|$:



$D = \mathbb{R}$; $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 3\}$; $p = 2\pi$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.4 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = 4 \cos x$

b) $y = -4 \cos x$

c) $y = \cos 4x$

d) $y = 3 \cos \frac{x}{2}$

e) $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

f) $y = -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

g) $y = 4 + 2 \cos x$

h) $y = -3 + \cos x$

i) $y = 2 + 5 \cos 2x$

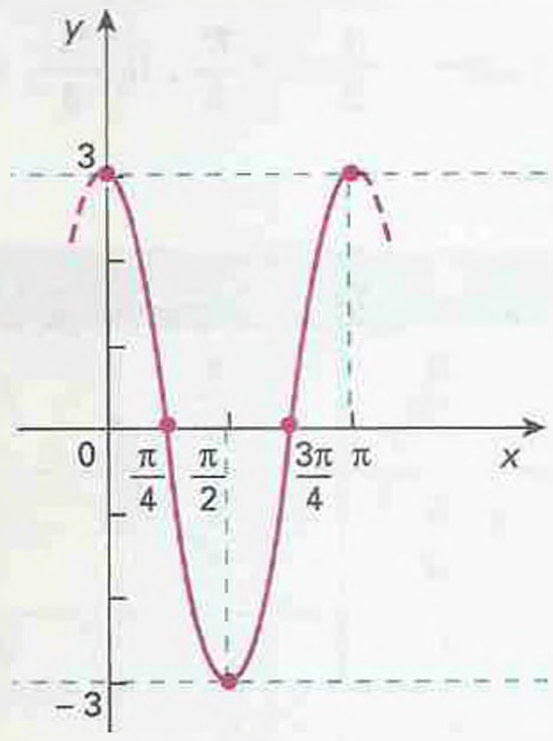
j) $y = 2 + 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

k) $y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

l) $y = |3 + 4 \cos x|$

m) $y = -|\cos x|$

B.5 O gráfico da função $y = b \cos mx$ é:



Determine os valores de b e m.

B.6 Para que valores reais de m podemos ter $\cos x = 2m - 5$?

B.7 (FURRN) Se $f(x) = 4 - \cos (x + 1)$, então o conjunto imagem de f é:

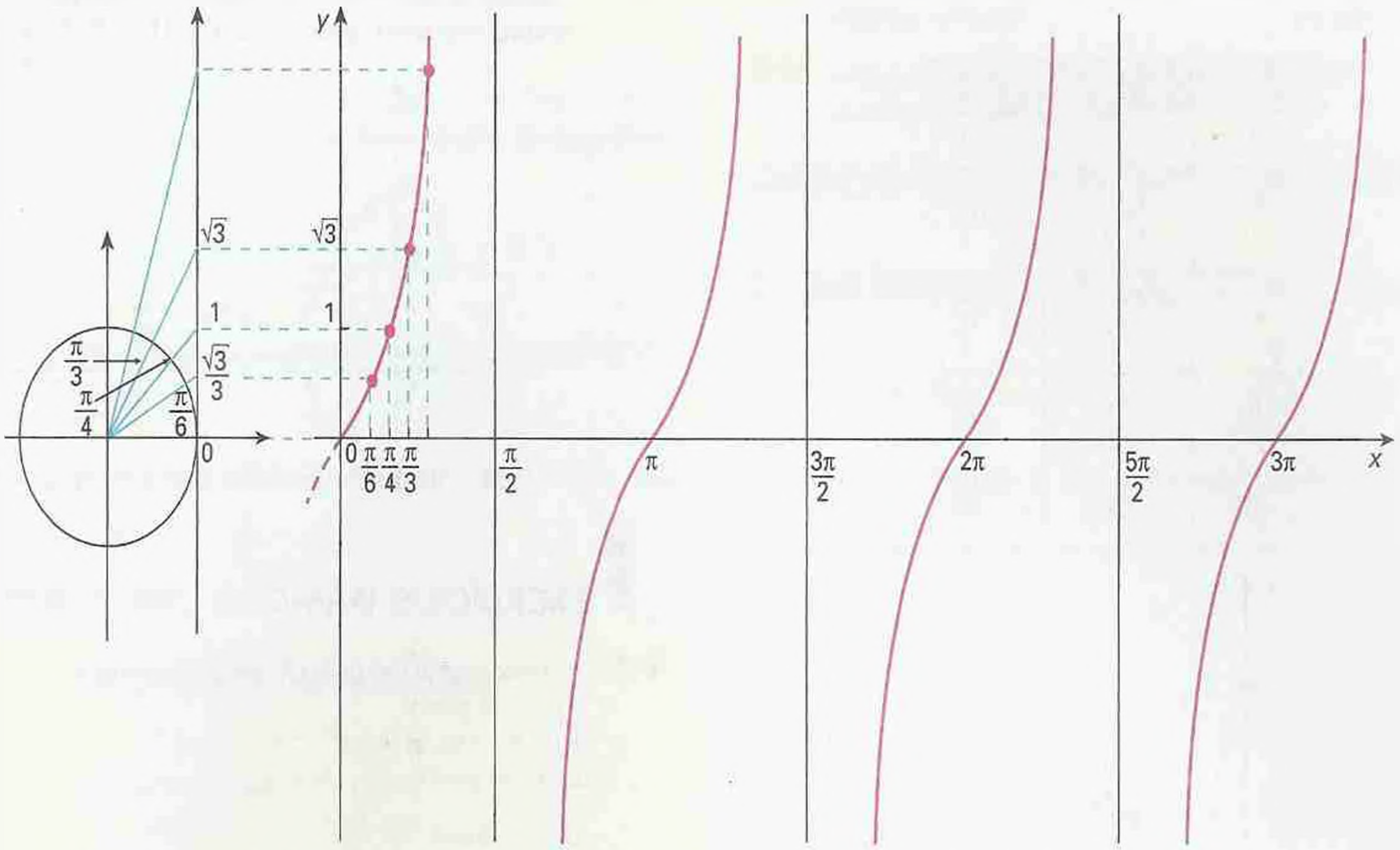
a) $]-1, 1[$ c) $[0, 1[$ e) $[0, +\infty[$

b) $[3, 5]$ d) $]-4, 4]$

Sugestão. $-1 \leq \cos (x + 1) \leq 1$.

Exercícios complementares C.4 e C.5

4. GRÁFICO DA FUNÇÃO $y = \text{tg } x$



$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}; \text{Im} = \mathbb{R}; p = \pi$$

As retas verticais que passam pelos pontos ..., $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... não têm ponto comum com o gráfico, e quando x se aproxima indefinidamente de uma dessas retas, a distância entre ela e o gráfico tende a zero.

Essas retas são chamadas de **assíntotas verticais** do gráfico.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.9 Esboçar o gráfico da função $y = \text{tg } 2x$.

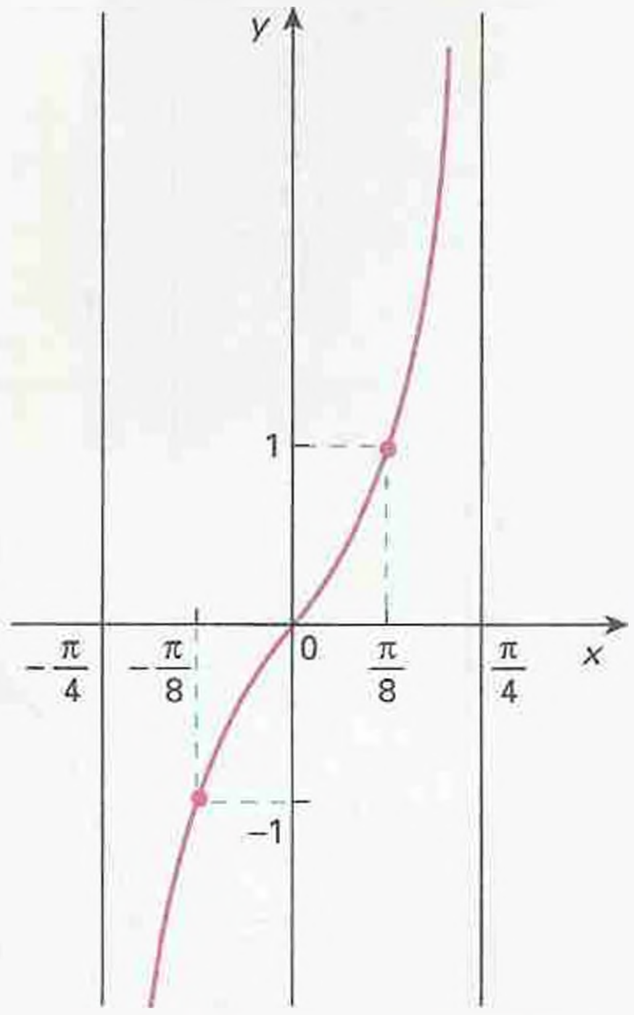
Resolução

Para esboçar um período do gráfico, atribuímos ao arco $2x$ os valores $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$. Assim, temos a tabela:

$2x$	x	y
$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	-1
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$

O gráfico passa pelos pontos $\left(-\frac{\pi}{8}, -1\right)$, $(0, 0)$ e $\left(\frac{\pi}{8}, 1\right)$ e, como não existe a tg $2x$ para $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$, temos que duas assíntotas verticais passam pelos pontos de abscissas $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.

Logo, um período do gráfico é:



O domínio é obtido impondo-se a condição de existência para a tg $2x$, isto é:

$$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \therefore x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Logo, o domínio é o conjunto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

O conjunto imagem é Im = ℝ.

O período da função é a distância entre duas assíntotas consecutivas, isto é: $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \therefore p = \frac{\pi}{2}$

EXERCÍCIO BÁSICO

B.8 Esboce o gráfico de cada uma das funções:

a) $y = \text{tg } 3x$ c) $y = -\text{tg } 2x$ e) $y = -|\text{tg } x|$

b) $y = \text{tg } \frac{x}{2}$ d) $y = |\text{tg } x|$ f) $y = |\text{tg } 2x|$

Exercício complementar C.6

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Se $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$, determine os valores de m de modo que sen $x = 3m - 1$. **Sugestão**. Desenhe o intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ na circunferência trigonométrica e determine a variação do sen x.

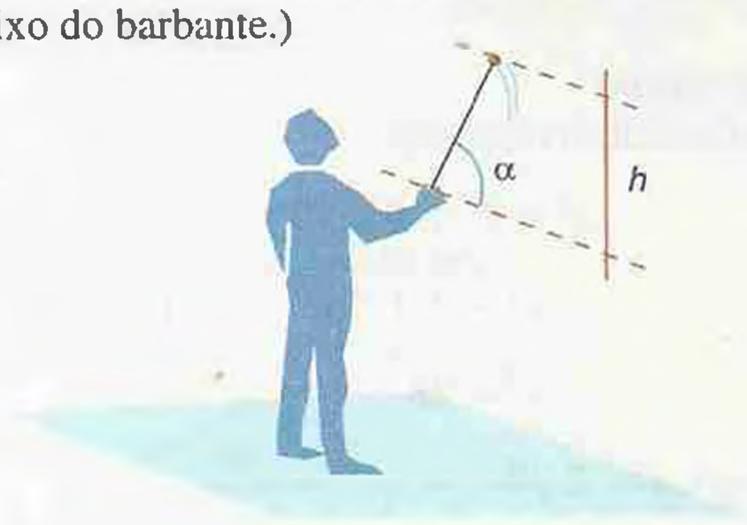
C.2 (AEU-DF) Considere que as fases da Lua sejam regidas aproximadamente pela função:

$$f(d) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{d \cdot \pi}{14}\right)$$

onde f corresponde à fração da superfície lunar visível iluminada no "d-ésimo" dia de uma observação. Assinale e classifique como V ou F cada uma das afirmativas seguintes, em relação à função dada.

a) No dia imediatamente anterior ao do início da observação a Lua, apresenta 50% de sua face visível iluminada.
b) No sétimo dia da observação teremos "Lua cheia".
c) No 49º dia da observação teremos "Lua nova".
d) A Lua apresentará 75% de sua face visível iluminada no 23º dia da observação.
e) Um astrônomo amador considera que as melhores noites de observação da Lua são as que precedem ou sucedem as noites de Lua nova, devido à maior sombra que as montanhas lunares projetam em sua superfície. Neste caso, o astrônomo poderá proceder a uma dessas observações "ideais" na noite do 15º dia da observação.

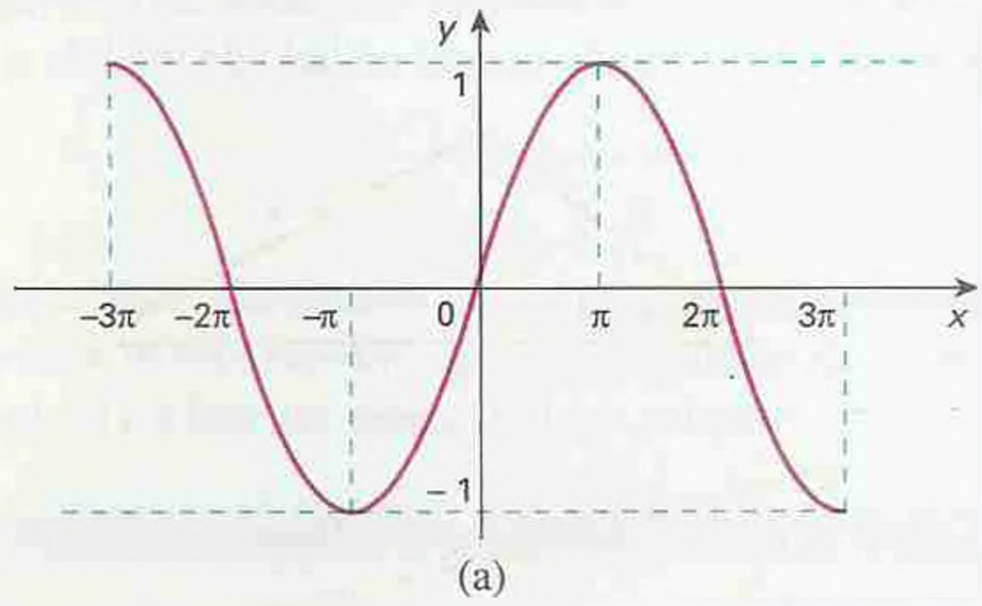
C.3 (Cefet-PR-modificado) Um garoto amarra uma pedra a um barbante de 3 dm de comprimento e a gira num plano β vertical e perpendicular ao solo. Observe na figura a altura h e a medida α, em radianos, do ângulo formado pelo barbante e uma reta horizontal contida no plano β. Construa um sistema de eixos cartesiano ortogonal, considerando que cada unidade represente 1 dm, e desenhe o gráfico que descreve os valores de h em função de α. (Considere medidas algébricas negativas para h quando a pedra estiver abaixo da horizontal que passa pelo extremo fixo do barbante.)



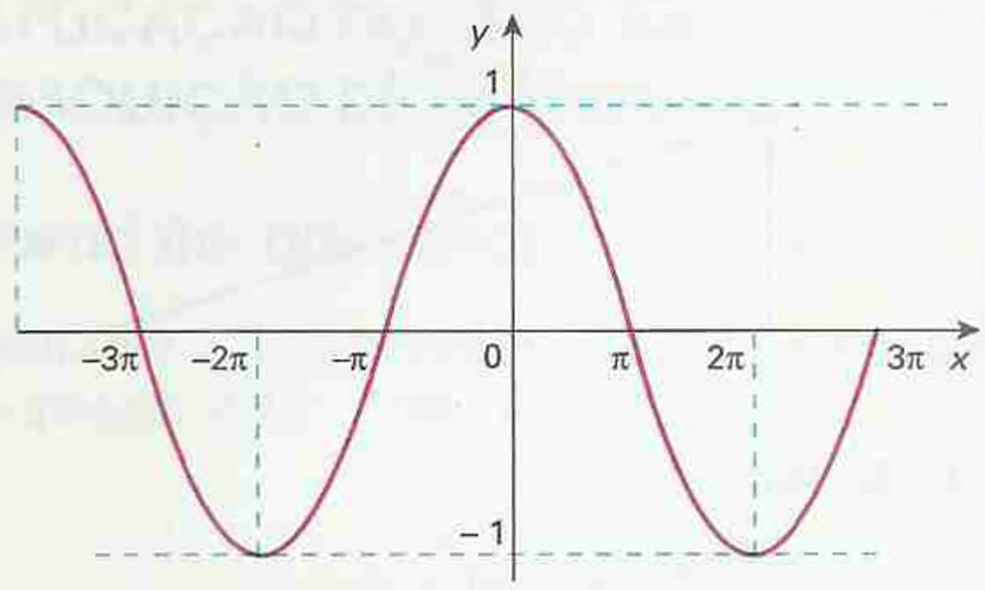
C.4 Sabendo que $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, determine os valores reais de m de modo que $\cos x = \frac{3m - 1}{2}$.

C.5 (U. F. Santa Maria-RS) Considere as afirmativas referentes a funções trigonométricas, classificando cada uma como V ou F.

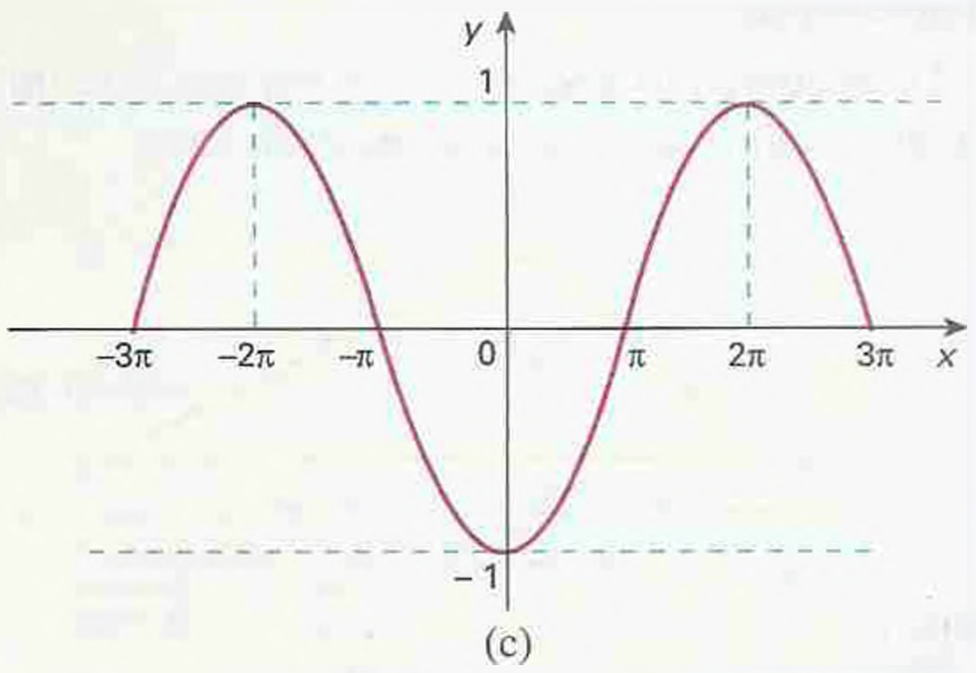
- A função $y = 2 \cos 3x$ tem domínio ℝ e imagem $[-1, 1]$.
- Para qualquer número real x, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a sentença $\frac{\text{sen } 2x}{\text{sen}^2 x} = \frac{2}{\text{tg } x}$ é uma identidade.
- Dos gráficos a seguir, o que melhor representa a função $y = \text{sen}\frac{x}{2}$ é o indicado pela letra (a).



(a)



(b)



(c)

A seqüência correta é:

a) V — F — F c) V — F — V e) F — F — V
b) F — V — F d) F — V — V

C.6 Esboce o gráfico da função:

$$f(x) = \frac{\text{tg } x}{1 + \text{tg } x} + \frac{\text{tg } x}{1 - \text{tg } x}$$

Capítulo 37

RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

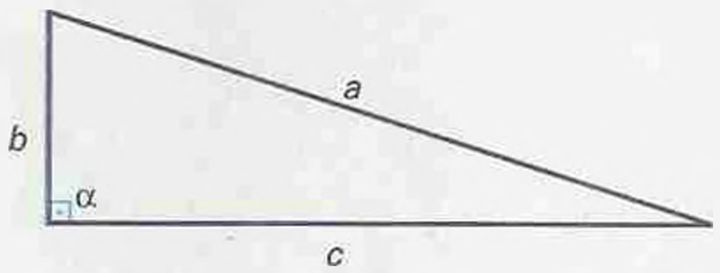
1. APLICAÇÃO DO CO-SENO NA RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Teorema (lei dos co-senos)

Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo e α a medida do ângulo oposto ao lado de medida a.

($\alpha < 90°$)

($\alpha > 90°$)



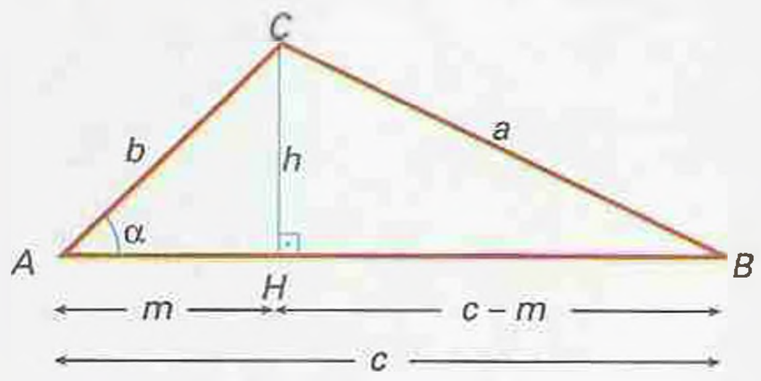
($\alpha = 90°$)

Então, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Demonstração

Demostraremos apenas o caso em que $\alpha < 90°$, deixando os outros dois casos como exercícios.



Sejam:

- $\overline{CH}$ a altura relativa ao lado $\overline{AB}$;
- $\overline{AH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{AC}$ sobre o lado $\overline{AB}$;
- $\overline{BH}$ a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AB}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos HBC e HAC, temos:

$$h^2 + (c - m)^2 = a^2 \quad \text{(I)}$$
$$h^2 + m^2 = b^2 \quad \text{(II)}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II):

$$(c - m)^2 - m^2 = a^2 - b^2$$
$$\therefore c^2 - 2cm + m^2 - m^2 = a^2 - b^2$$
$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad \text{(III)}$$

Do triângulo HAC, temos:

$$\cos \alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cos \alpha \quad \text{(IV)}$$

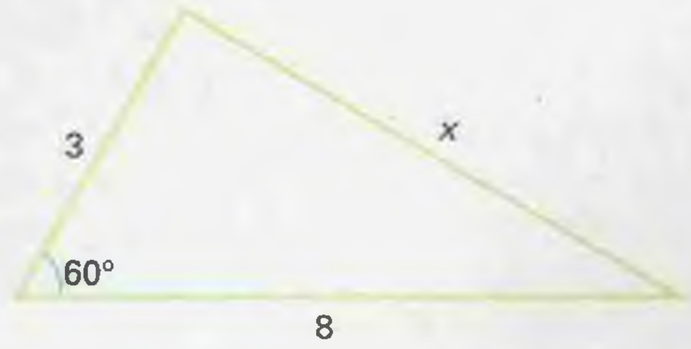
Substituindo (IV) em (III), encontramos, finalmente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha$$

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Determinar o valor de x na figura.



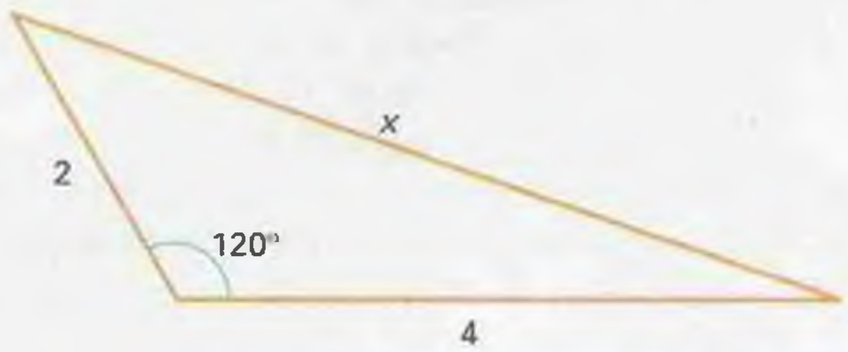
Resolução

Pela lei dos co-senos:

$$x^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60°$$
$$\therefore x^2 = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2}$$
$$\therefore x^2 = 49$$

Logo, $x = 7$.

R.2 Determinar o valor de x na figura.



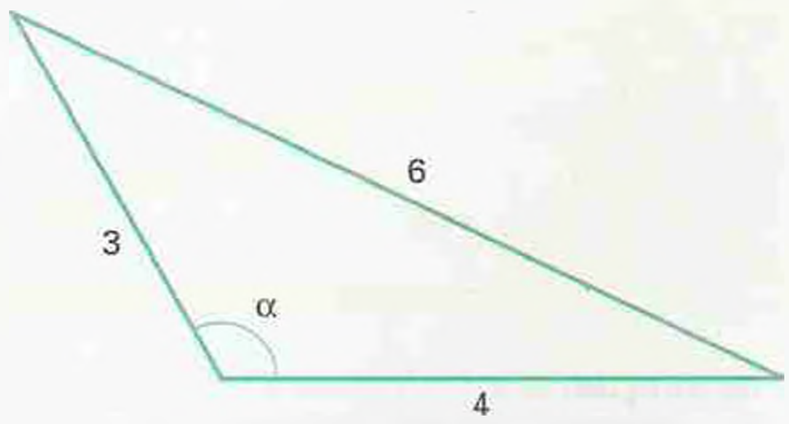
Resolução

Pela lei dos co-senos:

$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos 120°$$
$$\therefore x^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$\therefore x^2 = 28$$

Logo, $x = 2\sqrt{7}$.

R.3 Determinar o valor do cos α na figura.



Resolução

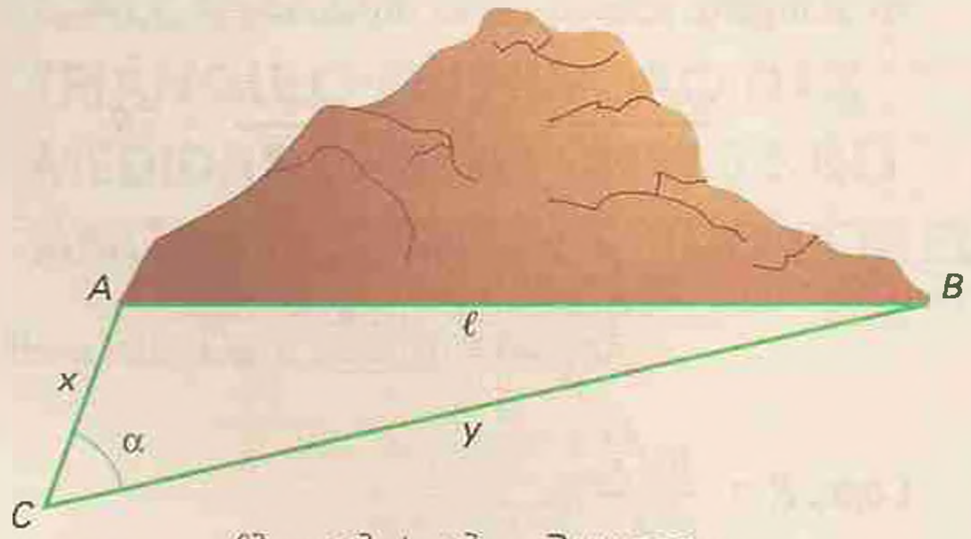
Pela lei dos co-senos:

$$6^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha$$
$$\therefore 36 = 9 + 16 - 24 \cos \alpha \quad \therefore 24 \cos \alpha = -11$$

Logo, $\cos \alpha = -\frac{11}{24}$.

Uma outra maneira de se calcular o comprimento de um túnel a ser construído

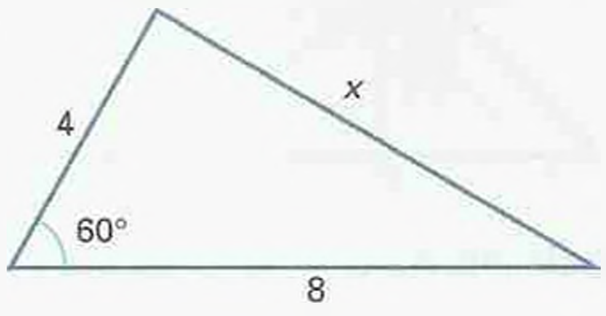
Para calcular o comprimento ℓ de um túnel que será construído ligando dois pontos A e B da base de uma montanha, pode-se usar o **teorema de Pitágoras**, conforme já vimos no capítulo 8. Uma outra maneira é usar a **lei dos co-senos**. Considera-se no plano da base da montanha um ponto C e calculam-se as medidas $CA = x$, $CB = y$ e $m(A\hat{C}B) = \alpha$, conforme a figura. Através da lei dos co-senos obtém-se o comprimento ℓ.



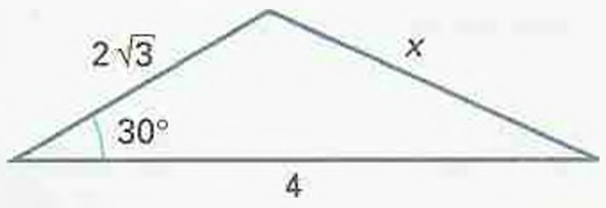
$$\ell^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

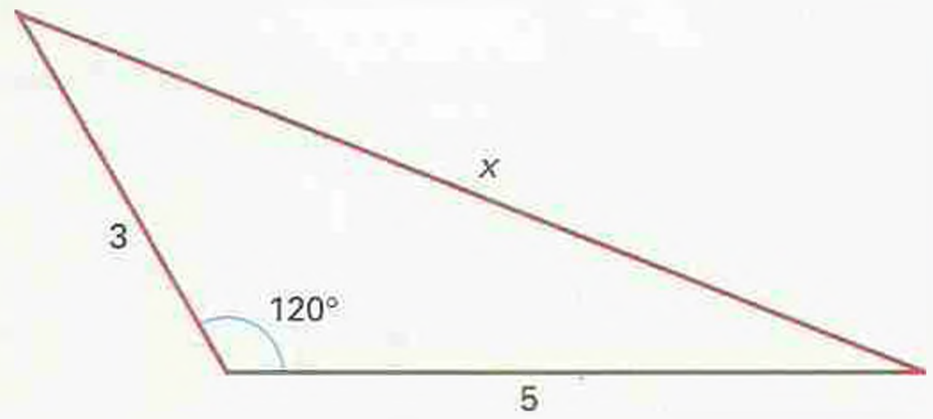
B.1 Determine o valor de x na figura.



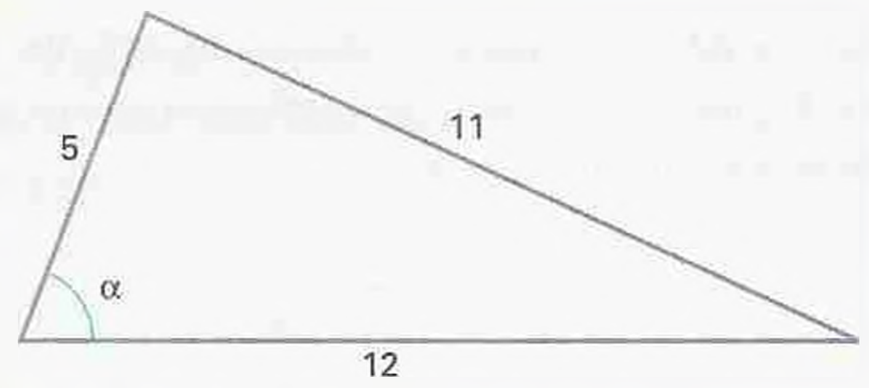
B.2 (PUC-RS) Determine x na figura.



B.3 Calcule a medida x na figura.



B.4 Obtenha o cos α na figura.



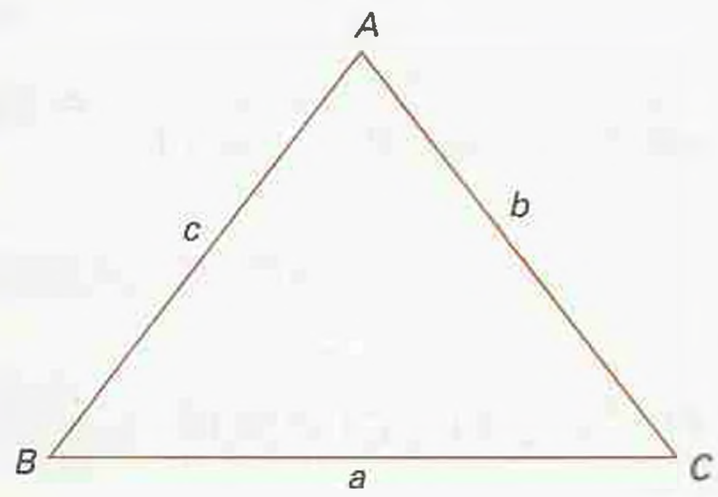
B.5 Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 5 cm e 10 cm e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule as medidas das diagonais desse polígono.

Exercícios complementares de C.1 a C.3

2. APLICAÇÃO DO SENO NA RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS

Teorema (lei dos senos)

Sejam $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, as medidas dos lados de um triângulo ABC.



Então, temos:

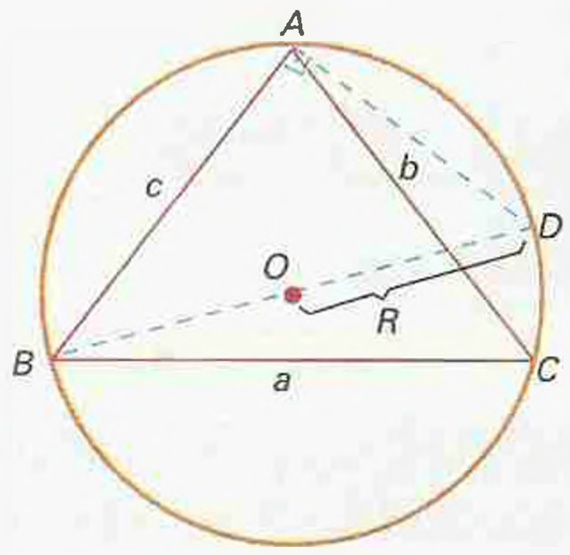
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

em que R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração

Demonstraremos apenas o caso em que o centro O da circunferência circunscrita é interior ao triângulo. As

demonstrações para os casos em que o centro O pertence a um dos lados ou é exterior ao triângulo ficarão como exercícios.



Sendo $\overline{BD}$ um diâmetro dessa circunferência, temos que o ângulo $D\hat{A}B$ é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Assim, temos:

$$\operatorname{sen} \hat{D} = \frac{c}{2R}$$

Porém, os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois estão inscritos na mesma circunferência e determinam o mesmo arco. Logo, temos que:

$$\operatorname{sen} \hat{D} = \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Traçando por A um diâmetro $\overline{AD}$, temos analogamente:

$$2R = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$$

Traçando por C um diâmetro $\overline{CD''}$, temos analogamente:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}}$$

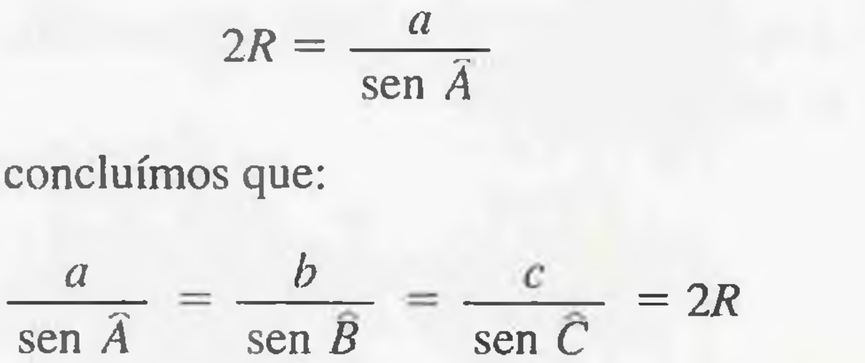
Portanto, concluímos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R$$

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Determinar o valor de x na figura.



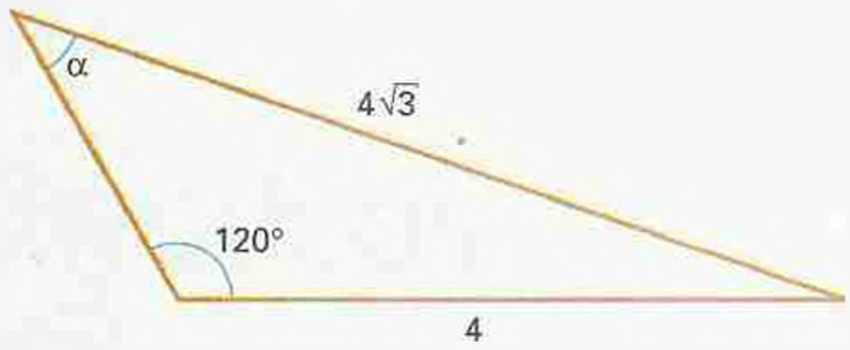
Resolução

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{5\sqrt{2}}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Logo, $x = 5$.

R.5 Determinar o valor de α na figura.



Resolução

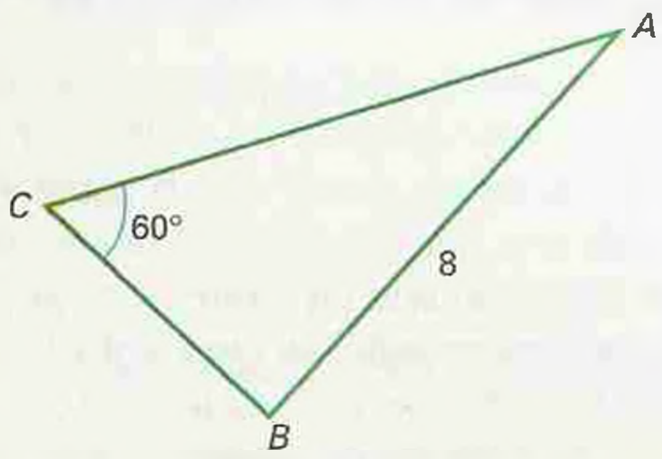
Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{\operatorname{sen} 120°} \Rightarrow \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

Como α é a medida de um ângulo agudo, temos que $\alpha = 30°$.

R.6 Calcular a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura.



Resolução

Sendo R a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo, temos pela lei dos senos:

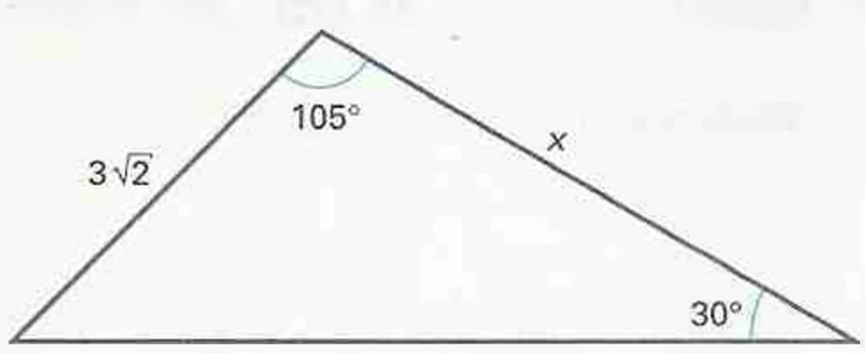
$$\frac{8}{\operatorname{sen} 60°} = 2R \therefore \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\therefore \frac{16}{\sqrt{3}} = 2R \therefore R = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

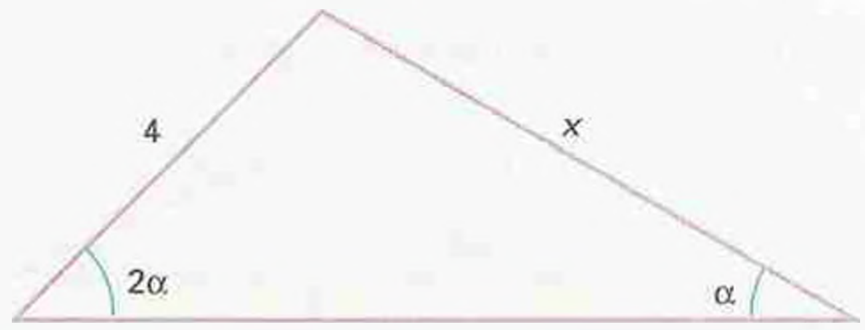
Logo, $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

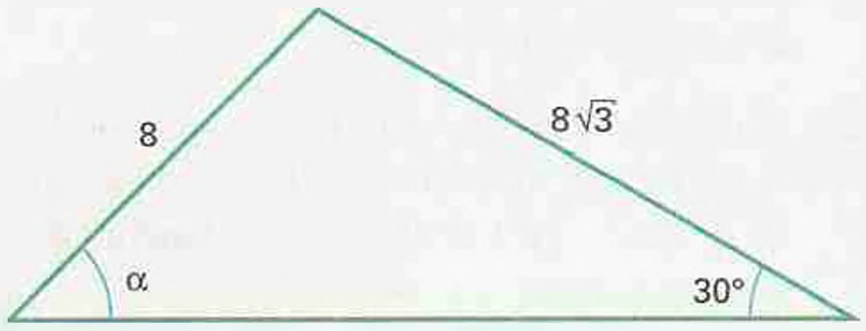
B.6 Determine o valor de x na figura.



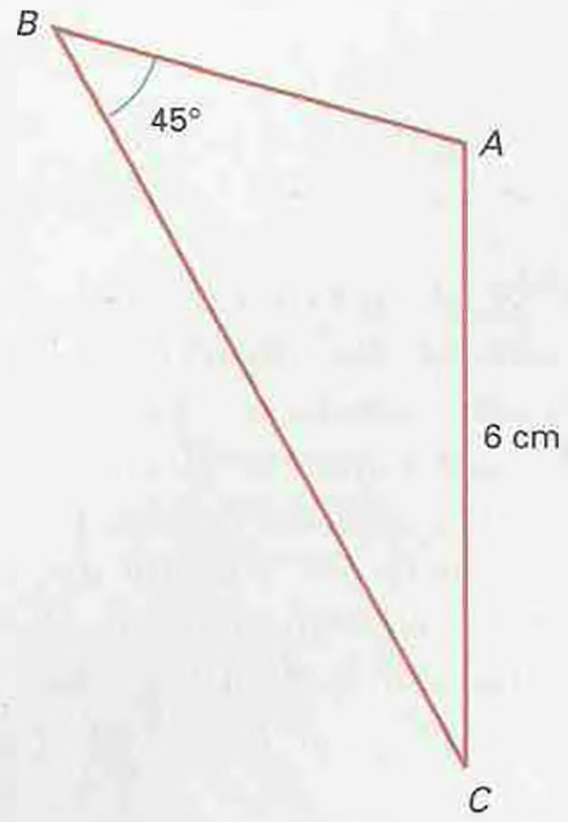
B.7 Sabendo que $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, calcule o valor de x.



B.8 Determine a medida α, sabendo que $\alpha < 90°$.



B.9 (Fatec-SP) O raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC*, indicado abaixo, tem comprimento:

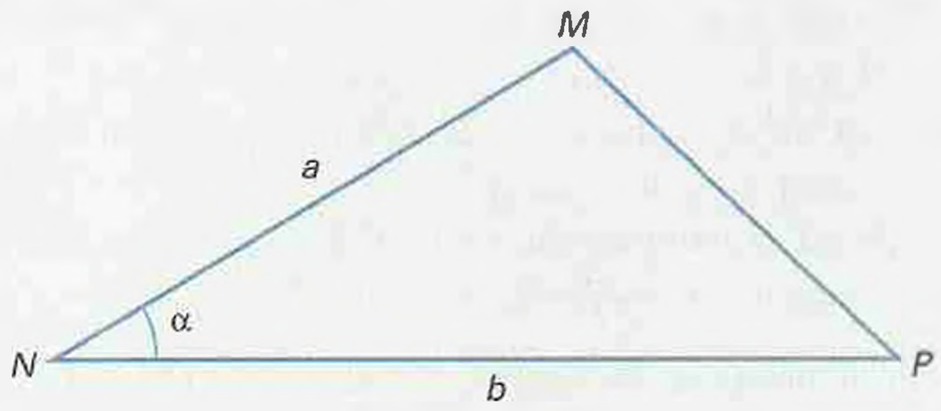


a) 3 cm
b) 12 cm
c) 6 cm
d) $3\sqrt{2}$ cm
e) $6\sqrt{2}$ cm

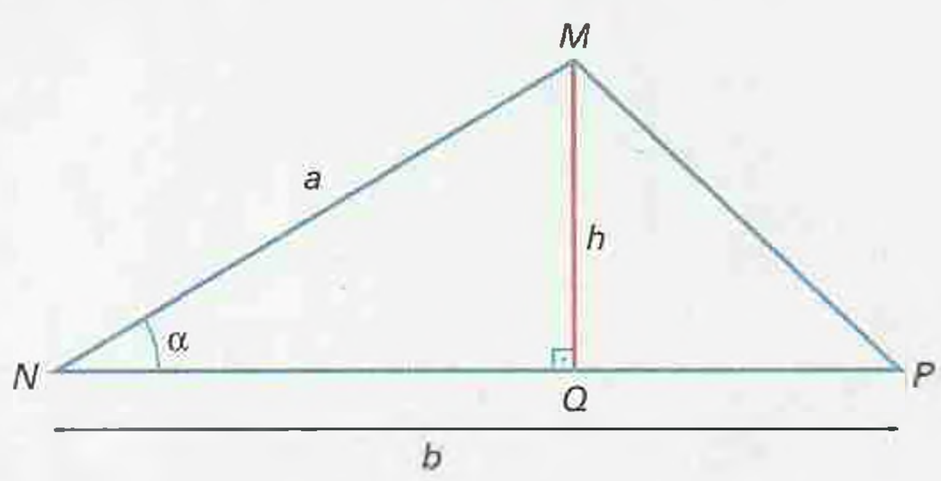
Exercícios complementares de C.4 a C.6

3. CÁLCULO DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DAS MEDIDAS DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO COMPREENDIDO POR ELES

Para calcular a área do triângulo:



vamos indicar por *h* a medida da altura relativa ao lado $\overline{NP}$:



Assim, temos que a área *A* desse triângulo é dada por:

$$A = \frac{bh}{2} \quad \text{(I)}$$

No triângulo *MNQ* temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{a}$, ou ainda:

$$h = a \operatorname{sen}\alpha \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos a área do triângulo em função de *a*, *b* e α:

$$A = \frac{ba \operatorname{sen}\alpha}{2}, \text{ ou seja:}$$

$$A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\alpha$$

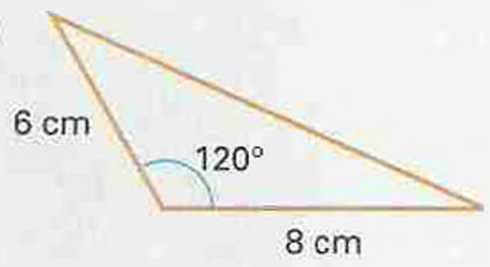
Observe que esse cálculo foi feito para $\alpha < 90°$, porém, o resultado vale também para $\alpha = 90°$ ou $\alpha > 90°$. (**Verifique!**)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 Calcular a área de cada um dos triângulos:

a)

b)



Resolução

a) $A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$

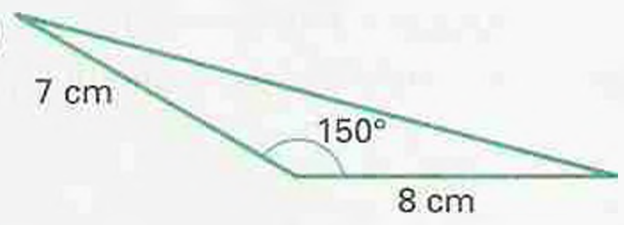
b) $A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

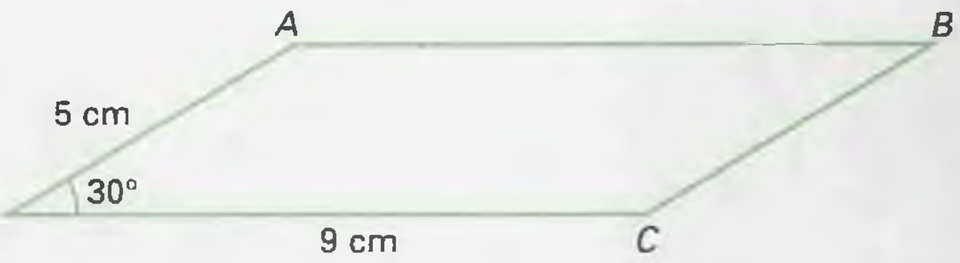
B.10 Calcule a área de cada um dos triângulos:

a)

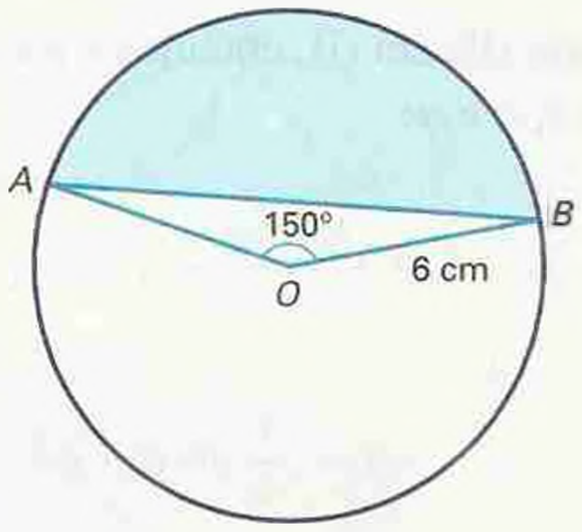
b)



B.11 Calcule a área do paralelogramo *ABCD*:



B.12 Calcule a área do segmento circular colorido no círculo de centro O, abaixo:

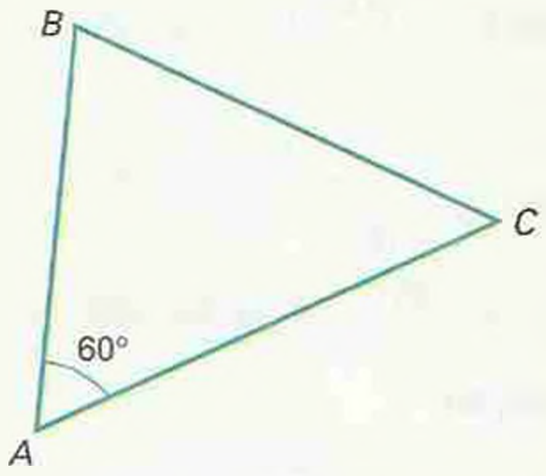


Sugestão. Subtraia da área do setor circular AOB a área do triângulo AOB.

Exercício complementar C.7

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Cesgranrio) Deseja-se medir a distância entre duas cidades B e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que $AB = 80$ km e $AC = 120$ km, em que A é uma cidade conhecida, como mostra a figura.



Logo, a distância entre B e C, em km, é:

a) menor que 90.
b) maior que 90 e menor que 100.
c) maior que 100 e menor que 110.
d) maior que 110 e menor que 120.
e) maior que 120.

C.2 (Unicamp-SP) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água/bomba e caixa-d'água/casa é de 60°. Se se pretende bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários?

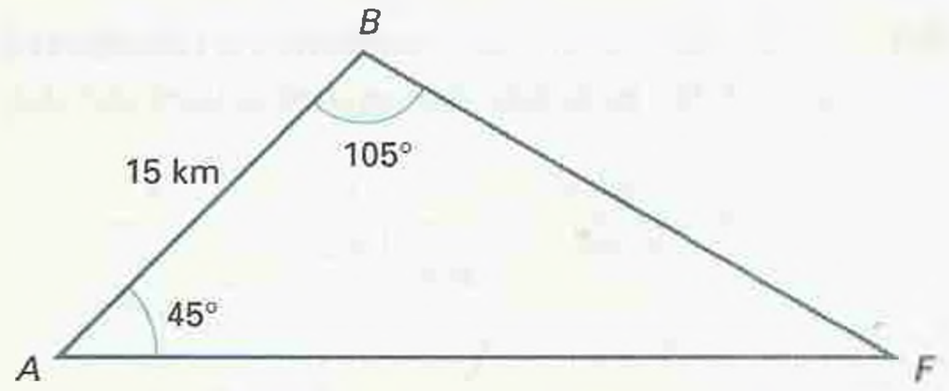
C.3 (Fuvest-SP) Um triângulo T tem os lados com medidas iguais a 4, 5 e 6. O co-seno do maior ângulo de T é:

a) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{8}$

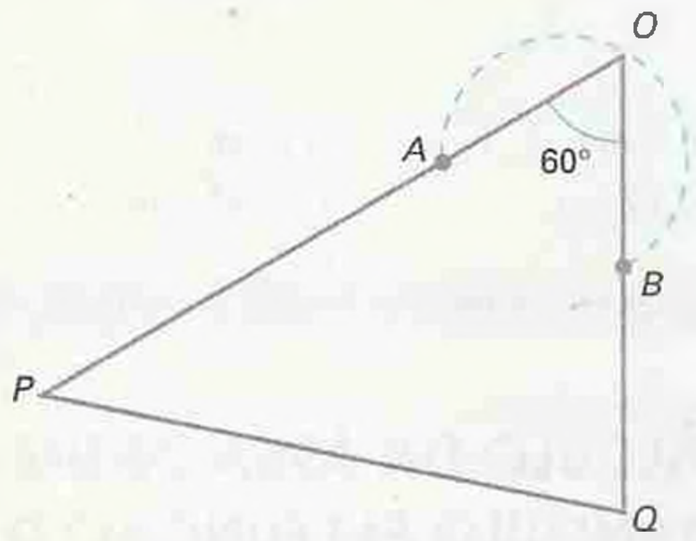
b) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{2}{3}$

C.4 Um triângulo ABC de perímetro p está inscrito numa circunferência de raio r. Calcule, em função de p e r, o valor de sen $\hat{A}$ + sen $\hat{B}$ + sen $\hat{C}$.

C.5 (Unicamp-SP) Observadores nos pontos A e B localizam um foco de incêndio em F. Conhecendo os ângulos $F\hat{A}B = 45°$, $F\hat{B}A = 105°$ e a distância $AB = 15$ km, determine as distâncias AF e BF.



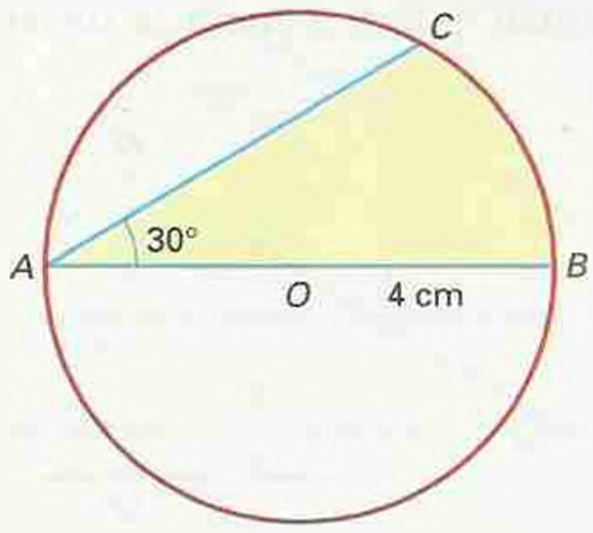
C.6 (UnB-DF) A figura abaixo ilustra a vista de cima de uma peça triangular de madeira OPQ, com ângulo $P\hat{O}Q$ igual a 60°, colocada entre dois pregos muito finos A e B, fixados no solo e distantes 40 cm, um do outro. Gira-se a peça sobre o solo, de maneira que ela fique sempre em contato com os dois pregos e com o solo, fazendo com que o ponto O descreva um arco de circunferência, conforme tracejado na figura.



Com base na situação apresentada e sabendo que, na posição em que a distância entre A e O é máxima, o triângulo AOB é retângulo, classifique como V ou F cada um dos itens abaixo.

a) Na posição em que o triângulo AOB é isósceles, a distância entre A e O é maior que a distância entre A e B.
b) A distância entre A e O é sempre inferior a 50 cm.
c) Há apenas uma posição na qual O está a uma distância de 10 cm de A.
d) Há exatamente duas posições nas quais O está a uma distância de 43,7 cm de A.

C.7 Calcule a área da região colorida no círculo de centro O:



Capítulo 38

MATRIZES

1. INTRODUÇÃO

Em um observatório meteorológico, um cientista foi incumbido de registrar, de hora em hora, a temperatura de uma região durante os quatro primeiros dias do mês de junho. Depois de realizado o trabalho, o meteorologista apresentou um relatório com a seguinte tabela:

i \ j	1	2	3	4
1	18	16	19	17
2	17	16	18	17
3	16	18	20	19
4	16	17	20	18
5	17	19	19	20
6	18	19	17	20
7	18	20	21	19
8	19	20	21	19
9	20	21	23	21
10	20	22	21	22
11	21	21	22	23
12	23	21	20	23
13	22	20	21	22
14	22	21	22	20
15	21	23	21	21
16	20	21	20	19
17	20	21	21	20
18	19	20	21	20
19	18	19	22	21
20	19	20	22	20
21	18	19	20	19
22	17	18	19	18
23	17	18	18	17
24	17	18	16	15

na qual cada elemento da linha i e coluna j é a temperatura, em graus Celsius, da região na hora i do dia j.

Note a simplicidade dessa tabela. Se quisermos, por exemplo, saber qual foi a temperatura às 9 h do dia 3 de junho, basta olharmos para a intersecção da linha 9 com a coluna 3 e encontraremos 23 °C.

Tabelas como essa são denominadas **matrizes**. Vamos formalizar uma estrutura algébrica para as matrizes, ou seja, definiremos igualdade e operações com elas.

2. MATRIZ

Chama-se **matriz do tipo $m \times n$** (lê-se "m por n") toda tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Tal tabela deve ser representada entre parênteses ( ), entre colchetes [ ] ou entre barras duplas $\| \ \|$.

Exemplos

a) $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ **Matriz A do tipo 3×2**

b) $B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ **Matriz B do tipo 2×2**

c) $C_{1\times 3} = \| \ 4 \quad -1 \quad 5 \ \|$ **Matriz C do tipo 1×3**

Convenção

Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e coluna j de uma matriz A.

Exemplo

Na matriz $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, temos que:

- o número 9 está posicionado na linha 1 e coluna 1; indica-se esse elemento por a_{11}, ou seja, $a_{11} = 9$;
- o 4 está posicionado na linha 1 e coluna 2; indica-se esse elemento por a_{12}, ou seja, $a_{12} = 4$;
- o 5 está posicionado na linha 2 e coluna 1; indica-se esse elemento por a_{21}, ou seja, $a_{21} = 5$.

Analogamente temos $a_{22} = 6$, $a_{31} = 1$ e $a_{32} = -3$.

Representação genérica de uma matriz

Podemos representar genericamente uma matriz A do tipo $m \times n$ da seguinte maneira:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como essa representação é muito extensa, vamos convencionar uma forma abreviada. Essa matriz pode ser representada, simplesmente, por $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo da matriz, por $A = (a_{ij})$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Representar explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = 5i - j$.

Resolução

Inicialmente, vamos escrever genericamente uma matriz:

$$2 \times 3: A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz deve ser calculado pela lei $a_{ij} = 5i - j$. Temos, portanto:

$$a_{11} = 5 \cdot 1 - 1 = 4 \quad a_{21} = 5 \cdot 2 - 1 = 9$$
$$a_{12} = 5 \cdot 1 - 2 = 3 \quad a_{22} = 5 \cdot 2 - 2 = 8$$
$$a_{13} = 5 \cdot 1 - 3 = 2 \quad a_{23} = 5 \cdot 2 - 3 = 7$$

Assim, a matriz é $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

As matrizes e a engenharia

Na engenharia, um problema relevante consiste em estudar o deslocamento de uma esfera lisa num meio fluido. Nesse estudo intervêm as seguintes grandezas: força resultante (F), velocidade (v), diâmetro (D), da esfera, massa específica (ρ) e viscosidade (η) do fluido.

Através da inter-relação dessas grandezas obtém-se uma matriz chamada de **matriz dimensional**. Algumas propriedades dessa matriz permitem o estudo do fenômeno cujos resultados serão úteis, por exemplo, na construção de submarinos e aviões.

3. MATRIZES ESPECIAIS

Matriz quadrada

Matriz quadrada é toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos

a) $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

b) $B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

c) $C_{1 \times 1} = (8)$ é uma matriz quadrada de ordem 1.

Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a **diagonal secundária**.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

Observe:

- na diagonal principal os elementos a_{ij} possuem $i = j$:

$$a_{11}, a_{22} \text{ e } a_{33}$$

- na diagonal secundária os elementos a_{ij} são tais que $i + j = 3 + 1$ (em que 3 é a ordem da matriz A):

$$a_{31}, a_{22} \text{ e } a_{13}$$

Matriz identidade

Chama-se **matriz identidade de ordem n**, que se indica por I_n, a matriz:

$$I_n = (a_{ij})_{n \times n} \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Note, pela definição, que:

- a matriz identidade de ordem 1 é $I_1 = (1)$;
- toda matriz identidade de ordem maior do que 1 terá todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e todos os demais elementos iguais a zero.

Exemplos

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz nula

Matriz nula do tipo $m \times n$, que se indica por $0_{m \times n}$, é a matriz:

$$0_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} \text{ tal que } a_{ij} = 0, \ \forall i, j, \ 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n$$

Em outras palavras, matriz nula é qualquer matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplos

a) $0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. MATRIZES TRANSPOSTAS

Chama-se **transposta** da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, que se indica por A^t, a matriz:

$$A^t = (b_{ji})_{n \times m} \text{ tal que } b_{ji} = a_{ij}, \ \forall i, j, \ 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n$$

Ou seja, cada coluna i de A^t é, ordenadamente, igual à linha i de A.

Exemplos

a) $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A'_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

b) $B_{1\times 4} = (6 \quad 0 \quad 8 \quad 4)$ $\quad B'_{4\times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. ELEMENTOS CORRESPONDENTES EM MATRIZES DO MESMO TIPO

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, dizemos que o elemento da linha r e coluna s de A é o **correspondente** do elemento da linha r e coluna s de B, $\forall r, s$.

Exemplo

Nas matrizes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$:

temos que:

- a_{11} é o correspondente de b_{11};
- a_{12} é o correspondente de b_{12};
- a_{13} é o correspondente de b_{13};

etc.

6. IGUALDADE DE MATRIZES

Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, dizemos que $A = B$ se, e somente se, todo elemento de A é igual ao seu correspondente em B.

Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow a_{rs} = b_{rs} \quad \forall r, s,\ 1 \leqslant r \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant s \leqslant n$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.2 Determinar os números reais x e y tais que:

$$\begin{pmatrix} 2x - y & 8 \\ 3 & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução

Duas matrizes do mesmo tipo são iguais se, e somente se, seus elementos correspondentes são iguais. Assim, devemos ter $\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{(I)} \\ x + y = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Somando, membro a membro, as igualdades (I) e (II), temos $3x = 6 \Rightarrow x = 2$.

Substituindo $x = 2$ em (II), temos $2 + y = 1 \Rightarrow y = -1$.

Logo, $x = 2$ e $y = -1$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Um conglomerado é composto por cinco lojas, numeradas de 1 a 5. A tabela a seguir apresenta o faturamento em dólares de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

$$\begin{bmatrix} 1.950 & 2.030 & 1.800 & 1.950 \\ 1.500 & 1.820 & 1.740 & 1.680 \\ 3.010 & 2.800 & 2.700 & 3.050 \\ 2.500 & 2.420 & 2.300 & 2.680 \\ 1.800 & 2.020 & 2.040 & 1.950 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a) Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?
b) Qual foi o faturamento de todas as lojas no dia 3?
c) Qual foi o faturamento da loja 1 nos 4 dias?

B.2 Um técnico de basquetebol descreveu o desempenho dos titulares de sua equipe, em sete jogos, através da matriz:

$$\begin{bmatrix} 18 & 17 & 18 & 17 & 21 & 18 & 20 \\ 15 & 16 & 18 & 18 & 22 & 21 & 18 \\ 20 & 19 & 20 & 21 & 14 & 14 & 22 \\ 18 & 22 & 20 & 20 & 18 & 22 & 23 \\ 19 & 18 & 12 & 14 & 20 & 17 & 18 \end{bmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o número de pontos marcados pelo jogador de número i no jogo j.

a) Quantos pontos marcou o jogador de número 3 no jogo 5?
b) Quantos pontos marcou a equipe no jogo 4?
c) Quantos pontos marcou o jogador de número 2 em todos os jogos?

B.3 Represente explicitamente cada uma das matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ tal que $a_{ij} = i + 2j$

b) $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}$

c) $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

d) $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 2i + j, \text{ se } i > j \\ j, \text{ se } i < j \end{cases}$

B.4 Sendo a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i, \text{ se } i = j \\ j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ obtenha A^t.

B.5 Para que valores reais x e y tem-se que:

$$\begin{pmatrix} 3x + y & 2 & 3 \\ 4 & 5x - y & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}?$$

B.6 (Fatec-SP) Sejam $X = \begin{pmatrix} a^2 - 2 & -2a \\ 4a & -2 + a^2 \end{pmatrix}$ e

$Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$, onde $a \in \mathbb{R}$. Se $X = Y$, então:

a) $a = 2$ $\quad$ c) $a = \frac{1}{2}$ $\quad$ e) n.d.a.

b) $a = -2$ $\quad$ d) $a = -\frac{1}{2}$

B.7 (UFPI) Uma matriz A é simétrica se e somente. se, for igual à sua transposta, isto é, $A = A^t$.

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & x^2 & x-2 \\ 4 & -2 & x+2y \\ 2x & x+y & 5 \end{pmatrix}$. Se A é simétrica, o valor de $2x + y$ é:

a) 4 b) 2 c) 0 d) -2 e) -4

B.8 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x^2 - 5x + 6 & 0 \\ 0 & x^2 - 6x + 8 \end{pmatrix}$$

seja igual à matriz nula de ordem 2.

B.9 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x^2 - 7x + 13 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{pmatrix}$$

seja igual à matriz identidade de ordem 2.

Exercícios complementares de C.1 a C.3

7. ADIÇÃO DE MATRIZES

Uma empresa é formada pelas lojas A e B, concessionárias de automóveis. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de veículos nos quatro primeiros dias de janeiro, foram obtidos os seguintes resultados:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

sendo que:

- a matriz A descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j; por exemplo, o elemento $a_{23} = 5$ nos diz que foram vendidas cinco unidades do modelo 2 no dia 3;
- a matriz B descreve o desempenho da loja B, de modo que cada elemento b_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j.

Como representaríamos, matricialmente, a quantidade vendida desses dois modelos, nas duas lojas, nos primeiros quatro dias de janeiro? Basta construir uma matriz $C_{2\times 3}$, na qual cada elemento C_{ij} seja igual à soma de seus correspondentes nas matrizes A e B, ou seja:

$$C = \begin{pmatrix} 2+3 & 3+0 & 1+2 & 5+3 \\ 1+4 & 2+2 & 5+4 & 3+5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

A matriz C é denominada "**matriz soma** de A e B".

Definição

A **soma** de duas matrizes do mesmo tipo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, que se indica por $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \forall i,\ j,\ 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n$$

Em outras palavras, cada elemento da matriz C é igual à soma de seus correspondentes em A e B.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, valem as quatro propriedades descritas a seguir.

A.1 Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$, o que quer dizer que a soma dessas matrizes pode ser indicada simplesmente por $A + B + C$, isto é, sem parênteses.

A.2 Comutativa: $A + B = B + A$.

A.3 Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A = A$, em que 0 é a matriz nula do mesmo tipo da matriz A.

A.4 Elemento oposto: para toda matriz A existe a matriz A' tal que $A + A' = A' + A = 0$, em que 0 é a matriz nula do mesmo tipo de A e A'.

As matrizes A e A' são denominadas **matrizes opostas**. Indicamos esse fato por $A' = -A$ (lê-se "A' é igual à oposta de A") ou por $A = -A'$.

Nota

A oposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é a matriz:

$-A = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que $b_{ij} = -a_{ij},\ \forall i, j,\ 1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$

Exemplo

A oposta da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é

$$-A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. MULTIPLICAÇÃO DE NÚMERO POR MATRIZ

Definição

O **produto** de um número k por uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, que se indica por kA, é a matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que:

$$b_{ij} = ka_{ij},\ \forall i,\ j,\ 1 \leqslant i \leqslant m \text{ e } 1 \leqslant j \leqslant n$$

Ou seja, cada elemento da matriz B é igual ao produto de seu correspondente em A, pelo número k.

Exemplo

$$4\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -20 \\ 12 & 0 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de número por matriz

Sendo A e B matrizes do mesmo tipo e sendo r e s números, tem-se que:

N.1 $r(sA) = s(rA) = (rs)A$
N.2 $r(A + B) = rA + rB$
N.3 $(r + s)A = rA + sA$
N.4 $1 \cdot A = A$

9. SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

No exemplo introdutório do item 7 (Adição de matrizes), se quisermos uma matriz que represente o desempenho da loja A em relação à loja B, basta subtrairmos de cada elemento da matriz A o seu correspondente em B, obtendo:

$$D = \begin{pmatrix} 2-3 & 3-0 & 1-2 & 5-3 \\ 1-4 & 2-2 & 5-4 & 3-5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Assim, por exemplo:

- o elemento $a_{11} = -1$ nos diz que a loja A vendeu uma unidade a menos do modelo 1, no dia 1, do que a loja B;
- o elemento $a_{14} = 2$ nos diz que a loja A vendeu duas unidades a mais do modelo 1, no dia 4, do que a loja B.

A matriz D é chamada de **matriz diferença** de A e B, nessa ordem.

Definição

A **diferença** de duas matrizes do mesmo tipo A e B, nessa ordem, que se indica por $A - B$, é a matriz $A + (-B)$:

$$A - B = A + (-B)$$

Em palavras mais simples, a diferença $A - B$ é igual à soma de A com a oposta de B.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 6 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -6 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Nota

Para ganhar tempo, obtenha cada elemento da matriz diferença, fazendo a diferença entre os elementos correspondentes das matrizes A e B, nessa ordem.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix}$, determinar:

a) $A + B$ b) $2A - B$

Resolução

a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 10 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

b) $2A - B = 2\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -8 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & -9 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 4 & -16 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -8 & -1 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ -4 & -17 & 15 \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.10 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, determine:

a) $A + B$
b) $5A$
c) $\frac{1}{2} \cdot B$
d) $5A - \frac{1}{2} \cdot B$
e) $B - C^t$
f) $2C + A^t - B^t$

B.11 (UFES) Os valores de x e y que satisfazem a equação matricial:

$$\begin{pmatrix} x & -2 \\ 4 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y & 7 \\ 1 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

são:

a) $x = -1$ e $y = -1$
b) $x = 1$ e $y = 1$
c) $x = 2$ e $y = -1$
d) $x = 2$ e $y = 2$

Nota

Equação matricial é qualquer equação envolvendo matrizes.

B.12 Determine a matriz X tal que:

$$2\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} + X = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

B.13 Obtenha as matrizes X e Y tais que:

$$X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } X - Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercício complementar C.4

10. MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

O comprador de uma empresa deve adquirir de seus fornecedores três tipos de produtos, denominados: produto 1, produto 2 e produto 3. Para isso, fez orçamento com dois fornecedores, denominados: fornecedor 1 e fornecedor 2.

Resumindo os dados coletados nesses orçamentos, o comprador construiu três matrizes A, B e C, sendo que cada elemento a_{ij} da matriz $A = (100 \quad 200 \quad 300)$ indica a quantidade de unidades do produto j que o comprador deve adquirir. Cada elemento b_{ij} da matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 58 & 62 \\ 53 & 59 \\ 55 & 61 \end{pmatrix}$$

representa o preço, em reais, de cada unidade do produto i, cobrado pelo fornecedor j; e cada elemento c_{ij} da matriz:

$C = (100 \cdot 58 + 200 \cdot 53 + 300 \cdot 55 + 100 \cdot 62 + 200 \cdot 59 + 300 \cdot 61)$

indica o valor do orçamento com o fornecedor j.

A matriz C é chamada de **matriz produto** de A por B, nessa ordem, e representa-se $A \cdot B = C$ ou $AB = C$. Observe que, desse modo, os dados numéricos dessa consulta de preços podem ser apresentados por:

$$(100 \quad 200 \quad 300) \cdot \begin{pmatrix} 58 & 62 \\ 53 & 59 \\ 55 & 61 \end{pmatrix} = (32.900 \quad 36.300)$$

Multiplicação de linha por coluna

Antes de definirmos a multiplicação de matrizes, vamos definir produto de linha por coluna.

Definição

Sejam as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times k}$ e $B = (b_{ij})_{k \times n}$. Consideremos a linha i de A e a coluna j de B, isto é:

$$(\ a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots \quad a_{ik}\ ) \text{ e } \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$$

O produto da linha pela coluna é:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$$

Ou seja, multiplicamos, ordenadamente, os elementos da linha i pelos elementos da coluna j e somamos os resultados obtidos.

Exemplo

Sendo as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que:

- o produto da primeira linha de A pela primeira coluna de B é o número:

$$2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 = 31$$

- o produto da primeira linha de A pela segunda coluna de B é o número:

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 8 \cdot 2 = 52; \text{ etc.}$$

Podemos, agora, definir **produto de matrizes**.

Definição

O produto da matriz $A = (a_{ij})_{m \times k}$ pela matriz $B = (b_{ij})_{k \times n}$, que se indica por AB ou por $A \cdot B$, é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que cada elemento c_{ij} é igual ao produto da linha i de A pela coluna j de B.

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 8 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 31 & 52 & 13 \\ 13 & 21 & 8 \end{pmatrix}$$

Observe que, se A e B são matrizes, então:

- existe o produto AB se, e somente se, o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

Exemplos

a) Existe o produto $A_{3 \times 4} \cdot B_{4 \times 5}$.

Iguais

b) Não existe o produto $A_{2 \times 3} \cdot B_{4 \times 2}$.

Diferentes

- a matriz C tal que $C = AB$ possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B, isto é:

$$A_{m \times k} \cdot B_{k \times n} = C_{m \times n}$$

Exemplos

a) $A_{3 \times 5} \cdot B_{5 \times 8} = C_{3 \times 8}$ b) $A_{1 \times 4} \cdot B_{4 \times 1} = C_{1 \times 1}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Sendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$, determinar:

a) $A \cdot I_3$ b) $I_2 \cdot A$

Resolução

a) $A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Note que $A \cdot I_3 = A$.

b) $I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. Note que $I_2 \cdot A = A$.

R.5 Determinar a matriz X tal que $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Resolução

Inicialmente, vamos determinar o tipo da matriz X:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{X}_{m \times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 1}$$

- O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas de X; portanto $m = 2$.
- O número de colunas da matriz X deve ser igual ao número de colunas da matriz produto; portanto $n = 1$.

Assim, a matriz X é do tipo 2×1. Seja $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Temos, então:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} 5a + b \\ 4a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Como duas matrizes são iguais se, e somente se, seus elementos correspondentes são iguais, temos:

$$\begin{cases} 5a + b = 9 & \text{(I)} \\ 4a + b = 7 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (I) e (II), obtemos $a = 2$.

Substituindo $a = 2$ em (I), temos:

$$5 \cdot 2 + b = 9 \Rightarrow b = -1$$

Logo, a matriz procurada é $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

M.1 Propriedade associativa: sendo A, B e C matrizes de tipos $m \times n$, $n \times k$ e $k \times p$, respectivamente, tem-se que $(AB)C = A(BC)$. A propriedade associativa nos permite indicar o produto entre essas matrizes simplesmente por ABC, isto é, sem parênteses.

M.2 Propriedade distributiva à direita: sendo A, B e C matrizes de tipos $m \times n$, $m \times n$ e $n \times k$, respectivamente, tem-se que $(A + B)C = AC + BC$.

M.3 Propriedade distributiva à esquerda: sendo A, B e C matrizes de tipos $m \times n$, $n \times k$ e $n \times k$, respectivamente, tem-se que $A(B + C) = AB + AC$.

M.4 Sendo A uma matriz do tipo $m \times n$, tem-se que: $AI_n = A$ e $I_mA = A$. (Veja exercício R.4.)

M.5 Sendo A e B matrizes de tipos $m \times n$ e $n \times k$, respectivamente, e sendo r um número qualquer, tem-se que $(rA)B = A(rB) = r(AB)$.

M.6 Sendo A e B matrizes de tipos $m \times n$ e $n \times k$, respectivamente, tem-se que $(AB)^t = B^tA^t$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.14 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $D = (1 \ \ -2)$, determine:

a) AB b) BC c) CD

B.15 Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcule:

a) $A \cdot B$ d) $B^t \cdot A^t$ g) $I_2 \cdot A$
b) $B \cdot A$ e) $A^t \cdot B^t$
c) $(A \cdot B)^t$ f) $A \cdot I_3$

B.16 Que relação existe entre os resultados $(A \cdot B)^t$ e $B^t \cdot A^t$ obtidos no exercício anterior?

Nota
A conclusão desse exercício vale para quaisquer matrizes A e B, desde que exista $A \cdot B$.

B.17 (U. E. Londrina-PR) Sejam as matrizes A e B, respectivamente, 3×4 e $p \times q$. Se a matriz $A \cdot B$ é 3×5, então é verdade que:

a) $p = 5$ e $q = 5$ d) $p = 3$ e $q = 4$
b) $p = 4$ e $q = 5$ e) $p = 3$ e $q = 3$
c) $p = 3$ e $q = 5$

B.18 Determine a matriz X tal que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$.

B.19 (Faap-SP) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $AX = B$.

B.20 Sendo A uma matriz quadrada de ordem n, define-se:

$$A^0 = I_n;\ A^1 = A;$$
$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ fatores}},\ \forall k, k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$$

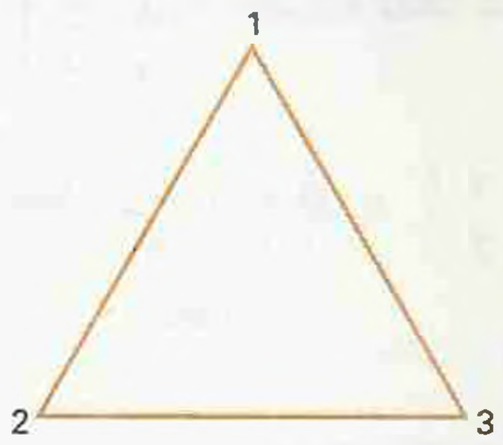
Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, determine:

a) A^0 c) A^2 e) A^{18}
b) A^1 d) A^3 f) A^{35}

Exercícios complementares de C.5 a C.11

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (SUPRA) Um triângulo equilátero de lado 1 tem seus vértices numerados como mostra a figura. A matriz 3×3, na qual cada termo a_{ij} representa a distância entre seus vértices de números i e j, é:



a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

C.2 (FEI-SP) Qual é o valor registrado na 17ª coluna da 28ª linha do quadro abaixo descrito parcialmente?

a) 44
b) 28
c) 54
d) 45
e) 27

1	2	3	...
2	3	4	...
3	4	5	...
⋮	⋮	⋮	

C.3 Classifique cada afirmação como V ou F:
a) Toda matriz identidade é necessariamente quadrada.
b) Existe matriz identidade que não é quadrada.
c) Toda matriz nula é necessariamente quadrada.
d) Existe matriz nula que não é quadrada.
e) $(A^t)^t = A$, qualquer que seja a matriz A.
f) $A^t \neq A$, qualquer que seja a matriz A.
g) Se a matriz A é do tipo 2×3, então A^t é do tipo 3×2.

C.4 (FGV-SP) Determine a matriz B tal que:

$$B = \sum_{n=1}^{50} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2n+1 \end{pmatrix}$$

C.5 (FGV-SP) Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz:

$A^2 + A^3$

C.6 (Acafe-SC) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & b \\ b & 2 \end{bmatrix}$, o valor $a + b$, de modo que $AB = I$, sendo I a matriz identidade, valerá:

a) 2 c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$
b) 0 d) 1

C.7 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, determine:
a) AB b) BA

C.8 Sendo A, B e C matrizes, classifique como V ou F cada uma das seguintes afirmações:
a) Se existe o produto $A \cdot B$, então existe o produto $B \cdot A$.
b) Existe o produto $A \cdot A^t$.
c) Se existem os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$, então $A \cdot B = B \cdot A$.
d) Se existe o produto $A \cdot B$, então $(A \cdot B)^t = B^t A^t$.
e) Se existe o produto $(A \cdot B)C$, então $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$.
f) Se existe a expressão $A(B + C)$, então $A(B + C) = AB + AC$.

C.9 (UFCE) Dê exemplo de três matrizes 2×2, A, B e C tais que a matriz A não seja nula, $A \cdot B = A \cdot C$ e $B \neq C$.

C.10 (UFES) Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$.

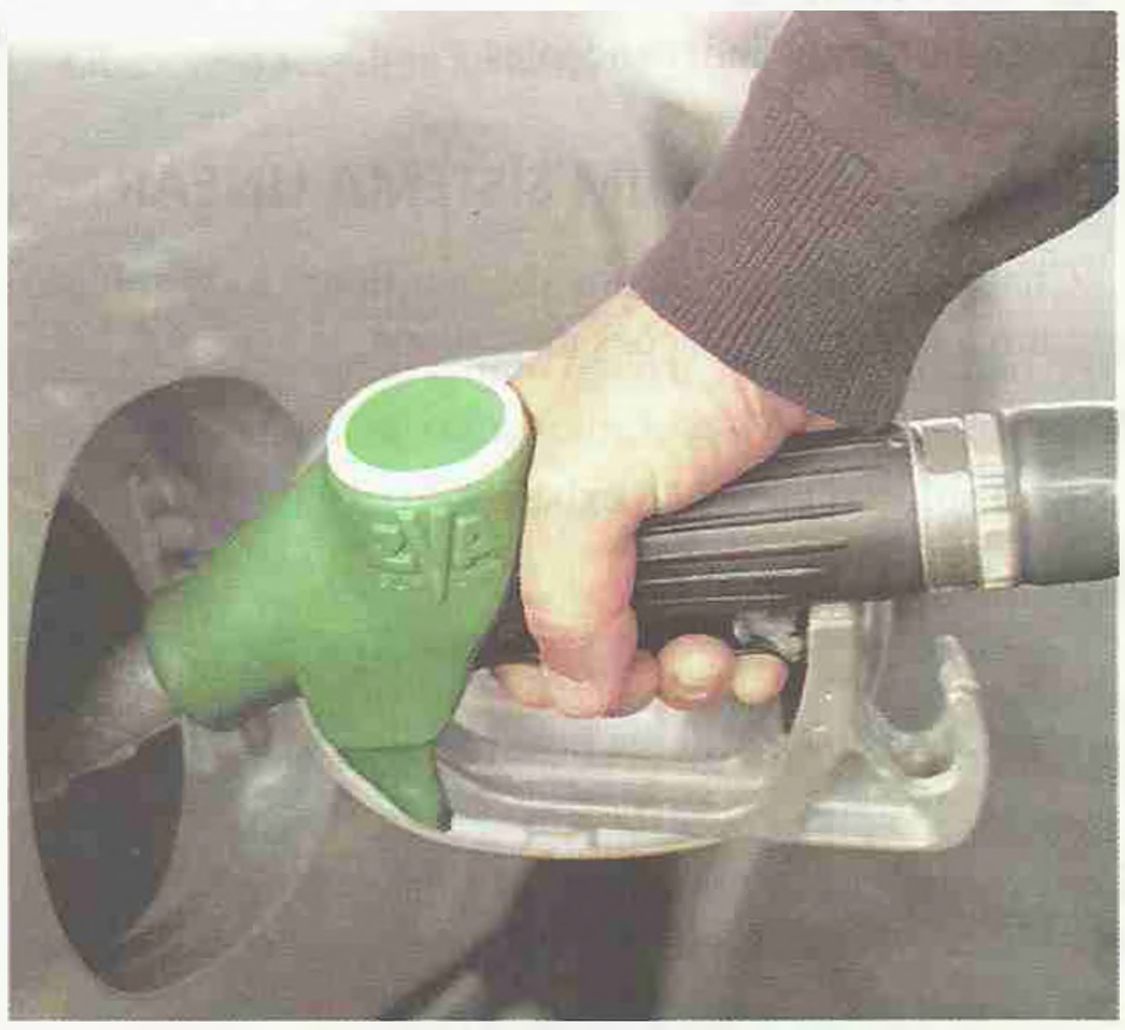
Determine $A^{1.998}$.

C.11 (Fuvest-SP) Dadas as matrizes:
1) $A = (a_{ij})_{4 \times 7}$, definida por $a_{ij} = i - j$
2) $B = (b_{ij})_{7 \times 9}$, definida por $b_{ij} = i$
3) $C = (c_{ij})$, $C = AB$
O elemento C_{63} é:
a) -112 c) -9 e) Não existe.
b) -18 d) 112

Capítulo 39

SISTEMAS LINEARES

1. INTRODUÇÃO


CID

Um litro de álcool custa 60 centavos e 1 litro de gasolina custa 80 centavos. Se 1 litro de uma mistura de álcool e gasolina custa 75 centavos, quanto de álcool contém 1 litro dessa mistura?

Para resolver esse problema, vamos supor que x e y sejam, respectivamente, as frações de álcool e de gasolina que compõem 1 litro da mistura. Assim, devemos ter:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 60x + 80y = 75 \end{cases} \therefore \begin{cases} y = 1 - x \quad \text{(I)} \\ 60x + 80y = 75 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$60x + 80(1 - x) = 75 \quad \therefore \quad 60x + 80 - 80x = 75$$

$$\therefore \quad -20x = -5 \quad \therefore \quad x = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Logo, cada litro de mistura contém 0,25 ℓ de álcool.

Recorremos a esse exemplo prático para mostrar o quanto são freqüentes, em nosso dia-a-dia, sistemas de equações do 1º grau, tais como $\begin{cases} x + y = 1 \\ 60x + 80y = 75 \end{cases}$

Para um estudo geral desse tipo de sistema necessitamos de algumas noções preliminares.

2. EQUAÇÃO LINEAR

Toda equação do 1º grau em uma ou mais incógnitas é chamada de **equação linear**.

Exemplos

a) Na equação $3x + 2y = 11$, temos:
- incógnitas: x e y;
- coeficientes: 3 e 2;
- termo independente: 11.

b) Na equação $8x - y + 3z = -1$, temos:
- incógnitas: x, y e z;
- coeficientes: 8, -1 e 3;
- termo independente: -1.

Por extensão de conceito, admitimos também como lineares as equações:

$$0x + 0y + 0z = 0; \quad 0x + 0y + 0t + 0z = 3$$

De modo geral, temos:

Definição

Chama-se **equação linear** nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ toda equação que pode ser apresentada sob a forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ são constantes reais chamadas de **coeficientes** da equação e b é uma constante real chamada de **termo independente** da equação.

Note que, por exemplo:
- $3x^2 + y = 5$ não é equação linear, pois é do 2º grau em relação a x;
- $\frac{1}{x} + y = 3$ não é equação linear, pois o expoente de x é -1, isto é, $x^{-1} + y = 3$.

Solução de uma equação linear

Chama-se **solução** da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ toda ênupla (seqüência de n elementos) de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ tal que a sentença $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + ... + a_n\alpha_n = b$ seja verdadeira.

Nota

Se não existe tal ênupla, dizemos que a equação é impossível.

Exemplos

a) Uma solução da equação linear $3x + 2y = 11$ é o par ordenado (1, 4), pois a sentença $3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$ é verdadeira.

Convenção

A menos que se especifique o contrário, apresentamos cada solução de uma equação linear obedecendo à ordem alfabética das variáveis, isto é, (x, y), (x, y, z), (a, b, c), etc.

b) Uma solução da equação linear $8x - y + 3z = -1$ é o terno ordenado $(0, 4, 1)$, pois a sentença $8 \cdot 0 - 4 + 3 \cdot 1 = -1$ é verdadeira.

c) A equação $0x + 0y = 3$ é impossível, isto é, não possui solução.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Quantas soluções admite a equação $2x + y = 5$?

Resolução

Para cada valor atribuído a x, obtemos um valor y tal que o par (x, y) é solução da equação. Por exemplo:

- para $x = 1$ temos $2 \cdot 1 + y = 5 \therefore y = 3$; logo, $(1, 3)$ é solução da equação;
- para $x = -2$ temos $2(-2) + y = 5 \therefore y = 9$; logo, $(-2, 9)$ é solução da equação.

Assim, percebemos que a equação admite infinitas soluções.

Equação linear homogênea

É toda equação linear cujo termo independente é igual a zero.

Exemplos

a) $3x + 2y = 0$

b) $5x + y + 3z = 0$

Toda equação linear homogênea:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$$

admite como solução a ênupla $(0, 0, 0, \ldots, 0)$, chamada de **solução trivial** da equação homogênea.

Exemplos

a) A solução trivial da equação $3x + 2y = 0$ é $(0, 0)$.

b) A solução trivial da equação $5x + y + 3z = 0$ é $(0, 0, 0)$.

3. SISTEMA LINEAR

Considere um conjunto de equações lineares simultâneas, nas mesmas incógnitas x, y e z, por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ y + 5z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

(A segunda equação deve ser entendida como $0x + y + 5z = 9$.) Tal conjunto é chamado de **sistema linear**.

De modo geral, um sistema linear de m equações e n incógnitas ($m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$) é um conjunto de equações simultâneas da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes;
- b_i são os termos independentes.

4. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Chama-se **solução** de um sistema linear toda solução comum a todas as equações do sistema.

Nota

Essa solução pode não existir.

Exemplo

Uma solução do sistema linear $\begin{cases} 2x + y + 3z = 11 \\ y + 5z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$ é o terno ordenado $(2, 4, 1)$, pois tal seqüência é solução comum a todas as equações do sistema, isto é, todas as sentenças $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 4 + 3 \cdot 1 = 11 \\ 0 \cdot 2 + 4 + 5 \cdot 1 = 9 \\ 2 - 4 + 1 = -1 \end{cases}$ são verdadeiras.

5. CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções que tiver: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI).

Sistema possível e determinado (SPD)

É todo sistema linear que admite uma única solução.

Exemplo

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

é um sistema linear que admite como única solução o par $(3, 2)$. Por isso, é classificado como SPD (sistema possível e determinado).

Sistema possível e indeterminado (SPI)

É todo sistema linear que admite mais de uma solução.

Nota

Prova-se que, se um sistema linear admite mais de uma solução, então admite infinitas soluções.

Exemplo

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

é um sistema linear que admite mais de uma solução: (2, 1); (0, 5); (4, −3); ...; etc. Por isso é classificado como SPI (sistema possível e indeterminado).

Sistema impossível (SI)

É todo sistema linear que não admite solução alguma.

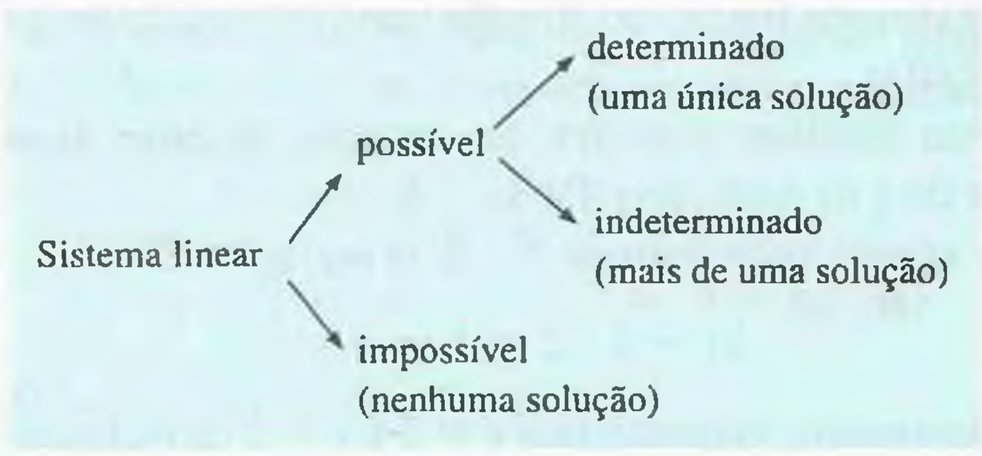
Exemplo

Observe o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Existem dois números x e y tais que sua soma seja igual a 5 e ao mesmo tempo igual a 8? Claro que não. Por isso esse sistema não tem solução e é classificado como SI (sistema impossível).

Resumo



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.2 Classificar cada um dos sistemas seguintes como SPD (sistema possível e determinado). SPI (sistema possível e indeterminado) ou SI (sistema impossível).

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

d) $\{x + 2y = 4$

Resolução

a) $\begin{cases} x + y = 3 \quad \text{(I)} \\ y = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

A equação (II) nos diz que o valor de y é 2. Substituindo $y = 2$ em (I), temos $x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$.
Obtivemos, assim, como única solução do sistema o par (1, 2).
Logo, o sistema é possível e determinado (SPD).

b) $\begin{cases} x + y = 5 \quad \text{(I)} \\ 0x + 0y = 3 \quad \text{(II)} \end{cases}$

A equação (II) não tem solução. Logo, não existe solução comum às duas equações do sistema. Por isso o sistema é impossível (SI).

c) $\begin{cases} x + y = 1 \quad \text{(I)} \\ 2x + 2y = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$

O sistema tem mais de uma solução (1, 0), (0, 1), (2, −1), etc. Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

d) $\{x + 2y = 4$

O sistema tem mais de uma solução (4, 0), (0, 2), (2, 1), etc. Logo, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Isolantes térmicos

Em sua entrada na atmosfera da Terra, uma cápsula espacial se incendiaria se o material que a reveste não fosse refratário, capaz de suportar as altas temperaturas provocadas pela intensa fricção com o ar. Além de refratário, esse revestimento deve ser isolante térmico, para não pôr em risco a vida dos tripulantes.

Os materiais refratários e isolantes térmicos são necessários em muitas outras situações, como, por exemplo, na construção de portas ou paredes contra incêndio. As constantes pesquisas sobre esses materiais têm como fundamento o fato de que a quantidade Q de calor que atravessa uma placa depende da área S da mesma, do tempo t de passagem, da diferença Δ de temperatura entre as faces da placa, de sua espessura e e do coeficiente de condutibilidade C. O valor de Q é obtido através de um teorema conhecido como **teorema de Bridgman**, cuja aplicação conduz a um **sistema linear**.

Os sistemas lineares estão presentes em muitas áreas científicas. Quando algumas quantidades se inter-relacionam e se conhecem algumas delas e outras não, podemos formar um sistema de equações ou inequações (lineares ou não).

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Qual dos seguintes ternos ordenados é solução da equação $2x + 2y - z = 1$?

a) (1, 1, 1) c) (−1, 1, 1) e) (0, 0, 1)
b) (2, 0, 1) d) (−1, 1, −1)

B.2 Qual das alternativas seguintes apresenta uma solução do sistema $\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x + 2y + z = 8 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$?

a) (8, 1, 0) c) (1, 2, 3) e) (1, 1, 1)
b) (10, −1, 0) d) (9, 0, 0)

B.3 Qual dos ternos seguintes não é solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = 3 \end{cases}$?

a) (−3, 2, 0) c) (−11, 4, 2) e) (3, −1, 0)
b) (−7, 3, 1) d) (1, 1, −1)

B.4 Classifique cada um dos sistemas seguintes como SPD (sistema possível e determinado), SPI (sistema possível e indeterminado) ou SI (sistema impossível):

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x + y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$

B.5 (FGV-SP) Em relação ao sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y = 5 \end{cases}$ pode-se afirmar que:

a) é um sistema impossível.
b) é um sistema possível e determinado.
c) se (α, β, γ) é uma solução do sistema, então α, β e γ não formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.
d) (8, 1, 0) é solução do sistema.
e) (1, 5, 3) é a única solução do sistema.

Exercícios complementares de C.1 a C.3

6. RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto S, denominado **conjunto solução** do sistema, cujos elementos são todas as soluções do sistema.

Dentre os vários métodos existentes para a resolução de um sistema, optamos pelo **escalonamento**. Antes da apresentação desse método, vamos definir sistema escalonado e aprender como resolvê-lo.

7. SISTEMA LINEAR ESCALONADO

Um sistema linear é dito **escalonado** (ou **na forma escalonada**) se, e somente se:

- todas as equações apresentam as incógnitas numa mesma ordem;
- em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não-nulo;
- existe uma ordem para as equações tal que o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não-nulo de cada equação aumenta de uma equação para outra.

Exemplos

Os seguintes sistemas lineares são **escalonados**:

a) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 9 \\ 0x + 4y + z = 5 \\ 0x + 0y + 3z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 4t - 2z = 1 \\ 0x + 4y + 5t + z = 2 \\ 0x + 0y + 0t + 4z = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 0x + 5y = 1 \end{cases}$

Vejamos dois exemplos de **sistemas não-escalonados**:

a) $\begin{cases} 4x + 3y + z = 1 \\ 0x + 5y - z = 3 \\ 0x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$

Esse sistema não é escalonado, pois o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não-nulo de cada equação não aumenta da segunda para a terceira equação.

b) $\begin{cases} 6x + y + 3z = 6 \\ 0x + 4y - 3z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 5 \end{cases}$

Esse sistema não é escalonado, pois a última equação apresenta todos os coeficientes nulos.

8. RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR ESCALONADO

Existem apenas dois tipos de sistema linear escalonado, conforme veremos a seguir.

Primeiro tipo: número de equações igual ao número de incógnitas

Exemplo

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 3 & \text{(I)} \\ 5y - 2z = 1 & \text{(II)} \\ 3z = 6 & \text{(III)} \end{cases}$$

é um sistema linear escalonado com três equações e três incógnitas.

Para resolver esse tipo de sistema, determinamos o valor de z na equação (III) $3z = 6 \Rightarrow z = 2$.

A seguir, substituímos $z = 2$ na equação (II):

$$5y - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow y = 1$$

Finalmente, substituímos $y = 1$ e $z = 2$ na equação (I):

$$3x + 2 \cdot 1 + 2 = 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Logo, o conjunto solução do sistema é:

$$S = \left\{\left(-\frac{1}{3},\ 1,\ 2\right)\right\}$$

Propriedade

Todo sistema linear **escalonado do primeiro tipo** é possível e determinado (SPD).

Segundo tipo: número de equações menor que o número de incógnitas

Exemplo

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + 5z = 3 \end{cases}$$

é um sistema linear escalonado com duas equações e três incógnitas.

Todo sistema linear escalonado do **segundo tipo** admite pelo menos uma variável denominada **variável livre** ou **variável arbitrária** do sistema. É variável livre toda aquela que **não aparece no início** de nenhuma equação do sistema escalonado. No exemplo anterior, temos z como variável livre.

A variável livre, como o próprio nome indica, pode assumir qualquer valor real. Para cada valor assumido por ela, obtém-se uma solução para o sistema. No exemplo anterior, se fizermos:

- $z = 2$, teremos

$$\begin{cases} x + 2y - 3 \cdot 2 = 1 & \text{(I)} \\ y + 5 \cdot 2 = 3 \Rightarrow y = -7 & \text{(II)} \end{cases}$$

substituindo (II) em (I):

$$x + 2(-7) - 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow x = 21$$

assim, para $z = 2$ temos a solução $(21, -7, 2)$;

- $z = 0$, teremos

$$\begin{cases} x + 2y - 3 \cdot 0 = 1 & \text{(I)} \\ y + 5 \cdot 0 = 3 \Rightarrow y = 3 & \text{(II)} \end{cases}$$

substituindo (II) em (I):

$$x + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow x = -5$$

assim, para $z = 0$ temos a solução $(-5, 3, 0)$.

Perceba, portanto, que o sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ y + 5z = 3 \end{cases}$ possui infinitas soluções. Para obter a expressão geral de todas essas soluções, basta encontrarmos os valores de x e y em função de z, isto é:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 & \text{(I)} \\ y + 5z = 3 \Rightarrow y = 3 - 5z & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I):

$$x + 2(3 - 5z) - 3z = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + 6 - 10z - 3z = 1 \quad \therefore \quad x = 13z - 5$$

Assim, o conjunto solução do sistema é

$$S = \{(13z - 5, 3 - 5z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

Notas

1. Chama-se **grau de indeterminação de um sistema escalonado do segundo tipo** o número de variáveis livres do sistema. Isto é, o número de variáveis que não aparecem no início de nenhuma equação do sistema. No exemplo anterior, o grau de indeterminação do sistema é 1.

2. A escolha de variável livre como sendo "toda aquela que não inicia nenhuma equação do sistema" é puramente convencional. Na verdade, no sistema do exemplo anterior poderíamos ter escolhido y como variável livre e, nesse caso, o conjunto solução apresentaria a forma:

$$S = \left\{\left(\frac{14 - 13y}{5}, y, \frac{3 - y}{5}\right), y \in \mathbb{R}\right\}$$

Poderíamos ainda ter escolhido x como variável livre; então teríamos o conjunto solução:

$$S = \left\{\left(x, \frac{14 - 5x}{13}, \frac{5 + x}{13}\right), x \in \mathbb{R}\right\}$$

Propriedade

Todo sistema linear **escalonado do segundo tipo** é possível e indeterminado (SPI).

9. SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES

Dois sistemas lineares A e A' são equivalentes se, e somente se, tiverem o mesmo conjunto solução. Indicamos que A e A' são equivalentes por $A \sim A'$.

Exemplo

Os sistemas $A\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ e $A'\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ são equivalentes, pois ambos têm como conjunto solução:

$$S = \{(3, 2)\}$$

Propriedades

Sendo A, A' e A'' sistemas lineares, tem-se:

I. $A \sim A$ (**propriedade reflexiva**);
II. Se $A \sim A'$, então $A' \sim A$ (**propriedade simétrica**);
III. Se $A \sim A'$ e $A' \sim A''$, então $A \sim A''$ (**propriedade transitiva**).

10. ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA LINEAR

Observe o seguinte sistema $A\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por -3, teremos o sistema equivalente:

$$A'\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$$

Substituindo, no sistema A', a segunda equação pela soma dela com a primeira, teremos o sistema equivalente:

$$A''\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ y = 1 \end{cases}$$

Note que $A'' \sim A$ e que A'' está na forma escalonada.

Vamos estudar uma técnica para transformar um sistema linear possível num outro equivalente na forma escalonada. Essa técnica é fundamentada nos três teoremas que veremos a seguir.

Teorema

Permutando entre si duas ou mais equações de um sistema linear A, obtém-se um novo sistema A' equivalente a A.

Exemplo

$$A\begin{cases} 3x + 7y = 16 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \sim A'\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$$

Permutamos entre si as equações do sistema A, obtendo o sistema A'.

Teorema

Multiplicando (ou dividindo) uma equação de um sistema linear A por uma constante k, $k \neq 0$, obtém-se um novo sistema A' equivalente a A.

Exemplo

$$A\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases} \sim A'\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases}$$

Multiplicamos por −3 a primeira equação do sistema *A*, obtendo o sistema *A'*.

Teorema

Substituindo uma equação de um sistema linear *A* pela soma dela com outra equação desse sistema, obtém-se um novo sistema *A'* equivalente a *A*.

Exemplo

$$A\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ 3x + 7y = 16 \end{cases} \sim A'\begin{cases} -3x - 6y = -15 \\ y = 1 \end{cases}$$

Substituímos a segunda equação do sistema *A* pela soma dela com a primeira, obtendo assim o sistema *A'*.

Conjugando esses três teoremas, podemos escalonar qualquer sistema linear possível. Se o sistema for impossível, a tentativa do escalonamento mostrará essa impossibilidade.

Exemplo

Para escalonar o sistema:

$$A\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 & \text{(I)} \\ 2x + y + z = 4 & \text{(II)} \\ 3x + 3y + z = 10 & \text{(III)} \end{cases}$$

vamos, inicialmente, conseguir os zeros necessários nos coeficientes de x. Para isso:

- substituímos a equação (II) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por -2;
- e substituímos a equação (III) pela soma dela com a equação (I) multiplicada por 3:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \xrightarrow{\times} -2 \\ 2x + y + z = 4 \xleftarrow{+} \\ 3x + 3y + z = 10 \xleftarrow{+} -3 \end{cases} \quad (\times \text{ de } -3 \text{ para } -3)$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x - 3y - 8z = -11 \end{cases}$$

Nota

Os produtos da equação (I) por -2 e por -3 podem ser feitos mentalmente. Não é necessário escrevê-los efetivamente.

- No sistema anterior, substituímos a última equação pela soma dela com a segunda multiplicada por -1:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \xrightarrow{\times} -1 \\ 0x - 3y - 8z = -11 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ 0x - 3y - 5z = -10 \\ 0x + 0y - 3z = -1 \end{cases}$$

Chegamos assim a um sistema **escalonado** equivalente ao sistema *A*.

Notas

1. Se durante o escalonamento do sistema do exemplo anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = b$, com $b \neq 0$, então o sistema seria **impossível**, pois tal equação **não** é satisfeita para nenhum terno (x, y, z).

2. Se durante o escalonamento do sistema anterior ocorresse uma equação da forma $0x + 0y + 0z = 0$, então **eliminaríamos** essa equação e o novo sistema assim obtido também seria equivalente ao sistema original.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.3 Escalonar, classificar e dar o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 4x + 5y + 5z = 6 \end{cases}$$

Resolução

O escalonamento fica facilitado quando o coeficiente de x da primeira equação é 1. Como isso não acontece nesse sistema, mas o coeficiente de x da segunda equação é 1, podemos permutar as duas primeiras equações, obtendo um novo sistema, equivalente ao original, isto é:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 4x + 5y + 5z = 6 \end{cases}$$

Escalonando, temos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \xrightarrow{\times} -2 \quad (\times \text{ de } -4 \text{ para } -4) \\ 2x + 3y + z = 2 \xleftarrow{+} \\ 4x + 5y + 5z = 6 \xleftarrow{+} -4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0x + y - 3z = 0 \xrightarrow{\times} -1 \\ 0x + y - 3z = 2 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 0x + y - 3z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 2 \end{cases}$$

Note que **não** conseguimos um sistema escalonado, pois os coeficientes da última equação são todos nulos; porém a tentativa do escalonamento nos mostrou que o sistema é **impossível**, já que a última equação não é satisfeita para nenhum terno (x, y, z).
Portanto, a classificação do sistema é SI e $S = \varnothing$.

R.4 Escalonar, classificar e dar o conjunto solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1 \end{cases}$$

Resolução

- Substituímos a segunda equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -2;
- substituímos a terceira equação pela soma dela multiplicada por 3 com a primeira equação multiplicada por -5.

Nota

Façamos tais produtos mentalmente, evitando assim muitas passagens. Isto é:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \\ 5x + 7y + 8z = 1 \end{cases} \overset{\substack{\times(-2)\ \text{e}\ \times(-5) \\ \text{somando}}}{\sim} \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + y - z = -2 \end{cases} \overset{\substack{\times(-1) \\ \text{somando}}}{\sim} \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ 0x + y - z = -2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Eliminando-se a última equação, chegamos ao sistema escalonado equivalente ao sistema original:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

Como esse sistema escalonado é do segundo tipo (número de equações menor que o número de incógnitas), sua classificação é SPI (sistema possível e indeterminado). Resolvendo em função da variável livre z, temos:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 1 \quad \text{(I)} \\ y - z = -2 \Rightarrow y = z - 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I):

$$3x + 4(z - 2) + 5z = 1$$
$$\therefore\ 3x + 4z - 8 + 5z = 1$$
$$\therefore\ x = \frac{9 - 9z}{3} = 3 - 3z$$

Logo, o conjunto solução é:

$$S = \{(3 - 3z, z - 2, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$

R.5 Escalonar, classificar e resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 5 \\ 2x + y = -4 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 7y = 5 \\ 2x + y = -4 \end{cases} \overset{\substack{\times(-3)\ \text{e}\ \times(-2) \\ \text{somando}}}{\sim} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + y = 2 \\ 0x - 3y = -6 \end{cases} \overset{\substack{\times 3 \\ \text{somando}}}{\sim} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 0x + y = 2 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Eliminando a última equação do sistema anterior, chegamos ao sistema escalonado equivalente ao original:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Tal sistema escalonado é do primeiro tipo (número de equações igual ao número de incógnitas). Portanto, sua classificação é SPD (sistema possível e determinado). Resolvendo-o, obtemos o conjunto solução:

$$S = \{(-3, 2)\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.6 Classifique e dê o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -1 \\ 4y + 5z = 19 \\ 2z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y + 3z = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y + 4z = 1 \\ 3z = 6 \end{cases}$

B.7 (Fuvest-SP) Se $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4y + 5z = 23 \\ 6z = 18 \end{cases}$, então x é igual a:

a) 27 c) 0 e) 1
b) 3 d) -2

B.8 (U. E. Londrina-PR) Se os sistemas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 2y = -4 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} ax - 3y = 0 \\ 2x - by = -2 \end{cases}$$

são equivalentes, então $a + b$ é igual a:

a) $-\frac{7}{2}$ d) -5

b) -4 e) $-\frac{11}{2}$

c) $-\frac{9}{2}$

B.9 Escalone, classifique e dê o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 5y + 2z = 10 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 3x + 6y + 5z = 19 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 5x - y + 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 7y - 11z = 6 \\ x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

Sugestão. No item c, para facilitar o escalonamento, permute as duas primeiras equações.

B.10 Resolva, por escalonamento, cada um dos sistemas, classificando-os como SPD, SPI ou SI:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + y - 3z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 6x + 5y + 5z = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$

B.11 Qual é a classificação e o conjunto solução de cada um dos seguintes sistemas?

a) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x - y = 2 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = -4 \\ x + 2y = 2 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$

B.12 (ITA-SP) Examinando o sistema $\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 8y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ podemos concluir que:

a) o sistema é determinado.
b) o sistema é indeterminado, com duas incógnitas arbitrárias.
c) o sistema é indeterminado, com uma incógnita arbitrária.
d) o sistema é impossível.
e) n.d.a.

B.13 Um litro de creme contém suco de fruta, leite e mel. A quantidade de leite é o dobro da quantidade de suco de fruta, e a quantidade de mel é a nona parte da quantidade dos outros dois líquidos juntos. A quantidade de suco de fruta que contém esse litro de creme é:

a) 300 mℓ
b) 250 mℓ
c) 350 mℓ
d) 400 mℓ
e) 420 mℓ

Exercícios complementares de C.4 a C.8

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Qual dos sistemas seguintes é impossível?

a) $\{x + y + z = 8$

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 3z = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

C.2 Sabendo que o sistema, nas incógnitas x e y, $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ay = 5 \end{cases}$ é impossível, obtenha o valor de a.

C.3 Para que valores reais de a o seguinte sistema, nas incógnitas x e y, é impossível?

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 0x + 0y = a \end{cases}$$

C.4 Um tipo de alimento é composto por açúcar, milho e extrato de malte. A quantidade de milho dessa composição é o quádruplo da quantidade de açúcar. Sabendo que o preço por quilograma do açúcar, do milho e do extrato de malte são, respectivamente, 80, 60 e 40 centavos e que o preço, por quilograma, daquele alimento composto por esses ingredientes é 55 centavos, calcule a quantidade de açúcar que compõe 1 kg daquele alimento.

C.5 Ao final de um campeonato de futebol, foram premiados os jogadores que marcaram doze, treze ou catorze gols cada um, durante todo o campeonato. Qual foi o número de atletas premiados, sabendo que o total de gols marcados por eles é 115 e que somente cinco atletas marcaram mais de doze gols cada um?

C.6 Durante as investigações de um assalto a banco, foi chamado a depor o gerente do estabelecimento. A testemunha declarou ao delegado que de um dos cofres foram roubados: um pacote vermelho, dois azuis e cinco brancos, totalizando 150 mil dólares; do outro cofre foram roubados: um pacote azul e três brancos, totalizando 70 mil dólares. O declarante afirmou ainda que pacotes da mesma cor tinham quantidades iguais de dinheiro e que cada pacote vermelho possuía 5 mil dólares a mais que cada pacote branco. O delegado, após ouvir atentamente a testemunha, pôs-se a fazer contas. Poucos minutos depois, olhou nos olhos do declarante e acusou:

— O senhor está mentindo.

A testemunha tentou ainda reafirmar sua estória, mas foi totalmente desmentida pelo delegado com argumentos irrefutáveis. Analisando essa cena cinematográfica, prove que o gerente mentiu em seu depoimento.

C.7 (UFMA) Sendo (a, b, c) solução do sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

tal que $ab = 2c$, então um valor de a é:

a) -3
b) -4
c) 2
d) 3
e) 4

C.8 (ITA-SP) Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 quatro números reais não-nulos, formando nessa ordem uma progressão geométrica. Então, o sistema em x e y $\begin{cases} a_1x + a_3y = 1 \\ a_1a_2x + a_1a_4y = a_2 \end{cases}$ é um sistema:

a) impossível.
b) possível determinado.
c) possível indeterminado.
d) possível determinado apenas para $a_1 > 1$.
e) possível determinado apenas para $a_1 < -1$.

Capítulo 40

O CONCEITO DE DETERMINANTE E SUA APLICAÇÃO NA DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

1. O CONCEITO DE DETERMINANTE

Determinante de ordem dois

Observe o escalonamento do sistema, nas incógnitas x e y, $\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$

$$\begin{cases} ax + by = p \xrightarrow{\times} (-c) \\ cx + dy = q \xrightarrow[\times]{} (a) \end{cases} + \sim \begin{cases} ax + by = p \\ (ad - cb)y = aq - cp \end{cases}$$

(Mesmo que $a = 0$ ou $c = 0$, através de outra transformação obtém-se um sistema equivalente com esse coeficiente de y na segunda equação.)

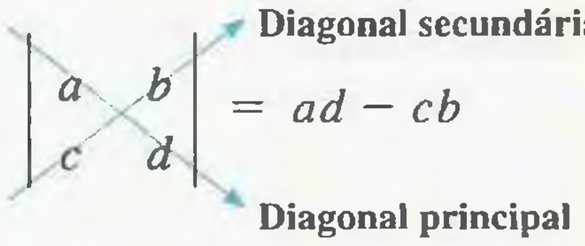
Haverá um único valor de y satisfazendo essa última equação se, e somente se, o coeficiente de y, $ad - cb$, for diferente de zero; conseqüentemente, haverá um único valor de x satisfazendo o sistema. Concluímos então que:

$$ad - cb \neq 0 \Leftrightarrow \text{SPD}$$

A expressão $ad - cb$ é chamada de **determinante** dos coeficientes do sistema e é simbolizada por:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

em que a primeira coluna é formada pelos coeficientes de x, e a segunda, pelos coeficientes de y. Note, portanto, que um determinante de **ordem 2** (duas linhas e duas colunas) é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nesta ordem:



Exemplos

a) Calculando o determinante D dos coeficientes do sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$ temos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 4 = 13$$

Como $D \neq 0$, concluímos que o sistema é possível e determinado.

b) Calculando o determinante D dos coeficientes do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 5 \end{cases}$ temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$$

Como $D = 0$, temos duas alternativas: ou o sistema é possível e indeterminado ou é impossível. Para saber qual das duas é a correta, basta escalonar o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \xrightarrow{\times} (-2) \\ 4x + 6y = 5 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível.

Nota

Matriz e determinante são entes distintos: matriz é uma tabela, e determinante é um número. Dizemos que o determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ é um número associado à matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Determinante de ordem três

Escalonando o sistema, nas incógnitas x, y e z, $\begin{cases} ax + by + cz = p \\ dx + ey + fz = q \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$ obtém-se:

$$\begin{cases} ax + by + cz = p \\ 0x + (ae - bd)y + (af - dc)z = aq - pd \\ 0x + 0y + (aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb)z = \\ \qquad = aer + bqg + pdh - gep - hqa - rdb \end{cases}$$

(Verifique!)

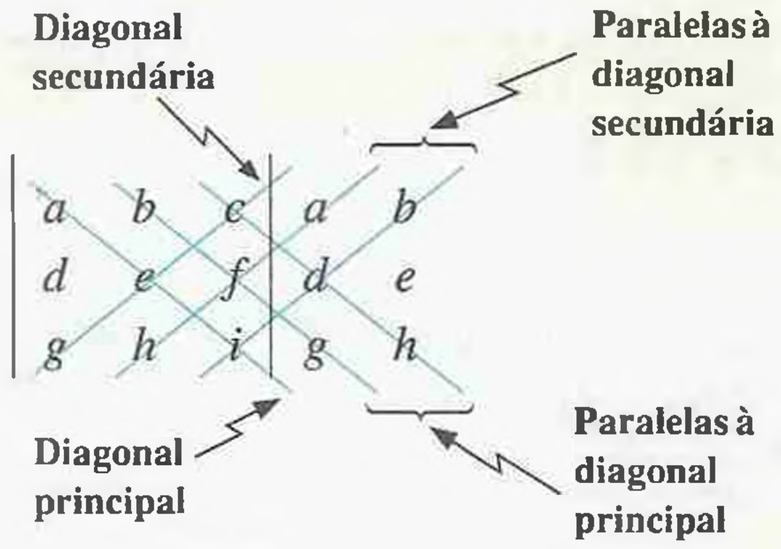
Esse sistema será possível e determinado se, e somente se, o coeficiente de z, $aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$, for diferente de zero. Esse coeficiente é chamado de **determinante** dos coeficientes do sistema, e é simbolizado por:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

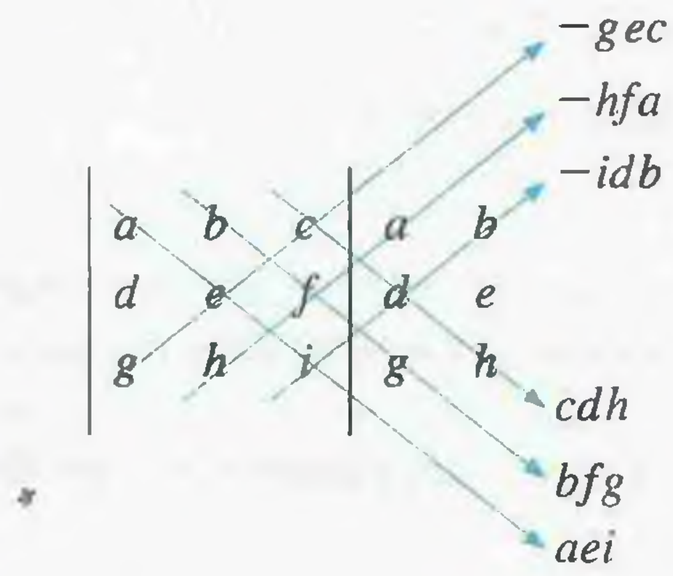
em que a 1ª, a 2ª e a 3ª coluna são formadas pelos coeficientes de x, y e z, respectivamente. O cálculo de um

determinante de **ordem 3** (três linhas e três colunas) pode ser efetuado através da regra prática, descrita a seguir, conhecida como **regra de Sarrus**:

I. Repetem-se as duas primeiras colunas à direita do determinante:



II. Multiplicam-se:
- os elementos da diagonal principal e os elementos de cada paralela a essa diagonal, **conservando o sinal** de cada produto obtido;
- os elementos da diagonal secundária e os elementos de cada paralela a essa diagonal, **invertendo o sinal** de cada produto obtido.

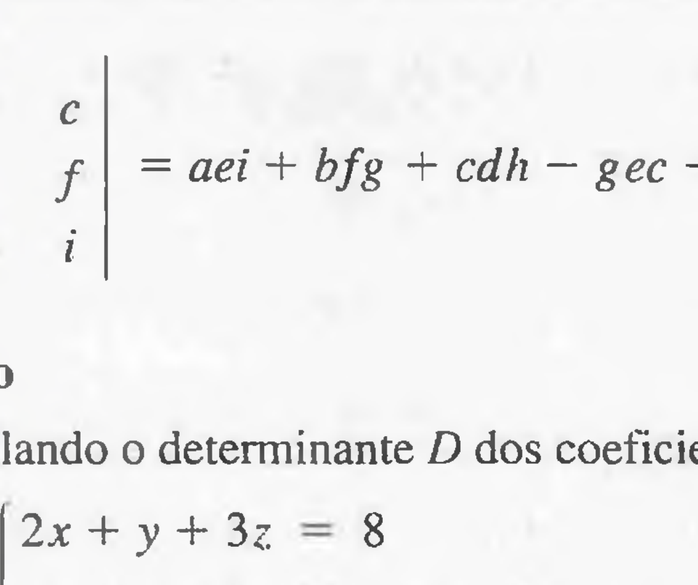


III. E adicionam-se os resultados obtidos em (II), ou seja:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Exemplo

Calculando o determinante D dos coeficientes do sistema $\begin{cases} 2x + y + 3z = 8 \\ x - 2y + 4z = 1 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$ temos:



$= -4 + 12 + 6 + 18 - 16 - 1 = 15$

Como $D \neq 0$, concluímos que o sistema é possível e determinado.

Generalização

Podemos generalizar as observações feitas até aqui através do seguinte teorema:

> Indicando por D o determinante dos coeficientes de um sistema linear com número de equações igual ao número de incógnitas, tem-se que:
>
> $$D \neq 0 \Leftrightarrow \text{SPD}$$
> $$D = 0 \Leftrightarrow \text{SPI ou SI}$$

Nota

No próximo capítulo estudaremos o cálculo de um determinante de qualquer ordem.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Determinar a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z seja possível e determinado.

$$A \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 0 \\ ax + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Resolução

O sistema será possível e determinado se, e somente se, o determinante dos coeficientes for diferente de zero. Isto é:

$$A \text{ é SPD} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore 8 + a + 3 - 6a + 2 + 2 \neq 0 \therefore -5a + 15 \neq 0$

$\therefore a \neq 3$

Logo, A é SPD $\Leftrightarrow a \neq 3$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule o determinante dos coeficientes de cada um dos sistemas:

a) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ 4x + 7y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ x - z = 3 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - z = 6 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

B.2 (U. E. Londrina-PR) O sistema $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ é possível e determinado:

a) para qualquer valor de a.
b) somente para $a = 0$.
c) somente para $a = 6$.
d) se $a \neq 0$.
e) se $a \neq -6$.

B.3 (U. E. Londrina-PR) Considere o seguinte sistema de equações nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 3kx + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma e uma só solução se o número real k for diferente de:

a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{3}$

B.4 (Mackenzie-SP) Para que o sistema a seguir, nas incógnitas x, y e z, seja impossível ou indeterminado, deveremos ter, para o real k, valores cuja soma é:

a) -1 b) 1 c) 0 d) -2 e) 2

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 3 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Exercícios complementares de C.1 a C.3

2. DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ mx + 4y = 1 \end{cases}$$

Observe que, além das incógnitas x e y, o sistema apresenta uma variável m. Tal variável é chamada de **parâmetro do sistema**.

Discutir esse sistema em função do parâmetro m significa classificá-lo como SPD, SPI ou SI para cada valor real assumido por m.

Por uma questão puramente didática, vamos separar o estudo das discussões de sistemas lineares em dois casos.

Primeiro caso: sistemas lineares cujo número de equações é igual ao número de incógnitas

A discussão de um sistema linear cujo número de equações é igual ao número de incógnitas pode ser feita através do determinante dos coeficientes auxiliado pelo método do escalonamento.

Como exemplo, vamos discutir o seguinte sistema:

$$A \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ mx + 4y = 1 \end{cases}$$

segundo os valores do parâmetro real m.

Sendo D o determinante dos coeficientes do sistema, temos que:

$$D \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ é SPD}$$

Impomos então a condição $D \neq 0$, garantindo assim que A seja SPD. Isto é:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ m & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 12 - 2m \neq 0 \therefore m \neq 6$$

Temos então que $m \neq 6 \Rightarrow$ SPD.

Por outro lado, note que para $m = 6$ temos $D = 0$ e nesse caso ficamos entre duas alternativas: ou A é SPI ou A é SI.

Para descobrir qual das duas alternativas ocorre, basta substituir $m = 6$ em A e escalonar o sistema. Ou seja:

$$m = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \xrightarrow{\times} -2 \\ 6x + 4y = 1 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 0x + 0y = -3 \end{cases}$$

Observe, portanto, que para $m = 6$ o sistema é impossível. Concluímos então que:

$$m \neq 6 \Rightarrow \text{SPD}$$
$$m = (6 \Rightarrow \text{SI})$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Discutir o sistema abaixo nas incógnitas x e y segundo os valores do parâmetro real m.

$$\begin{cases} mx + 3y = 1 \\ 3x + my = 1 \end{cases}$$

Resolução

Seja $D = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix}$. Impondo $D \neq 0$, temos que o sistema é possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} m & 3 \\ 3 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 \neq 0$$

$$\therefore m \neq 3 \text{ e } m \neq -3$$

Logo, $m \neq 3$ e $m \neq -3 \Rightarrow$ SPD.

Observemos que para $m = 3$ ou $m = -3$ temos $D = 0$, o que significa que o sistema é **possível e indeterminado ou impossível** para cada um desses dois valores de m.

- Substituindo $m = 3$ no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \xrightarrow{\times} -1 \\ 3x + 3y = 1 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \sim$$

$\sim \{3x + 3y = 1$ **(SPI)**

Logo, $m = 3 \Rightarrow$ SPI.

- Substituindo $m = -3$ no sistema e escalonando-o, obtemos:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 1 \xrightarrow{\times} 1 \\ 3x - 3y = 1 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} -3x + 3y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases} \textbf{(SI)}$$

Logo, $m = -3 \Rightarrow$ SI.

Resumindo:

$m \neq 3$ e $m \neq -3 \Rightarrow$ SPD
$m = 3 \Rightarrow$ SPI
$m = -3 \Rightarrow$ SI

R.3 Discutir o sistema abaixo nas variáveis x, y e z em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ ax - 3y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolução

Seja $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Impondo $D \neq 0$, temos que o sistema é possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ a & -3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ a & -3 \end{matrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -4 + 6a + 6 - a + 9 - 16 \neq 0 \therefore a \neq 1$

Logo, $a \neq 1 \Rightarrow$ SPD.

Para descobrir a classificação do sistema para $a = 1$, basta substituir $a = 1$ no sistema, escalonando-o:

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x - 3y + 4z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 5z = 0 \\ 0x - 5y + 5z = -1 \end{cases} \begin{matrix} \times(-1) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x - 5y + 5z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases} \textbf{(SI)}$$

Logo, $a = 1 \Rightarrow$ SI.

Resumindo:

$a \neq 1 \Rightarrow$ SPD
$a = 1 \Rightarrow$ SI

R.4 Discutir o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função dos parâmetros reais a e b.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ ax + 4y = b \end{cases}$$

Resolução

Seja $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix}$. Impondo $D \neq 0$, teremos um sistema possível e determinado:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - 2a \neq 0 \therefore a \neq 2$$

Logo, $a \neq 2 \Rightarrow$ SPD.

Para obter a classificação do sistema para $a = 2$, substituímos $a = 2$ no sistema, escalonando-o:

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = b \end{cases} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = b - 6 \end{cases}$$

Observe que:

- se $b - 6 \neq 0$, então o sistema é impossível;
- se $b - 6 = 0$, então o sistema é possível e indeterminado.

Logo, temos $a = 2$ e $b \neq 6 \Rightarrow$ SI, $a = 2$ e $b = 6 \Rightarrow$ SPI.

Resumindo:

$a \neq 2 \Rightarrow$ SPD
$a = 2$ e $b \neq 6 \Rightarrow$ SI
$a = 2$ e $b = 6 \Rightarrow$ SPI

Segundo caso: sistemas lineares cujo número de equações é diferente do número de incógnitas

Vamos discutir sistemas lineares com número de equações diferente do número de incógnitas através do escalonamento. Não poderemos usar, nesse caso, o determinante dos coeficientes do sistema, pois a matriz dos coeficientes não será quadrada e, portanto, não existirá o determinante.

Como exemplo, vamos discutir o seguinte sistema em função do parâmetro real m:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y + mz = 1 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y + mz = 1 \end{cases} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0x + 0y + (m + 2)z = -1 \end{cases}$$

Note que:

- se $m + 2 = 0$, então o sistema é impossível;
- se $m + 2 \neq 0$, então o sistema é possível e indeterminado, pois é um sistema escalonado do segundo tipo (número de equações menor que o número de incógnitas).

Resumindo, temos:

$m = -2 \Rightarrow$ SI
$m \neq -2 \Rightarrow$ SPI

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Discutir o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 5y = 13 \\ 2x + 3y = m \end{cases}$$

Resolução

Vamos mostrar dois modos diferentes para se discutir esse sistema.

Primeiro modo

Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 5y = 13 \\ 2x + 3y = m \end{cases} \xrightarrow[+]{\times(-3)} \xrightarrow[+]{\times(-2)} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 \\ 0x - y = m - 10 \end{cases} \xrightarrow[+]{\times(-1)} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 \\ 0x + 0y = m - 8 \end{cases}$$

Note que:

- se $m - 8 \neq 0$, então o sistema é impossível;
- se $m - 8 = 0$, então o sistema é equivalente a $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -y = -2 \end{cases}$ que é possível e determinado.

Resumindo:

$$\begin{array}{l} m \neq 8 \Rightarrow \text{SI} \\ m = 8 \Rightarrow \text{SPD} \end{array}$$

Segundo modo

Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases} \xrightarrow[+]{\times(-3)} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ e } y = 2$$

Se a solução (1, 2) também for solução da última equação, então o sistema será possível e determinado; caso contrário, será impossível, pois não existirá uma solução comum às três equações.

Substituindo $x = 1$ e $y = 2$ na terceira equação, temos:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = m \Rightarrow m = 8$$

Resumindo:

$$\begin{array}{l} m = 8 \Rightarrow \text{SPD} \\ m \neq 8 \Rightarrow \text{SI} \end{array}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.5 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ mx + 6y = 1 \end{cases}$$

B.6 Discuta, em função do parâmetro real m, o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} mx - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 2y + 5z = 7 \end{cases}$$

B.7 Faça a discussão, segundo os valores reais de m, do sistema nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ mx + y = -3 \end{cases}$$

B.8 Classifique o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z como SPD, SPI ou SI, para cada valor real do parâmetro m.

$$\begin{cases} x + 3y + mz = 1 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ mx - 2y + z = 1 \end{cases}$$

B.9 (FVG-SP) Considere o sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} mx - 2y = 3 \\ 4x + y = n \end{cases}$$

a) Para que valores de m e n o sistema é determinado? Indeterminado? Impossível?

b) Resolva o sistema para $m = 3$ e $n = -2$.

B.10 (UFMG) Determine os valores de a e b para que o sistema:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = b \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$$

a) tenha solução única.

b) tenha infinitas soluções.

c) não tenha soluções.

B.11 (U. F. Santa Maria-RS) Considere as afirmativas referentes ao sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 0y + 2z = 0 \\ 0x + y + (k + 1)z = -2 \end{cases} \quad \text{em que } x, y, z, k \in \mathbb{R},$$

indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F).

- Se $k \neq \frac{1}{3}$, o sistema é possível e determinado.
- Se $k = \frac{1}{3}$, o sistema é impossível.
- Se $k = \frac{1}{3}$, o sistema é possível e indeterminado.

A seqüência correta é:

a) V — F — V
b) F — V — F
c) V — V — F
d) V — F — F
e) F — F — V

B.12 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x e y em função do parâmetro real a.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y = -5 \\ 3x + y = a \end{cases}$$

B.13 Faça a discussão do sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real m.

$$\begin{cases} 2x - y + mz = 1 \\ 8x - 4y + 4z = 7 \end{cases}$$

B.14 No sistema abaixo de incógnitas x e y, o parâmetro k pode assumir qualquer valor real. Discuta o sistema em função de k.

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \\ x + 5y = k \end{cases}$$

B.15 Discuta, em função dos parâmetros reais a e b, o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ 2x + by - 2z = 6 \end{cases}$$

Exercícios complementares de C.4 a C.6

3. SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

Sistema linear homogêneo é todo sistema linear formado exclusivamente por equações lineares homogêneas, isto é, equações com termo independente igual a zero.

Exemplos

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \\ 6x - 2y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5a + 2b - c + d = 0 \\ a - 3b + 2c - d = 0 \end{cases}$

Solução trivial de um sistema linear homogêneo

Observe que, se atribuirmos o valor 0 (zero) a cada variável do sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ x - 3y + 5z = 0 \\ 6x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

obtemos as sentenças **verdadeiras**:

$$\begin{cases} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 \\ 6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

Concluímos então que o terno (0, 0, 0) é uma solução desse sistema. Esse terno é chamado de **solução trivial do sistema homogêneo**.

Propriedade

Todo sistema linear homogêneo com n incógnitas admite como solução a ênupla (0, 0, 0, ..., 0), chamada de **solução trivial do sistema**.

Notas

1. Pela propriedade anterior, temos que um sistema linear homogêneo é sempre possível.

2. A **solução trivial** pode ser também denominada **solução nula** ou **solução imprópria do sistema linear homogêneo**.

Exemplos

a) A solução trivial do sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \quad \text{é} \quad (0, 0)$$

b) A solução trivial do sistema:

$$\begin{cases} 5a + 2b - c + d = 0 \\ a - 3b + 2c - d = 0 \end{cases} \quad \text{é} \quad (0, 0, 0, 0)$$

Sistema linear homogêneo com número de equações igual ao número de incógnitas

Observe o seguinte sistema linear homogêneo:

$$A \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Certamente esse sistema é possível, pois admite a solução trivial (0, 0, 0). Será que o sistema admite outras soluções, além da trivial?

Para responder a tal pergunta, poderíamos escaloná-lo; mas também podemos obter a resposta pelo determinante dos coeficientes. Observe:

Sendo D o determinante dos coeficientes do sistema A, temos:

$D \neq 0 \Leftrightarrow A$ é SPD **Nesse caso haverá somente a solução trivial**

ou

$D = 0 \Leftrightarrow$ A é SPI **Nesse caso haverá outras soluções, além da trivial**

ou

~~A é SI~~ Nunca **ocorrerá, pois o sistema homogêneo é sempre possível**

Calculando D, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} =$$

$$= -3 + 24 - 2 - 3 - 4 - 12 = 0$$

Como $D = 0$ e A é um sistema linear homogêneo, concluímos que A é um sistema possível e indeterminado (SPI); portanto há outras soluções, além da trivial.

Propriedade

Sendo A um **sistema linear homogêneo**, com n equações e n incógnitas, cujo determinante dos coeficientes é D, tem-se que:

$D \neq 0 \Leftrightarrow A$ é SPD (A admite apenas a solução trivial)

ou

$D = 0 \Leftrightarrow A$ é SPI (A admite outras soluções, além da trivial)

Exemplos

a) No sistema $A \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{matrix} = -2 - 1 - 3 - 1 = -7$$

Como $D \neq 0$, temos que A é SPD, portanto admite apenas a solução trivial (0, 0, 0).

b) No sistema $B \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$ temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 4(-1) = 0$$

Como $D = 0$, temos que B é SPI; portanto admite outras soluções, além da trivial (0, 0). Algumas dessas outras soluções são (1, 2), (2, 4), (3, 6), etc.

Nota

Em um sistema linear homogêneo, as soluções diferentes da trivial são chamadas de **soluções próprias**. No exemplo (b). as soluções próprias são aquelas diferentes da trivial (0, 0), isto é, (1, 2), (2, 4), (3, 6), etc.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Determinar m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema nas variáveis x, y e z:

$$A \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ mx - y + 4z = 0 \\ 5x + y + 7z = 0 \end{cases}$$

admita soluções diferentes da trivial.

Resolução

Para que um sistema homogêneo admita outras soluções, diferentes da trivial, deve ser um sistema possível e indeterminado (SPI). Para que o sistema homogêneo A seja possível e indeterminado, basta impormos a condição $D = 0$, onde D é o determinante dos coeficientes de A. Isto é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -7 - m + 60 - 5 - 4 - 21m = 0$$

$$\therefore -22m + 44 = 0$$

$$\therefore m = 2$$

Logo, $m = 2$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.16 Classifique os sistemas lineares homogêneos como SPD ou SPI.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

B.17 Para que valor de m, $m \in \mathbb{R}$, o sistema abaixo nas variáveis x, y e z admite apenas a solução trivial?

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ mx - y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

B.18 Determine a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x, y e z admita soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ ax - 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

B.19 Discuta o sistema abaixo nas incógnitas x, y e z em função do parâmetro real k.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ kx + 5y + z = 0 \\ -2x - ky - 2z = 0 \end{cases}$$

B.20 (Faap-SP) Seja o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} k & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A única alternativa correta é:

a) Se $k = 1$, a única solução é $x = y = z = 0$.
b) O sistema é impossível.
c) O sistema tem infinitas soluções para qualquer k.
d) Somente se $k = 0$ o sistema é impossível.
e) Não é possível investigar o sistema com os dados disponíveis.

Exercícios complementares de C.7 a C.10

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Dado o sistema nas variáveis x e y $\begin{cases} ax + 2y = 7a \\ 2x + y = 6 + 2a \end{cases}$

a) determine a, $a \in \mathbb{R}$, para que o sistema seja possível e determinado;
b) se o sistema é possível e determinado, encontre os valores de x e y em função de a.

C.2 Considere o sistema nas variáveis x e y $\begin{cases} 2x + y = 3a \\ x - y = 3 \end{cases}$

a) Obtenha a, $a \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema seja possível e determinado.
b) Se o sistema é possível e determinado, encontre os valores de x e y em função de a.

C.3 Determine m, $m \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x, y e z seja possível e determinado.

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ mx + 3y - z = 2 \\ mx + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

C.4 (Unicamp-SP) Encontre o valor de a para que o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = a \\ x + 2y - z = 3 \\ 7x + 4y + 3z = 13 \end{cases}$$

seja possível. Para o valor encontrado de a ache a solução geral do sistema, isto é, ache expressões que representem todas as soluções do sistema. Explicite duas dessas soluções.

C.5 (PUC-SP) Considere o seguinte sistema de equações de incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 6x + 2y = 4 \\ 3x + 5y = 6 \\ kx + 2y = 5 \end{cases}$$

Esse sistema tem uma única solução para certo número real k, que é um:

a) quadrado perfeito.
b) número primo.
c) número racional não inteiro.
d) número negativo.
e) múltiplo de 5.

C.6 (U. Taubaté-SP) Para que valores de k o sistema a seguir é possível e determinado?

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -5 \\ x + 2y - 3z = k \\ 2x + y + z = 7 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

C.7 Resolva o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 8y + 3z = 0 \end{cases}$$

Sugestão. O determinante D, dos coeficientes, é igual a zero; portanto o sistema é possível e indeterminado. Para resolvê-lo, escalone-o.

C.8 Encontre o valor de k, $k \in \mathbb{R}$, de modo que o sistema abaixo nas variáveis x e y admita soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} x + 2y = kx \\ 3x + 2y = ky \end{cases}$$

C.9 (U. Taubaté-SP) Calcule o valor de k para que o sistema a seguir tenha solução diferente da trivial.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ 2x + (2 - k)y + 2z = 0 \\ x + y + (1 - k)z = 0 \end{cases}$$

C.10 (Fuvest-SP) Seja o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}$

a) Determine todos os valores de m para os quais o sistema admite solução.
b) Resolva o sistema, supondo $m = 0$.

Capítulo 41

DETERMINANTE E MATRIZES INVERSAS

1. DETERMINANTE

No capítulo anterior, vimos que, ao resolver um sistema linear com duas equações e duas incógnitas, ou com três equações e três incógnitas, constata-se um cálculo **padrão**, cujo resultado chamamos de **determinante**. Recordando:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Podemos, também, conceituar determinante de ordem 1, da seguinte maneira: dada a matriz $A = (a_{11})$ define-se $\det A = a_{11}$ (o símbolo $\det A$ deve ser lido como "determinante de matriz A").

Exemplo

Dada a matriz $A = (-3)$, temos que $\det A = -3$.

De modo geral, na resolução de um sistema linear com n equações e n incógnitas, verifica-se um cálculo **padrão** que se mantém para qualquer valor de n. O número resultante desse cálculo é chamado de **determinante**. O objetivo deste capítulo é conceituar **determinante** de ordem n, para qualquer valor de n.

Cofator

Consideremos a seguinte matriz quadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chama-se **cofator** do elemento a_{ij} o número que indicaremos por A_{ij} (lê-se "cofator do elemento a_{ij}"), definido por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det B$$

em que B é a matriz que se obtém eliminando-se a linha i e a coluna j da matriz A.

Exemplos

a) O cofator do elemento a_{11} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ é:}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 (5 \cdot 3) = 15$$

b) O cofator do elemento a_{21} da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ é:}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 (1 \cdot 3) = -3$$

Definição de determinante

Definição 1

O determinante de uma matriz unitária $A = (a_{11})$ é igual ao seu próprio elemento a_{11}.

Definição 2

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, $n \geqslant 2$, é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha pelos respectivos cofatores.

Exemplos

a) Observe a definição aplicada ao cálculo de um determinante de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}$$

Como $A_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22}$ e $A_{12} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21}$, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

É claro que o resultado coincide com o desenvolvimento obtido no capítulo anterior.

b) Observe a definição aplicada ao cálculo de um determinante de ordem 3:

$$\begin{vmatrix} \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13}$$

Como

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} = 1 \cdot (ei - hf) = ei - hf$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} = -1 \cdot (di - gf) = gf - di$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = 1 \cdot (dh - ge) = dh - ge$$

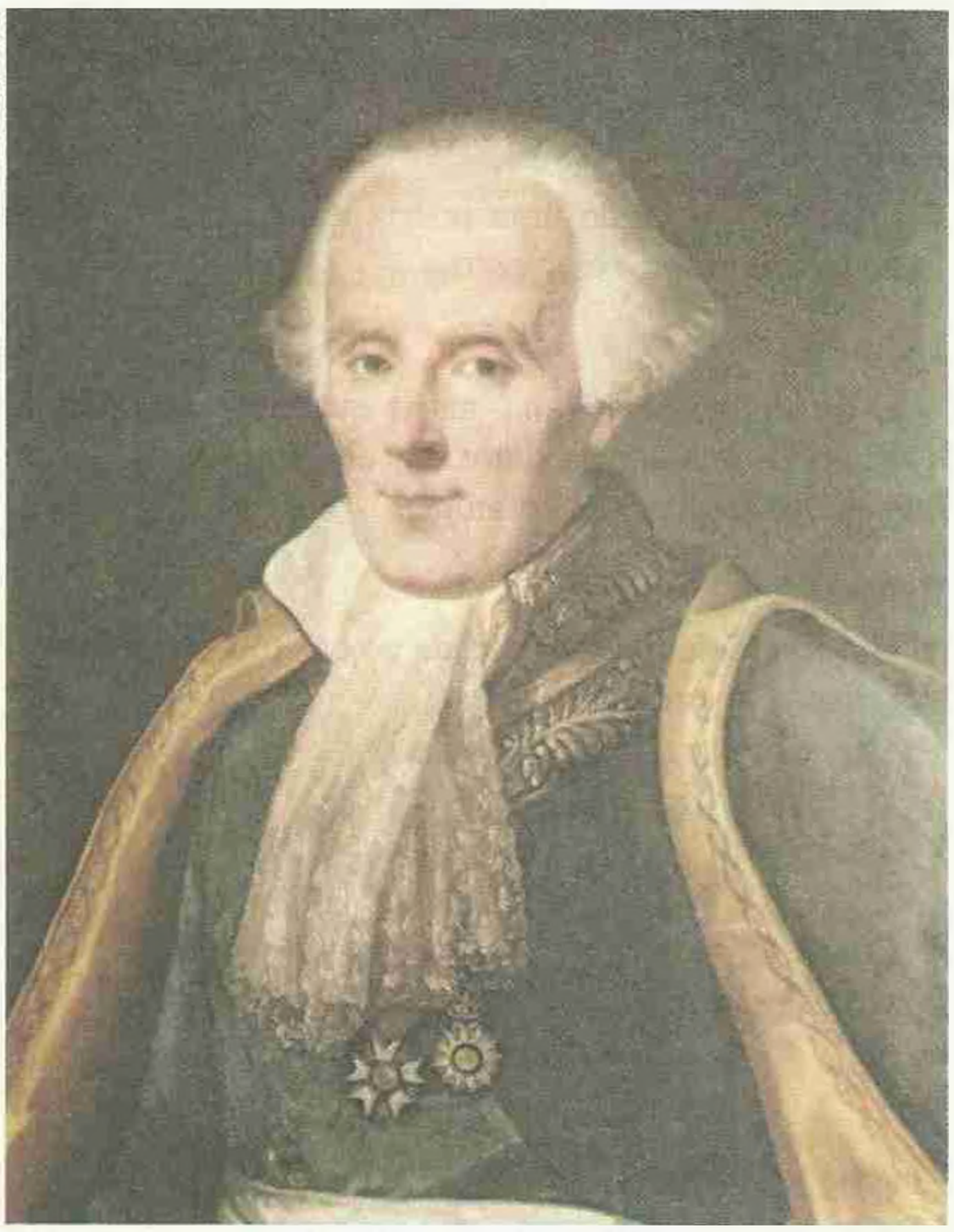
temos que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot (ei - hf) + b \cdot (gf - di) + c \cdot (dh - ge) =$$

$$= aei - ahf + bgf - bdi + cdh - cge$$

É claro que o resultado coincide com o desenvolvimento pela regra de Sarrus, vista no capítulo anterior.

Teorema de Laplace



OBRA DE MME. FEYTAUD. ACADEMIE DES SCIENCES, PARIS

Pierre Simon, marquês de Laplace (1749-1827), matemático francês. Dentre outros grandes feitos, demonstrou um dos mais importantes teoremas sobre determinantes.

O matemático francês marquês de Laplace descobriu que o desenvolvimento do determinante de uma matriz, através de cofatores, pode ser feito com os elementos de qualquer linha ou qualquer coluna, isto é, não é necessário que se use a primeira linha conforme a definição. Laplace provou que:

> "O determinante de uma matriz quadrada de ordem n, $n \geq 2$, é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores."

Nota

A palavra "fila" é usada para indicar linha ou coluna.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Calcular o determinante D através do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para os cálculos de cofatores:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Resolução

Para o desenvolvimento por Laplace, podemos escolher uma fila qualquer. Por comodidade, escolheremos a fila com a maior quantidade de zeros, isto é, a terceira coluna. Tal escolha é conveniente porque o produto do elemento zero pelo seu cofator é igual a zero e, portanto, não é preciso calcular esse cofator.

Temos então:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & \boxed{3} & 2 \\ 1 & 4 & \boxed{0} & 1 \\ 4 & 1 & \boxed{0} & 3 \\ 2 & 1 & \boxed{4} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 4A_{43}$$

Precisamos calcular apenas os cofatores A_{13} e A_{43}:

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= 1(1 + 24 + 4 - 2 - 3 - 16) = 8$$

e

$$A_{43} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{matrix} =$$

$$= -1(60 + 4 + 2 - 32 - 5 - 3) = -26$$

Logo, $D = 3 \cdot 8 + 4(-26) = -80$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

Nos exercícios de B.1 a B.4 e de C.1 a C.4, use as regras práticas estudadas no capítulo anterior.

B.1 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} & -\cos \frac{\pi}{12} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{vmatrix}$

(**Lembre-se** de que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.)

B.2 Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} b & b & b \\ b & a & a \\ b & a & c \end{vmatrix}$

B.3 Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$.

B.4 (FGV-SP) Para que valores de a a equação:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & a & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

terá duas raízes reais e iguais?

a) $a \geqslant 1$
b) $a < 0$
c) $0 \leqslant a \leqslant 1$
d) Só para $a = 0$.
e) Só para $a = 1$.

B.5 Calcule os determinantes através do teorema de Laplace, usando a regra de Sarrus para os cálculos de cofatores.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Exercícios complementares de C.1 a C.5

Propriedades dos determinantes

Com a finalidade de simplificar os cálculos de determinantes, apresentaremos quatro propriedades válidas para determinantes de qualquer ordem. Faremos as justificativas apenas para determinantes de ordem 2 ou de ordem 3.

P.1 Matriz triangular

Uma matriz quadrada é triangular quando os elementos situados abaixo ou acima da diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos

São triangulares as matrizes:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Propriedade

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Justificativa para o caso de matrizes de ordem 3.

Aplicando o teorema de Laplace na primeira coluna da matriz triangular $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$, temos:

$$\det A = a \cdot A_{11} = a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = adf$$

Nos exemplos anteriores, temos:

$$\det B = 4 \cdot 9 = 36, \det C = 1 \cdot 5 \cdot 3 = 15 \text{ e}$$
$$\det D = 2 \cdot 0 \cdot 6 \cdot 7 = 0$$

P.2 Produto de um número por determinante

Multiplicando uma fila de uma matriz quadrada A por um número real k, obtém-se uma nova matriz B tal que $\det B = k \det A$.

Vamos justificar essa propriedade para o caso particular de uma matriz de ordem 3 cuja primeira linha foi multiplicada por k. Isto é, vamos provar que:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{D_1} = k \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}_{D_2}$$

Desenvolvendo D_1 pelo teorema de Laplace através da fila do fator comum (primeira linha), temos:

$$D_1 = kaA_{11} + kbA_{12} + kcA_{13} = k(aA_{11} + bA_{12} + cA_{13})$$

Note que a expressão $aA_{11} + bA_{12} + cA_{13}$ é o desenvolvimento de D_2 pelo teorema de Laplace através da primeira linha. Logo, $D_1 = kD_2$.

Exemplos

a) $\begin{vmatrix} 15 & 20 & 25 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Fator comum à primeira linha em evidência

b) $\begin{vmatrix} 4 & 12 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Fator comum à primeira linha em evidência

Fator comum à terceira linha em evidência

Cuidado! Observe que:

$$k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

e que $k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, k \in \mathbb{R}.$

Isto é:

- para multiplicar um número k por uma matriz, multiplicamos **todos** os elementos da matriz por k;
- para multiplicar um número k pelo determinante de uma matriz, devemos multiplicar por k apenas uma fila.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Sendo $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$, calcular:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2a & b & 5c \\ 2d & e & 5f \\ 2g & h & 5i \end{vmatrix}$

Resolução

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$

Fator comum à primeira linha

b) $\begin{vmatrix} 2a & b & 5c \\ 2d & e & 5f \\ 2g & h & 5i \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$

Fator comum à primeira coluna

Fator comum à terceira coluna

R.3 Sendo A uma matriz quadrada de ordem dois com $\det A = 4$, calcular $\det (3A)$.

Resolução

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Temos que $3A = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$.

Assim:

$$\det (3A) = \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix} \overset{\text{P.2}}{=} 3 \cdot 3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$$

Fator comum à primeira linha

Fator comum à segunda linha

P.3 Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então:

$$\det AB = \det A \det B$$

Justificaremos esse teorema apenas para matrizes quadradas de ordem 2.

Sendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, temos que:

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Note que:

$\det AB = (ae + bg)(cf + dh) - (ce + dg)(af + bh) =$

$= aecf + aedh + bgcf + bgdh - ceaf - cebh - dgaf - dgbh =$

$= aedh + bgcf - cebh - dgaf = ad(eh - gf) - cb(eh - gf) =$

$= \underbrace{(ad - cb)}_{\det A}\underbrace{(eh - gf)}_{\det B} = \det A \det B$

Logo, $\det AB = \det A \det B$.

Exemplo

Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, temos que $AB = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 13 & 7 \end{pmatrix}$.

Note que $\det A = 2$, $\det B = 5$ e $\det AB = 10$.
Logo, $\det AB = \det A \det B$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Sabendo que A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e que $\det A = 5$ e $\det AB = 60$, calcular $\det B$.

Resolução

Pelo teorema de Binet, temos que $\det AB = \det A \det B$.

Logo, $60 = 5 \det B \Rightarrow \det B = 12$.

R.5 Sendo A uma matriz quadrada tal que $\det A = 5$, calcular $\det A^2$.

Resolução

$$\det A^2 = \det (A \cdot A) \overset{\text{P.3}}{=} \det A \det A = 5 \cdot 5 = 25.$$

P.4 Teorema de Jacobi

A propriedade que vamos estudar agora permite que sejam introduzidos zeros em uma fila qualquer de um determinante, facilitando significativamente a aplicação do teorema de Laplace. Para entender o enunciado dessa propriedade, considere que ao multiplicar os elementos de uma fila de uma matriz por um número qualquer, obtém-se uma **múltipla** dessa fila.

> Em uma matriz quadrada A, adicionando-se a uma fila qualquer uma múltipla de uma fila paralela, obtém-se uma matriz B tal que $\det A = \det B$.

Faremos a justificativa dessa propriedade para matriz de ordem 2.

Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, vamos adicionar à segunda coluna a primeira multiplicada por uma constante real k, obtendo a matriz $B = \begin{pmatrix} a & b + ka \\ c & d + kc \end{pmatrix}$.

Calculando os determinantes, temos:

$$\det A = ad - cb$$
$$\det B = a(d + kc) - c(b + ka) =$$
$$= ad + \cancel{akc} - cb - \cancel{cka} = ad - cb$$

Logo, $\det A = \det B$.

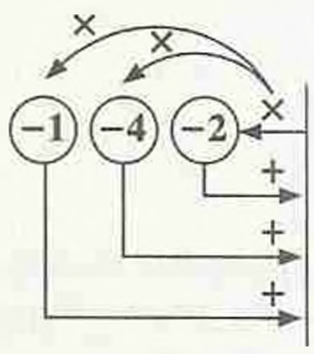
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Calcular o determinante $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 15 & 9 & 20 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Resolução

Aplicando o teorema de Jacobi:

- adicionamos à 2ª linha a 1ª multiplicada por -2:
- adicionamos à 3ª linha a 1ª multiplicada por -4;
- adicionamos à 4ª linha a 1ª multiplicada por -1, isto é:



$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 15 & 9 & 20 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que apenas um elemento da 1ª coluna é diferente de zero. Assim, ao aplicar o teorema de Laplace nessa coluna, deveremos calcular apenas um cofator. Observe:

$$D = 1 \cdot A_{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (2 + 8 - 6) = 4$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.6 Calcule o determinante de cada uma das matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) I_4 (identidade de ordem 4)

c) I_5

d) I_n

B.7 (U. F. Viçosa-MG) A soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} x & 5 & 4 & 1 \\ 0 & x^2 - 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3x + 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{22}{3}$ e) 0

b) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$

B.8 (Faap-SP) Dado que A é uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det A = 5$, conclui-se que $\det (2A)$ é igual a:

a) 10 c) 40 e) 30

b) 80 d) 20

B.9 A é uma matriz quadrada de ordem 3 tal que $\det A \neq 0$ e $A^2 - 2A = 0$, em que 0 é a matriz nula de ordem 3. Calcule $\det A$.

B.10 A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $\det A = 5$ e $AB = I_n$. Obtenha $\det B$.

B.11 (Fuvest-SP) O valor de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ é:

a) 2 c) 0 e) -2

b) 1 d) -1

Sugestão. Aplicando o teorema de Jacobi, introduza zeros na primeira coluna ou em qualquer outra fila.

B.12 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 10 & 8 & 1 \\ 5 & 16 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

B.13 Qual é o valor do determinante de uma matriz quadrada que possui uma fila formada apenas por zeros? **Sugestão**. Aplique o teorema de Laplace na fila nula.

B.14 Qual é o valor do determinante de uma matriz quadrada que possui duas filas paralelas iguais? **Sugestão**. Aplique o teorema de Jacobi.

B.15 Permutando-se as duas linhas da matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obtém-se a matriz $B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$. Que relação existe entre os determinantes dessas matrizes?

Nota
A conclusão desse exercício vale para determinante de matriz quadrada de qualquer ordem.

B.16 Transpondo-se a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ obtém-se $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Que relação existe entre det A e det A^t?

Nota
A conclusão desse exercício vale para determinante de matriz quadrada de qualquer ordem.

Exercícios complementares de C.6 a C.11

2. MATRIZES INVERSAS

Definição

Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se, e somente se, existir uma matriz B tal que:

$$AB = BA = I_n$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n.

As matrizes A e B são chamadas de **inversas entre si**, e tal fato é indicado por $B = A^{-1}$ (lê-se "B é igual à inversa de A") ou $A = B^{-1}$ (lê-se "A é igual à inversa de B").

Exemplo

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ são inversas entre si, pois:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ e}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Logo, $B = A^{-1}$ ou, ainda, $A = B^{-1}$.

Teorema

Uma matriz quadrada A de ordem n é inversível se, e somente se, det $A \neq 0$.

Demonstração

Primeira parte: se A é inversível, então det $A \neq 0$.

Sendo A inversível, então existe a matriz quadrada A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Logo, temos det $(A \cdot A^{-1})$ = det $(A^{-1} \cdot A)$ = det I_n.

Pelo teorema de Binet e pelo fato de det $I_n = 1$, temos que det A det A^{-1} = det A^{-1} det $A = 1$.

Concluímos então que det $A \neq 0$ (pois, caso contrário, isto é, se det $A = 0$, teríamos det A det $A^{-1} = 0$).

Segunda parte: se det $A \neq 0$ então A é inversível.

Consideremos a equação matricial $AX = I_n$, isto é:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Como cada um dos sistemas lineares obtidos de:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; A \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}; \dots;$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

é possível e determinado, pois det $A \neq 0$, temos que existe uma única matriz X satisfazendo a equação matricial $AX = I_n$.

Temos, também, que a equação $XA = I_n$ é equivalente a $A^t \cdot X^t = I_n$ (ver exercício B.16 do capítulo 38).

Como det A^t = det A (ver exercício B. 16 deste capítulo) e det $A \neq 0$, temos que det $A^t \neq 0$. Assim, de modo análogo ao anterior, a equação matricial $A^t \cdot X^t = I_n$ gera sistemas lineares possíveis e determinados, portanto, existe uma única matriz X satisfazendo a equação $XA = I_n$.

Como $AX = XA = I_n$, concluímos que $X = A^{-1}$.

(c.q.d.)

Nota

Da primeira parte dessa demonstração temos que $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$, o que nos permite concluir a importante propriedade dos determinantes:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

ou seja:

Matrizes inversas têm determinantes inversos.

Exemplo

Se uma matriz quadrada A tem determinante igual a 3, a inversa de A tem determinante igual a $\frac{1}{3}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 Verificar se a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ é inversível.

Resolução

A matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Calculando $\det A$, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5 = 3$$

Como $\det A \neq 0$, temos que A é inversível.

R.8 Obter x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ seja inversível.

Resolução

A matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Logo, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ x & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ x & 1 \\ 4 & 5 \end{matrix} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 24 - 5x + 4 - 15 - 2x \neq 0$$

$$\therefore -7x + 14 \neq 0 \therefore x \neq 2$$

Logo, A é inversível para todo x real, $x \neq 2$.

Cálculo da matriz inversa

O teorema seguinte facilita o cálculo da inversa de uma matriz, conforme veremos no exercício resolvido.

Teorema

Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem n e $AB = I_n$, então A e B são inversíveis e $B = A^{-1}$ ou, ainda, $A = B^{-1}$.

Demonstração

Devemos demonstrar que:

- primeira parte: $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$;
- segunda parte: $B = A^{-1}$, ou, ainda, $A = B^{-1}$.

Primeira parte: $AB = I_n \Rightarrow \det (AB) = \det I_n$.

Pelo teorema de Binet e pelo fato de $\det I_n = 1$, temos $\det A \det B = 1$.

Logo, $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$. Portanto A e B são inversíveis.

Segunda parte: temos por hipótese que $AB = I_n$.

Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por A^{-1} (à esquerda de cada membro), temos que:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot I_n \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A)B = A^{-1} \cdot I_n$$

$$\therefore I_n \cdot B = A^{-1} \cdot I_n \therefore B = A^{-1}$$

Concluímos então que A e B são matrizes inversas entre si.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.9 Determinar, caso exista, a inversa da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução

Calculando $\det A$, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0 = 2$$

Como $\det A \neq 0$, temos que existe A^{-1}. A matriz A^{-1} tem a mesma ordem de A, isto é, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Assim, devemos ter:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a + 3b & 2b \\ c + 3d & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a + 3b = 1 \text{ (I)} \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ (II)} \\ c + 3d = 0 \text{ (III)} \\ 2d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \text{ (IV)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos $a + 3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow a = 1$.
Substituindo (IV) em (III), temos:

$$c + 3 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Nota

Não é necessário resolver, também, a equação $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pois, pelo teorema anterior, fica garantido que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é a inversa de A.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.17 Quais dos itens seguintes apresentam matrizes inversas entre si?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

B.18 Quais dos itens seguintes apresentam matriz inversível?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

B.19 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & 3 \end{pmatrix}$ seja inversível.

B.20 (UFAC) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ admite inversa se, e somente se:

a) $x \neq 0$
b) $x \neq 1$
c) $x \neq -1$
d) $x \neq -\frac{3}{2}$
e) $x \neq \frac{1}{3}$

B.21 Determine, se existir, a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

B.22 (PUC-RS) Considere-se a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$. A inversa de A é a matriz:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

B.23 (UFPE) Seja M uma matriz inversível tal que $\det M = \frac{1}{96}$, em que M^{-1} é a inversa de M. Determine o valor de $\det M^{-1}$.

Exercícios complementares de C.12 a C.15

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (U. Taubaté-SP) Sendo $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, em que

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ -2ij, \text{ se } i < j \\ 3j, \text{ se } i > j \end{cases}$$

calcule o $\det B$:

a) 13
b) -25
c) 25
d) 20
e) -10

C.2 (PUC-MG) Em $\mathbb{R}$, a solução da equação $\begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - \log_3 9$ é:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

C.3 Qual é o conjunto dos valores reais de x, $0 \leq x < 2\pi$, tal que $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2\,\text{sen}\,x & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$?

C.4 (UFCE) O determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 21
b) -45
c) 0
d) -165
e) 23

C.5 Calcule o determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

C.6 (Mackenzie-SP) Considerando a matriz $A = (a_{ij})_{8\times 8}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ se } i \geqslant j \\ 0 \text{ se } i < j \end{cases}$, tem-se que:

a) $\det A = 0$
b) $\det A = 2$
c) $\det A = 16$
d) $\det A = 64$
e) $\det A = 256$

C.7 (UFCE) Seja M uma matriz quadrada. Multiplicando-se por α uma linha de M, obtém-se uma matriz A. Dividindo-se por β, $\beta \neq 0$, uma coluna de A, obtém-se uma matriz B. Desse modo tem-se que:

a) $\det B = \alpha\beta \det M$
b) $\det B = \frac{\alpha}{\beta} \det M$
c) $\det B = \frac{\beta}{\alpha} \det M$
d) $\det B = \det A$
e) $\det B = 0$

C.8 Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e B matrizes quadradas de ordem 3 tais que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Encontre $\det B$.

Sugestão. Teorema de Binet.

C.9 (UFBA) A soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & x+2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & x+2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) -4
e) 12

Sugestão. Aplique o teorema de Jacobi.

C.10 (Fatec-SP) Resolvendo a equação na variável x, $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ x & x & a & a \\ x & x & x & a \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$, obtém-se:

a) $x = a$
b) $x = a^3$
c) $x = 0$ ou $x = a^3$
d) $x = 0$ ou $x = a$
e) $x = 3a$

Sugestão. Aplique o teorema de Jacobi.

C.11 (ITA-SP) Seja Q uma matriz 4×4 tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$. Então:

a) $\det Q = +2$
b) $\det Q = -2$
c) $\det Q = -16$
d) $\det Q = 16$
e) n.d.a.

Sugestão. Escreva $Q^3 = -2Q^2$ e calcule o determinante de cada um dos membros.

C.12 (FEI-SP) Considere as matrizes A e B, a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & 2a \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2b & -2b \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Se a inversa da matriz A é a matriz B, então:

a) $a = 0$ ou $b = 0$
b) $ab = 1$
c) $ab = \frac{1}{2}$
d) $a = 0$ e $b = 0$
e) $a + b = \frac{1}{2}$

C.13 (UFMG) Os valores reais de x para os quais a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ não admite inversa são:

a) $x = 3$ ou $x = -2$
b) $x = 0$ ou $x = 4$
c) $x = 3$ ou $x = -1$
d) $x = 2$ ou $x = 1$
e) $x = 1$ ou $x = 7$

C.14 (U. F. Santa Maria-RS) Considere a matriz quadrada de ordem 2, $A = (a_{ij})$, em que $a_{ij} = \frac{12}{i+j}$. Se B é a matriz inversa de A, então $B + B^t$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

C.15 (Fuvest-SP) Se as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são tais que $AB = BA$, pode-se afirmar que:

a) A é inversível
b) $\det A = 0$
c) $b = 0$
d) $c = 0$
e) $a = d = 1$

Capítulo 42

OS PRINCÍPIOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. INTRODUÇÃO

10... 9... 8... 7... 6... 5... 4... 3... 2... 1... 0... fogo!

Você já percebeu o quanto é necessário contar em nosso dia-a-dia? Contamos os dias que faltam para as férias, as páginas de um livro, os habitantes de uma região, etc.

Há, entretanto, algumas quantidades que gostaríamos de contar, mas nos deparamos com certas dificuldades. Quantas placas de automóvel podem ser confeccionadas com as 26 letras e os dez algarismos disponíveis? Quantos números de telefone podem ser formados? Quantas pessoas assistiram ao *show* de *rock* na praça?

Esses e muitos outros problemas nós vamos estudar agora, na análise combinatória, cuja principal finalidade é estabelecer métodos de contagem.

2. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

Consideremos o seguinte problema: lançando simultaneamente um dado e uma moeda, quantos são os possíveis resultados?

Para efetuar a contagem, vamos apresentar os possíveis resultados no dado, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, e os possíveis resultados na moeda, C (cara) e K (coroa), conforme disposição a seguir:

Dado \ Moeda	C	K
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Vamos agora construir a matriz formada por todos os pares (x, y), onde x é um dos resultados no dado e y é um dos resultados na moeda:

Dado \ Moeda	C	K
1	$(1, C)$	$(1, K)$
2	$(2, C)$	$(2, K)$
3	$(3, C)$	$(3, K)$
4	$(4, C)$	$(4, K)$
5	$(5, C)$	$(5, K)$
6	$(6, C)$	$(6, K)$

Note que a tabela assim construída apresenta todos os possíveis resultados do experimento. Assim, o número de elementos dessa matriz é igual ao número de resultados possíveis do experimento. Como a matriz possui seis linhas por duas colunas, temos que o número de elementos que a compõem é:

$$\underbrace{6}_{\substack{\text{Número de}\\ \text{resultados}\\ \text{possíveis no dado}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{Número de}\\ \text{resultados}\\ \text{possíveis na moeda}}} = 12$$

Consideremos, agora, um outro problema: lançando-se um dado, uma moeda e retirando-se uma etiqueta de uma urna que contém quatro etiquetas de cores diferentes, azul (A), vermelha (V), preta (P) e branca (B), quantos são os possíveis resultados?

Observe que temos um experimento composto de três experimentos: lançar o dado, lançar a moeda e retirar uma etiqueta da urna. Será possível construir a matriz das possibilidades, isto é, a tabela formada por todos os possíveis resultados?

É perfeitamente possível, bastando para isso associarmos os dois primeiros experimentos e apresentarmos os resultados conforme disposição a seguir:

Dado e moeda \ Etiqueta	A	V	P	B
1, C	$(1, C, A)$	$(1, C, V)$	$(1, C, P)$	$(1, C, B)$
1, K	$(1, K, A)$	$(1, K, V)$	$(1, K, P)$	$(1, K, B)$
2, C	$(2, C, A)$	$(2, C, V)$	$(2, C, P)$	$(2, C, B)$
2, K	$(2, K, A)$	$(2, K, V)$	$(2, K, P)$	$(2, K, B)$
3, C	$(3, C, A)$	$(3, C, V)$	$(3, C, P)$	$(3, C, B)$
3, K	$(3, K, A)$	$(3, K, V)$	$(3, K, P)$	$(3, K, B)$
4, C	$(4, C, A)$	$(4, C, V)$	$(4, C, P)$	$(4, C, B)$
4, K	$(4, K, A)$	$(4, K, V)$	$(4, K, P)$	$(4, K, B)$
5, C	$(5, C, A)$	$(5, C, V)$	$(5, C, P)$	$(5, C, B)$
5, K	$(5, K, A)$	$(5, K, V)$	$(5, K, P)$	$(5, K, B)$
6, C	$(6, C, A)$	$(6, C, V)$	$(6, C, P)$	$(6, C, B)$
6, K	$(6, K, A)$	$(6, K, V)$	$(6, K, P)$	$(6, K, B)$

Como a matriz formada por todos os resultados possíveis (face no dado, face na moeda, cor da etiqueta) apresenta doze linhas por quatro colunas, temos que o número possível de resultados do experimento é $12 \cdot 4 = 48$, ou seja:

$$\underbrace{6}_{\substack{\text{Número de}\\ \text{resultados}\\ \text{possíveis no dado}}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{Número de}\\ \text{resultados possíveis}\\ \text{na moeda}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{Número de}\\ \text{resultados}\\ \text{possíveis na urna}}} = 48$$

Tendo como motivação os dois exemplos anteriores, vamos enunciar o seguinte princípio, conhecido por **princípio fundamental de contagem**:

> Se um experimento A apresenta n resultados distintos e um experimento B apresenta k resultados distintos, então o experimento composto de A e B, nessa ordem, apresenta nk resultados distintos.

Esse princípio pode ser generalizado para mais de dois experimentos, da seguinte maneira:

> Se os experimentos A_1, A_2, A_3, ..., A_k apresentam como números de resultados possíveis n_1, n_2, n_3, ..., n_k, respectivamente, então o experimento composto de A_1, A_2, A_3, ..., A_k, nessa ordem, apresenta $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ resultados possíveis.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Uma montadora de automóveis apresenta um carro em quatro modelos diferentes e em cinco cores diferentes. Um consumidor que quiser adquirir esse veículo terá quantas opções de escolha?

Resolução

Consideremos o seguinte diagrama:

Modelo	Cor

Para a primeira "casa", temos quatro possibilidades de escolha e, para a segunda, cinco possibilidades:

Modelo	Cor
4	5

Os números de possibilidades →

Pelo princípio fundamental de contagem, o consumidor terá $4 \cdot 5 = 20$ opções de escolha.

R.2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 6, 8 e 9?

Resolução

Devemos preencher com um algarismo cada uma das casas do diagrama:

Centenas	Dezenas	Unidades

O número de possibilidades para cada casa é cinco:

5	5	5

Os números de possibilidades →

Assim, estamos realizando o seguinte experimento: preencher a primeira casa, preencher a segunda casa e preencher a terceira casa. Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

R.3 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 6, 8 e 9?

Resolução

Devemos preencher, sem repetir algarismos, cada uma das casas do diagrama:

Centenas	Dezenas	Unidades

O número de possibilidades para a primeira casa é cinco:

5		

O número de possibilidades para a segunda casa é quatro, pois um algarismo já foi usado para preencher a primeira casa e não pode ser repetido na segunda casa:

5	4	

O número de possibilidades para a última casa é três, pois os dois algarismos que já foram usados nas casas anteriores não podem ser repetidos:

5	4	3

Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

R.4 Quantos números naturais de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 6 e 8?

Resolução

Observe que o algarismo 0 (zero) não pode ocupar a casa das centenas no diagrama abaixo, caso contrário o número não teria três algarismos:

Centenas	Dezenas	Unidades

Assim sendo, o número de possibilidades para a primeira casa é quatro, porque excluímos o zero:

4		

O número de possibilidades para a segunda casa é quatro, porque o algarismo zero pode ocupar essa casa:

4	4	

O número de possibilidades para a última casa é três:

4	4	3

Pelo princípio fundamental de contagem, temos que o total de números que podem ser formados é:

$$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$$

R.5 Quantos divisores naturais possui o número 72?

Resolução

Temos que $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Os divisores de 72 são do tipo $2^x \cdot 3^y$, onde $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Assim, o total de divisores de 72 é igual ao número de pares

ordenados (x, y) que podem ser formados de modo que $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$. Pelo princípio fundamental de contagem, temos:

$$\begin{array}{l} \\ \textbf{Os números de} \\ \textbf{possibilidades} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} (x,\ y) \\ \downarrow\ \downarrow \\ 4 \cdot 3 = 12 \end{array}$$

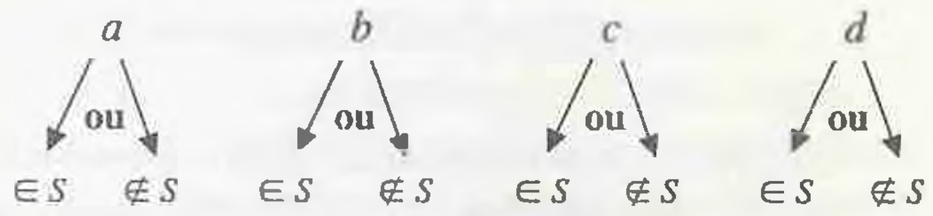
Logo, o número 72 possui doze divisores naturais.

R.6 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

Resolução

Vejamos de quantas maneiras diferentes podemos formar um subconjunto S de A.

Para cada elemento de A temos duas possibilidades: ou o elemento pertence a S ou não pertence a S. Isto é:



Assim, o número de subconjuntos de A pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

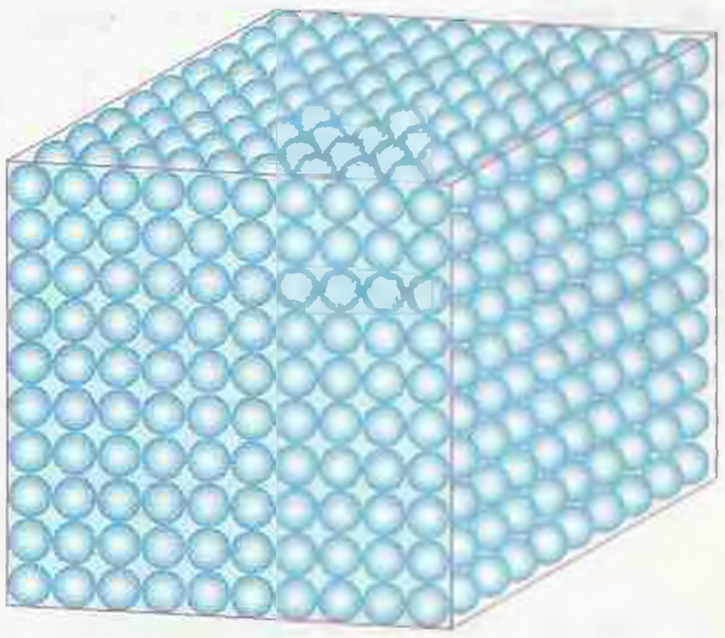
$$\begin{array}{l} \\ \textbf{Os números de} \\ \textbf{possibilidades} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & \cdot\ 2 & \cdot\ 2 & \cdot\ 2 = 2^4 = 16 \end{array}$$

Logo, o conjunto A possui dezesseis subconjuntos.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 (Enem) Uma pessoa arrumou bolinhas de 1 cm de diâmetro em camadas superpostas iguais em uma caixa cúbica de 10 cm de aresta, tendo assim empregado:

a) 100 bolinhas.
b) 300 bolinhas.
c) 1.000 bolinhas.
d) 2.000 bolinhas.
e) 10.000 bolinhas.



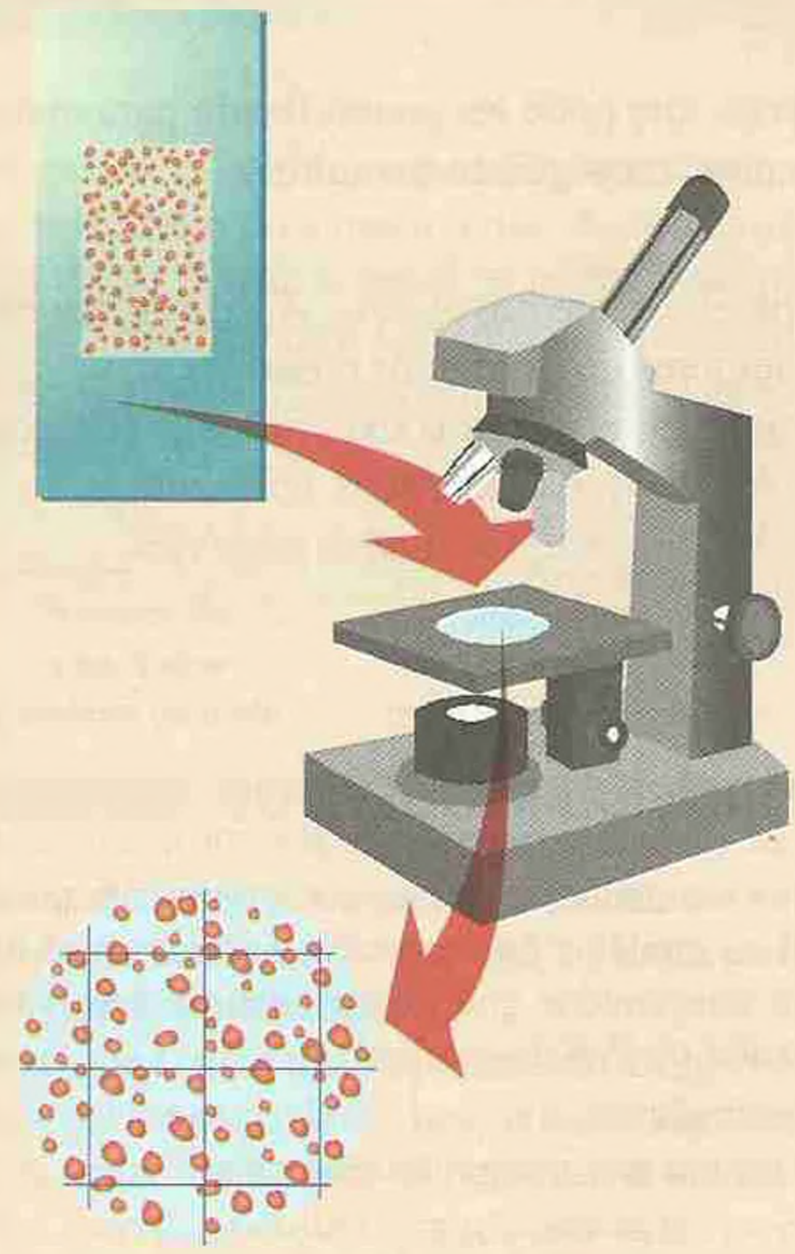
B.2 Duas linhas de ônibus vão de uma cidade A para uma cidade B e três linhas vão da cidade B para outra cidade C. De quantos modos diferentes um usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B?

Sugestão. Esse experimento é composto de dois outros: 1º, de A para B; 2º, de B para C. Represente por um quadrinho cada um desses dois experimentos:

1º experimento	2º experimento

Contagem dos glóbulos vermelhos do sangue

Um exame muito freqüente em laboratórios clínicos é a contagem de glóbulos vermelhos do sangue. Um homem adulto sadio tem de 4.500.000 a 6.000.000 dessas células em cada mm^3 de sangue, e uma mulher tem de 4.000.000 a 5.400.000.



Modernos aparelhos eletrônicos fazem a contagem dos glóbulos vermelhos em uma amostra de sangue. Essa contagem também pode ser feita através de um microscópio, conforme o processo descrito a seguir.

O sangue é diluído em uma proporção conhecida, reduzindo muito o número de células por mm^3, e colocado num pequeno recipiente de vidro sob a forma de um paralelepípedo com fundo quadriculado. Em alguns quadradinhos desse quadriculado conta-se a quantidade de glóbulos vermelhos, calculando-se, a seguir, o número médio de glóbulos por quadradinho. Através da proporção de diluição obtém-se o número de glóbulos vermelhos por mm^3.

B.3 (Cesgranrio) Durante um campeonato mundial de futebol, disputado por 24 países, as tampinhas de Coca-Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Nigéria; 3º lugar, Holanda). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69 b) 2.024 c) 9.562 d) 12.144

B.4 (UFES) Um *shopping center* possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do *shopping center* pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?

a) 12 b) 17 c) 19 d) 23 e) 60

B.5 (Faap-SP) Uma linha ferroviária tem 16 estações. Quantos tipos de bilhetes devem ser impressos, se cada bilhete deve registrar a estação de origem e a de destino?

a) 240
b) 256
c) 64
d) 272
e) 128

CID

B.6 Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.7 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.8 Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

B.9 (UFBA) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 6 e 8, podem-se formar x números ímpares, com três algarismos distintos cada um. Determine x.

B.10 Qual o número de divisores naturais de $n = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$?

Exercícios complementares de C.1 a C.10

3. PRINCÍPIO ADITIVO DE CONTAGEM

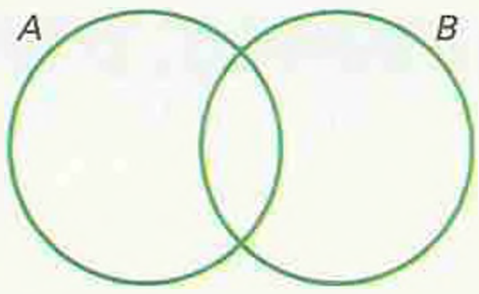
Teorema

Sendo A e B conjuntos finitos, o número de elementos da união de A e B é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

em que o símbolo $n(\ \ )$ representa o número de elementos do conjunto indicado entre parênteses.

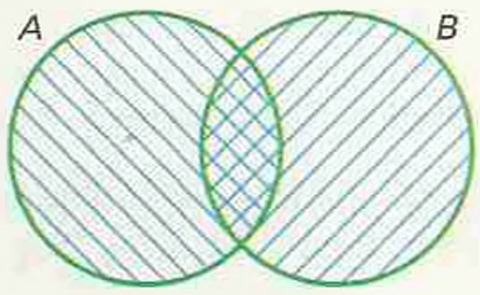
Vamos interpretar esse teorema através do seguinte diagrama:



Para contar os elementos de $A \cup B$, vamos inicialmente contar os elementos de A:

A região hachurada representa os elementos que já foram contados.

Agora, vamos contar os elementos de B:

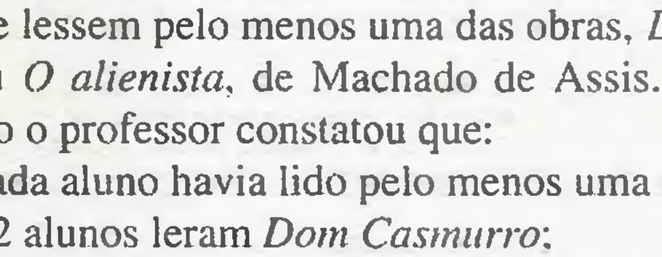


Note que os elementos da intersecção foram contados **duas vezes**. Para corrigir esse "erro" devemos subtrair dessa contagem o número de elementos da intersecção $A \cap B$, isto é:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Nota

Se os conjuntos A e B forem **disjuntos**, isto é, $A \cap B = \varnothing$:



então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 O professor de português pediu que os alunos de uma classe lessem pelo menos uma das obras, *Dom Casmurro* ou *O alienista*, de Machado de Assis. Após algum tempo o professor constatou que:
1º) cada aluno havia lido pelo menos uma das obras;
2º) 22 alunos leram *Dom Casmurro*;
3º) 18 alunos, *O alienista*;
4º) 10 alunos, as duas obras.
Quantos alunos há nessa classe?

BIBLIOTECA NACIONAL, RJ

Joaquim Maria Machado de Assis (1839-1908).

Resolução

Sendo:
- A o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro*, tem-se que $n(A) = 22$;
- B o conjunto dos alunos que leram *O alienista*, tem-se que $n(B) = 18$;
- $A \cap B$ o conjunto dos alunos que leram *Dom Casmurro* e *O alienista*, tem-se que $n(A \cap B) = 10$.

O conjunto $A \cup B$ é definido por

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

O número de alunos que leram *Dom Casmurro* ou *O alienista* é dado por:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$\therefore n(A \cup B) = 22 + 18 - 10 = 30$$

Logo, a classe é formada por 30 alunos.

R.8 Durante um exame médico, foram medidas as estaturas dos alunos de uma classe. Observou-se que dezenove alunos têm estatura até 1,70 m e dez alunos têm estatura maior do que 1,70 m. Quantos alunos havia na classe?

Resolução

Sejam:

- A o conjunto dos alunos de até 1,70 m de estatura;
- B o conjunto dos alunos com mais de 1,70 m de estatura.

Note que A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

O número de alunos da classe é o número de elementos do conjunto $A \cup B$. Como A e B são disjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \quad \therefore n(A \cup B) = 19 + 10 = 29$$

Logo, na classe havia 29 alunos.

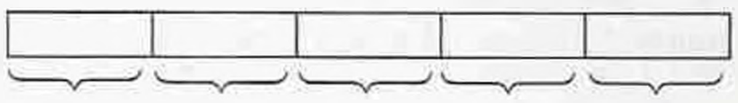
R.9 Quantos números naturais de quatro ou cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

Seja A o conjunto dos números naturais de quatro algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Calculando $n(A)$:

$$n(A) = \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \quad \therefore n(A) = 360$$

Seja B o conjunto dos números naturais de cinco algarismos distintos formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Calculando $n(B)$:



$$n(B) = \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$
$$\therefore n(B) = 720$$

O problema pede o número de elementos que pertencem a A **ou** a B, isto é, $n(A \cup B)$. Como A e B são disjuntos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$
$$\therefore n(A \cup B) = 360 + 720 = 1.080$$

Assim, podem ser formados 1.080 números.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 200 \leqslant x \leqslant 450\}$ e $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 100 \leqslant y \leqslant 300\}$, calcule $n(A \cup B)$.

B.12 (Mackenzie-SP) Os conjuntos M e N são finitos. Sabe-se que $n(M \cup N) = 38$, $n(M \cap N) = 12$ e $n(M) = 35$; então $n(N)$ vale:

a) 23 b) 15 c) 3 d) 26 e) 50

B.13 A e B são conjuntos disjuntos tais que $n(A \cup B) = 25$ e $n(A) = 10$. Calcule $n(B)$.

B.14 Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7 de modo que o algarismo das unidades seja menor que 4 ou maior que 5?

B.15 Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números naturais de três algarismos podem ser formados de modo que o algarismo das centenas seja ímpar ou seja múltiplo de 3? **Cuidado!** Esse enunciado não exige que o número seja formado por algarismos **distintos**.

B.16 (U. Gama Filho-RJ) Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos múltiplos positivos de 5, compostos de três algarismos distintos, podemos formar?

a) 32 b) 36 c) 40 d) 60 e) 72

B.17 Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, quantos múltiplos positivos de 5, compostos de três algarismos, podemos formar?

B.18 Encontre o total de números naturais pares, de quatro algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

B.19 Obtenha a quantidade de números naturais maiores que 34.000 e de cinco algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Exercícios complementares de C.11 a C.17

Bilhões e bilhões

Quanto valem 1 bilhão ou 1 trilhão, em dólares ou quilômetros? A resposta é mais vaga do que pode parecer. Se os números que estão inseridos na experiência cotidiana mensuram alguns padrões — a duração do ano, o preço de um livro, o custo de um carro —, os grandes números são enganosos. Que extensão são os 150 milhões de quilômetros que separam a Terra do Sol? E os 5 bilhões até Plutão, ou os 41 trilhões para a estrela mais próxima, o sistema triplo da Alfa do Centauro? São respostas bem distantes do senso comum.

(...)

Jogar com a sutileza dos números é uma provocação que o astrônomo norte-americano Carl Sagan — morto de câncer em dezembro de 1996 — faz em seu último livro *Bilhões e bilhões — Reflexões sobre a vida e a morte na virada do milênio*. A brincadeira é avaliar quanto tempo se leva para contar, por exemplo, de 0 a 1 milhão, à razão de um número por segundo. A resposta: 12 dias ininterruptos. E para se chegar a 1 bilhão? 32 anos. E a 1 trilhão? 32 mil anos. Quem quiser pode fazer cálculos envolvendo a população brasileira (160 milhões no ano de 1998), a dívida externa brasileira (US$ 150 bilhões no ano de 1998) e os gastos militares internacionais (US$ 1 trilhão).

(...)

Carl Sagan deixa inacabado o seu último trabalho, *O Estado de S. Paulo*, 4 jul. 1998.

Para ler o texto na íntegra consulte o site **Estadão na escola** (www.estadao-escola.com.br), clicando em "Pesquisa", "Temas transversais" e "Cultura" com as palavras-chaves "Sagan" e "bilhões".

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFCE) Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras seguidas de quatro algarismos. Considerando essas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas, iniciadas pelas letras BNP, nesta ordem, e cujo último algarismo seja ímpar.

LUIZ ANTÔNIO

C.2 (Vunesp) Os jornais noticiaram que, a partir de 1990, o código de placas dos automóveis particulares seria constituído por três letras seguidas de quatro algarismos, admitindo-se repetições. Usando-se 26 letras e dez algarismos, o maior número possível de placas desse tipo em que figuram pelo menos uma letra R e pelo menos uma letra C é:
a) $32 \cdot 35 \cdot 10^4$
b) $3 \cdot 2 \cdot 26 \cdot 10^4$
c) $3 \cdot 26 \cdot 10^4$
d) $325 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10^4$
e) $41 \cdot 6 \cdot 10^4$

C.3 Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$?

C.4 Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

C.5 Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

C.6 (UFRN) Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6.000.000, podem ser formados com os algarismos 0, 1, 3, 4, 6, 7 e 9, sem repeti-los?
a) 1.800 c) 5.400 e) 2.160
b) 720 d) 5.040

C.7 (Fuvest-SP) Quantos são os números inteiros positivos de cinco algarismos que não têm algarismos iguais em posições adjacentes?
a) 5^9 b) 9×8^4 c) 8×9^4 d) 8^5 e) 9^5

C.8 Quatro linhas de ônibus unem a cidade A à cidade B e três linhas unem a cidade B à cidade C. Um usuário vai viajar de A para C passando por B e vai voltar para A, passando novamente por B. De quantos modos diferentes esse usuário poderá escolher as linhas, se na volta ele não puder usar a linha que usou na ida?

C.9 (UFPE) Uma prova de matemática é constituída de 16 questões do tipo múltipla escolha, tendo cada questão 5 alternativas, das quais deve ser assinalada como resposta apenas uma. Respondendo ao acaso todas as questões, o número de maneiras diferentes que se pode preencher o cartão de resposta é:
a) 80 b) 16^5 c) 5^{32} d) 16^{10} e) 5^{16}

C.10 (Fuvest-SP) Sendo $A = \{2, 3, 5, 6, 9, 13\}$ e $B = \{a^b \mid a \in A, b \in A \text{ e } a \neq b\}$. O número de elementos de B que são números pares é:
a) 5 b) 8 c) 10 d) 12 e) 13

C.11 Qual é o total de números pares ou múltiplos de 5, com três algarismos distintos, que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

C.12 (UFBA) Para abrir um cofre eletrônico deve-se digitar uma seqüência formada por quatro algarismos distintos, sendo que o primeiro é o triplo do segundo. Uma pessoa que desconhece essa seqüência pretende abrir o cofre. O maior número possível de seqüências que ela deve digitar é:
a) 170 b) 240 c) 180 d) 280 e) 168

C.13 (FGV-SP) Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é:
a) 1.680 c) 720 e) 136
b) 1.344 d) 224

C.14 (UFCE) A quantidade de números inteiros compreendidos entre 30.000 e 65.000 que podemos formar utilizando somente os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7, de modo que não figurem algarismos repetidos, é:
a) 48 b) 66 c) 96 d) 120

C.15 Escrevendo em ordem crescente todos os números naturais, de cinco algarismos distintos, formados por 1, 2, 3, 4 e 5, qual a ordem (número da posição) do número 32.415?

C.16 (Enem) Imagine uma eleição envolvendo 3 candidatos A, B, C e 33 eleitores (votantes). Cada eleitor vota fazendo uma ordenação dos três candidatos. Os resultados são os seguintes:

Ordenação	Nº de votantes
$A\ B\ C$	10
$A\ C\ B$	04
$B\ A\ C$	02
$B\ C\ A$	07
$C\ A\ B$	03
$C\ B\ A$	07
Total de votantes	**33**

A primeira linha do quadro descreve que 10 eleitores escolheram A em 1º lugar, B em 2º lugar, C em 3º lugar e assim por diante.
Considere o sistema de eleição no qual cada candidato ganha 3 pontos quando é escolhido em 1º lugar, 2 pontos quando é escolhido em 2º lugar e 1 ponto se é escolhido em 3º lugar. O candidato que acumular mais pontos é eleito. Nesse caso:
a) A é eleito com 66 pontos.
b) A é eleito com 68 pontos.
c) B é eleito com 68 pontos.
d) B é eleito com 70 pontos.
e) C é eleito com 68 pontos.

C.17 (Enem) Vinte anos depois da formatura, cinco colegas de turma decidem organizar uma confraternização. Para marcar o dia e o local da confraternização, precisam comunicar-se por telefone. Cada um conhece o telefone de alguns colegas e desconhece o de outros. No quadro abaixo, o número **1** indica que o colega da linha correspondente conhece o telefone do colega da coluna correspondente; o número **0** indica que o colega da linha não conhece o telefone do colega da coluna. Exemplo: Beto sabe o telefone do Dino que não conhece o telefone do Aldo.

	Aldo	Beto	Carlos	Dino	Enio
Aldo	1	1	0	1	0
Beto	0	1	0	1	0
Carlos	1	0	1	1	0
Dino	0	0	0	1	1
Enio	1	1	1	1	1

O número **mínimo** de telefonemas que Aldo deve fazer para se comunicar com Carlos é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Capítulo 43

CLASSIFICAÇÃO DOS AGRUPAMENTOS E MÉTODOS DE CONTAGEM

1. ARRANJO SIMPLES

Com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, formemos todas as seqüências possíveis de três elementos distintos:

(a, b, c)	(a, b, d)	(a, c, d)	(b, c, d)
(a, c, b)	(a, d, b)	(a, d, c)	(b, d, c)
(b, a, c)	(b, a, d)	(c, a, d)	(c, b, d)
(b, c, a)	(b, d, a)	(c, d, a)	(c, d, b)
(c, a, b)	(d, a, b)	(d, a, c)	(d, c, b)
(c, b, a)	(d, b, a)	(d, c, a)	(d, b, c)

Tais seqüências são chamadas de "arranjos simples dos quatro elementos de I tomados três a três". Isto é, um arranjo simples de três elementos de I é qualquer **seqüência** formada por três elementos distintos de I. Observe que dois arranjos simples quaisquer se diferenciam ou pela **ordem** dos elementos ou pela **natureza** dos elementos que os compõem. Por exemplo:

- $(a, b, c) \neq (b, c, a)$ **(diferem pela ordem dos elementos)**
- $(a, b, c) \neq (a, b, d)$ **(diferem pela natureza dos elementos)**

O número de arranjos simples de quatro elementos distintos tomados três a três é indicado pelo símbolo $A_{4,3}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Devemos distribuir os quatro elementos do conjunto I em três casas, sem repetição:

1º elemento	2º elemento	3º elemento
4	3	2

$A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

$\therefore A_{4,3} = 24$

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não-nulo tal que $p \leqslant n$. Chama-se **arranjo simples de p elementos de I** toda seqüência formada por p elementos de I distintos.

Exemplo

Os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{5, 6, 7, 8\}$ tomados dois a dois são:

(5, 6)	(5, 8)	(6, 8)
(6, 5)	(8, 5)	(8, 6)
(5, 7)	(6, 7)	(7, 8)
(7, 5)	(7, 6)	(8, 7)

O número de arranjos simples de quatro elementos tomados dois a dois é indicado por $A_{4,2}$ e pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Devemos distribuir os quatro elementos de I em duas casas, sem repetição:

1º elemento	2º elemento
4	3

$A_{4,2} = 4 \cdot 3 \quad \therefore A_{4,2} = 12$

Cálculo do número de arranjos simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p um número natural não-nulo, $p \leqslant n$. O número de arranjos simples dos n elementos de I tomados p a p, isto é, $A_{n,p}$, pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem:

1º elemento	2º elemento	3º elemento	4º elemento	...	pº elemento
n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	$n-(p-1)$

Os números de possibilidades

Assim, temos que:

$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot ... \cdot [n-(p-1)]$ ou

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot ... \cdot (n-p+1)$$

Daqui por diante, podemos utilizar essa fórmula para o cálculo de $A_{n,p}$; porém, se você preferir aplicar o princípio fundamental em vez da fórmula, achamos até melhor.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular $A_{6,4}$.

Resolução

$$A_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$$

R.2 Para que valores naturais de n existe o número $A_{n,3}$?

Resolução

O símbolo $A_{n,3}$ indica o número de seqüências de **três elementos distintos** escolhidos dentre n elementos. Logo, o menor n natural possível é 3; se n fosse menor que 3, não poderíamos formar uma seqüência com três elementos **distintos**. Logo, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Descreva todos os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$ tomados dois a dois.

B.2 Apresente todos os arranjos simples dos elementos do conjunto $I = \{2, 4, 6, 8\}$ tomados três a três.

B.3 Dentre os agrupamentos seguintes, quais são arranjos simples?

a) Com os elementos do conjunto:

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

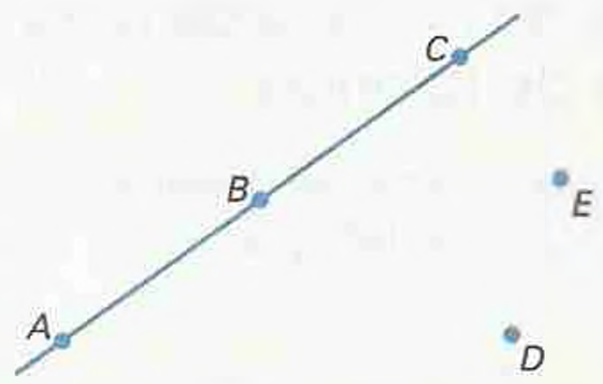
formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa um **subconjunto** de I com três elementos.

b) Com os elementos do conjunto:

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento representa uma **seqüência** formada por três elementos distintos de I.

c) Com os pontos A, B, C, D e E da figura



formam-se agrupamentos, sendo que cada agrupamento determina um triângulo.

d) Com as letras da palavra "caderno", formam-se agrupamentos de modo que cada agrupamento é um anagrama dessa palavra.

Nota

Chama-se **anagrama** de uma palavra a própria palavra ou qualquer outra que se obtém trocando-se a ordem de suas letras. Alguns **anagramas** da palavra CADERNO são: CADERNO, DECARNO, NODECAR, etc.

B.4 Calcule:

a) $A_{8,3}$ b) $A_{5,4}$ c) $A_{6,6}$

B.5 Determine o valor de:

a) $A_{4,2}$ b) $A_{5,3}$ c) $A_{4,1}$

B.6 Para que valores naturais de n existe a expressão $A_{n,6}$?

B.7 Obtenha valores naturais de n de modo que exista a expressão $\frac{A_{n,4}}{A_{n,2}}$.

B.8 Sendo n um número natural e $n \geqslant 4$, calcule o valor da expressão $E = \frac{A_{n,4}}{A_{n,2}} - n^2 + 5n$.

B.9 Num teatro, uma fila possui exatamente vinte cadeiras numeradas. O número de maneiras distintas de dez pessoas se sentarem nessa fila é:

a) $A_{20,20}$ c) $A_{20,10}$ e) $A_{10,1}$
b) $A_{10,10}$ d) $A_{10,20}$

B.10 Dez atletas participam de uma corrida de atletismo. Serão premiados apenas os três primeiros colocados, não podendo haver empate. O número de maneiras de serem distribuídos os prêmios é:

a) $A_{10,3}$ c) $A_{3,3}$ e) $A_{3,1}$
b) $A_{10,10}$ d) $A_{3,10}$

B.11 A quantidade de números naturais de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos do conjunto $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ é:

a) $A_{9,9}$ c) $A_{5,5}$ e) $A_{9,5}$
b) $A_{5,1}$ d) $A_{9,1}$

Exercícios complementares de C.1 a C.5

Fatorial

Certos cálculos da análise combinatória são tediosos e desanimadores, como, por exemplo:

$$A_{12,12} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para facilitar as operações com expressões desse tipo, adotamos o símbolo $n!$ (lê-se "fatorial de n") para indicar o produto dos números naturais consecutivos n, $(n - 1)$, $(n - 2)$, ..., 1, com $n \geqslant 2$. Assim, temos:

$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Essa nova notação nos auxilia em problemas que envolvem cálculos trabalhosos, permitindo-nos apresentar resoluções de maneira abreviada.

Definição

Seja n um número natural, $n \geqslant 2$. Define-se o fatorial de n, que indicamos por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos:

n, $(n - 1)$, $(n - 2)$, ..., 1, isto é:

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Exemplos

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$ c) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
b) $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ d) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Propriedade fundamental dos fatoriais

Observando a igualdade $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, percebemos que $7! = 7 \cdot 6!$.

Podemos generalizar esse resultado através da seguinte propriedade:

$$n! = n(n - 1)! \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$$

Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental dos fatoriais**.

Exemplos

a) $9! = 9 \cdot 8!$ c) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$
b) $10! = 10 \cdot 9!$ d) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$

Extensão da definição de fatorial

Para que não tenhamos exceções nas aplicações de fórmulas que vamos estudar mais adiante, é conveniente definirmos **1!** e **0!**.

Vimos que a propriedade:

$$n! = n(n-1)!$$

é válida para todo n, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$. E se fizermos $n = 2$? Vejamos o que acontece:

$$2! = 2(2-1)! \ \therefore 2! = 2 \cdot 1!$$
$$\therefore 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \ \therefore 1 = 1!$$

Assim sendo, para que a propriedade fundamental valha também para $n = 2$, definimos:

$$1! = 1$$

Vamos ousar um pouco mais e atribuir o valor 1 para a variável n na igualdade $n! = n(n-1)!$:

$$1! = 1(1-1)! \ \therefore 1! = 1 \cdot 0! \ \therefore 1! = 0!$$

Assim sendo, para estendermos a propriedade fundamental para $n = 1$, definimos:

$$0! = 1$$

Com essas duas novas definições, $1! = 1$ e $0! = 1$, temos que:

$$n! = n(n-1)! \quad \forall n, n \in \mathbb{N}^*$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.3 Calcular:

a) $6!$ b) $3! + 2!$ c) $\frac{4!}{0!}$ d) $1! + 0!$

Resolução

a) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $3! + 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$

c) $\frac{4!}{0!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$

d) $1! + 0! = 1 + 1 = 2$

R.4 Simplificar as frações:

a) $\frac{8!}{7!}$ b) $\frac{8!}{6!}$ c) $\frac{3!}{5!}$ d) $\frac{7! \cdot 9!}{8! \cdot 5!}$

Resolução

a) $\frac{8!}{7!} = \frac{8 \cdot 7!}{7!} = 8$

b) $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 56$

c) $\frac{3!}{5!} = \frac{3!}{5 \cdot 4 \cdot 3!} = \frac{1}{20}$

d) $\frac{7! \cdot 9!}{8! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5! \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 5!} = 378$

R.5 Resolver a equação $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$.

Resolução

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = 20$$

$$\therefore n^2 + n - 20 = 0 \ \therefore \ n = 4 \text{ ou } n = -5$$

Verificação

Lembramos que só se define fatorial para número natural. Assim sendo, devemos verificar se, para esses valores de n, existem os fatoriais apresentados na equação.

Para $n = 4$, temos $\frac{(4+1)!}{(4-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$; logo, 4 é raiz da equação.

Para $n = -5$, temos:

$$\frac{(-5+1)!}{(-5-1)!} = 20 \Rightarrow \frac{(-4)!}{(-6)!} = 20 \ \textbf{(Absurdo!)}$$

Como não existem os fatoriais $(-4)!$ e $(-6)!$, temos que -5 não é raiz da equação.

Logo, $S = \{4\}$.

Cálculo do número de arranjos simples através de fatoriais

Vimos que o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Com o auxílio dos fatoriais podemos apresentar essa fórmula de uma maneira mais simples. Para entender a transformação que será feita, vejamos antes um caso particular:

Na igualdade $A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5$, multiplicando e ao mesmo tempo dividindo o segundo membro por 4!, teremos

$$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7!}{4!}$$

Assim sendo, o número $A_{7,3}$ pode ser expresso através de fatoriais por $\frac{7!}{4!}$.

Generalização

Consideremos a igualdade:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)$$

Multiplicando e ao mesmo tempo dividindo o segundo membro dessa igualdade por $(n-p)!$, temos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$\therefore \quad A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Essa é a fórmula que calcula $A_{n,p}$ através de fatoriais.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Calcular, usando a fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$:

a) $A_{6,4}$ b) $A_{7,3}$ c) $A_{5,5}$

Resolução

a) $A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 360$

b) $A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$

c) $A_{5,5} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120$

Nota

Estende-se a fórmula $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ para $n = 0$ ou $p = 0$.

Exemplos

a) $A_{4,0} = \frac{4!}{(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1$

b) $A_{0,0} = \frac{0!}{(0-0)!} = \frac{0!}{0!} = \frac{1}{1} = 1$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.12 Calcule:

a) $7!$ c) $4! - 2!$

b) $3! \cdot 2!$ d) $\frac{0!}{3!}$

B.13 Assinale V ou F:

a) $3! + 2! = 5!$

b) $3! \cdot 2! = 6!$

c) $4! + 4! = 2 \cdot 4!$

d) $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

e) $n! = n(n-1)(n-2)!$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

f) $n! + n! = (2n)!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

g) $n! + n! = 2 \cdot n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

h) $n! - n! = 0!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

B.14 Simplifique as frações:

a) $\frac{6!}{3!}$ f) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$

b) $\frac{4!}{6!}$ g) $\frac{(n+2)!}{(n+3)!}$

c) $\frac{5!8!}{4!7!}$ h) $\frac{(n-5)!}{(n-7)!}$

d) $\frac{n!}{(n-1)!}$ i) $\frac{(n-5)!}{(n-3)!}$

e) $\frac{(n-3)!}{n!}$

B.15 Resolva a equação $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = 12$.

B.16 (U. Católica de Salvador-BA) A fração $\frac{(n+1)! + n!}{n!}$ é igual a:

a) n c) $n + 2$ e) $\frac{n+2}{n}$

b) $n + 1$ d) $\frac{n+1}{n}$

Sugestão. Escreva o numerador sob a forma $(n + 1) \cdot n! + n!$ e fatore-o.

B.17 Determine o conjunto dos valores de n, tais que $\frac{n! + (n+1)!}{(n-1)!} = 15$.

B.18 (FEI-SP) Se $(n + 4)! + (n + 3)! = 15(n + 2)!$, então:

a) $n = 4$ c) $n = 2$ e) $n = 0$

b) $n = 3$ d) $n = 1$

B.19 (UFPE) A expressão $A_{5,2} + A_{3,3} + A_{9,0}$ é igual a:

a) 27 c) 12 e) 29

b) 26 d) 11

B.20 Resolva a equação $A_{n,2} = 20$.

B.21 Obtenha o conjunto solução da equação $\frac{A_{n,3}}{A_{n,4}} = \frac{1}{5}$.

Exercícios complementares de C.6 a C.12

2. PERMUTAÇÃO SIMPLES

Consideremos o conjunto $I = \{a, b, c\}$. Os arranjos simples dos três elementos de I tomados três a três são:

(a, b, c)

(a, c, b)

(b, a, c)

(b, c, a)

(c, a, b)

(c, b, a)

Cada um desses arranjos é chamado de **permutação simples** dos elementos de I. Isto é, uma permutação simples dos elementos de I é qualquer seqüência de elementos distintos formada por todos os elementos de I. Observe que duas dessas permutações se diferenciam apenas pela ordem dos elementos.

Exemplo

$(a, b, c) \neq (b, a, c)$ **(diferem pela ordem dos elementos)**

Definição

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos. Chama-se **permutação simples dos n elementos de I** todo **arranjo simples** desses n elementos tomados n a n.

Exemplos

a) As permutações simples dos três elementos do conjunto $I = \{1, 2, 3\}$ são:

(1, 2, 3) (2, 1, 3) (3, 1, 2)

(1, 3, 2) (2, 3, 1) (3, 2, 1)

Isto é, são todos os arranjos simples dos três elementos de I tomados três a três.

b) Quantas permutações simples podemos formar com os elementos do conjunto $I = \{a, b, c, d\}$?
O número de permutações simples de quatro elementos distintos, que indicamos por P_4, é igual ao número de arranjos simples desses quatro elementos tomados quatro a quatro. Isto é:

$$P_4 = A_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$$

Algumas dessas permutações são:

(a, b, c, d)

(a, b, d, c)

(a, c, b, d)

$\vdots$

Cálculo do número de permutações simples de *n* elementos distintos

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações simples dos n elementos de I, que indicamos por P_n, é igual ao número de arranjos simples desses n elementos tomados n a n. Isto é:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Assim, temos que:

$$P_n = n!$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 De quantas maneiras diferentes cinco pessoas podem formar uma fila indiana?

Resolução

O número de maneiras é igual ao número de permutações simples desses cinco elementos, isto é:

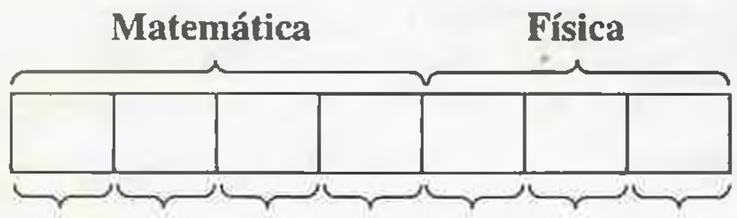
$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Logo, a fila pode ser formada de 120 maneiras diferentes.

R.8 De quantas maneiras diferentes podemos dispor, numa mesma prateleira de uma estante, quatro livros de matemática e três livros de física, de modo que livros de mesma matéria permaneçam juntos?

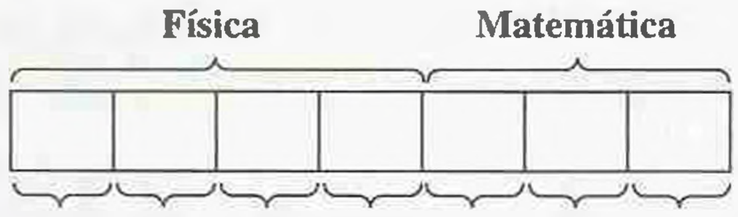
Resolução

Podemos dispor os livros de matemática antes dos de física **ou** os de física antes dos de matemática. Isto é:



$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_4 \cdot P_3 = 4!3!$

ou



$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_3 \cdot P_4 = 3!4!$

Temos, então, como resposta $4!3! + 3!4! = 288$.

ou

Assim, os livros podem ser dispostos na prateleira de 288 modos diferentes.

R.9 Com a palavra MARTELO:

a) quantos anagramas podemos formar?

b) quantos anagramas começam por M?

c) quantos anagramas começam por M e terminam por O?

d) quantos anagramas começam por vogal?

e) quantos anagramas terminam por consoante?

f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

g) quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?

h) quantos anagramas apresentam as letras M, A e R juntas e nessa ordem?

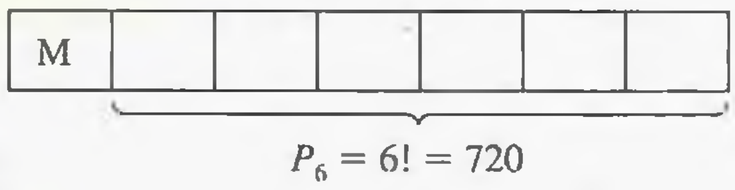
i) quantos anagramas apresentam as letras M, A e R juntas?

Resolução

a) Um anagrama da palavra MARTELO é a própria palavra ou qualquer outra que se obtém trocando a ordem de suas letras. Assim, o número de anagramas da palavra MARTELO é igual ao número de permutações simples de sete letras distintas, isto é:

$$P_7 = 7! = 5.040$$

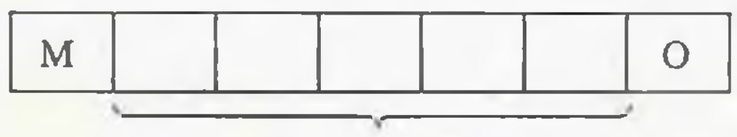
b) Fixando-se a letra M na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições posteriores:



$P_6 = 6! = 720$

Logo, há 720 anagramas que começam por M.

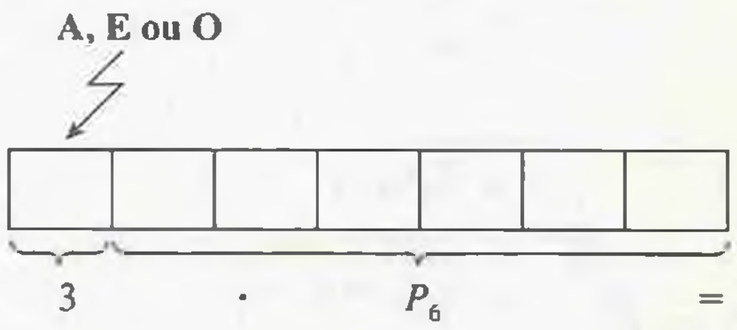
c) Fixando-se as letras M e O na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas cinco posições intermediárias:



$P_5 = 5! = 120$

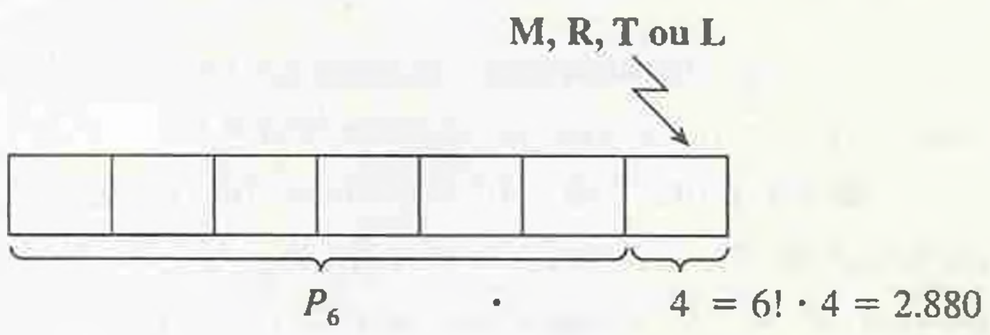
Portanto, há 120 anagramas que começam por M e terminam por O.

d) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição: A, E ou O. Para cada vogal fixada na primeira posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas posições posteriores:



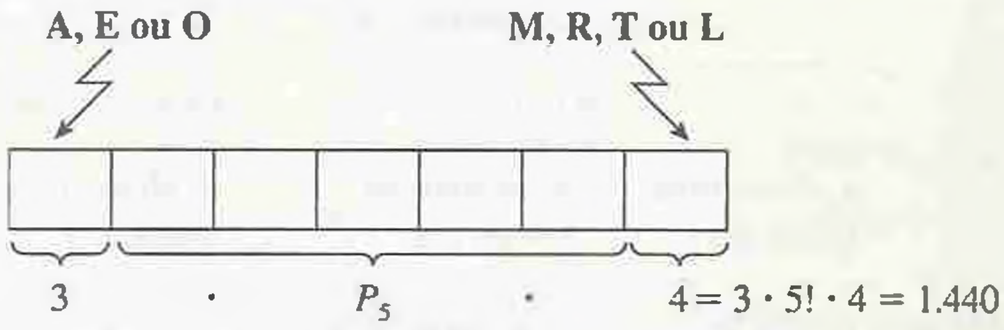
Assim, há 2.160 anagramas que começam por vogal.

e) Há quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima) posição: M, R, T ou L. Para cada consoante fixada na sétima posição, sobram seis letras para serem distribuídas nas seis posições anteriores:



Assim, há 2.880 anagramas que terminam por consoante.

f) Há três possibilidades para o preenchimento da primeira posição e quatro possibilidades para o preenchimento da última (sétima). Fixadas uma vogal e uma consoante na primeira e na sétima posição, respectivamente, sobram cinco letras para serem distribuídas nas posições intermediárias:



Há, portanto, 1.440 anagramas que começam por vogal e terminam por consoante.

g) Sejam A e B conjuntos de anagramas da palavra MARTELO, tais que:

A = {Anagramas que começam por vogal};
B = {Anagramas que terminam por consoante};
$A \cap B$ = {Anagramas que começam por vogal **e** terminam por consoante};
$A \cup B$ = {Anagramas que começam por vogal **ou** terminam por consoante}.

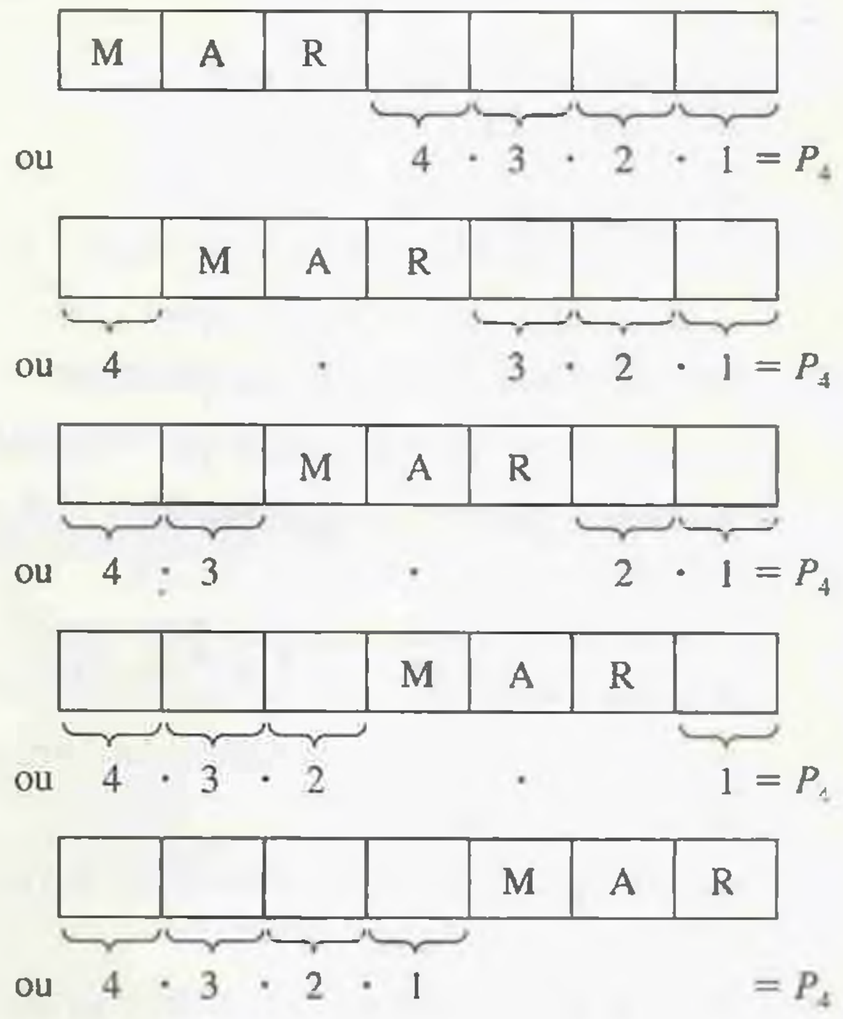
Lembremos que $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Nos itens (d), (e) e (f) já calculamos $n(A)$, $n(B)$ e $n(A \cap B)$ e obtivemos:

$n(A) = 2.160$; $n(B) = 2.880$; $n(A \cap B) = 1.440$

Logo, $n(A \cup B) = 2.160 + 2.880 - 1.440 = 3.600$.
Temos então que 3.600 anagramas começam por vogal ou terminam por consoante.

h) Vamos resolver este item de dois modos diferentes.

Primeiro modo
As letras M, A e R podem ocupar, respectivamente, as seguintes posições: primeira, segunda e terceira; segunda, terceira e quarta; terceira, quarta e quinta; quarta, quinta e sexta; quinta, sexta e sétima. Analisemos cada caso:



Assim, temos:
$P_4 + P_4 + P_4 + P_4 + P_4 = 5P_4 = 5 \cdot 4! = 5! = 120$
Ou seja, 120 anagramas apresentam as letras M, A e R juntas e nessa ordem.

Segundo modo
Observando o primeiro modo, percebemos que o bloco MAR atuou como um único elemento nas permutações. Assim sendo, podemos resolver esse problema calculando o número de permutações dos cinco elementos, MAR, T, E, L e O, isto é, considerando o bloco MAR como um único elemento.
Temos assim $P_5 = 5! = 120$.

i) Nesse caso, um bloco composto pelas letras M, A e R pode ter $P_3 = 3! = 6$ formas diferentes: MAR, MRA, ARM, AMR, RAM e RMA.
Para cada um desses seis blocos podemos formar $P_5 = 5! = 120$ anagramas, conforme vimos no item (h). Logo, com os seis blocos podemos formar $6 \cdot 120 = 720$ anagramas. Ou seja, o número de anagramas que apresentam as letras M, A e R juntas é $P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 120 = 720$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.22 (Cesgranrio) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes do município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visistas. De quantas formas diferentes esse fiscal pode estabelecer a ordem de visita mensal a essas empresas?

a) 180 c) 100 e) 24
b) 120 d) 48

B.23 De quantos modos podemos dispor cinco meninas e quatro meninos em fila indiana de modo que crianças de mesmo sexo não fiquem juntas?

B.24 Quantos números podemos obter permutando apenas os algarismos pares do número 32.456 e mantendo os algarismos ímpares em suas respectivas posições?

B.25 Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 de modo que os algarismos ímpares permaneçam sempre juntos?

B.26 Com a palavra EDITORA:

a) quantos anagramas podemos formar?
b) quantos anagramas começam pela letra T?
c) quantos anagramas começam pela sílaba TO?
d) quantos anagramas começam por vogal?
e) quantos anagramas terminam por consoante?
f) quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?
g) quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?
h) quantos anagramas apresentam as letras E, D e T juntas e nessa ordem?
i) quantos anagramas apresentam as letras E, D e T juntas?
j) quantos anagramas não apresentam as letras E, D e T juntas?

B.27 (PUC-SP) Uma palavra é formada por n letras distintas, sendo B uma delas. O número de anagramas dessa palavra que não começam por B é:

a) $n!$
b) $(n + 1)!$
c) $n! - (n - 1)!$
d) $(n - 1)!$
e) $n + 1$

B.28 (UNEB) Num grupo de 5 pessoas, duas são irmãs. O número de maneiras distintas que elas podem ficar em fila, de maneira que as duas irmãs fiquem sempre juntas, é igual a:

a) 24
b) 48
c) 120
d) 240
e) 420

Exercícios complementares de C.13 a C.18

3. PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Vimos que o número de permutações de n elementos distintos é dado por:

$$P_n = n!$$

Neste item, vamos aprender a calcular o número de permutações com elementos repetidos. Para entender esse cálculo, observe o problema a seguir.

Qual é o número de anagramas da palavra **OSSOS**?

Se as 5 letras dessa palavra fossem distintas entre si, teríamos 5! anagramas. Porém, ao permutar letras iguais, a palavra não se altera; por isso, concluímos que o número de anagramas é menor que 5!

Para calcular esse número de anagramas, vamos colocar índices nas letras, considerando-as como elementos diferentes, isto é:

$$O_1S_1S_2O_2S_3$$

Em cada seqüência dos elementos O_1, S_1, S_2, O_2, S_3, se permutarmos S_1, S_2 e S_3, entre si, e O_1 e O_2, entre si, obteremos $3! \times 2!$ seqüências diferentes. Por exemplo:

$S_1S_2O_1O_2S_3$ →
- $S_1S_2O_1O_2S_3$
- $S_1S_3O_1O_2S_2$
- $S_2S_1O_1O_2S_3$
- $S_2S_3O_1O_2S_1$
- $S_3S_1O_1O_2S_2$
- $S_3S_2O_1O_2S_1$
- $S_1S_2O_2O_1S_3$
- $S_1S_3O_2O_1S_2$
- $S_2S_3O_2O_1S_1$
- $S_2S_1O_2O_1S_3$
- $S_3S_1O_2O_1S_2$
- $S_3S_2O_2O_1S_1$

} $3! \cdot 2! = 12$

Porém, se eliminarmos os índices nessas 12 seqüências, teremos o mesmo anagrama **SSOOS**.

Analogamente, se eliminarmos os índices nas 5! seqüências dos elementos O_1, S_1, S_2, O_2, S_3, obteremos grupos de $3! \cdot 2!$ anagramas iguais. O número de grupos assim obtidos é exatamente o número de anagramas distintos da palavra **OSSOS**. Esse número é:

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 20$$

ou seja, há 20 anagramas distintos da palavra **OSSOS**.

Podemos generalizar esse raciocínio, considerando os n elementos:

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_1, \ldots, a_1}_{n_1 \text{ elementos iguais a } a_1}, \underbrace{a_2, a_2, \ldots, a_2}_{n_2 \text{ elementos iguais a } a_2}, \ldots, \underbrace{a_k, a_k, \ldots, a_k}_{n_k \text{ elementos iguais a } a_k}}^{n \text{ elementos}}$$

tal que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ são distintos entre si. O número de permutações desses n elementos, que indicaremos por $P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)}$, é dado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.10 Determinar o número de anagramas da palavra GARRAFA.

Resolução

A palavra apresenta um total de sete letras, com três letras A, duas letras R, uma letra G e uma letra F.

Assim, temos $P_7^{(3, 2, 1, 1)} = \frac{7!}{3!2!1!1!}$.

Para simplificar a notação, indicamos esse número simplesmente por $P_7^{(3, 2)} = \frac{7!}{3!2!} = 420$.

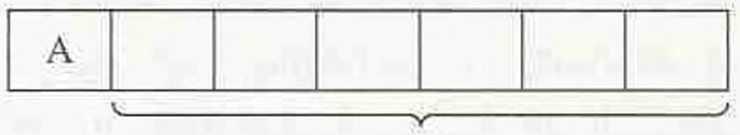
Isto é, não indicamos nos parênteses as letras que comparecem uma única vez na palavra.

Portanto, a palavra GARRAFA possui 420 anagramas.

R.11 Determinar o número de anagramas da palavra GARRAFA que começam pela letra A.

Resolução

Fixando uma letra A na primeira posição, sobram as letras G, R, R, A, F e A, que devem ser distribuídas nas seis posições posteriores:



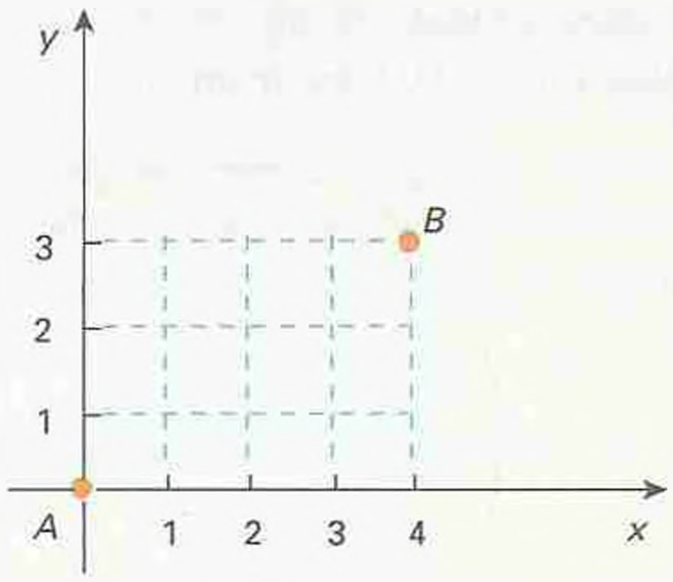
$$P_6^{(2,2)} = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

Nota

Uma dúvida muito comum é "devemos ou não multiplicar o resultado 180 por 3?", pois há três letras *A*. A resposta é **não**. Porque, se substituirmos o A da primeira posição por outro A da palavra. obteremos os mesmos anagramas.

Logo, há 180 anagramas que começam por A.

R.12 Na figura abaixo, quantos caminhos diferentes podem ser percorridos do ponto *A* ao ponto *B*, deslocando-se uma unidade de cada vez para cima ou para a direita?



Resolução

Para nos deslocarmos de *A* para *B*, nas condições do problema. devemos percorrer 3 unidades para cima e 4 unidades para a direita.

Indiquemos por *d* cada unidade para a direita e por *c* cada unidade para cima.

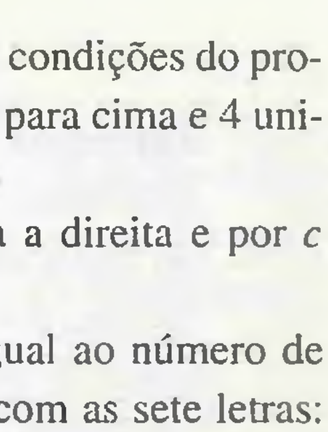
O número possível de caminhos é igual ao número de seqüências que podem ser formadas com as sete letras: *d*, *d*, *d*, *d*, *c*, *c*, *c*. Isto é, $P_7^{(4,3)} = \frac{7!}{4!3!} = 35$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.29 Determine o número de anagramas da palavra VIOLINO.

B.30 Qual é o número de anagramas da palavra BANANA?

B.31 As embalagens dos produtos vendidos por uma empresa apresentam uma seqüência formada por barras verticais: quatro de largura 1,5 mm; três de largura 0,5 mm: e duas de largura 0.25 mm, como no exemplo ao lado.



Cada seqüência indica o preço de um produto. Quantos preços diferentes podem ser indicados por essas nove barras?

B.32 Obtenha o número de anagramas da palavra TAMPA.

B.33 Quantos anagramas da palavra BARRAR começam por R?

B.34 Encontre o número de anagramas da palavra DEZENA que começam por vogal.

B.35 Ache o total de anagramas da palavra PAPAGAIO que terminam por vogal.

B.36 Quantos anagramas da palavra RETRATAR começam e terminam por vogal?

Exercícios complementares de C.19 a C.24

4. COMBINAÇÃO SIMPLES

Dado o conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, formemos todos os subconjuntos de *I* com três elementos:

$\{a, b, c\}$
$\{a, b, d\}$
$\{a, c, d\}$
$\{b, c, d\}$

Tais subconjuntos são chamados de **combinações simples dos quatro elementos de *I* tomados três a três.** Ou seja, uma combinação simples de três elementos de *I* é qualquer subconjunto de *I* formado por três elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos e **não** pela ordem de apresentação desses elementos.

Exemplos

a) $\{a, b, c\} \neq \{a, b, d\}$ **(diferem pela natureza dos elementos)**

b) $\{b, c, d\} = \{c, b, d\}$ **(a ordem dos elementos não altera o conjunto)**

Definição

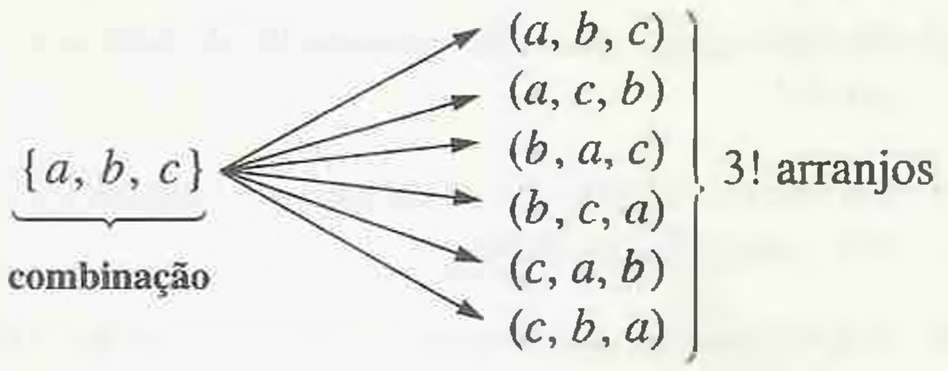
Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto formado por *n* elementos e seja *p*, $p \in \mathbb{N}$ e $p \leq n$. Chama-se **combinação simples de *p* elementos de *I*** todo subconjunto de *I* formado por *p* elementos.

Cálculo do número de combinações simples de *n* elementos distintos tomados *p* a *p*

Para efetuar esse cálculo, vamos relacionar o número de combinações simples com o número de arranjos simples de *n* elementos tomados *p* a *p*.

Voltemos ao exemplo introdutório desse assunto. As combinações simples dos elementos de $I = \{a, b, c, d\}$ tomados três a três são $\{a, b, c\}$; $\{a, b, d\}$; $\{a, c, d\}$; $\{b, c, d\}$. Indicando por $C_{4,3}$ o número de combinações simples de 4 elementos tomados três a três, temos $C_{4,3} = 4$. Cada uma dessas combinações gera 3! arranjos simples dos quatro elementos *a*, *b*, *c*, *d* tomados três a três, por exemplo.

Observe os arranjos gerados pela combinação $\{a, b, c\}$:



Assim, multiplicando por 3! o número $C_{4,3}$, obtém-se o número $A_{4,3}$, isto é:

$$C_{4,3} \times 3! = A_{4,3}$$

Generalizando esse raciocínio para os números naturais n e p, com $n \geqslant p$, obtém-se a fórmula para o cálculo de $C_{n,p}$. Observe:

$$C_{n,p} \times p! = A_{n,p}$$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$\therefore \quad C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Calcular:

a) $C_{6,4}$ b) $C_{7,3}$ c) $C_{5,5}$ d) $C_{5,0}$

Resolução

Aplicando a fórmula $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, temos:

a) $C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} = 15$

b) $C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \cancel{4!}} = 35$

c) $C_{5,5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!0!} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 1} = 1$

d) $C_{5,0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{0!5!} = \frac{\cancel{5!}}{1 \cdot \cancel{5!}} = 1$

R.14 Para que valores de n existe o número $C_{n,3}$?

Resolução

Existe tal número para qualquer n, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$.

R.15 Resolver a equação $C_{n,2} = 10$.

Resolução

Condição de existência $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$.

$$C_{n,2} = 10 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 10$$

$$\therefore \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1\cancel{(n-2)!}} = 10$$

$$\therefore n^2 - n = 20 \quad \therefore n^2 - n - 20 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos $n = 5$ ou $n = -4$. **(não convém)**

Logo, $S = \{5\}$.

Critério para diferenciar arranjo de combinação

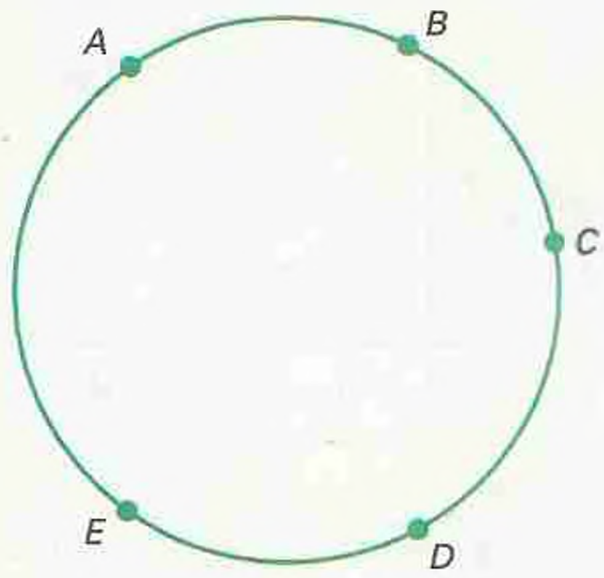
Quando tentamos resolver um problema de análise combinatória, deparamos com a seguinte questão: os agrupamentos mencionados no problema são arranjos ou combinações? Para eliminar essa dúvida, vamos agir da seguinte maneira: construímos um dos agrupamentos sugeridos pelo problema e, a seguir, mudamos a ordem de apresentação dos elementos desse agrupamento:

I. Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **diferente** do original, então esse agrupamento é um **arranjo**.

II. Se com essa mudança na ordem dos elementos obtivermos um agrupamento **igual** ao original, então esse agrupamento é uma **combinação**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.16 Quantos triângulos ficam determinados pelos pontos distintos A, B, C, D, E da circunferência abaixo?



Resolução

Um triângulo fica determinado por três pontos (vértices do triângulo) não-colineares (não-pertencentes a uma mesma reta). Como não existem três pontos colineares dentre os pontos A, B, C, D, E, qualquer agrupamento de três pontos distintos determina um triângulo.

Agora, a dúvida: um agrupamento de três pontos para determinar um triângulo é um arranjo ou uma combinação?

Vamos aplicar o **critério diferenciador** entre arranjo e combinação.

Formemos um agrupamento de três pontos distintos e, a seguir, mudemos a ordem de apresentação de seus elementos:

Triângulo ABC = Triângulo BAC

Como a mudança na ordem das letras **não** altera o triângulo, temos que esses agrupamentos são combinações.

Logo, o número de triângulos é dado por $C_{5,3}$, isto é:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3!}{3! \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10$$

R.17 Uma comissão de três membros deve ser escolhida dentre sete pessoas. De quantos modos diferentes se pode escolher a comissão, sabendo que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?

Resolução

Como a ordem dos elementos componentes **não** altera a comissão, temos que uma comissão é uma **combinação**. Logo, o número de comissões é:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

R.18 Uma comissão de quatro homens e três mulheres deve ser escolhida dentre seis homens e cinco mulheres. De quantos modos diferentes pode-se escolher a comissão, sabendo-se que os membros dessa comissão terão funções idênticas?

Resolução

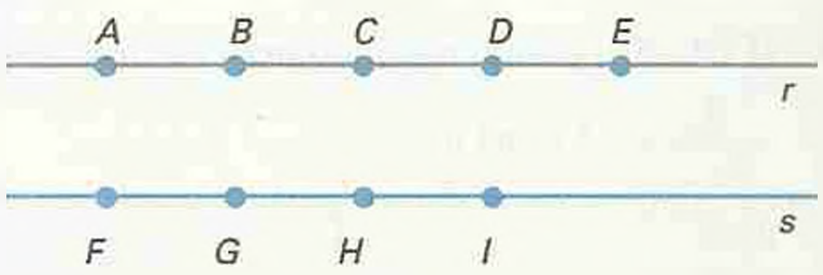
Devemos escolher quatro homens dentre seis e três mulheres dentre cinco. Pelo princípio fundamental de contagem, isso pode ser feito de $C_{6,4} \cdot C_{5,3}$ modos diferentes, isto é:

$$C_{6,4} \cdot C_{5,3} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} =$$

$$= \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{\overset{3}{6} \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{\overset{2}{5} \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 150$$

R.19 Quantos triângulos ficam determinados por nove pontos distintos, sendo que cinco deles pertencem a uma reta r e os outros quatro pertencem a uma reta s ($s \neq r$) paralela a r?

Resolução



Um triângulo fica determinado por três pontos não-colineares. Assim sendo, algumas combinações de três dentre os nove pontos determinam triângulos e outras não. Por exemplo, a combinação ABF determina um triângulo, enquanto a combinação ABC não determina um triângulo. Podemos resolver esse problema de dois modos diferentes.

Primeiro modo

Vamos calcular todas as combinações dos nove pontos três a três, subtraindo desse resultado o total de combinações que não determinam triângulos. Isto é:

$$C_{9,3} - \underbrace{C_{5,3}}_{\text{Pontos da reta } r} - \underbrace{C_{4,3}}_{\text{Pontos da reta } s} = 84 - 10 - 4 = 70$$

Logo, ficam determinados 70 triângulos.

Segundo modo

Um triângulo fica determinado se escolhermos dois pontos numa reta e um ponto na outra, isto é:

- 2 pontos em r e 1 ponto em $s \Rightarrow C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$

ou ← ⊕

- 1 ponto em r e 2 pontos em $s \Rightarrow C_{5,1} \cdot C_{4,2} = 5 \cdot 6 = 30$

Logo, o número de triângulos é $40 + 30 = 70$.

A análise combinatória e o futebol

Na confecção da tabela de um campeonato de futebol também é necessária a matemática. Imagine que a CBF organize a primeira fase do Campeonato Brasileiro com 24 times separados em quatro grupos de seis, de modo que cada time jogue uma única vez contra cada um dos demais de seu grupo. Através da análise combinatória conclui-se que o número de jogos a serem realizados em cada grupo é $C_{6,2} = 15$, e, portanto, o número de jogos da primeira fase do campeonato será $4 \times 15 = 60$. De modo análogo, calcula-se o número de jogos das próximas fases.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.37 Determine:

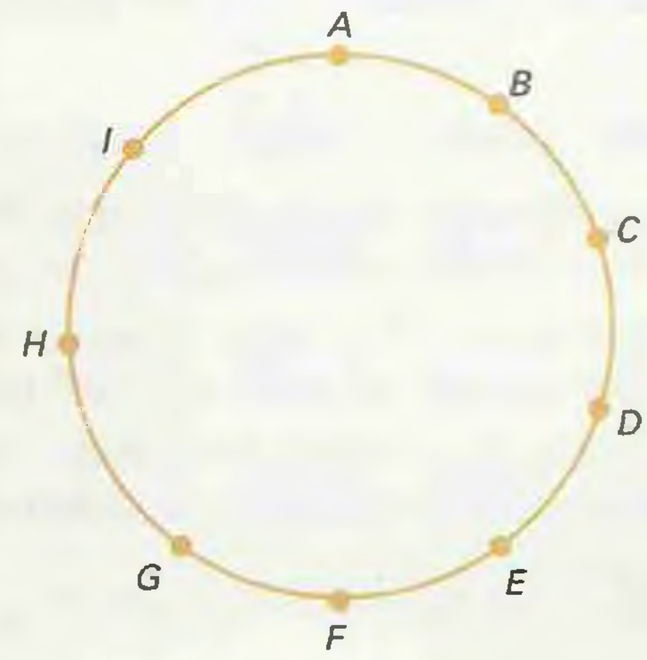
a) $C_{7,5}$ b) $C_{5,4}$ c) $C_{8,8}$ d) $C_{9,1}$

B.38 Calcule o valor da expressão $4C_{6,2} + A_{5,3} - 3P_3$.

B.39 Resolva a equação $C_{n,2} = 15$.

B.40 Resolva a equação $C_{x,3} = 3A_{x,3}$.

B.41 Considere nove diferentes pontos de uma circunferência (conforme a figura).



a) Quantas retas ficam determinadas por esses nove pontos?

b) Quantos triângulos ficam determinados por esses nove pontos?

B.42 (UFMG) Formam-se comissões de três professores escolhidos entre os sete de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formadas é:

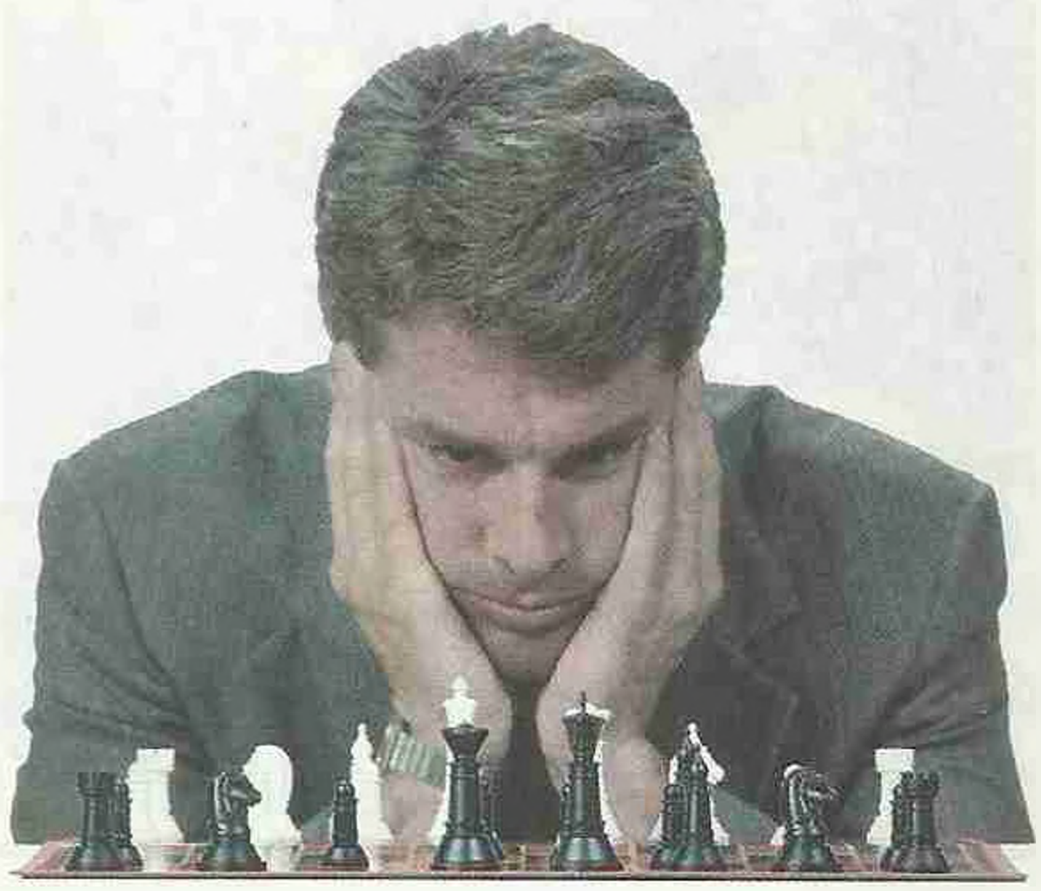
a) 35 c) 210 e) 7!
b) 45 d) 7^3

B.43 (UFBA) Dispondo-se de abacaxi, acerola, goiaba, laranja, maçã, mamão e melão, calcule de quantos sabores diferentes pode-se preparar um suco, usando-se três frutas distintas.

B.44 (Fuvest-SP) Numa primeira fase de um campeonato de xadrez, cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Sugestão. Indique por n o número de jogadores.


CID

B.45 (Faap-SP) O setor de emergência de uma unidade do Unicor tem três médicos e oito enfermeiros. A direção do Unicor deverá formar equipes de plantão constituídas de um médico e três enfermeiros. O número de equipes diferentes possível é:

a) 168 c) 56 e) 336
b) 3 d) 24

B.46 (Fatec-SP) Dentre seis senadores e cinco deputados será escolhida uma comissão de três senadores e dois deputados. De quantas maneiras diferentes essa comissão pode ser formada?

a) 200 c) 80 e) 40
b) 100 d) 50

B.47 (U. Católica de Salvador-BA) Dentre as disciplinas A, B, C, D, E e F um estudante universitário precisa selecionar quatro para cursar no próximo semestre letivo. Sabendo que nessa seleção deve constar, necessariamente, a disciplina E, o número que indica o total de maneiras diferentes que o estudante pode escolher as quatro disciplinas é:

a) 6 b) 10 c) 15 d) 20 e) 24

B.48 Calcule o número de diagonais do octógono convexo.

Exercícios complementares de C.25 a C.33

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 O auditório de um teatro é composto por n cadeiras. De quantas maneiras diferentes as três primeiras pessoas que chegarem para assistir a um espetáculo nesse teatro podem escolher seus lugares?

a) n c) $n(n + 1)$ e) $A_{3,3}$
b) $\frac{3n}{n+1}$ d) $A_{n,3}$

C.2 O total de números naturais de quatro algarismos distintos formados pelos algarismos do conjunto $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ pode ser expresso por:

a) $A_{6,4}$ c) $A_{6,4} - A_{5,3}$ e) $A_{6,3} - A_{6,2}$
b) $A_{5,3} + A_{5,4}$ d) $A_{6,3}$

C.3 Classifique como V ou F cada uma das afirmações:

a) $6A_{5,3} = A_{6,4}$
b) Existe $A_{n,4}$ para todo n, $n \in \mathbb{N}$
c) Existe $\frac{A_{n,5}}{A_{n,2}}$ se, e somente se, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 5$
d) $A_{6,1} \cdot A_{5,1} \cdot A_{4,1} = A_{6,3}$
e) Se dois arranjos simples são formados pelos mesmos elementos, então esses arranjos são iguais.
f) Dois arranjos simples formados pelos mesmos elementos são iguais se, e somente se, a ordem desses elementos nos dois arranjos for a mesma.
g) Se existir um elemento num arranjo que não pertença a um outro arranjo, então esses arranjos podem ser iguais.

C.4 (PUC-SP) Sendo n um número natural e $n \geqslant 3$, a razão $\frac{A_{n,3}}{A_{n-1,2}}$ é igual a:

a) 2 c) 1 e) $n + 1$
b) $2n$ d) n

C.5 (UFCE) Sendo uma placa de automóvel formada por duas letras seguidas de quatro algarismos, quantas placas podem ser formadas por duas letras distintas seguidas de quatro algarismos distintos? (Considere 26 letras e os dez algarismos do nosso sistema de numeração.)

a) $A_{26,2} + A_{10,4}$ d) $6A_{36,1}$
b) $A_{26,2} \cdot A_{10,4}$ e) $2A_{26,1} \cdot 4A_{10,1}$
c) $A_{36,6}$

C.6 Determine n de modo que:

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n}{(n + 1)!} = \frac{1}{240}$$

Sugestão. $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ é a soma dos n primeiros termos de uma P.A.

C.7 (U. Taubaté-SP) O(s) valor(es) de n tal que $\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 7n$ é (são):

a) 7 c) 0 e 10 e) 0 e 2
b) 0 e 7 d) 1

C.8 (UFPA) O produto dos 30 primeiros números pares positivos é igual a:

a) 60! c) $2 \cdot (60!)^2$ e) $2^{30} \cdot 30!$
b) 30! d) $2^2 \cdot 60!$

Sugestão. Os números 2, 4, 6, 8 etc. podem ser representados por 2×1, 2×2, 2×3, 2×4 etc.

C.9 (UFPE) Qual o maior inteiro n para que 20! seja divisível por 3^n?

a) 2 c) 8 e) 20
b) 7 d) 9

Sugestão. Decompondo em fatores primos cada número do desenvolvimento $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot ... \cdot 1$, verifique quantas vezes aparece o fator primo 3.

C.10 Determine n de modo que $\frac{A_{n,\,p}}{A_{n+2,\,p+2}} = \frac{1}{12}$.

C.11 (UFMG) Duas das cinqüenta cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinqüenta cadeiras, para ocupá-las, é:

a) $A_{50,\,2}$ c) $A_{2,\,2}$ e) $\frac{A_{50,\,50}}{2}$
b) $A_{50,\,50}$ d) $\frac{A_{50,\,2}}{2}$

C.12 (UFSC) Em um bingo, quatro pedras são retiradas sucessivamente e sem reposição de uma urna contendo exatamente 90 pedras, numeradas de 1 a 90. O número de seqüências distintas possíveis para essas quatro pedras, tal que a segunda pedra tenha número 40, é:

a) $A_{89,\,89}$ c) $A_{89,\,3}$ e) $\frac{89!}{3!}$
b) $A_{89,\,4}$ d) $\frac{89!}{4!}$

C.13 Qual é o número de anagramas da palavra VOLUME que apresentam a letra V antes da letra L?

Sugestão. Para cada anagrama que possui o V antes do L, podemos permutar apenas essas duas letras entre si, obtendo um anagrama que possui o L antes do V. Por exemplo, permutando apenas as letras V e L do anagrama VOMULE, obtemos o anagrama LOVUME.

C.14 (Fatec-SP) Seis pessoas, entre elas João e Pedro, vão ao cinema. Existem seis lugares vagos, alinhados e consecutivos. O número de maneiras distintas como as seis pessoas podem sentar-se sem que João e Pedro fiquem juntos é:

a) 720 c) 480 e) 120
b) 600 d) 240

C.15 (U. Taubaté-SP) Numa estante existem três livros de história, três de matemática e um de geografia. Se se deseja sempre um livro de história em cada extremidade, então o número de maneiras de se arrumar esses sete livros é:

a) 720 c) 81 e) n.d.a
b) 36 d) 126

C.16 (Fuvest-SP) O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:

a) 24 c) 96 e) 144
b) 48 d) 120

C.17 (FEI-SP) Obtenha o número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.

C.18 (Fuvest-SP) Com as 6 letras da palavra FUVEST podem ser formadas 6! = 720 "palavras" (anagramas) de 6 letras distintas cada uma. Se essas "palavras" forem colocadas em ordem alfabética, como num dicionário, a 250ª "palavra" começa com:

a) EV c) FV e) SF
b) FU d) SE

C.19 (UFSC) Um experimento consiste em lançar uma moeda 6 vezes. Considera-se como resultado desse experimento a seqüência das faces obtidas no 1º, 2º, 3º, 4º, 5º e 6º lançamento, respectivamente. Por exemplo, indicando por c a face "cara" e por k a face "coroa", um resultado possível desse experimento é a seqüência (c, c, k, c, k, c). O número de resultados possíveis desse experimento apresentando quatro caras e duas coroas é:

a) 30 b) 24 c) 20 d) 18 e) 15

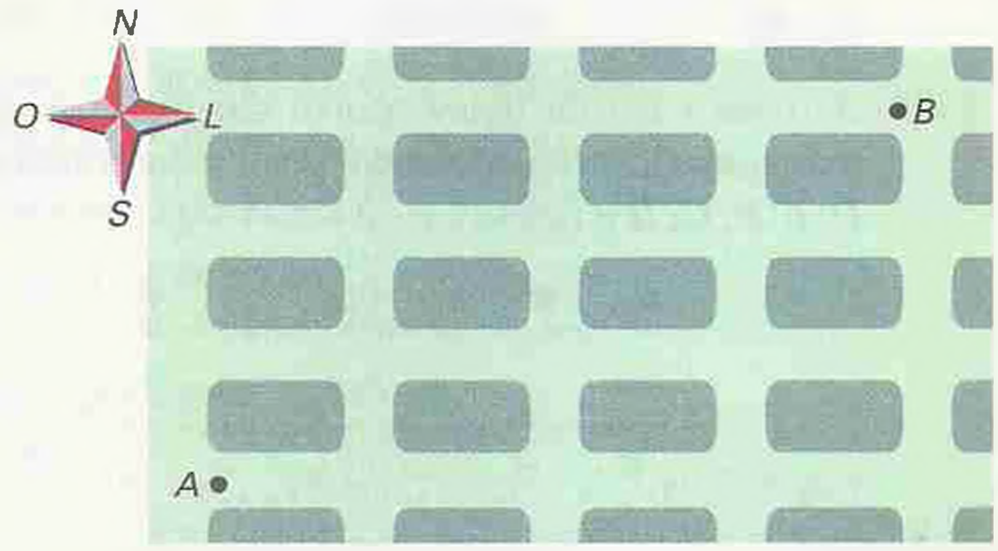
C.20 (UFCE) O mapa de uma cidade é formado por seis bairros distintos. Deseja-se pintar esse mapa com as cores vermelho, azul e verde, do seguinte modo: um bairro deve ser vermelho, dois bairros azuis e os demais verdes. De quantas maneiras distintas isso pode ser feito?

C.21 Considerando duas vezes o símbolo "+" e seis vezes o símbolo "|", é possível formar várias seqüências: uma delas é | | | + | | + |. Calcule o número de seqüências que podem ser formadas.

C.22 Uma solução da equação $x + y + z = 6$ é o terno ordenado (4, 0, 2), pois $4 + 0 + 2 = 6$. Quantos ternos ordenados, formados apenas por números naturais, são soluções dessa equação?

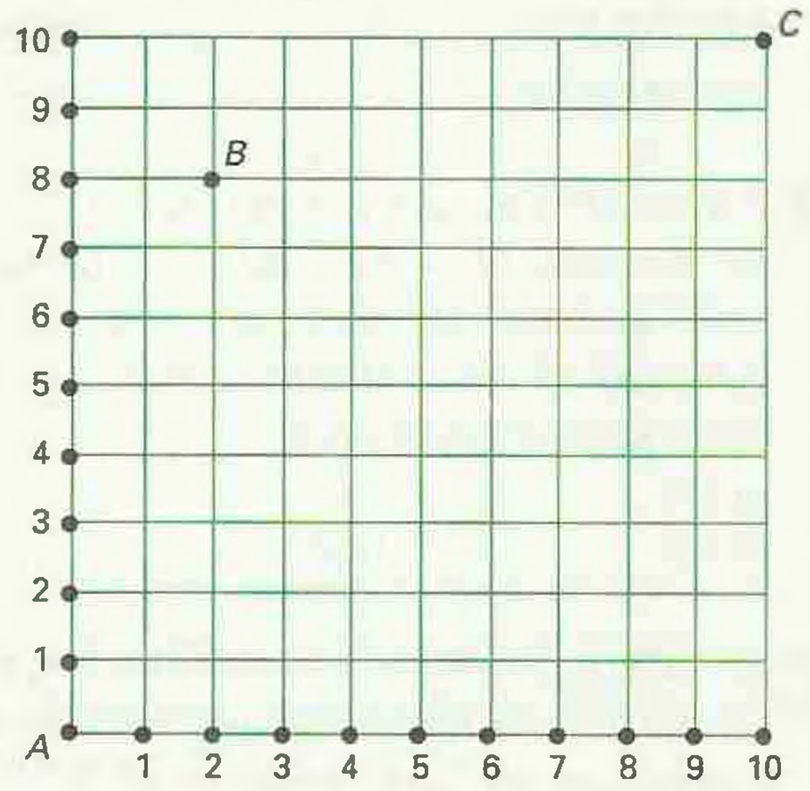
Sugestão. Representando as seis unidades por | | | | | |, cada seqüência formada por | | | | | | + + pode ser associada a uma única solução dessa equação e vice-versa. Observe: a seqüência | | | + | | + | pode ser associada à solução (3, 2, 1); | | | | + + | | pode ser associada à solução (4, 0, 2) etc.

C.23 A figura mostra um mapa de uma certa região:



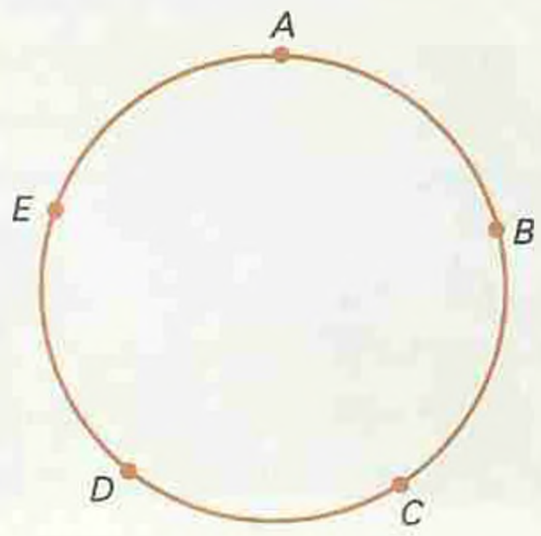
Uma pessoa deseja deslocar-se de A para B andando sempre para o norte ou para o leste. Quantos caminhos diferentes podem ser feitos?

C.24 (UFMG) Observe a figura.



Considere os caminhos ligando A a C, passando por B, traçados a partir de A, deslocando-se sempre, ou 1 unidade para a direita, na horizontal, ou 1 unidade para cima, na vertical. Determine o número total de caminhos distintos obtidos dessa forma.

C.25 Considere cinco diferentes pontos de uma circunferência (conforme a figura). Quantos polígonos convexos ficam determinados por esses cinco pontos:



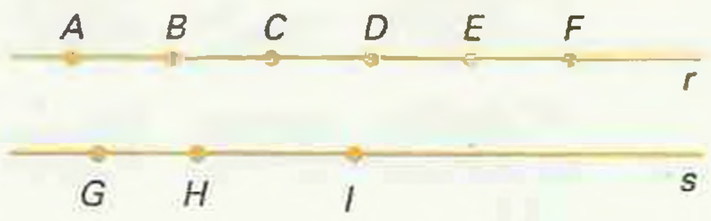
C.26 (UFMG) Numa Câmara de Vereadores, trabalham 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C. O número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C, é igual a:

a) 7 c) 152 e) 28.800
b) 36 d) 1.200

C.27 (Mackenzie-SP) Um juiz dispõe de 10 pessoas, das quais somente 4 são advogados, para formar um único júri com 7 jurados. O número de formas de compor o júri, com pelo menos 1 advogado, é:

a) 160 c) 128 e) 120
b) 140 d) 108

C.28 As retas r e s da figura abaixo são paralelas. Quantos triângulos ficam determinados pelos nove pontos A, B, C, D, E, F, G, H e I?



C.29 (UFSE) Considere todos os produtos de três fatores distintos que podem ser obtidos com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$. Quantos deles são pares?

a) 10 c) 20 e) 60
b) 18 d) 36

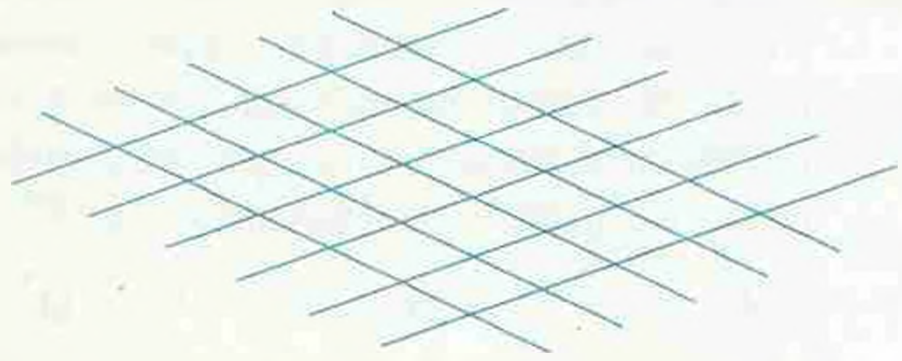
C.30 (UFRS) Em uma classe de doze alunos, um grupo de cinco será selecionado para uma viagem. De quantas maneiras distintas esse grupo poderá ser formado, sabendo que, entre os doze alunos, dois são irmãos e só poderão viajar se estiverem juntos?

a) 30.240 c) 462 e) 372
b) 594 d) 408

C.31 (U. F. Santa Maria-RS) O valor de m que satisfaz a igualdade $A_{(m-1),2} = C_{m,(m-2)}$ é:

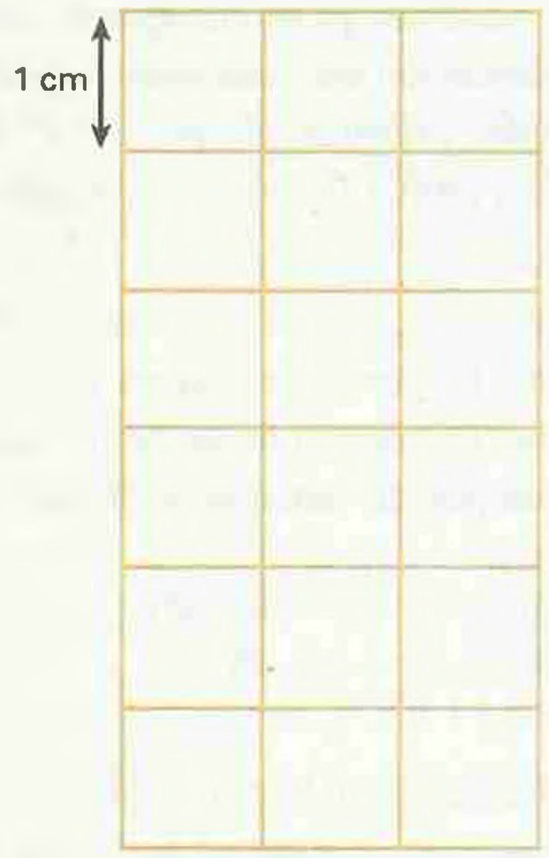
a) 2 c) 6 e) 4
b) 5 d) 3

C.32 Seis retas paralelas distintas de um plano se interceptam com outras cinco retas paralelas distintas desse plano (conforme figura). Calcule o número de paralelogramos cujos lados estão contidos nessa rede.



Sugestão. Um paralelogramo fica determinado por qualquer escolha de duas dentre essas cinco retas paralelas e duas dentre as outras seis retas paralelas.

C.33 (UFPI) A figura apresenta um retângulo dividido em quadradinhos de lado 1 cm.



O número de maneiras distintas de colorir seis desses quadradinhos, sendo exatamente dois em cada coluna e um em cada linha, é:

a) 15 c) 60 e) 120
b) 30 d) 90

Capítulo 44

BINÔMIO DE NEWTON

1. NÚMERO BINOMIAL

Como vimos anteriormente, o número de combinações de n elementos tomados p a p é indicado pelo símbolo $C_{n,p}$. A partir de agora, indicaremos esse número também pelo símbolo $\binom{n}{p}$. Essa nova notação pode também ser lida como "número binomial de numerador n e denominador p" ou, simplesmente, "número binomial n sobre p". Assim sendo, temos:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{para } \{n, p\} \subset \mathbb{N}, p \leq n$$

Exemplos

a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$

b) $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{0!4!} = 1$

c) $\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{0!}{0!0!} = 1$

2. TEOREMA DE NEWTON PARA O DESENVOLVIMENTO DA POTÊNCIA $(x + a)^n$

Para resolver certos problemas de matemática, necessitamos de potências do tipo $(x + a)^n$, em que x e a são números quaisquer e $n \in \mathbb{N}$. Algumas dessas potências são:

$(x + a)^0 = 1$ $\qquad$ $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

$(x + a)^1 = x + a$ $\qquad$ $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$

Note que, quanto maior for o expoente, mais trabalhosos serão os cálculos. No entanto, usando os conceitos que aprendemos com a análise combinatória, podemos deduzir uma expressão, relativamente simples, para desenvolver essas potências.

Consideremos a potência $(x + a)^5$. Para desenvolvê-la, devemos efetuar as seguintes multiplicações:

$$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)$$

Aplicando a propriedade distributiva, vamos multiplicar, de todas as maneiras possíveis, cinco fatores (x ou a), escolhendo cada um deles em um dos fatores $(x + a)$ dessa expressão. Uma das possibilidades é:

$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \rightarrow x^3a^2$

Através dessa possibilidade obtemos o termo x^3a^2. Porém, existem outras possibilidades que resultam no termo x^3a^2. Por exemplo:

$(x + a)(x + a)(x + a)(x + a)(x + a) \rightarrow x^3a^2$

Quantos termos iguais a x^3a^2 serão obtidos depois de efetuadas todas as multiplicações possíveis?

Para responder a essa pergunta, recorreremos à análise combinatória. Devemos calcular o número de modos diferentes de escolher: x em três dos cinco fatores $(x + a)$; e a nos outros dois. Note que, escolhido x em três fatores, a escolha de a fica automaticamente determinada nos fatores restantes. Assim, basta calcularmos o número de maneiras diferentes de escolher x em três dos cinco fatores. Esse número é $C_{5,3}$. Portanto, o termo x^3a^2 aparecerá $C_{5,3}$ vezes depois de efetuadas todas as multiplicações.

Raciocinando de maneira análoga, temos que:

- o termo x^5 aparecerá $C_{5,5}$ vezes;
- o termo x^4a aparecerá $C_{5,4}$ vezes;
- o termo x^2a^3 aparecerá $C_{5,2}$ vezes;
- o termo xa^4 aparecerá $C_{5,1}$ vezes;
- o termo a^5 aparecerá $C_{5,0}$ vezes.

Assim, podemos escrever:

$$(x + a)^5 = C_{5,5}x^5 + C_{5,4}x^4a + C_{5,3}x^3a^2 + Z + \\ + C_{5,2}x^2a^3 + C_{5,1}xa^4 + C_{5,0}a^5$$

ou seja:

$$(x + a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Generalização

O matemático, físico e astrônomo inglês *sir* Isaac Newton demonstrou que:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \\ + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

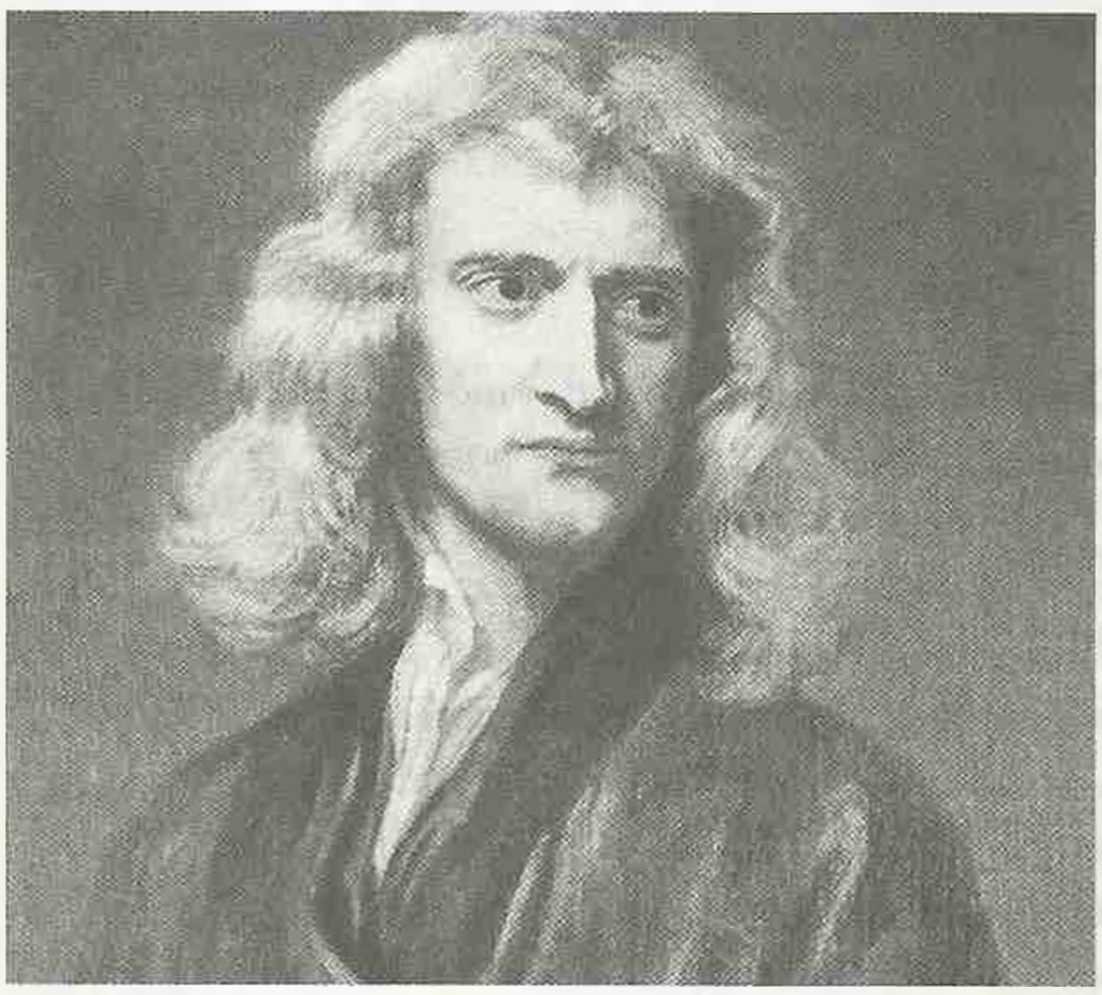
em que x e a são números quaisquer e $n \in \mathbb{N}$.

Nota

Como $(x + a)^n = (a + x)^n$, o teorema de Newton pode ser apresentado sob a seguinte forma:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \\ + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}a^p + \ldots + \binom{n}{n}x^0a^n$$

Isto é, segundo expoentes decrescentes de x.



Isaac Newton (1642-1727), físico, astrônomo e matemático inglês. Criador do cálculo diferencial e integral.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Desenvolver a potência $(x + a)^4$.

Resolução

Pelo teorema de Newton, temos que:

$$(x+a)^4 = \binom{4}{0}x^0a^4 + \binom{4}{1}x^1a^3 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \\ + \binom{4}{3}x^3a + \binom{4}{4}x^4a^0$$

Calculando os coeficientes binomiais, concluímos:

$$(x + a)^4 = a^4 + 4xa^3 + 6x^2a^2 + 4x^3a + x^4$$

R.2 Desenvolver a potência $(2x + y^3)^5$.

Resolução

$$(2x+y^3)^5 = \binom{5}{0}(2x)^0(y^3)^5 + \binom{5}{1}(2x)^1(y^3)^4 + \\ + \binom{5}{2}(2x)^2(y^3)^3 + \binom{5}{3}(2x)^3(y^3)^2 + \\ + \binom{5}{4}(2x)^4(y^3)^1 + \binom{5}{5}(2x)^5(y^3)^0$$

Calculando os coeficientes binomiais, temos:

$$(2x + y^3)^5 = y^{15} + 5 \cdot 2xy^{12} + 10 \cdot 4x^2y^9 + \\ + 10 \cdot 8x^3y^6 + 5 \cdot 16x^4y^3 + 32x^5$$

Portanto, concluímos que:

$$(2x + y^3)^5 = y^{15} + 10xy^{12} + 40x^2y^9 + 80x^3y^6 + \\ + 80x^4y^3 + 32x^5$$

R.3 Desenvolver a potência $(x - 2a)^4$.

Resolução

Para desenvolver essa potência, vamos considerá-la sob a seguinte forma $[x + (-2a)]^4$.

Assim, temos que:

$$[x+(-2a)]^4 = \binom{4}{0}x^0(-2a)^4 + \\ + \binom{4}{1}x^1(-2a)^3 + \binom{4}{2}x^2(-2a)^2 + \\ + \binom{4}{3}x^3(-2a)^1 + \binom{4}{4}x^4(-2a)^0$$

Logo:

$$(x - 2a)^4 = 16a^4 - 4x \cdot 8a^3 + \\ + 6x^2 \cdot 4a^2 - 4x^3 \cdot 2a + x^4$$

Portanto $(x - 2a)^4 = 16a^4 - 32xa^3 + 24x^2a^2 - 8x^3a + x^4$.

R.4 Resolver o seguinte sistema, onde x e y são números reais:

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = -1 \end{cases}$$

Resolução

A segunda equação desse sistema pode ser escrita sob a forma $(x + y)^5 = -1$.

Logo, temos:

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ (x + y)^5 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + y = -1 \end{cases} \; - \\ \hline x = -2$$

Fazendo $x = -2$ na equação $x + y = -1$, temos:

$$-2 + y = -1 \quad \therefore \quad y = 1$$

Logo, $x = -2$ e $y = 1$.

R.5 Calcular o valor da expressão:

$$E = \binom{5}{0}2^0 \cdot 3^5 + \binom{5}{1}2^1 \cdot 3^4 + \binom{5}{2}2^2 \cdot 3^3 + \\ + \binom{5}{3}2^3 \cdot 3^2 + \binom{5}{4}2^4 \cdot 3^1 + \binom{5}{5}2^5 \cdot 3^0$$

Resolução

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \\ + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

temos que $E = (2 + 3)^5 = 5^5 = 3.125$.

R.6 Calcular o valor da expressão:

$$E = \binom{4}{0}3^0 + \binom{4}{1}3^1 + \binom{4}{2}3^2 + \binom{4}{3}3^3 + \binom{4}{4}3^4$$

Resolução

Multiplicando cada parcela por 1^{n-p}, em que n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial, temos que:

$$E = \binom{4}{0}3^0 \cdot 1^4 + \binom{4}{1}3^1 \cdot 1^3 + \binom{4}{2}3^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3}3^3 \cdot 1^1 + \binom{4}{4}3^4 \cdot 1^0$$

Comparando essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

temos que $E = (3 + 1)^4 = 4^4 = 256$.

Somatório

Durante o estudo das progressões, vimos que o símbolo $\sum$ (letra grega denominada "sigma") é utilizado nas ciências exatas para indicar um somatório.

Exemplo

A expressão $\sum_{p=0}^{3}\binom{6}{p}2^p$ deve ser lida "somatório de $\binom{6}{p}2^p$ com p variando no conjunto dos números naturais de 0 a 3".

Atribuindo a p os valores 0, 1, 2 e 3, temos que:

$$\sum_{p=0}^{3}\binom{6}{p}2^p = \binom{6}{0}2^0 + \binom{6}{1}2^1 + \binom{6}{2}2^2 + \binom{6}{3}2^3 = 1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 8 = 233$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 Provar que $\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = 3^{50}$.

Resolução

$$\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = \binom{50}{0}2^0 + \binom{50}{1}2^1 + \binom{50}{2}2^2 + \ldots + \binom{50}{50}2^{50}$$

Multiplicando cada parcela dessa soma por 1^{n-p}, em que n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial, temos que:

$$\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = \sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p \cdot 1^{50-p} = \binom{50}{0}2^0 \cdot 1^{50} + \binom{50}{1}2^1 \cdot 1^{49} + \binom{50}{2}2^2 \cdot 1^{48} + \ldots + \binom{50}{50}2^{50} \cdot 1^0$$

Comparando essa última expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

percebemos que $\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}2^p = (2 + 1)^{50} = 3^{50}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Dois números binominais que têm o mesmo numerador e cuja soma dos denominadores é igual ao numerador comum são chamados de **números binomiais complementares**. Por exemplo, os binomiais $\binom{6}{4}$ e $\binom{6}{2}$ são complementares.

a) Calcule o valor de $\binom{7}{4}$ e o de seu complementar.

b) Calcule o valor de $\binom{n}{p}$ e o de seu complementar.

Que relação existe entre os valores encontrados?

B.2 Aplique o teorema de Newton para desenvolver as potências:

a) $(x + a)$ b) $(2x + 3)^3$ c) $(2x + y^2)^4$

B.3 Desenvolva as potências:

a) $(x - a)^5$ b) $(2 - x^2)^4$ c) $(2x^4 - 3y)^3$

B.4 (UFPR) Determine os números reais x e y tais que:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5 = 243 \end{cases}$$

B.5 Determine os números reais x e y de modo que:

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^4 - \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 - \binom{4}{3}xy^3 + y^4 = 16 \end{cases}$$

B.6 Calcule o valor da expressão:

$$E = \binom{4}{0}2^0 \cdot 3^4 + \binom{4}{1}2^1 \cdot 3^3 + \binom{4}{2}2^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3}2^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{4}2^4 \cdot 3^0$$

Sugestão. Compare essa expressão com o desenvolvimento do binômio de Newton:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

B.7 Qual é o valor da expressão:

$$E = \binom{5}{0}2^0 + \binom{5}{1}2^1 + \binom{5}{2}2^2 + \binom{5}{3}2^3 + \binom{5}{4}2^4 + \binom{5}{5}2^5?$$

Sugestão. Multiplique cada parcela por 1^{n-p}, em que n é o numerador e p é o denominador do respectivo coeficiente binomial.

B.8 Efetue:

$$E = \binom{5}{0}2^5 - \binom{5}{1}2^4 + \binom{5}{2}2^3 - \binom{5}{3}2^2 + \binom{5}{4}2^1 - \binom{5}{5}2^0$$

B.9 Se $S = \sum_{p=0}^{20}\binom{20}{p}2^p$, então:

a) $S = 2^{40}$ c) $S = 2^{22}$ e) $S = 20!$
b) $S = 9^{10}$ d) $S = 20^{20}$

Sugestão. Multiplique cada parcela $\binom{20}{p}2^p$ por 1^{20-p}.

Como $1^{20-p} = 1$, $\forall\ p$, tais operações não alterarão a expressão S.

B.10 A expressão $\sum_{p=2}^{20}\binom{20}{p}5^p$ é igual a:

a) 6^{20} c) $6^{20} - 101$ e) $5^{20} - 21$
b) $6^{20} - 7$ d) 5^{20}

Exercícios complementares de C.1 a C.7

3. TERMO GERAL DO BINÔMIO DE NEWTON

Vimos que:

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^pa^{n-p}, \text{ isto é:}$$

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^0a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{p}x^pa^{n-p} + \ldots + \binom{n}{n}x^na^0$$

Observe que todas as parcelas do desenvolvimento são da forma $\binom{n}{p}x^pa^{n-p}$ com $\{n, p\} \subset \mathbb{N}$ e $p \leq n$. Por isso chamamos de **termo geral do binômio de Newton** a expressão:

$$T = \binom{n}{p}x^pa^{n-p}$$

Nota

Como $(x + a)^n = (a + x)^n$, temos que o termo geral do binômio de Newton pode ser escrito também sob a seguinte forma:

$$T = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Determinar o coeficiente do termo em x^{12} no desenvolvimento de $(x^3 + 2)^6$.

Resolução

O termo geral do desenvolvimento do binômio é:

$$T = \binom{6}{p}(x^3)^p \cdot 2^{6-p} \quad \therefore T = \binom{6}{p}x^{3p} \cdot 2^{6-p}$$

Queremos o coeficiente de x^{12}. Então devemos encontrar o valor de p para que o expoente de x seja 12, isto é:

$$3p = 12 \Rightarrow p = 4$$

Fazendo $p = 4$ no termo geral, temos que:

$$T = \binom{6}{4}x^{3\cdot4} \cdot 2^{6-4} \Rightarrow T = \binom{6}{4}x^{12} \cdot 2^2 \text{ em que}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

Logo, $T = 15x^{12} \cdot 4 \Rightarrow T = 60x^{12}$.
Assim, o coeficiente de x^{12} é 60.

Nota

Escrevemos o termo geral $T = \binom{6}{p}(x^3)^p \cdot 2^{6-p}$ segundo expoentes crescentes de x; poderíamos ter formado o termo geral segundo expoentes decrescentes de x, isto é, $T = \binom{6}{p}2^p(x^3)^{6-p}$, e obtido o mesmo resultado; faça você mesmo os cálculos.

R.9 Determinar o coeficiente do termo em x^{19} no desenvolvimento de $(x^3 - 2x^2)^8$.

Resolução

Para montarmos o termo geral, devemos considerar o binômio sob a forma $[x^3 + (-2x^2)]^8$. Assim, temos como termo geral:

$$T = \binom{8}{p}(-2x^2)^p(x^3)^{8-p}$$

$$\therefore\ T = \binom{8}{p}(-2)^px^{2p}x^{24-3p}$$

$$\therefore\ T = \binom{8}{p}(-2)^px^{24-p}$$

Queremos o coeficiente de x^{19}, então devemos encontrar o valor de p para que o expoente de x seja 19, isto é, $24 - p = 19 \Rightarrow p = 5$.

Fazemos $p = 5$ no termo geral:

$$T = \binom{8}{5}(-2)^5 x^{24-5} \quad \therefore \quad T = \binom{8}{5}(-2)^5 x^{19}$$

em que

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ e } (-2)^5 = -32$$

Logo, $T = 56(-32)x^{19} = -1.792x^{19}$.
Assim, o coeficiente de x^{19} é -1.792.

R.10 Determinar o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^7$.

Resolução
Para facilitar os cálculos, convém considerarmos o binômio sob a forma $(x^4 + x^{-3})^7$.
Seu termo geral é:

$$T = \binom{7}{p}(x^{-3})^p (x^4)^{7-p} \quad \therefore \quad T = \binom{7}{p} x^{-3p} x^{28-4p}$$

$$\therefore \quad T = \binom{7}{p} x^{28-7p}$$

Queremos o termo independente de x, isto é, o coeficiente de x^0. Assim sendo, para obter o valor de p de modo que o termo T não dependa de x, basta igualarmos a zero o expoente de x, isto é:

$$28 - 7p = 0 \Rightarrow p = 4$$

Fazendo $p = 4$ no termo geral, temos que:

$$T = \binom{7}{4} x^{28-7\cdot 4} \quad \therefore \quad T = \binom{7}{4} x^0$$

$$\therefore \quad T = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} =$$

$$= \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Portanto, o termo independente de x é 35.

R.11 Desenvolvendo a potência $(2x + 1)^{10}$, segundo expoentes crescentes de x, determinar o quarto termo.

Resolução
Lembremos que o termo geral pode ser apresentado sob duas formas:

segundo expoentes crescentes de x,

$$T = \binom{10}{p}(2x)^p \cdot 1^{10-p}$$

ou segundo expoentes decrescentes de x

$$T = \binom{10}{p}(2x)^{10-p} \cdot 1^p$$

Nesse caso, o problema exige a primeira forma, isto é:

$$T = \binom{10}{p}(2x)^p \cdot 1^{10-p} \quad \therefore T = \binom{10}{p} 2^p x^p \cdot 1^{10-p}$$

Queremos o quarto termo do desenvolvimento. Para obter o valor de p, basta observarmos que $p = 0$ corresponde ao primeiro termo; $p = 1$ corresponde ao segundo termo; $p = 2$ corresponde ao terceiro termo; $p = 3$ corresponde ao quarto termo.
Portanto, fazendo $p = 3$ no termo geral:

$$T = \binom{10}{3} 2^3 x^3 \cdot 1^{10-3} \quad \therefore T = \binom{10}{3} 2^3 x^3$$

em que

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120 \text{ e } 2^3 = 8$$

Logo, $T = 120 \cdot 8x^3 = 960x^3$.
Assim, o quarto termo é $960x^3$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Qual é o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(x^2 + 1)^6$?

B.12 Qual é o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$? **Sugestão.** Escreva a expressão sob a forma $(x + x^{-1})^8$.

B.13 (UECE) O coeficiente de x^2 no desenvolvimento de $(\sqrt[3]{x} + 2)^8$ é:

a) 112 c) 168
b) 140 d) 224

Sugestão. Escreva a expressão sob a forma $\left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)^8$.

B.14 (U. E. Londrina-PR) Se um dos termos do desenvolvimento do binômio $(x + a)^5$, com $a \in \mathbb{R}$, é $80x^2$, então o valor de a é:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

B.15 (U. Taubaté-SP) O termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ é:

a) 10 c) 40 e) 20
b) 30 d) 16

B.16 Encontre o termo que não depende de x no desenvolvimento de $\left(\sqrt[4]{x} - \frac{2}{x}\right)^{10}$.

Sugestão. Escreva a expressão sob a forma

$$\left[x^{\frac{1}{4}} + (-2x^{-1})\right]^{10}$$

B.17 Escrevendo o desenvolvimento do binômio $(x^2 - 2)^8$ segundo expoentes crescentes de x, determine o sexto termo.

B.18 (Mackenzie-SP) No desenvolvimento de $(\sqrt{2} + x)^6$ segundo expoentes crescentes de x, o termo central é:

a) $10x^2$ c) $40\sqrt{2}\,x^3$ e) $20x^3$
b) $40x^3$ d) $12x^3$

Exercícios complementares de C.8 a C.13

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Dois números binomiais de mesmo numerador são iguais se, e somente se, têm o mesmo denominador ou são complementares, isto é:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{k} \Leftrightarrow p = n \text{ ou } p + k = n$$

De acordo com essa propriedade, determine x em cada uma das equações:

a) $\binom{9}{x} = \binom{9}{7}$ b) $C_{8,(x-3)} = C_{8,(x+1)}$

C.2 Obtenha a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(3x - y)^{10}$. **Sugestão.** Basta fazer $x = y = 1$. (Pense o porquê.)

C.3 Calcule a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + y)^8$.

C.4 (U. E. Londrina-PR) Se a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binômio $(2x + y)^n$ é igual a 243, então o número n é:

a) 12 b) 10 c) 8 d) 5 e) 3

C.5 (Unifor-CE) A soma de números binomiais

$$\binom{100}{0} + \binom{100}{1} + \binom{100}{2} + \ldots + \binom{100}{99} + \binom{100}{100}$$

é igual a:

a) 2^{11} c) 100^0 e) 100^{100}
b) 2^{100} d) 100^2

Sugestão. Multiplique cada parcela $\binom{100}{p}$ por $1^p \cdot 1^{100-p}$, com o quê a expressão não se altera.

C.6 Calcule, em função de n, o valor do somatório $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$, em que n e p são números naturais com $n \geqslant p$.

Sugestão. Desenvolva o somatório, obtendo:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

e raciocine como no exercício anterior.

C.7 (UFPR) O valor de n de modo que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 1.024 \text{ é:}$$

a) 5 b) 8 c) 10 d) 11 e) 12

C.8 Determine o coeficiente do termo em x^4 no desenvolvimento de $(x + 2)^7(x - 2)^7$.
Sugestão. $(x + 2)^7(x - 2)^7 = [(x + 2)(x - 2)]^7$.

C.9 Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$.

C.10 Mostre que o desenvolvimento de $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ não possui o termo independente de x.

Sugestão. Escreva o binômio na forma $\left(x + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{11}$.

C.11 (U. F. Santa Maria-RS) O valor de K, $K \neq 0$, para que o coeficiente do termo x^2, no desenvolvimento de $\left(x + \frac{1}{K}\right)^5$. seja igual a 80, é:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{5}{2}$
b) 1 d) 2

C.12 (Unirio) No desenvolvimento de $(x + y)^n$, segundo expoentes crescentes de x, a diferença entre os coeficientes do 3º e do 2º termo, nessa ordem, é igual a 54. Podemos afirmar que o termo médio é o:

a) 3º b) 4º c) 5º d) 6º e) 7º

C.13 Desenvolvendo a potência $(x^3 + 2)^6$ segundo expoentes decrescentes de x, determine o quarto termo.

Capítulo 45

PROBABILIDADE

1. CONCEITUAÇÃO

Um automóvel será sorteado dentre os clientes de um *shopping center*, Paulo depositou 50 cupons em uma das urnas espalhadas pelo *shopping*, e Janete depositou 20 cupons. Hoje, dia do sorteio, os conteúdos de todas as urnas foram juntados, formando uma pilha de 10.000 cupons. Um representante do *shopping* vai sortear um cupom.

É possível **medir** a possibilidade de cada um ganhar o automóvel. Como Paulo tem 50 cupons dentre os 10.000 que participam do sorteio, indicamos por $\frac{50}{10.000}$ a **medida** da possibilidade de Paulo ganhar; analogamente, a medida da possibilidade de Janete ganhar é $\frac{20}{10.000}$.

As frações $\frac{50}{10.000}$ e $\frac{20}{10.000}$ são chamadas de **probabilidades** de Paulo e Janete ganharem, respectivamente.

Esse exemplo ajuda a entender que **probabilidade** é um número que mede a possibilidade de ocorrer, ou não, um resultado.

Experimento aleatório

Todo experimento cujo resultado depende exclusivamente do acaso é chamado de **experimento aleatório**.

Exemplos

a) **O lançamento de uma moeda** em que se considera como resultado a face voltada para cima é um experimento aleatório.

b) **O lançamento de um dado** em que se considera como resultado o número de pontos da face voltada para cima é um experimento aleatório.

Espaço amostral de um experimento aleatório

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **espaço amostral** desse experimento.

CID

Exemplos

a) No lançamento de uma moeda o espaço amostral é o conjunto $E = \{\text{cara, coroa}\}$.

b) No lançamento de um dado, o espaço amostral é o conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Evento de um espaço amostral

Qualquer subconjunto de um espaço amostral é chamado de **evento** desse espaço.

Exemplos

a) No lançamento de uma moeda, em que o espaço amostral é $E = \{\text{cara, coroa}\}$, o conjunto $A = \{\text{cara}\}$ é um **evento** de E.

b) No lançamento de um dado, em que o espaço amostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é um **evento** de E.

Espaço amostral equiprovável

Um dado foi lançado 1.000 vezes. O número de vezes que ocorreu cada face é chamado de **freqüência absoluta** dessa face; e a razão da **freqüência absoluta** para o número de vezes que foi realizado o experimento é chamada de **freqüência relativa** dessa face. A tabela a seguir descreve o que ocorreu nesses 1.000 lançamentos.

Face	Freqüência absoluta	Freqüência relativa
1	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
2	168	$\frac{168}{1.000} = 0{,}168$
3	165	$\frac{165}{1.000} = 0{,}165$
4	163	$\frac{163}{1.000} = 0{,}163$
5	169	$\frac{169}{1.000} = 0{,}169$
6	170	$\frac{170}{1.000} = 0{,}170$
	Freqüência total = 1.000	

Observe que as freqüências relativas são valores muito próximos um do outro. Se aumentássemos o número de lançamentos do dado para 2.000, 3.000, 10.000 etc., as freqüências relativas se aproximariam cada vez mais, tendendo a ficar iguais. Por isso, dizemos que o espaço amostral em um lançamento desse dado é **equiprovável**.

Um espaço amostral é equiprovável se as freqüências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de experimentos aumenta indefinidamente.

2. DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

Sejam E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio, e A um evento de E. A probabilidade de ocorrer algum elemento de A é indicada por $P(A)$ e definida por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

em que $n(A)$ e $n(E)$ indicam, respectivamente, o número de elementos de A e de E.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 No lançamento de uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara na face voltada para cima?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é
$E = \{\text{cara, coroa}\}$, e queremos que ocorra o elemento do evento $A = \{\text{cara}\}$. Como $n(A) = 1$ e $n(E) = 2$, temos, por definição:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{1}{2}$$

Podemos, também, dar a probabilidade sob forma de porcentagem, isto é, $P(A) = 50\%$.

R.2 No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 5?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e queremos que ocorra algum elemento do evento $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Como $n(B) = 4$ e $n(E) = 6$, temos, por definição:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(E)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

R.3 No lançamento de dois dados, qual é a probabilidade de que a soma dos pontos das faces voltadas para cima seja igual a 5?

Resolução

O espaço amostral desse experimento é o conjunto de todos os pares ordenados de números naturais (x, y) em que $1 \leqslant x \leqslant 6$ e $1 \leqslant y \leqslant 6$. O número de elementos desse espaço amostral pode ser calculado pelo princípio fundamental de contagem. Observe:

$$\begin{matrix} & & (x\ ,\ y) \\ & & \downarrow \quad \downarrow \\ \textbf{números de possibilidades} & \rightarrow & 6 \times 6 = 36 \end{matrix}$$

A representação desse espaço amostral é:

$$E = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots\ldots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots\ldots & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & \ldots\ldots & (3,6) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots\ldots & \cdot \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & \ldots\ldots & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

Queremos que ocorra algum elemento do evento:

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

Como $n(A) = 4$ e $n(E) = 36$, temos por definição:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Nota

Para entender que há duas maneiras diferentes de se obter uma face 2 e outra face 3. pinte um dado de vermelho e o outro de azul. O resultado "face 2 no dado vermelho e face 3 no azul" é diferente do resultado "face 2 no dado azul e face 3 no vermelho", pois as faces voltadas para cima, no primeiro caso, não são as mesmas voltadas para cima no segundo. Por isso, consideramos os pares (2, 3) e (3, 2).

Quem não arrisca...

Você já deve ter se aventurado em um jogo de loteria. Continue acreditando em sua sorte, mas, conheça antes suas chances de ficar rico.

A quina é uma modalidade de jogo de apostas cujo resultado é formado por 5 dezenas, em qualquer ordem, sorteadas dentre 80 dezenas. O apostador assinala um mínimo de 5 e um máximo de 8 dezenas, em um cartão com 80 dezenas. O número de cartões que podem ser formados com a aposta mínima é $C_{80,5} = 24.040.016$. Logo, a probabilidade de serem sorteadas as dezenas de um cartão com a aposta mínima é $\frac{1}{24.040.016} \simeq 0{,}000000041$.

Na mega-sena o resultado é formado por 6 dezenas sorteadas dentre 60 dezenas. O apostador assinala um mínimo de 6 e um máximo de 15 dezenas, em um cartão com 60 dezenas. O número de cartões que podem ser formados com a aposta mínima é $C_{60,6} = 50.063.860$. Logo, a probabilidade de serem sorteadas as dezenas de um cartão com a aposta mínima é $\frac{1}{50.063.860} \simeq 0{,}000000019$.

Tendo como referência esses dois exemplos, calcule você mesmo a probabilidade de ganhar em cada uma das outras loterias oficiais.

Propriedades

Sendo E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio, e A um evento de E, tem-se que:

I) $P(\varnothing) = 0$

$$\text{pois } P\varnothing = \frac{n(\varnothing)}{n(E)} = \frac{0}{n(E)} = 0$$

Nota

O evento $\varnothing$ é chamado de **evento impossível**.

II) $P(E) = 1$

$$\text{pois } P(E) = \frac{n(E)}{n(E)} = 1$$

Nota

O evento E, que coincide com o próprio espaço amostral, é chamado de **evento certo**.

III) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

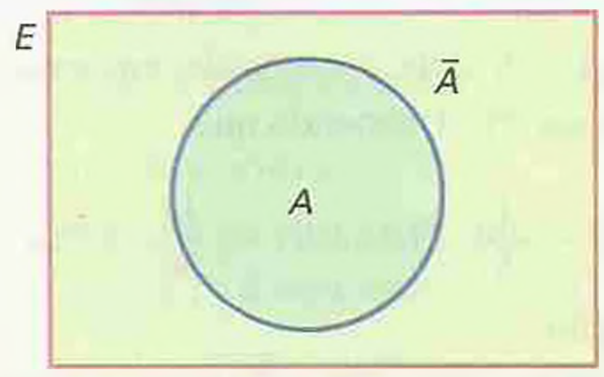
pois $\varnothing \subset A \subset E \Rightarrow n(\varnothing) \leqslant n(A) \leqslant n(E)$

$$\therefore \frac{n(\varnothing)}{n(E)} \leqslant \frac{n(A)}{n(E)} \leqslant \frac{n(E)}{n(E)}$$

$$\therefore 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

IV) Sendo $\overline{A}$ o conjunto dos elementos de E que não pertencem a A, tem-se que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$



pois, como $A \cup \overline{A} = E$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$, tem-se que:

$$n(A) + n(\overline{A}) = n(E)$$

$$\therefore \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\overline{A})}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)}$$

$$\therefore P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Nota

O evento $\overline{A}$ é chamado de **complementar** de A.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Uma urna contém bolas coloridas. Retirando-se uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é 0,64. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha?

Resolução

Indicando por A o evento formado pelas bolas vermelhas, o **complementar** de A é o evento $\overline{A}$ formado pelas bolas não vermelhas. Sabemos que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Logo:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$\therefore P(\overline{A}) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$$

Temos, portanto, que a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha é 0,36.

R.5 Uma urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis. Retirando-se, ao acaso, uma bola da urna, a probabilidade de se obter uma bola azul é o quádruplo da probabilidade de se obter uma bola branca. Qual é a probabilidade de se obter uma bola branca?

Resolução

Sendo os eventos $A = \{x \mid x \text{ é bola azul da urna}\}$ e $B = \{y \mid y \text{ é bola branca da urna}\}$, temos que $P(A) = 4P(B)$. Como a urna contém apenas bolas brancas e bolas azuis, temos que A e B são eventos complementares, portanto $P(A) + P(B) = 1$. Assim, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} P(A) = 4P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases}$$

obtemos $P(B) = \frac{1}{5}$, ou seja, a probabilidade de se obter uma bola branca é $\frac{1}{5}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 (UNOPAR) A probabilidade de você ganhar uma bicicleta numa rifa de 100 números da qual você comprou quatro números é:

a) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{25}$ e) $\frac{1}{50}$

b) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{30}$

B.2 Uma urna contém exatamente cem etiquetas numeradas de 1 a 100. Retirando uma etiqueta dessa urna, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 41?

B.3 (U. E. Londrina-PR) No lançamento de duas moedas, a probabilidade de se obter pelo menos uma cara é:

a) 50% c) 25% e) 33%

b) 100% d) 75%

B.4 No lançamento de dois dados, calcule a probabilidade de se obter nas faces voltadas para cima:

a) soma dos pontos igual a 7.

b) soma dos pontos igual a 6.

c) soma dos pontos igual a 13.

d) soma dos pontos menor que 5.

e) soma dos pontos menor que 13.

B.5 (Osec-SP) Lançando-se dois dados, a probabilidade de ocorrer a face com 5 pontos em pelo menos um dos dados é:

a) $\frac{11}{36}$ c) $\frac{5}{18}$ e) $\frac{1}{36}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{6}$

B.6 (Cesgranrio) Sorteando-se um número inteiro n, $1 \leqslant n \leqslant 999$, a probabilidade de se obter um múltiplo de 9 é:

a) $\frac{1}{999}$ c) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{1}{9}$

b) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{3}$

B.7 No lançamento de três dados, qual é a probabilidade de obtermos números iguais de pontos nos três dados?

B.8 Uma moeda é lançada três vezes. Qual a probabilidade de obtermos cara nos dois primeiros lançamentos e coroa no terceiro?

B.9 Lançando-se três vezes uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara nos dois primeiros lançamentos?

B.10 No lançamento de três moedas, qual é a probabilidade de se obter duas caras e uma coroa?

B.11 Uma comissão de três pessoas será escolhida dentre cinco pessoas, sendo apenas uma de nome Paulo. Qual é a probabilidade de Paulo participar da comissão?

B.12 Se num grupo de quinze homens e cinco mulheres sortearmos três pessoas, qual é a probabilidade de serem sorteados dois homens e uma mulher? **Sugestão**. Cada elemento do espaço amostral E é um conjunto de três pessoas escolhidas dentre as pessoas do grupo. Cada elemento do evento A que se deseja é um conjunto de três pessoas, sendo dois homens e uma mulher, escolhidos dentre as pessoas do grupo.

B.13 Ao atirar num alvo, a probabilidade de uma pessoa acertá-lo é $\frac{3}{5}$. Qual é a probabilidade de ela errar?

B.14 Uma caixa contém lâmpadas perfeitas e lâmpadas defeituosas. Escolhendo ao acaso três lâmpadas dessa caixa, a probabilidade de obtermos pelo menos uma lâmpada defeituosa é $\frac{17}{33}$. Qual é a probabilidade de retirarmos três lâmpadas perfeitas da caixa?

B.15 (PUC-SP) No lançamento de três dados, a probabilidade de não se obter nas três faces voltadas para cima o mesmo número de pontos é:

a) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{7}{36}$ e) $\frac{35}{36}$

b) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{11}{36}$

B.16 A probabilidade de um cavalo vencer uma corrida é o triplo da probabilidade de perder. Qual é a probabilidade de que esse animal vença a corrida?

Exercícios complementares de C.1 a C.7

3. ADIÇÃO DE PROBABILIDADES

Teorema

Seja E um espaço amostral equiprovável finito e não-vazio. Para quaisquer eventos A e B de E, tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração

Pelo princípio aditivo de contagem, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo por $n(E)$ ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

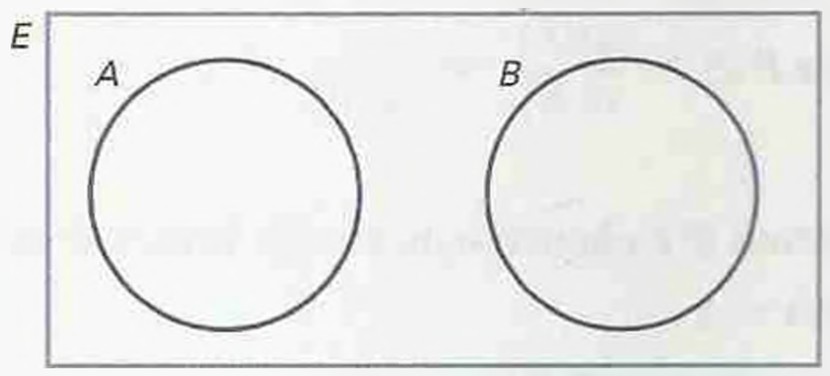
$$\frac{n(A \cup B)}{n(E)} = \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(B)}{n(E)} - \frac{n(A \cap B)}{n(E)}$$

$$\therefore P(A \cup 3) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(c.q.d.)

Eventos mutuamente exclusivos

Os eventos A e B são chamados de **mutuamente exclusivos** se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.



Nesse caso, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Nota

O **teorema da adição de probabilidades** é aplicado na resolução de problemas que pedem a probabilidade de ocorrer um evento A **ou** um evento B, pois o conectivo **ou** indica a união dos eventos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral E. Determinar $P(A)$, sabendo que:

$$P(B) = \frac{1}{5},\ P(A \cup B) = \frac{11}{30} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Resolução

Pelo teorema da adição de probabilidades, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\therefore \frac{11}{30} = P(A) + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{11}{30} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = P(A)$$

Logo, $P(A) = \frac{1}{3}$.

R.7 Sejam A e B dois eventos mutuamente exclusivos de um espaço amostral E. Determinar $P(A \cup B)$, sabendo que

$$P(A) = \frac{1}{5} \text{ e } P(B) = \frac{2}{7}.$$

Resolução

Como A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{17}{35}$$

R.8 Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de se obter uma bola com um número múltiplo de 2 ou de 3?

Resolução

O espaço amostral do experimento é:

$$E = \{1, 2, 3, 4, ..., 20\} \therefore n(E) = 20$$

Consideremos dois eventos: um deles, caracterizado pela propriedade anterior ao conectivo **ou**, e o outro, caracterizado pela propriedade posterior ao conectivo **ou** do enunciado. Isto é:

$A = \{x \in E \mid x \text{ é múltiplo de } 2\} = \{2, 4, 6, ..., 20\}$
$\therefore n(A) = 10$
$B = \{y \in E \mid y \text{ é múltiplo de } 3\} = \{3, 6, 9, ..., 18\}$
$\therefore n(B) = 6$

Queremos a probabilidade de ocorrer algum elemento de A ou B, ou seja, $P(A \cup B)$. Para isso, precisamos de $A \cap B$:

$$A \cap B = \{6, 12, 18\} \therefore n(A \cap B) = 3$$

Logo, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{10}{20} + \frac{6}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$$

Nota

Sempre que a pergunta do problema for da forma "Qual é a probabilidade de ocorrer A **ou** B?", a resolução pode ser feita através do teorema:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

R.9 Uma urna contém cinco bolas vermelhas, três bolas azuis e quatro bolas brancas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna. Qual é a probabilidade de sair uma bola vermelha ou uma bola azul?

Resolução

O espaço amostral é:

$$E = \{x \mid x \text{ é bola da urna}\} \quad \therefore n(E) = 12$$

Consideremos dois eventos:

$A = \{y \in E \mid y \text{ é bola vermelha}\} \therefore n(A) = 5;$
$B = \{z \in E \mid z \text{ é bola azul}\} \therefore n(B) = 3$

Observe que A e B são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \varnothing$.

Logo, temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow P(A \cup B) =$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.17 Uma urna contém exatamente trinta etiquetas numeradas de 1 a 30. Retirando-se, ao acaso, uma etiqueta da urna, qual é a probabilidade de obtermos um número menor do que 20 ou um número ímpar?

B.18 (Vunesp) Lançando-se simultaneamente dois dados não viciados, a probabilidade de que sua faces superiores exibam soma igual a 7 ou 9 é:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{11}$ d) $\frac{5}{18}$ e) $\frac{3}{7}$

B.19 (Cesgranrio) Lançando-se simultaneamente um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter a face cara na moeda ou a face 6 no dado?

a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{12}$ e) $\frac{1}{4}$

B.20 Uma caixa contém exatamente 1.000 bolas numeradas de 1 a 1.000. Qual é a probabilidade de se tirar, ao acaso, uma bola contendo um número par ou um número de dois algarismos?

a) 45% b) 59% c) 50% d) 19% e) 54,5%

B.21 Num grupo de sessenta pessoas, dez são torcedoras do São Paulo, cinco são torcedoras do Palmeiras e as outras são torcedores do Corinthians. Suponha que cada pessoa torça para um único clube. Escolhido ao acaso um elemento do grupo, a probabilidade de ele ser torcedor do São Paulo ou do Palmeiras é:

a) 0,40 b) 0,25 c) 0,50 d) 0,30 e) n.d.a.

B.22 Dentre os automóveis estocados no pátio de uma montadora escolhe-se um, ao acaso. A probabilidade de que o automóvel escolhido tenha freio ABS é $\frac{5}{8}$, a probabilidade de que ele tenha direção hidráulica é $\frac{2}{3}$ e a probabilidade de que ele tenha freio ABS e direção hidráulica é $\frac{11}{24}$. A probabilidade de que esse automóvel tenha freio ABS **ou** direção hidráulica é:

a) $\frac{7}{24}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{5}{6}$

Exercícios complementares de C.8 a C.13

4. PROBABILIDADE CONDICIONAL

Uma urna contém exatamente vinte etiquetas numeradas de 1 a 20. Retira-se uma etiqueta da urna. Sabendo-se que o número da etiqueta é par, qual é a probabilidade de que esse número seja 2?

Como sabemos que o número da etiqueta retirada é par, temos como espaço amostral o seguinte conjunto:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\} \therefore n(A) = 10$

O evento que queremos é $B = \{2\} \therefore n(B) = 1$.

Logo, $P(B) = \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{1}{10}$.

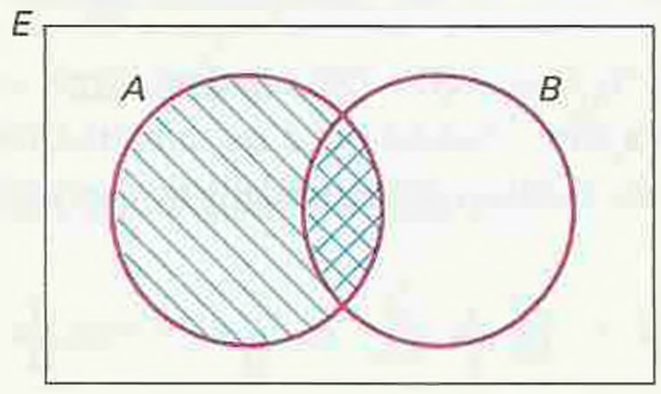
Note que o fato de sabermos que ocorreu o evento "número par" faz com que o espaço amostral fique reduzido a esse evento.

Definição

> Chama-se **probabilidade condicional de um evento** B a probabilidade de esse evento ocorrer considerando-se que já ocorreu um evento A.

Indicamos essa probabilidade por $P(B/A)$ (lê-se "probabilidade de B, dado A").

Analisemos o seguinte problema genérico: o espaço amostral E de um experimento aleatório é equiprovável, finito e não-vazio. A e B são eventos de E, com $A \neq \varnothing$. Ao realizar-se o experimento, ocorre o evento A. Qual é a probabilidade de ter ocorrido também o evento B?



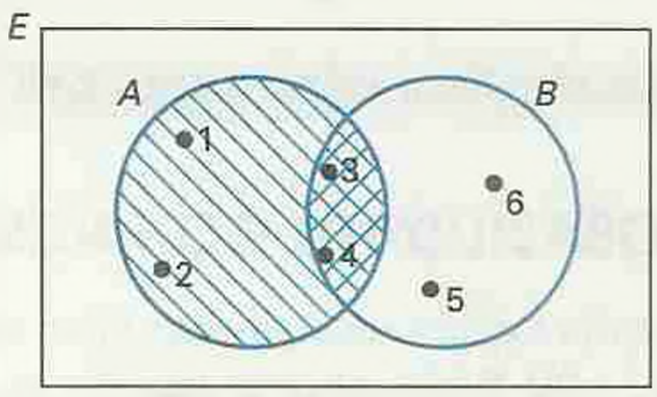
Devemos calcular $P(B/A)$. Como sabemos que ocorreu o evento A, o espaço amostral fica reduzido a esse evento. O evento B, por sua vez, só poderá ocorrer na intersecção de A e B. Assim, temos que:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Note que, se A e B forem mutuamente exclusivos, então $P(B/A) = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.10 No lançamento de um dado, considerar os seguintes eventos $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
Qual é a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo-se que ocorreu o evento A?



Resolução
Sabemos que ocorreu o evento A; logo, o espaço amostral fica reduzido a esse evento. O evento B só poderá ocorrer na intersecção de A e B. Assim, temos:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

R.11 No lançamento de dois dados, sabe-se que se obteve nas faces voltadas para cima a soma dos pontos igual a 6. Qual é a probabilidade de que essas faces apresentem o mesmo número de pontos?

Resolução
Temos dois eventos a considerar:

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$
$$B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Como sabemos que ocorreu o evento A, o evento B só poderá ocorrer na intersecção de A e B, isto é, o par (3, 3). Assim, temos $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.23 Uma urna contém exatamente vinte bolas, numeradas de 1 a 20. Retirando-se ao acaso uma bola dessa urna, observa-se que o número é menor do que 8. Qual é a probabilidade de que esse número seja par?

B.24 (U. F. S. Carlos-SP) Dois dados usuais e não-viciados são lançados. Sabe-se que os números observados são ímpares. Então, a probabilidade de que a soma deles seja 8 é:

a) $\frac{2}{36}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{18}$

B.25 (Osec-SP) O número da chapa de um carro é par. A probabilidade de o algarismo das unidades ser zero é:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{9}$ e) $\frac{1}{5}$

B.26 (UFBA) Todos os 40 alunos de uma classe já leram pelo menos um dos romances *Memórias Póstumas de Brás Cubas* ou *Dom Casmurro*, de Machado de Assis. Vinte e oito alunos já leram *Memórias Póstumas de Brás Cubas* e 31 alunos já leram *Dom Casmurro*. Escolheu-se um desses alunos, ao acaso, constatando-se que ele já havia lido *Dom Casmurro*.

A probabilidade de que o aluno escolhido tenha lido *Memórias Póstumas de Brás Cubas* é:

a) $\frac{3}{31}$ b) $\frac{17}{20}$ c) $\frac{17}{27}$ d) $\frac{19}{31}$ e) $\frac{1}{31}$

Exercícios complementares C.14 e C.15

Eventos independentes

Definição

Seja um espaço amostral E, finito e não-vazio. Sejam A e B eventos de E. Dizemos que A e B são **eventos independentes** se, e somente se:

$$P(B/A) = P(B) \text{ ou } P(A/B) = P(A)$$

Exemplo

Uma moeda é lançada duas vezes. Vamos calcular a probabilidade de:
a) obtermos cara no segundo lançamento;
b) obtermos cara no segundo lançamento, sabendo que obtivemos cara no primeiro lançamento.

Vejamos:
a) O espaço amostral é:

Cara **Coroa**

$$E = \{(c, c), (c, k), (k, k), (k, c)\}$$
$$\therefore n(E) = 4$$

O evento que queremos é $A = \{(c, c), (k, c)\}$
$\therefore n(A) = 2$.

Logo, $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

b) Temos dois eventos a considerar:

cara no primeiro lançamento $(B) \Rightarrow B = \{(c, c), (c, k)\}$
cara no segundo lançamento $(A) \Rightarrow A = \{(c, c), (k, c)\}$

Como sabemos que ocorreu o evento B, temos que o evento A só pode ter ocorrido na intersecção de A e B:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{2}$$

Observando as respostas dos itens (a) e (b), temos que

$P(A/B) = P(A) = \frac{1}{2}$.

Por isso, dizemos que A e B são eventos independentes.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.12 De uma urna com 5 bolas de cores diferentes, azul, vermelha, verde, marrom e preta, foram sorteadas sucessivamente duas bolas. Sabendo que na primeira retirada sorteou-se uma bola vermelha e que esta foi reposta na urna, qual é a probabilidade de que, na segunda retirada, também tenha saído a bola vermelha?

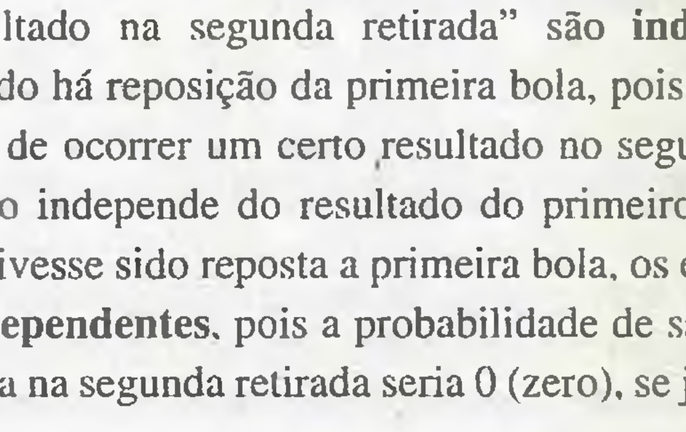
Resolução

Para a segunda retirada a urna continuava com 5 bolas, pois a primeira bola foi reposta. Logo, a probabilidade de ter saído bola vermelha na segunda retirada é $\frac{1}{5}$.

Note que os eventos "resultado na primeira retirada" e "resultado na segunda retirada" são **independentes** quando há reposição da primeira bola, pois a probabilidade de ocorrer um certo resultado no segundo experimento independe do resultado do primeiro. Porém, se não tivesse sido reposta a primeira bola, os eventos seriam **dependentes**, pois a probabilidade de sair bola vermelha na segunda retirada seria 0 (zero), se já tivesse saído bola vermelha na primeira retirada, ou seria $\frac{1}{4}$ em caso contrário. Ou seja, a probabilidade do segundo experimento dependeria do que ocorreu no primeiro.

5. MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Seja E um espaço amostral equiprovável, finito e não-vazio. Sejam A e B eventos de E.



Vimos que $P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$.

Dividindo o numerador e o denominador dessa fração por $n(E)$, temos que:

$$P(B/A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(E)}}{\frac{n(A)}{n(E)}} \Rightarrow$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Nota

Se A e B forem eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Uma urna contém precisamente sete bolas: quatro azuis e três vermelhas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna, registra-se sua cor e repõe-se a bola na urna. A seguir, retira-se novamente uma bola da urna e registra-se sua cor. Calcular a probabilidade de:
a) sair uma bola azul e depois uma vermelha;
b) saírem duas bolas de cores diferentes.

Resolução

A	A	A	A
	V	V	V

Convenção. A e V representam bola azul e bola vermelha, respectivamente.

a) Queremos que a primeira bola retirada seja azul e a segunda seja vermelha. A probabilidade de a primeira bola sair azul é $\frac{4}{7}$ e a probabilidade de a segunda bola sair vermelha é $\frac{3}{7}$. Assim, a probabilidade de obtermos a seqüência:

$$A \text{ e } V \text{ é } P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

Pelo teorema da multiplicação de probabilidades

b) Temos duas seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$A \text{ e } V, \ P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

ou

$$V \text{ e } A, \ P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$$

Assim, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$$

R.14 Uma urna contém exatamente sete bolas: quatro azuis e três vermelhas. Retira-se, ao acaso, uma bola da urna, registra-se sua cor e não se repõe a bola na urna. A seguir, retira-se outra bola da urna, registrando-se sua cor. Calcular a probabilidade de:

a) sair uma bola azul e depois uma vermelha;

b) saírem duas bolas de cores diferentes.

Resolução

A	*A*	*A*	*A*
	V	*V*	*V*

a) A probabilidade de a primeira bola retirada ser azul é $\frac{4}{7}$ e a probabilidade de a segunda bola retirada ser vermelha, sabendo-se que a primeira bola foi azul, é $\frac{3}{6}$ (diminuímos uma unidade no denominador, pois não houve reposição da primeira bola).
Assim, a probabilidade de a seqüência:

$$A \text{ e } V \text{ ocorrer é } P = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

Pelo teorema da multiplicação de probabilidades

b) Temos duas seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$A \text{ e } V,\ P_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

ou

$$V \text{ e } A,\ P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$$

Logo, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

R.15 Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco azuis e quatro vermelhas.

a) Retirando simultaneamente três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

b) Retirando sucessivamente, sem reposição, três bolas da urna, qual a probabilidade de obtermos duas bolas azuis e uma vermelha?

Resolução

a) O espaço amostral E é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna. Assim, temos que:

$$n(E) = C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

O evento A que nos interessa é formado por todos os conjuntos possíveis de três bolas da urna, sendo duas azuis e uma vermelha. Assim, temos que:

$$n(A) = C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$$

Logo, $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{40}{84} = \frac{10}{21}$.

b) Temos três seqüências possíveis, com as respectivas probabilidades:

$$AAV,\ P_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63} \quad \text{ou}$$

$$AVA,\ P_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63} \quad \text{ou}$$

$$VAA,\ P_3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{63}$$

Logo, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{10}{63} + \frac{10}{63} + \frac{10}{63} = \frac{30}{63} = \frac{10}{21}$$

Comparando os itens (a) e (b) do exercício R.15, percebemos que a probabilidade de retirarmos **simultaneamente** as bolas da urna é igual à probabilidade de retirá-las **sucessivamente e sem reposição**. Esse resultado pode ser generalizado da seguinte maneira:

Propriedade

Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ elementos de um conjunto A com n elementos. A probabilidade de se retirar **simultaneamente** esses k elementos do conjunto A é igual à probabilidade de se retirá-los **sucessivamente e sem reposição**.

Sugerimos que todo problema onde for pedida a probabilidade de retiradas **simultâneas** seja transformado em retiradas **sucessivas e sem reposição**. **Cuidado!** Nas retiradas sucessivas a ordem dos elementos retirados deve ser levada em consideração.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.16 Uma urna contém exatamente onze bolas: seis azuis e cinco vermelhas. Retirando-se simultaneamente quatro bolas, qual é a probabilidade de saírem três bolas azuis e uma vermelha?

Resolução

Em vez de retirarmos as bolas **simultaneamente**, resolveremos um problema equivalente, retirando as bolas **sucessivamente e sem reposição**.
Assim, as seqüências que nos interessam, com suas respectivas probabilidades, são:

$$AAAV,\ P_1 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{66} \quad \text{ou}$$

$$AAVA,\ P_2 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66} \quad \text{ou}$$

$$AVAA,\ P_3 = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66} \quad \text{ou}$$

$$VAAA,\ P_4 = \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{66}$$

Assim, a probabilidade total é:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{20}{66} = \frac{10}{33}$$

Nota

Poderíamos ter calculado apenas P_1 e multiplicá-lo por 4, pois todas as seqüências terão a mesma probabilidade.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.27 Uma urna contém precisamente nove bolas: três brancas, duas pretas e quatro azuis. Retirando-se três bolas da urna, uma de cada vez e com reposição, calcule a probabilidade de saírem:
a) a primeira bola branca, a segunda bola preta e a terceira bola azul;
b) três bolas de cores diferentes;
c) três bolas azuis.

B.28 Uma urna contém exatamente sete bolas: três brancas e quatro pretas. Retirando-se sucessivamente e sem reposição três bolas, qual a probabilidade de:
a) saírem as duas primeiras bolas pretas e a terceira branca?
b) saírem duas bolas pretas e uma branca?
c) sair pelo menos uma bola branca?

B.29 Uma urna contém exatamente nove bolas: cinco brancas e quatro pretas. Retirando-se simultaneamente três bolas, qual é a probabilidade de:
a) saírem duas bolas brancas e uma preta?
b) saírem três bolas pretas?
c) sair pelo menos uma bola branca?
d) saírem no máximo duas bolas brancas?

B.30 No lançamento de um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter cara na moeda e a face 5 no dado?

B.31 Uma moeda é lançada cinco vezes. Qual é a probabilidade de se obter:
a) cinco caras? b) três caras e duas coroas?

B.32 (Vunesp) Num grupo de 100 pessoas da zona rural, 25 estão afetadas por uma parasitose intestinal *A* e 11 por uma parasitose intestinal *B*, não se verificando nenhum caso de incidência conjunta de *A* e *B*. Duas pessoas desse grupo são escolhidas, aleatoriamente, uma após a outra. Determine a probabilidade de que, dessa dupla, a primeira pessoa esteja afetada por *A* e a segunda, por *B*.

B.33 (U. E. Londrina-PR) Num baralho comum, de 52 cartas, existem quatro cartas "oito". Retirando-se duas cartas desse baralho, sucessivamente e sem reposição, qual a probabilidade de se obter um par de "oitos"?
a) $\frac{1}{2.704}$ c) $\frac{1}{1.352}$ e) $\frac{1}{442}$
b) $\frac{1}{2.652}$ d) $\frac{1}{221}$

B.34 (FGV-SP) Numa sala existem seis casais; entre estas 12 pessoas, duas são selecionadas ao acaso.
a) Qual a probabilidade de selecionarmos um homem e sua esposa?
b) Qual a probabilidade de selecionarmos dois homens?

B.35 (UNAERP) Em um campeonato de tiro ao alvo, dois finalistas atiram num alvo com probabilidade de 60% e 70%, respectivamente, de acertar. Nessas condições, a probabilidade de ambos errarem o alvo é:
a) 30% b) 42% c) 50% d) 12% e) 25%

Exercícios complementares de C.16 a C.21

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Fuvest-SP) Uma urna contém 9 bolas, numeradas de 1 a 9. Sorteiam-se, com reposição, duas bolas. A probabilidade de que o número da segunda bola seja estritamente maior que o da primeira é:
a) $\frac{72}{81}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{36}{81}$ d) $\frac{30}{81}$ e) $\frac{45}{81}$

C.2 (Vunesp) O resultado de uma pesquisa realizada pelo Ipesp sobre o perfil dos fumantes e publicada pela revista *Veja* de 3/6/98 mostra que, num grupo de 1.000 pessoas, 17% fumam e, dentre os fumantes, 44% são mulheres. Se, nesse grupo de 1.000 pessoas, uma é escolhida ao acaso, a probabilidade de ela ser fumante e mulher é, aproximadamente:
a) 0,044 b) 0,075 c) 0,44 d) 0,0075 e) 0,0044

C.3 (Fuvest-SP) Escolhem-se ao acaso dois números naturais distintos de 1 a 20. Qual é a probabilidade de que o produto dos números escolhidos seja ímpar?
a) $\frac{9}{38}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{9}{20}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{8}{25}$

C.4 A Supersena é uma modalidade de jogo em que o apostador assinala um mínimo de 6 e um máximo de 15 dezenas em um cartão com 48 dezenas. Dentre essas quarenta e oito dezenas são sorteadas seis.

a) Calcule o número de cartões diferentes que podem ser formados com a aposta mínima.
b) Qual é a probabilidade de serem sorteadas as dezenas de um cartão com a aposta mínima?

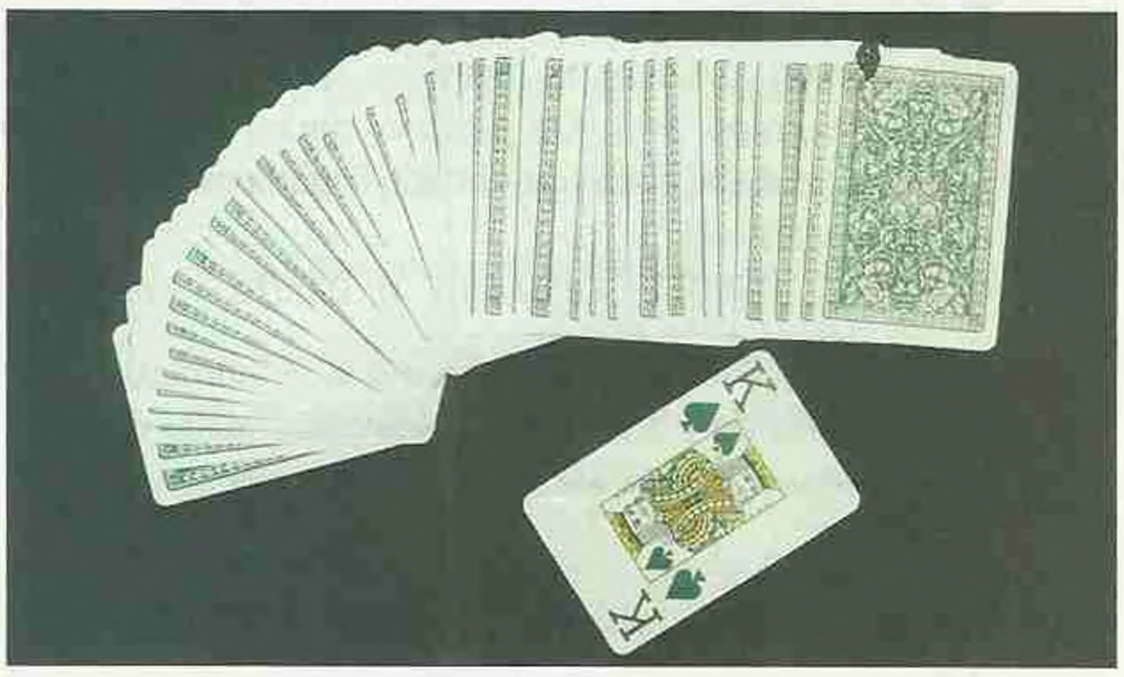
C.5 Márcia precisa telefonar para sua prima Priscilla, mas se esqueceu do número do telefone. Lembra-se apenas de que o número é formado por sete algarismos e que os três primeiros são 8, 6 e 9, nessa ordem. Qual é a probabilidade de, em apenas uma tentativa, Márcia discar o número correto?

C.6 (Enem) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representadas, em cada uma delas, uma das letras T, V ou E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.
I) A probabilidade de o *participante* não ganhar qualquer prêmio é igual a:
a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$
II) A probabilidade de o *concorrente* ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:
a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

C.7 (UFBA) No lançamento de três dados, qual é a probabilidade de que o produto dos três números (de pontos) obtidos seja par? **Sugestão**. Calcule, inicialmente, a probabilidade do evento complementar.

C.8 Um baralho é composto de 52 cartas distribuídas em quatro naipes: ouros (♦), copas (❤), espadas (♠) e paus (♣). Para cada naipe existem treze cartas: A (ás), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J (valete), Q (dama) e K (rei). Sorteando-se, ao acaso, uma carta desse baralho, qual é a probabilidade de se obter um rei ou uma carta de paus?

FOTOS: LUIZ ANTÔNIO



C.9 Em uma conferência estão reunidos: cinco mulheres e sete homens, matemáticos; quatro mulheres e oito homens, físicos; seis mulheres e quatro homens, químicos. Uma pessoa é escolhida, ao acaso, para presidir a conferência. Qual a probabilidade de que essa pessoa seja mulher ou matemático(a)?

C.10 (FGV-SP) Roberto J., administrador recém-formado, envia um currículo para duas empresas *A* e *B*, à procura de emprego. A probabilidade de ser aceito pela empresa *A* é de 25%, a probabilidade de ser aceito pela empresa *B* é 20% e a probabilidade de ser aceito por ambas é 8%.

a) Qual é a probabilidade de ser aceito por ao menos uma empresa?

b) Qual é a probabilidade de ser aceito por exatamente uma empresa?

C.11 Num colégio, a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter 18 anos ou mais é 38% e a probabilidade de ter 18 anos ou menos é 79%. Qual a probabilidade de esse aluno ter exatamente 18 anos?

C.12 (Fuvest-SP) A probabilidade de que a população atual de um país seja de 110 milhões ou mais é 95%. A probabilidade de ela ser de 110 milhões ou menos é 8%. Calcule a probabilidade de essa população ser de 110 milhões.

C.13 Na gôndola de um supermercado há somente sabonetes azuis ou da marca Lux, num total de 140 unidades: 80 azuis e 100 da marca Lux. Retirando-se, ao acaso, um sabonete dessa gôndola, qual é a probabilidade de se obter um sabonete azul da marca Lux?

C.14 Uma pesquisa feita entre setenta pessoas revelou que, 35 já consumiram o produto *A*; cinqüenta já consumiram o produto *B*; e cinco ainda não consumiram nem *A* nem *B*. Escolheu-se uma dessas setenta pessoas ao acaso, e ela já havia consumido o produto *A*. Qual é a probabilidade de que essa pessoa também tenha consumido o produto *B*?

C.15 Um baralho de 52 cartas é constituído por quatro naipes — ouros, paus, espadas e copas —, sendo treze cartas de cada naipe: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K. Escolhida uma carta desse baralho e sabendo que essa carta é um ás (A), qual é a probabilidade de que esse ás seja de copas?

C.16 (Fuvest)

a) Construa o espaço amostral formado pelas oito possibilidades de distribuição de sexo (M ou F) dos três filhos de um casal. Determine nesse espaço os subconjuntos correspondentes aos eventos.
A — Existem crianças de sexos diferentes.
B — Existem pelo menos duas meninas.

b) Supondo que as oito possibilidades são igualmente prováveis, mostre que *A* e *B* são eventos independentes. **Sugestão**. Você deve provar que $P(A/B) = P(A)$ ou que $P(B/A) = P(B)$.

C.17 Num teste de sete questões do tipo "classificar a sentença como verdadeira ou falsa", a probabilidade de um candidato, que responde a todas ao acaso, acertar pelo menos seis questões é:

a) $\frac{1}{256}$ c) $\frac{1}{64}$ e) $\frac{1}{16}$

b) $\frac{1}{128}$ d) $\frac{1}{32}$

C.18 Uma prova é composta de cinqüenta testes de múltipla escolha, cada um com cinco alternativas, sendo apenas uma correta. Qual é a probabilidade de que um aluno, apenas "chutando", acerte todas as questões?

C.19 Uma moeda é lançada 5 vezes. Calcule a probabilidade de se obter a face "cara" voltada para cima em pelo menos um lançamento. **Sugestão**. Calcule inicialmente a probabilidade do evento complementar, isto é, de não se obter nenhuma "cara".

C.20 (SUPRA) Tem-se dois dados, sendo um perfeito e o outro com todas as faces marcadas com 6 pontos. Um deles é escolhido ao acaso e lançado. A probabilidade de se obter 6 é:

a) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{6}{12}$

Sugestão. Você deve calcular a probabilidade: "escolher dado *A* **e** obter 6 **ou** escolher dado *B* **e** obter 6".

C.21 (Vunesp) Um piloto de fórmula 1 estima que suas chances de subir ao pódio numa dada prova são de 60% se chover no dia da prova e de 20%, se não chover. O serviço de meteorologia prevê que a probabilidade de chover durante a prova é de 75%. Nessas condições, calcule a probabilidade de que o piloto venha a subir ao pódio. **Sugestão**. Você deve calcular a probabilidade: "chover **e** ele subir ao pódio **ou** não chover **e** ele subir ao pódio".

Capítulo 46

RETAS E PLANOS

1. INTRODUÇÃO

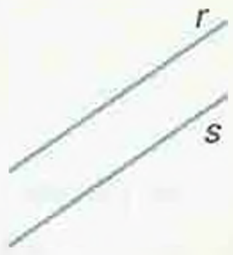
A **geometria de posição** estuda as figuras geométricas quanto à sua forma e posição. Faremos apenas um resumo dessa parte da geometria, pois o nosso objetivo maior é estudar a **geometria métrica**, isto é, estudar as figuras geométricas em relação às suas medidas.

2. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

Já vimos que duas retas coplanares podem ter duas posições relativas possíveis: paralelas (distintas ou coincidentes) ou concorrentes. Recordando:

Retas paralelas

Duas retas coplanares são paralelas se, e somente se, não têm ponto em comum, ou têm todos os seus pontos em comum.

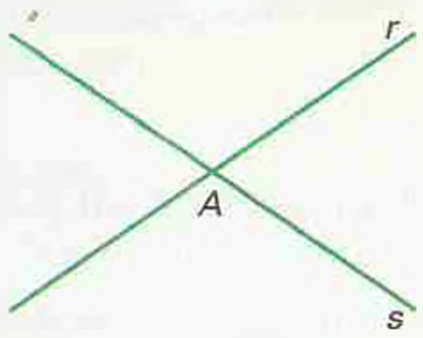


r e *s* são retas paralelas distintas ($r \parallel s$ e $r \neq s$)

r e *s* são retas paralelas coincidentes ($r \equiv s$)

Retas concorrentes

Duas retas são concorrentes se, e somente se, têm um único ponto em comum.



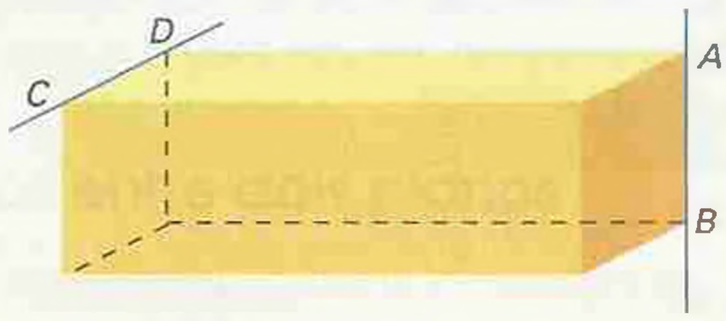
r e *s* são retas concorrentes

No espaço, duas retas podem ter uma outra posição relativa possível: elas podem ser **reversas**.

Retas reversas

Duas retas são reversas se, e somente se, não são coplanares.

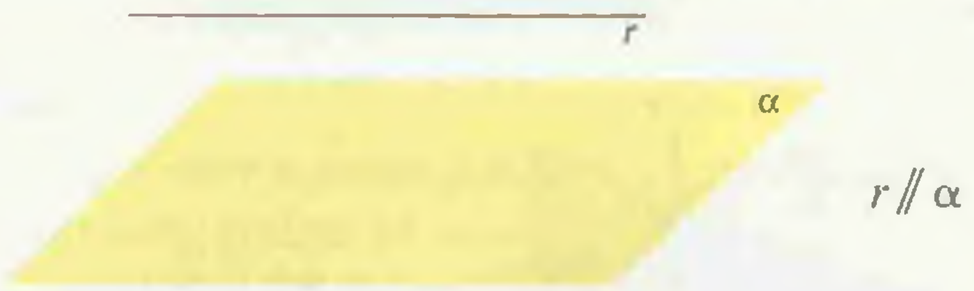
Em outras palavras, duas retas são reversas se, e somente se, não existe um plano que contenha as duas simultaneamente. Para visualizar duas retas reversas, observe a caixa de sapatos abaixo: as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são reversas, pois não existe um plano que contenha ambas ao mesmo tempo.



3. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E PLANO

Reta paralela a plano

Uma reta *r* e um plano α são paralelos se, e somente se, não têm nenhum ponto em comum.



$r \parallel \alpha$

Nota

Dizemos que um segmento de reta $\overline{AB}$ é paralelo a um plano α se, e somente se, a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a α.

Reta secante (ou concorrente) a plano

Uma reta *r* e um plano α são secantes (ou concorrentes) se, e somente se, têm um único ponto em comum.

r é secante a α

Reta contida em plano

Uma reta r está contida num plano α se, e somente se, todos os pontos da reta pertencem ao plano.

$r \subset \alpha$

4. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DOIS PLANOS

Planos paralelos

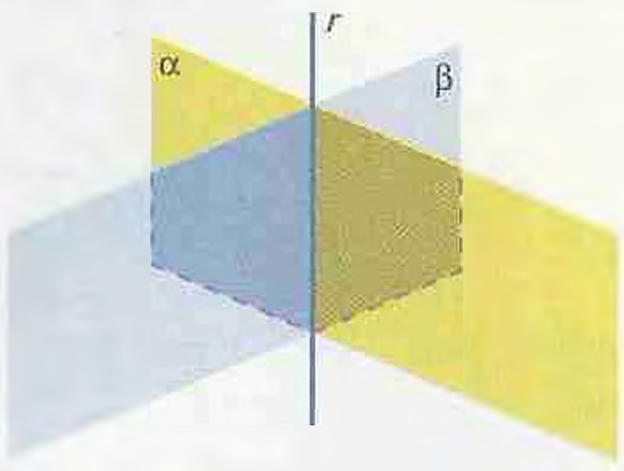
Dois planos são paralelos se, e somente se, não têm ponto em comum, ou têm todos os seus pontos em comum.

α e β são planos paralelos distintos ($\alpha \parallel \beta$ e $\alpha \neq \beta$)

α e β são planos paralelos coincidentes ($\alpha \equiv \beta$)

Planos secantes

Dois planos α e β são secantes se, e somente se, têm uma única reta em comum.

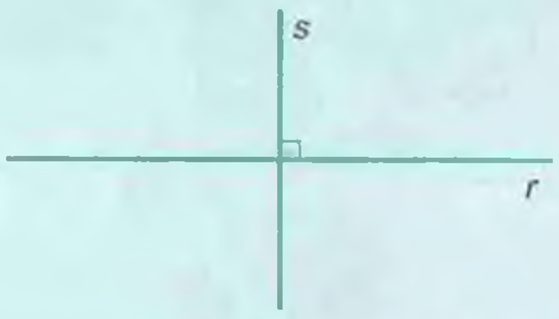


α e β são planos secantes

5. PERPENDICULARIDADE

Retas perpendiculares

Duas retas r e s são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos "retos" entre si.

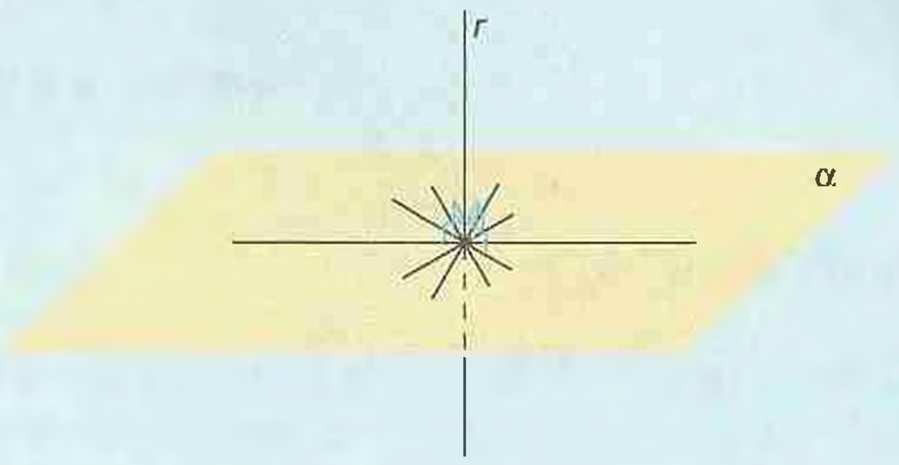


Indicamos que r e s são perpendiculares por:

$r \perp s$ ou $s \perp r$.

Reta perpendicular a plano

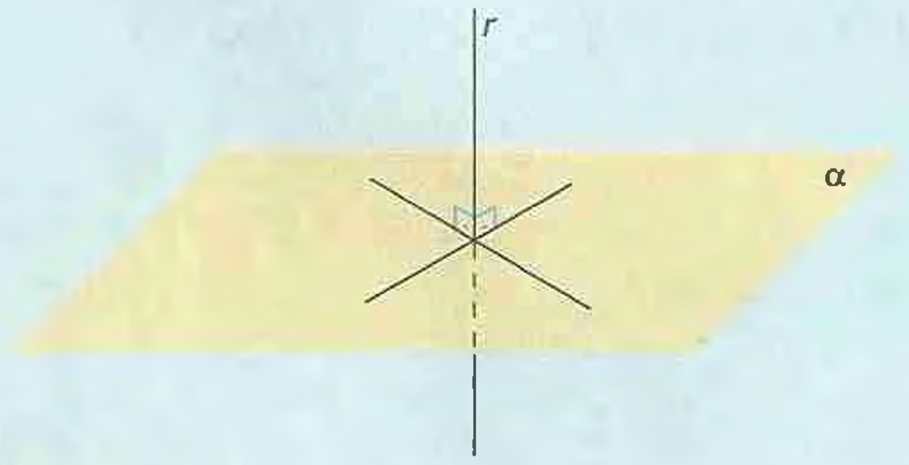
Uma reta r secante a um plano α é perpendicular a α se, e somente se, todas as retas do plano α que concorrem com r são perpendiculares a r.



Indicamos que r é perpendicular a α por $r \perp \alpha$ ou por $\alpha \perp r$.

Teorema

Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano α, então r é perpendicular a α.



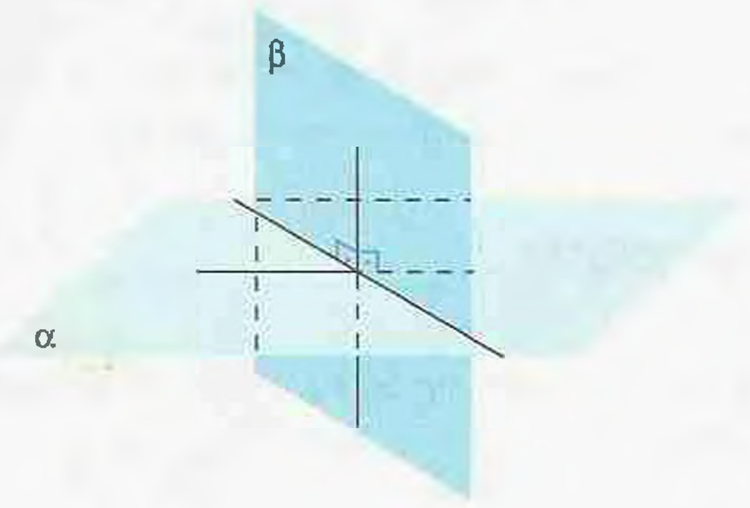
Para visualizar concretamente uma reta perpendicular a um plano, imagine um lustre preso por um fio ao teto de uma sala. O fio do lustre representa uma reta perpendicular ao plano do teto.

Planos perpendiculares

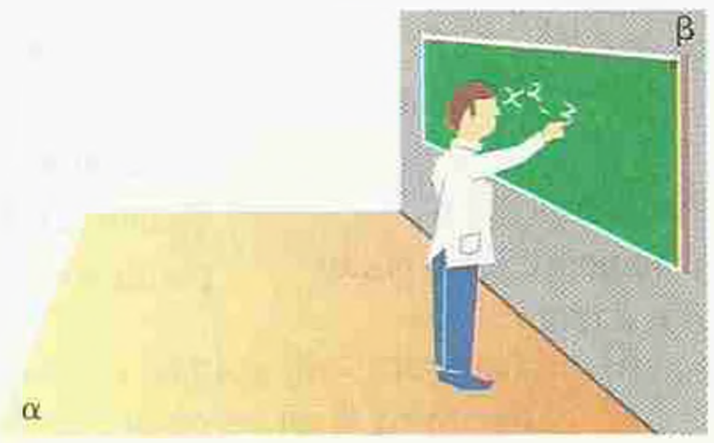
Definição

Dois planos são perpendiculares se, e somente se, existe uma reta contida em um deles e perpendicular ao outro.

Indicamos que um plano α é perpendicular a um plano β pelo símbolo $\alpha \perp \beta$ ou $\beta \perp \alpha$.



Para visualizar concretamente dois planos perpendiculares, observe o plano do piso e o plano de uma das paredes de uma sala de aula:

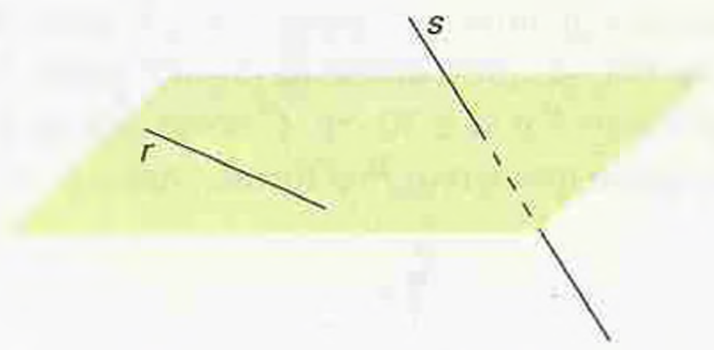


Esses planos são perpendiculares.

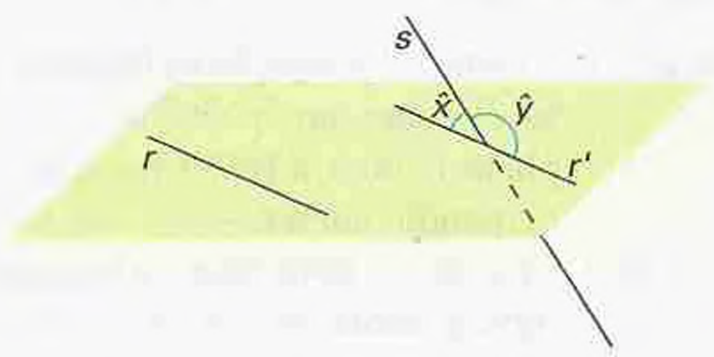
6. ÂNGULOS NO ESPAÇO

Ângulos entre duas retas reversas

Sejam r e s duas retas reversas:



Consideremos uma reta r' paralela a r e concorrente com s.

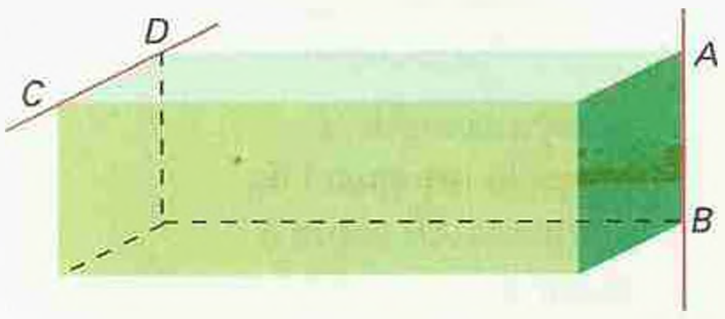


A reta r' forma com a reta s os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$. Definem-se como ângulos formados pelas retas reversas r e s os próprios ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

Quando duas retas são reversas e formam ângulos retos entre si, elas são chamadas de **retas ortogonais**.

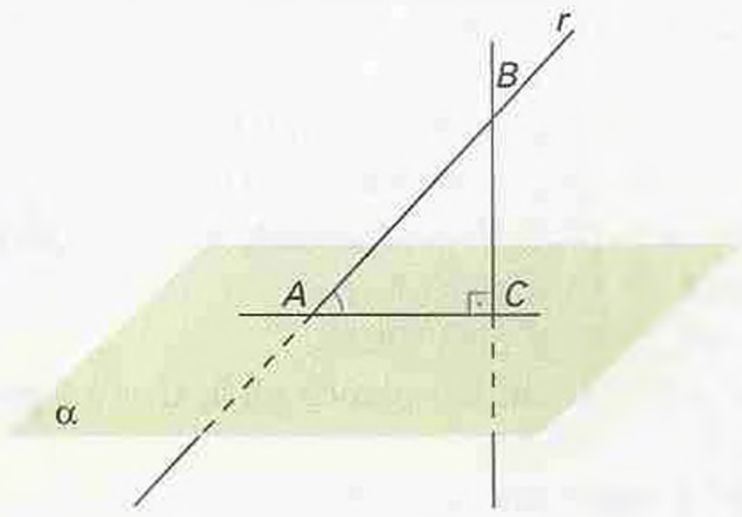
Exemplo

Na caixa de sapatos abaixo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são reversas e formam ângulos retos entre si, por isso, são chamadas de **retas ortogonais**.



Ângulos entre reta e plano

Consideremos uma reta r secante a um plano α em um ponto A; e um ponto B dessa reta, $B \neq A$. Sendo $\overleftrightarrow{BC}$ a reta perpendicular a α em C, os ângulos formados por r e $\overleftrightarrow{AC}$ são os ângulos formados por r e α.

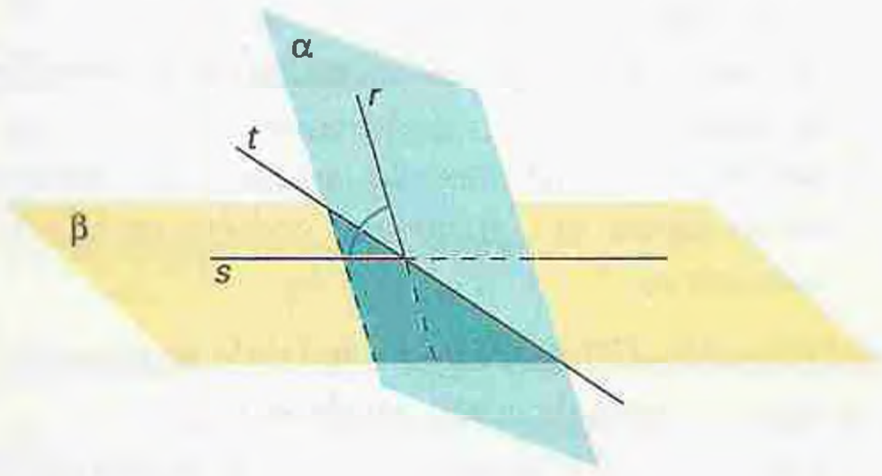


Nota

Se a reta é paralela ao plano ou está contida nele, então o ângulo formado por ambos é o ângulo nulo.

Ângulos entre dois planos

Consideremos dois planos secantes α e β, cuja reta comum é t. Sendo r e s retas contidas em α e β, respectivamente, tal que $r \perp t$ e $s \perp t$, os ângulos entre r e s são os ângulos entre α e β.

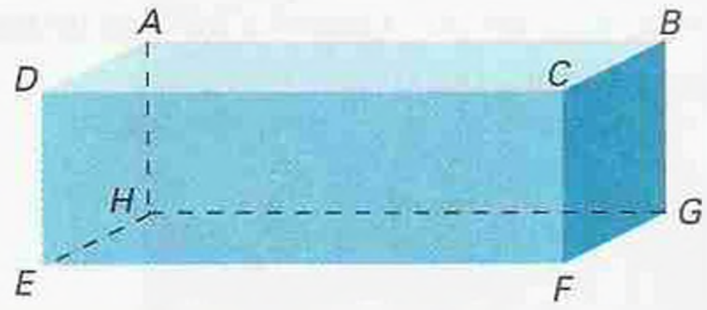


Notas

1. As retas r e s não precisam ser, necessariamente, concorrentes; podem ser reversas.
2. O ângulo formado entre dois planos paralelos é o ângulo nulo.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Tomando como modelo a caixa de sapatos abaixo



classifique cada uma das afirmações seguintes como V ou F:

a) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$.
b) $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HG}$.
c) $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{FG}$.
d) $\overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas.
e) $\overleftrightarrow{CF}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ são reversas.
f) As retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são concorrentes.

g) As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são coplanares.
h) As retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{HF}$ são coplanares.
i) $\overleftrightarrow{AB} \parallel$ pl(F, G, H).

Nota

O símbolo pl(F, G, H) indica o plano que passa pelos pontos F, G e H.

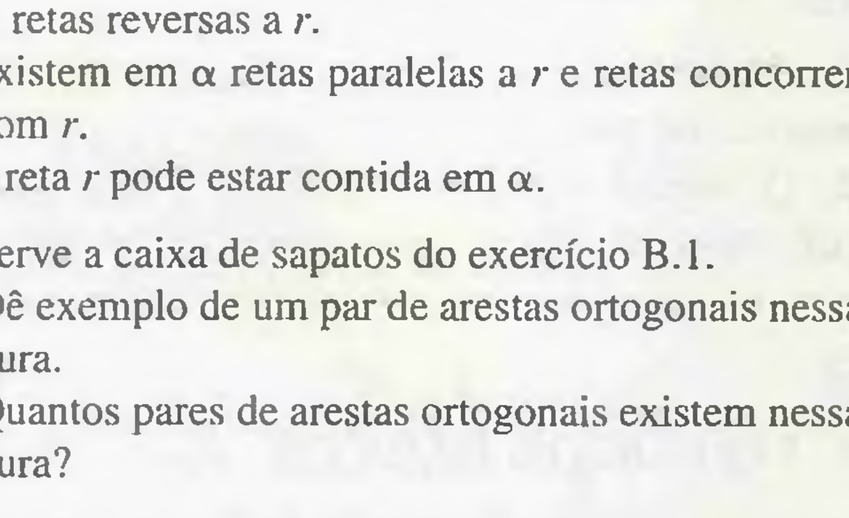
j) $\overleftrightarrow{AC} \parallel$ pl(B, C, G).
k) $\overleftrightarrow{AB} \subset$ pl(H, G, B).
l) $\overleftrightarrow{EF} \subset$ pl(F, G, B).
m) $\overleftrightarrow{AD}$ é secante ao plano pl(H, G, F).
n) $\overleftrightarrow{EB}$ é secante ao plano pl(B, G, F).
o) O plano pl(A, B, C) é secante ao plano pl(H, G, B).
p) pl(A, B, C) $\parallel$ pl(H, E, F).
q) pl(A, B, C) $\parallel$ pl(A, D, C).
r) A reta comum aos planos pl(B, G, F) e pl(A, B, C) é $\overleftrightarrow{CF}$.
s) $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BG}$.
t) $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{BG}$.
u) $\overleftrightarrow{EC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{CF}$.
v) $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{CE}$.
w) $\overleftrightarrow{DC}$ é perpendicular ao plano pl(B, G, F).
x) $\overleftrightarrow{DF}$ é perpendicular ao plano pl(E, F, G).
y) pl(C, B, G) $\perp$ pl(A, B, C).
z) pl(A, C, F) $\perp$ pl(E, H, F).

B.2 (PUC-SP) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
a) Se duas retas distintas não são paralelas, então elas são concorrentes.
b) Duas retas não-coplanares são reversas.
c) Se a intersecção de duas retas é o conjunto vazio, então elas são paralelas.
d) Se três retas são paralelas, então existe um plano que as contém.
e) Se três retas distintas são concorrentes, duas a duas, então existe um plano que contém as três simultaneamente.

B.3 (Mackenzie-SP) Se a reta r é paralela ao plano α, então:
a) todas as retas de α são paralelas a r.
b) a reta r não é coplanar com nenhuma reta de α.
c) existem em α retas paralelas a r e também existem em α retas reversas a r.
d) existem em α retas paralelas a r e retas concorrentes com r.
e) a reta r pode estar contida em α.

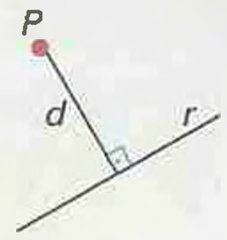
B.4 Observe a caixa de sapatos do exercício B.1.
a) Dê exemplo de um par de arestas ortogonais nessa figura.
b) Quantos pares de arestas ortogonais existem nessa figura?

B.5 Uma reta r é perpendicular a um plano α, e uma reta s concorre com r em um ponto A, $A \notin \alpha$, e forma com r um ângulo de 50°. Qual é a medida de um ângulo agudo que s forma com α?

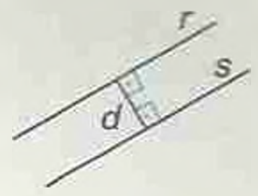


B.6 Definição 1. A distância entre dois pontos A e B é a medida do segmento $\overline{AB}$.

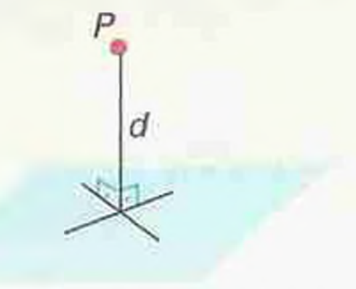
Definição 2. A distância entre duas figuras é a medida do menor segmento que liga uma figura a outra.



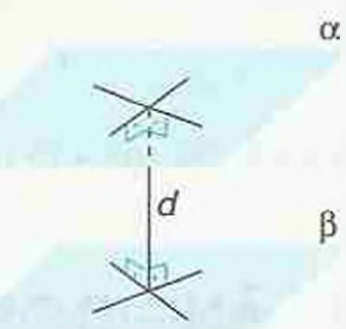
A medida d é a distância entre o ponto P e a reta r.



A medida d é a distância entre as retas paralelas r e s.



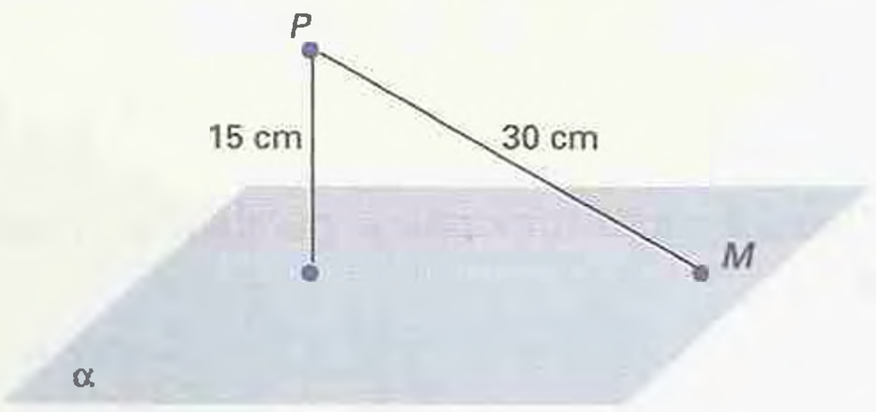
A medida d é a distância entre o ponto P e o plano α.



A medida d é a distância entre os planos paralelos α e β.

De acordo com essas definições, resolva o problema a seguir.

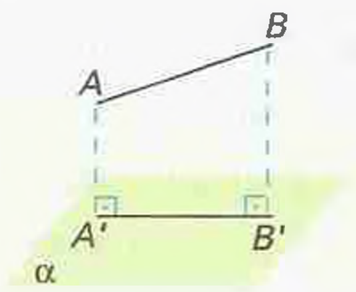
Dados um plano α e os pontos M e P, com $M \in \alpha$ e $P \notin \alpha$, tem-se que a distância entre P e α é 15 cm e a distância entre P e M é 30 cm. Calcule a medida de um ângulo agudo que a reta $\overleftrightarrow{PM}$ forma com o plano α.



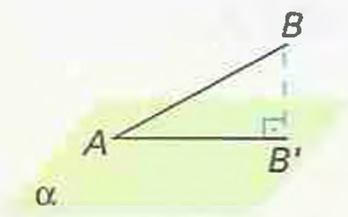
B.7 Definição 1. Chama-se **projeção ortogonal de um ponto** P sobre um plano α a intersecção do plano α com a reta r que passa por P e é perpendicular a α.

Definição 2. Chama-se **projeção ortogonal de uma figura** sobre um plano α o conjunto de todas as projeções ortogonais dos pontos da figura sobre esse plano.

O ponto P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α.



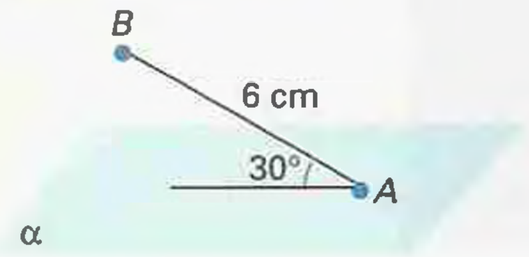
O segmento $\overline{A'B'}$ é projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano α.



O segmento $\overline{AB'}$ é projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano α.

De acordo com essas definições, resolva o problema a seguir.

Um ponto A, pertencente a um plano α, e um ponto B, $B \notin \alpha$, são tais que $\overline{AB}$ mede 6 cm e a reta $\overline{AB}$ forma com α um ângulo de 30°.

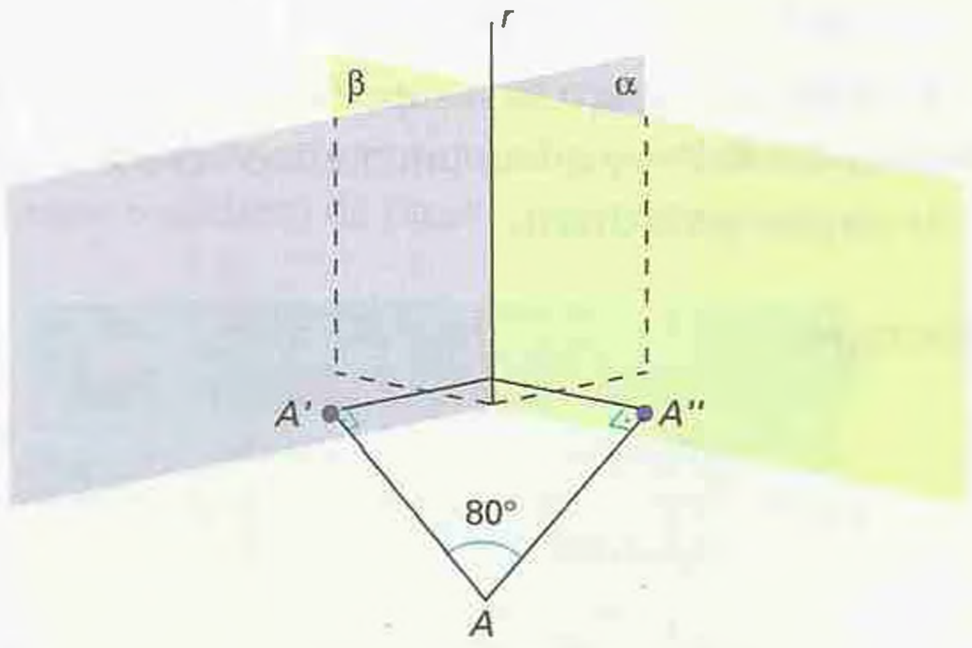


Calcule:

a) a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α;

b) a distância do ponto B ao plano α.

B.8 Dois planos α e β são secantes. As projeções ortogonais de um ponto A, $A \notin \alpha$ e $A \notin \beta$, sobre α e β são, respectivamente, A' e A''. Sabendo que o ângulo $A'\hat{A}A''$ mede 80°, determine a medida de um ângulo agudo formado por α e β.



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Faap-SP) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede. Das retas assinaladas podemos afirmar que:

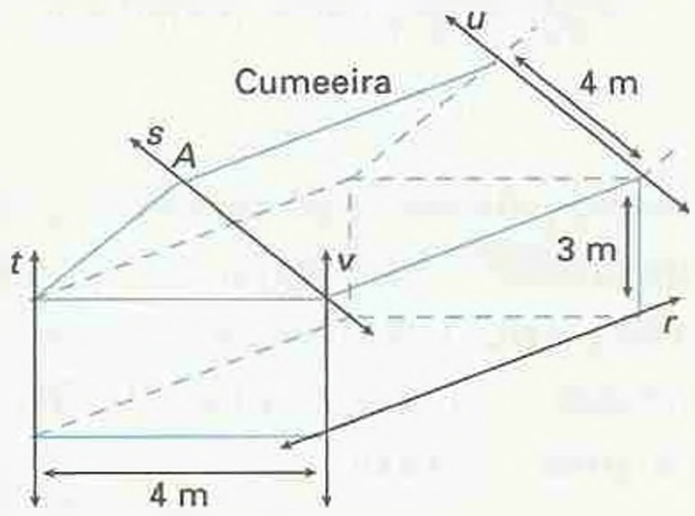
a) t e u são reversas.

b) s e u são reversas.

c) t e u são concorrentes.

d) s e r são concorrentes.

e) t e u são perpendiculares.

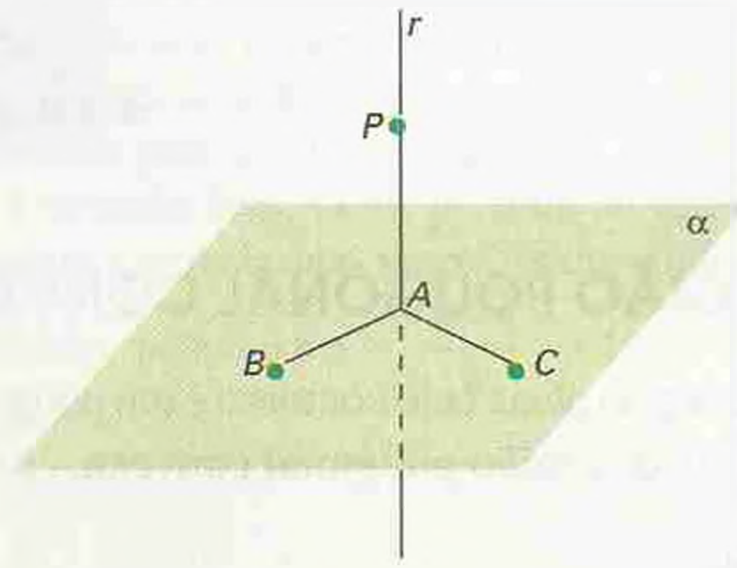


C.2 (Fuvest-SP) São dados cinco pontos não-coplanares A, B, C, D e E. Sabe-se que $ABCD$ é um retângulo, $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{AD}$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

a) $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{EB}$ c) $\overrightarrow{EA}$ e $\overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BE}$

b) $\overrightarrow{EB}$ e $\overrightarrow{BA}$ d) $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{CA}$

C.3 (U. E. Londrina-PR) Na figura abaixo, tem-se o ponto P que dista 12 cm do plano α. Traça-se por P a reta r, perpendicular a α e que o intercepta em A. Os pontos B e C, de α, são tais que $BP = 13$ cm, $CP = 15$ cm e $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.



Nessas condições, a medida de $\overline{BC}$, em centímetros, é igual a:

a) $3\sqrt{5}$ c) $\sqrt{106}$ e) 12

b) $\sqrt{93}$ d) 11

C.4 (U. E. Londrina-PR) A reta r é a intersecção dos planos perpendiculares α e β. Os pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $A \notin \beta$, $B \in \beta$, $B \notin \alpha$. As retas $\overrightarrow{AB}$ e r:

a) são reversas.

b) são coincidentes.

c) podem ser concorrentes.

d) podem ser paralelas.

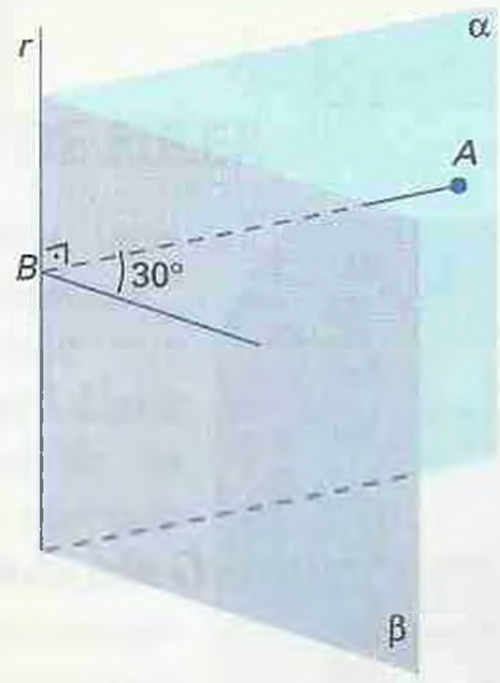
e) podem ser perpendiculares.

C.5 (Cesgranrio) A é um ponto não-pertencente a um plano α. O número de retas que passam por A e fazem um ângulo de 45° com α é igual a:

a) 0 c) 2 e) infinito

b) 1 d) 4

C.6 Dois planos secantes α e β formam entre si um ângulo de 30° e têm em comum a reta r. Os pontos A e B são tais que $A \in \alpha$, $B \in r$, $\overline{AB} \perp r$ e $\overline{AB}$ mede 8 m. Calcule a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre β.



Capítulo 47

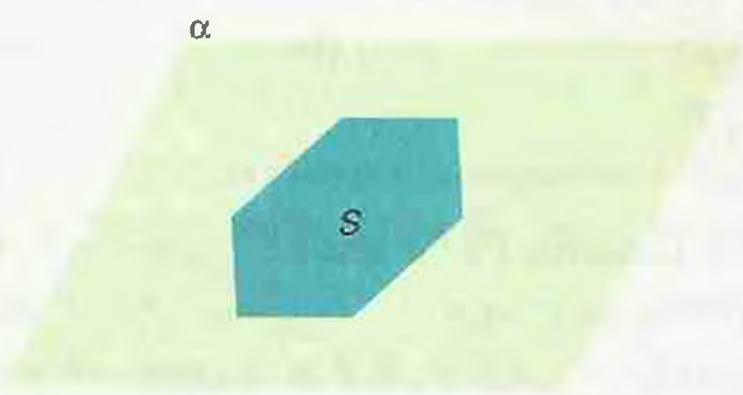
POLIEDROS

1. REGIÃO POLIGONAL CONVEXA

Toda região plana cujo contorno é um polígono convexo é chamada de **região poligonal convexa**.

Exemplo

A região S da figura abaixo é uma **região poligonal convexa**.



2. POLIEDRO CONVEXO

Consideremos um conjunto G obtido pela reunião de n, $n \geqslant 4$, regiões poligonais convexas tais que:

I. não há duas dessas regiões contidas em um mesmo plano;

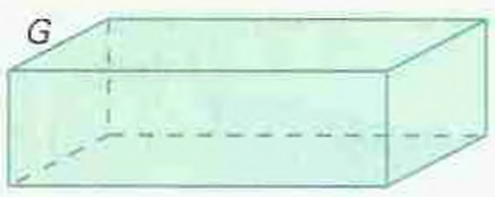
II. cada lado de qualquer uma dessas regiões é lado de duas e somente duas delas;

III. o plano que contém qualquer uma dessas regiões deixa as demais em um mesmo semi-espaço.

A porção finita do espaço cuja superfície é o conjunto G é chamada de **poliedro convexo**.

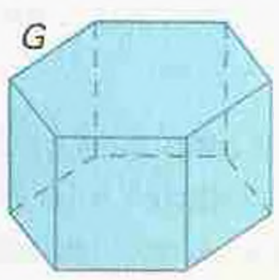
Exemplos

a)

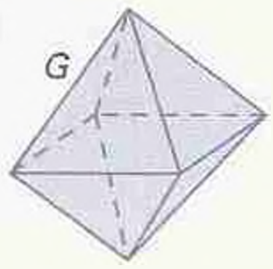


b)

c)

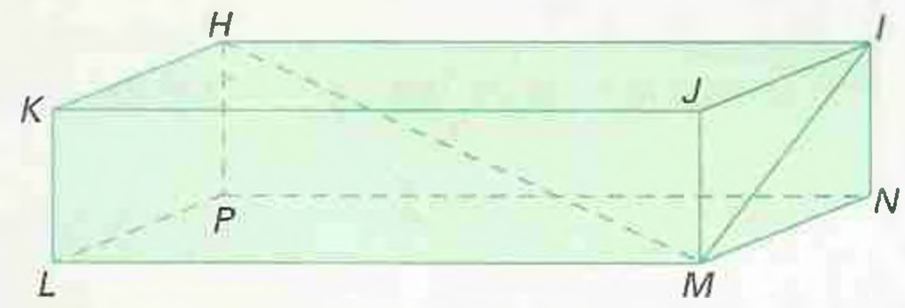


d)



- As regiões poligonais de G são chamadas de **faces** do poliedro convexo.
- Cada lado de uma face qualquer é chamada de **aresta** do poliedro convexo.
- Cada vértice de uma face qualquer é chamado de **vértice** do poliedro convexo.
- **Diagonal de uma face** é qualquer diagonal do polígono dessa face.
- **Diagonal do poliedro** é qualquer segmento de reta cujos extremos são dois vértices que não pertencem a uma mesma face.
- O conjunto G é chamado de **superfície** do poliedro convexo.
- A porção do espaço cuja superfície é a reunião dos ângulos das faces que têm um mesmo vértice é chamada de **ângulo poliédrico**.

Exemplo



A região poligonal $HIJK$ é uma das seis faces do poliedro.

O segmento $\overline{JM}$ é uma das doze arestas do poliedro.

O ponto J é um dos oito vértices do poliedro.

O segmento $\overline{IM}$ é diagonal da face $INMJ$.

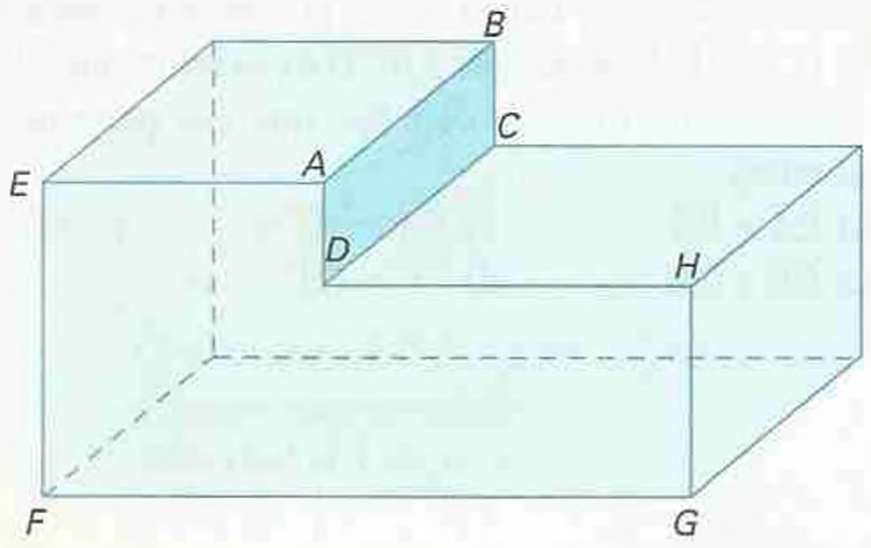
O segmento $\overline{HM}$ é diagonal do poliedro.

A reunião das seis faces é a superfície do poliedro.

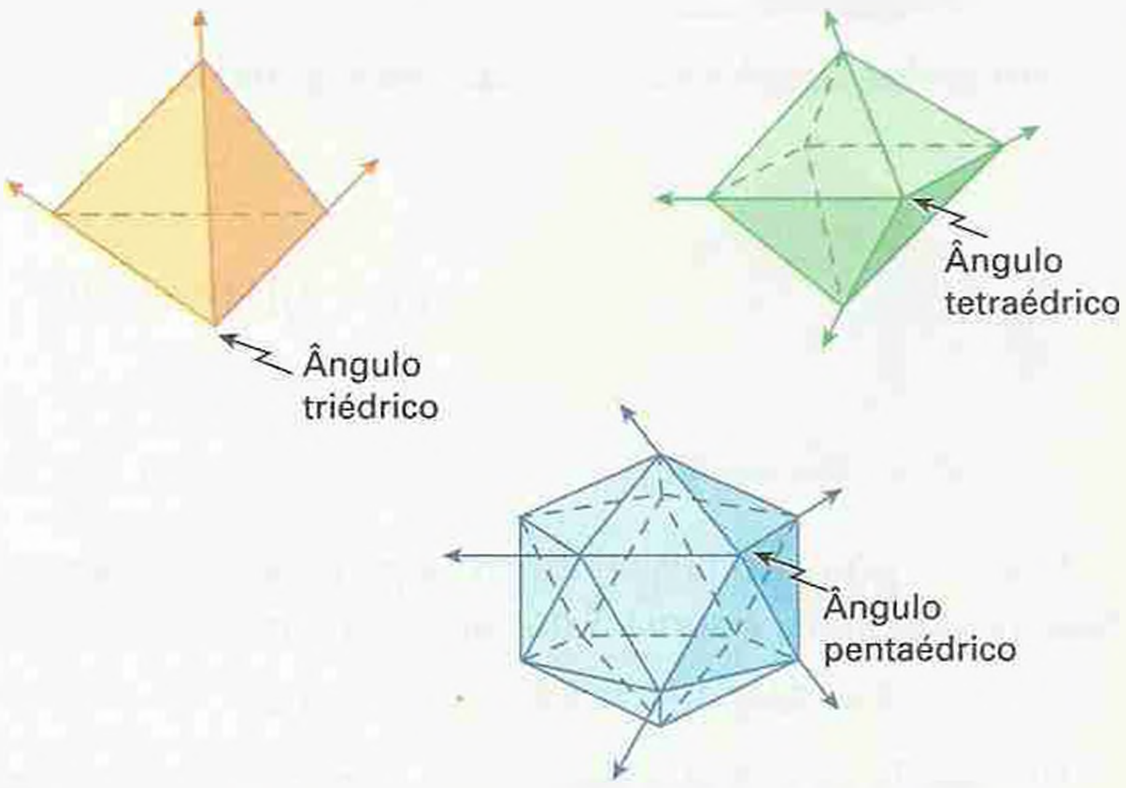
A porção do espaço limitada pelos ângulos de faces $I\hat{J}M$, $K\hat{J}I$ e $K\hat{J}M$ é um ângulo poliédrico.

Notas

1. Existem poliedros não-convexos, como, por exemplo, o poliedro da figura a seguir. Isso porque o plano que contém a face $ABCD$ não deixa as demais faces num mesmo semi-espaço, ou porque a face $ADHGFE$ não é uma região poligonal convexa.



2. Ângulos poliédricos com 3, 4, 5, ... arestas são chamados de **ângulos triédricos**, **tetraédricos**, **pentaédricos**, ..., respectivamente.



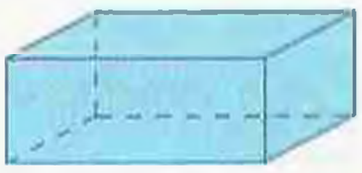
Nomenclatura

Os poliedros, convexos ou não, recebem nomes de acordo com o número de faces que possuem:

Número de faces	Nome
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
13	Tridecaedro
⋮	⋮
20	Icosaedro

Exemplos

a)

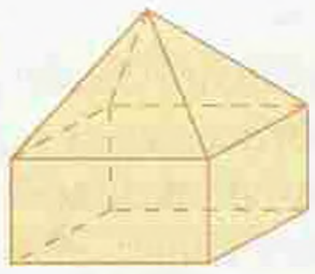


Hexaedro

b)

Octaedro

c)



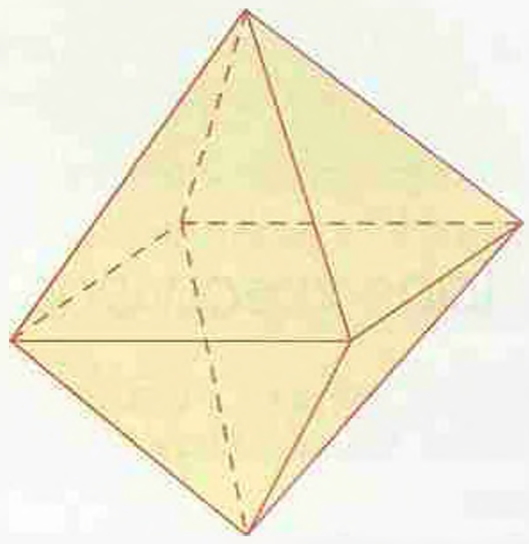
Eneaedro

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Um octaedro convexo possui todas as faces triangulares. Quantas arestas possui esse poliedro?

Resolução

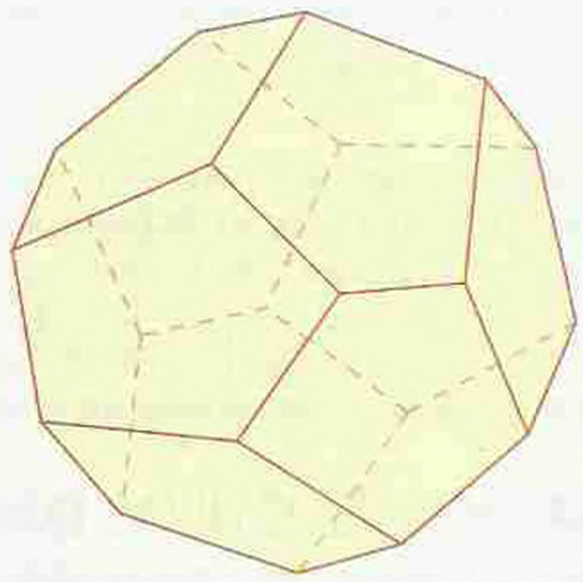
O poliedro possui oito faces e cada face possui três arestas. Multiplicando o número de faces pelo número de arestas de cada uma, $8 \cdot 3$, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta é lado de duas, e somente duas, faces; portanto no cálculo $8 \cdot 3$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas desse poliedro é $A = \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$.



R.2 Um poliedro é constituído por vinte ângulos triédricos. Quantas arestas possui o poliedro?

Resolução

O poliedro possui vinte vértices. De cada vértice partem três arestas. Multiplicando o número de vértices pelo número de arestas que partem de cada vértice, $20 \cdot 3$, obtemos o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta une dois, e apenas dois, vértices do poliedro; portanto no cálculo $20 \cdot 3$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas do poliedro é $A = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30$.



3. RELAÇÃO DE EULER

"Parece que meu lápis me supera em inteligência." Essa frase teria sido dita pelo suíço Leonhard Euler sobre sua capacidade de produzir e criar em matemática. Nenhum outro matemático produziu tanto quanto Euler, que publicou mais de 500 livros e artigos durante toda a sua vida.

MANSELL COLLECTION

Leonhard Euler (1707-1783).

Em seus estudos sobre superfícies, Euler demonstrou o teorema:

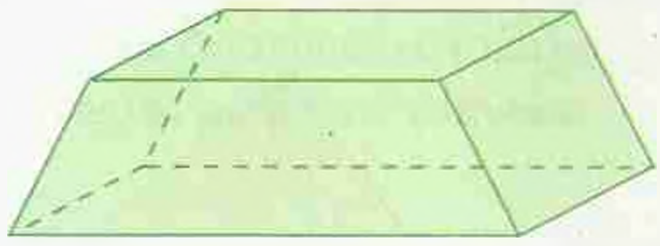
Em todo poliedro **convexo** cujo número de vértices é V, o número de arestas é A e o número de faces é F, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

Exemplo

No poliedro convexo abaixo temos $V = 8$, $A = 12$ e $F = 6$. Observe que:

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.3 Um poliedro convexo é constituído por doze arestas e oito vértices. Quantas faces possui esse poliedro?

Resolução

Pela relação de Euler, temos que $V - A + F = 2$, para qualquer poliedro convexo.

Como $V = 8$ e $A = 12$, obtemos:

$$8 - 12 + F = 2 \Rightarrow F = 6$$

Logo, o poliedro possui seis faces.

R.4 Um dodecaedro convexo possui todas as faces pentagonais. Quantos vértices possui esse poliedro?

Resolução

O poliedro possui doze faces e cada face possui cinco arestas. O produto do número de faces pelo número de arestas de cada face, $12 \cdot 5$, é o dobro do número de arestas do poliedro. Isso porque cada aresta é lado de duas e apenas duas faces; portanto no cálculo $12 \cdot 5$ cada aresta é contada duas vezes. Assim, o número A de arestas do poliedro é $A = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$.

Temos então que $A = 30$, $F = 12$ e o dodecaedro é convexo. Como a relação de Euler nos garante que $V - A + F = 2$ para todo poliedro convexo, temos:

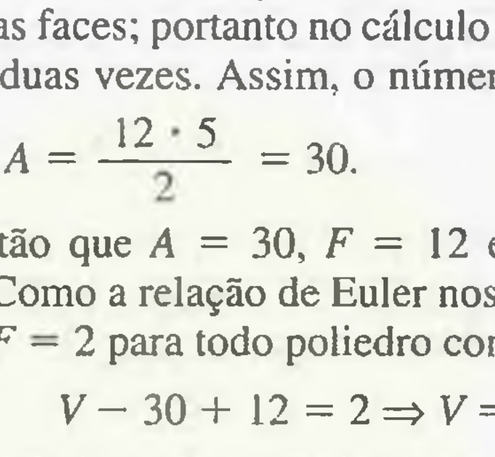
$$V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$$

Portanto, o dodecaedro possui vinte vértices.

4. SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES DE UM POLIEDRO CONVEXO

Consideremos um poliedro convexo com duas faces pentagonais e cinco faces quadrangulares. Para calcular a soma dos ângulos de suas faces, basta lembrar que a soma S_i dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é dada por:

$$S_i = (n - 2)180°$$

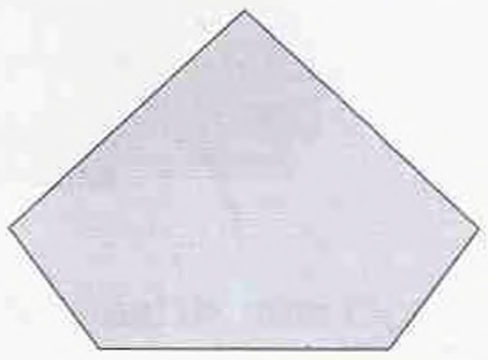


Assim, temos que:

- a soma dos ângulos de uma face quadrangular é:

$$S_i = (4 - 2)180° = 360°$$

- a soma dos ângulos de uma face pentagonal é:



$$S_i = (5 - 2)180° = 540°$$

Como o poliedro possui cinco faces quadrangulares e duas pentagonais, a soma S dos ângulos das faces é:

$$S = 360° \cdot 5 + 540° \cdot 2 = 2.880°$$

Efetuando os cálculos anteriores, genericamente, para um poliedro convexo cujo número de vértices é V, chega-se ao resultado apresentado no teorema a seguir.

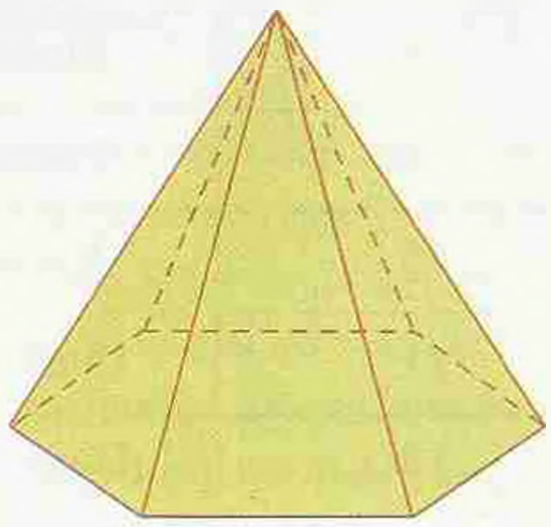
Teorema

A soma S dos ângulos das faces de um poliedro convexo que possui V vértices é:

$$S = (V - 2)360°$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Qual é a soma dos ângulos das faces do poliedro convexo abaixo?



Resolução

A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é dada por $S = (V - 2)360°$. Como o poliedro em questão é constituído por 7 vértices, temos $S = (7 - 2)360°$, ou seja, $S = 1.800°$.

5. POLIEDROS REGULARES

Definição

Um poliedro convexo é regular se, e somente se, forem obedecidas as seguintes condições:

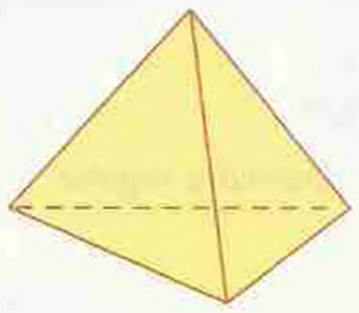
I. todas as suas faces são regiões poligonais regulares e congruentes entre si;
II. todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Nota

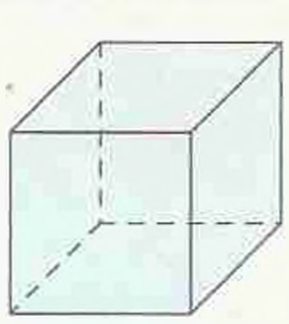
Dois ângulos poliédricos são congruentes quando as medidas dos ângulos de suas faces são, respectivamente, iguais.

Exemplos

a) Um **tetraedro regular** possui:
- em todas as suas faces regiões poligonais triangulares regulares (triângulos equiláteros) congruentes entre si;
- todos os ângulos triédricos congruentes entre si.

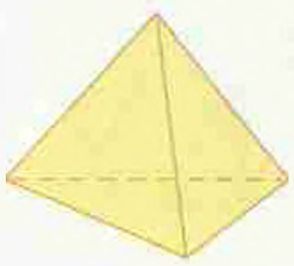


b) Um **hexaedro regular**, ou **cubo**, possui:
- todas as faces quadradas e congruentes entre si;
- todos os ângulos triédricos trirretângulos.

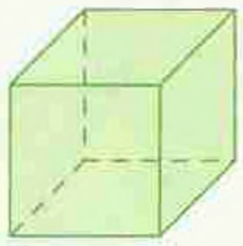


Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares.

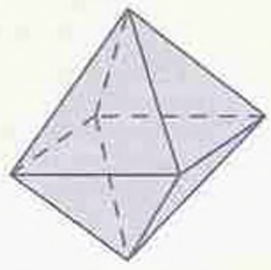
As cinco figuras seguintes mostram um exemplo de cada classe de poliedros regulares:



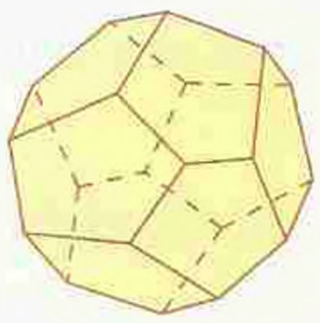
Tetraedro regular



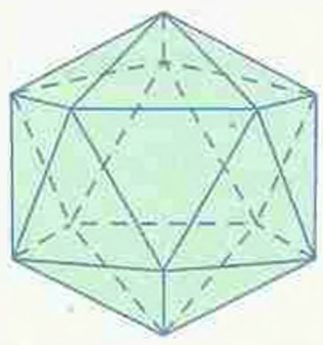
Hexaedro regular



Octaedro regular



Dodecaedro regular



Icosaedro regular

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Um icosaedro convexo possui todas as faces triangulares. Quantas arestas possui esse poliedro?

B.2 Um poliedro convexo é constituído por três faces triangulares, cinco quadrangulares e sete pentagonais. Quantas arestas possui esse poliedro?

B.3 Sabendo que um poliedro convexo é constituído por doze ângulos triédricos (ângulos de três arestas), quantas arestas possui esse poliedro?

B.4 Dado que um poliedro convexo é constituído por cinco ângulos triédricos, cinco ângulos tetraédricos (quatro arestas) e um ângulo pentaédrico (cinco arestas), quantas arestas possui esse poliedro?

B.5 Qual é o número de faces de um poliedro convexo constituído por dezesseis vértices e 24 arestas?

B.6 O número de faces de um poliedro convexo é igual ao número de vértices. Sabendo que esse poliedro é constituído por dez arestas, determine o seu número de vértices.

B.7 Calcule o número de arestas de um poliedro convexo constituído por treze faces e 22 vértices.

B.8 O número de arestas de um octaedro convexo é o dobro do número de vértices. Quantas arestas possui esse poliedro?

B.9 (UFPE) Um poliedro convexo possui dez faces com três lados, dez faces com quatro lados e uma face com dez lados. Determine o número de vértices desse poliedro.

B.10 (Cesgranrio) Um poliedro convexo tem catorze vértices. Em seis desses vértices concorrem quatro arestas, em quatro desses vértices concorrem três arestas e, nos demais vértices, concorrem cinco arestas. O número de faces desse poliedro é igual a:
a) 16 b) 18 c) 24 d) 30 e) 44

B.11 Calcule a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por seis vértices.

B.12 Qual é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo constituído por onze faces e 27 arestas?

B.13 (UFPE) Unindo-se o centro de cada face de um cubo, por segmentos de reta, aos centros das faces adjacentes, obtém-se as arestas de um poliedro regular. Quantas faces tem esse poliedro?

B.14 (Faap-SP) Considere um tetraedro regular e um plano que o intercepta. A única alternativa correta é:
a) A intersecção pode ser um quadrilátero.
b) A intersecção é sempre um triângulo.
c) A intersecção é sempre um triângulo equilátero.
d) A intersecção nunca é um triângulo equilátero.
e) A intersecção nunca é um triângulo isósceles.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Existe poliedro convexo que possua o número de vértices igual ao número de arestas? Por quê?

C.2 Prove que, "se um poliedro convexo possui o número de vértices igual ao número de faces, então o número de arestas é par".

C.3 Existe poliedro convexo constituído por V vértices, A arestas e F faces, de modo que $V + A + F = 17$? Por quê?

C.4 (Mackenzie-SP) Sabe-se que um poliedro convexo tem oito faces e que o número de vértices é maior do que seis e menor do que catorze. Então o número A de arestas é tal que:
a) $14 \leqslant A \leqslant 20$
b) $14 < A < 20$
c) $13 < A < 19$
d) $13 \leqslant A \leqslant 19$
e) $17 \leqslant A \leqslant 20$

C.5 (Fuvest-SP) Quantas faces tem um poliedro convexo com seis vértices e nove arestas? Desenhe um poliedro que satisfaça essas condições.

C.6 (UFRS) Um poliedro convexo de onze faces tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Os números de arestas e de vértices do poliedro são, respectivamente:
a) 34 e 10 c) 34 e 20 e) 19 e 12
b) 19 e 10 d) 12 e 10

C.7 (Cefet-RJ) Um poliedro convexo de dezessete arestas e doze vértices tem somente faces quadrangulares e heptagonais. Os números de faces quadrangulares e heptagonais são, respectivamente, iguais a:
a) 5 e 2 c) 3 e 4 e) 4 e 7
b) 2 e 5 d) 4 e 3

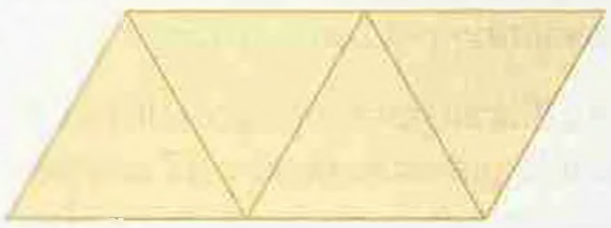
C.8 Todas as faces de um poliedro convexo são quadrangulares. Sabendo que a soma dos ângulos dessas faces é 4.320°, determine o número de arestas desse poliedro.

C.9 Um poliedro convexo é constituído apenas por ângulos triédricos e ângulos tetraédricos (quatro arestas). Sabendo que esse poliedro possui vinte arestas e que a soma dos ângulos das faces é 3.600°, determine quantos ângulos triédricos e quantos tetraédricos possui o poliedro.

C.10 Qual é o poliedro cujos vértices são os centros das faces de um octaedro regular?

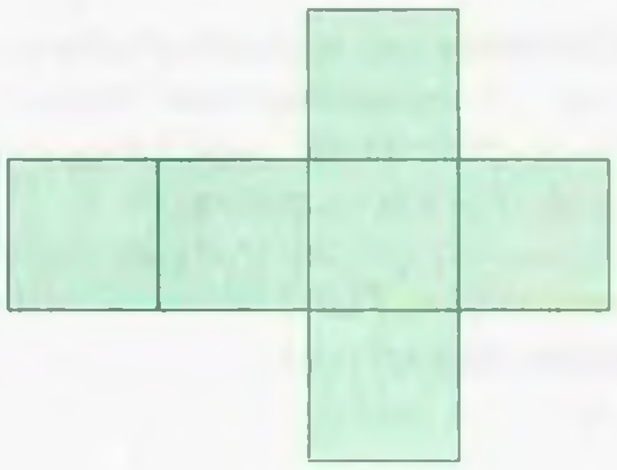
C.11 Desenhe em uma cartolina cada uma das figuras seguintes, com 5 cm de aresta. Recorte-as e construa cada um dos poliedros:

a)



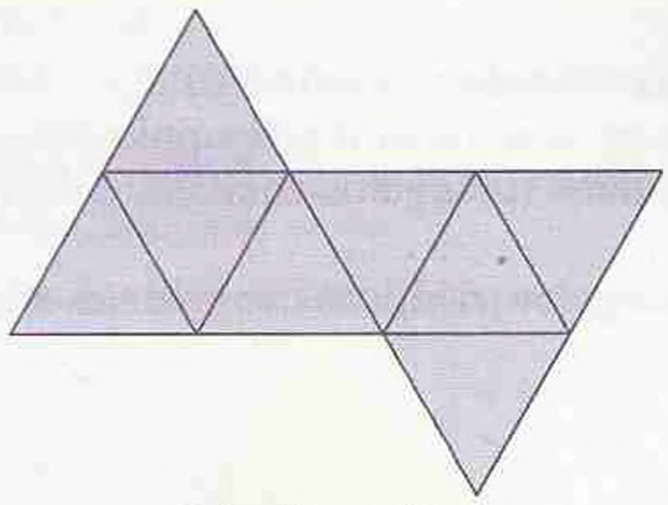
Tetraedro regular

b)



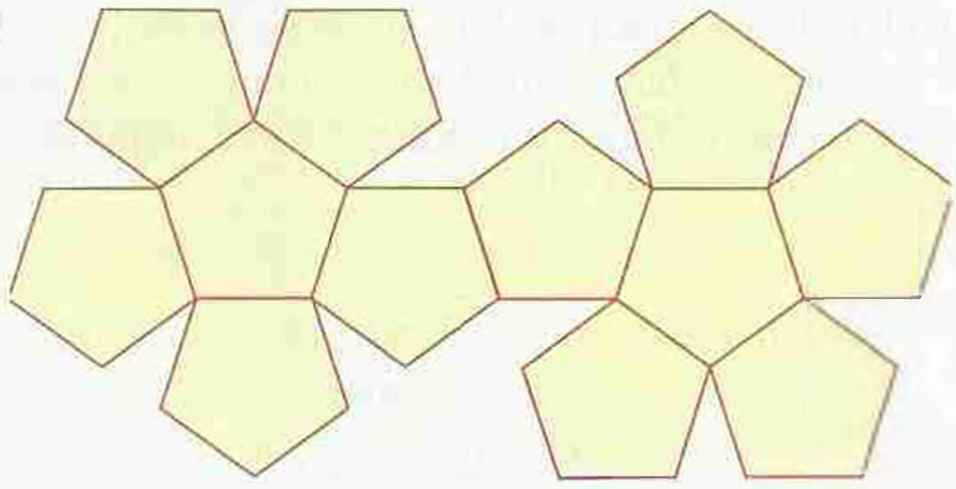
Hexaedro regular

c)



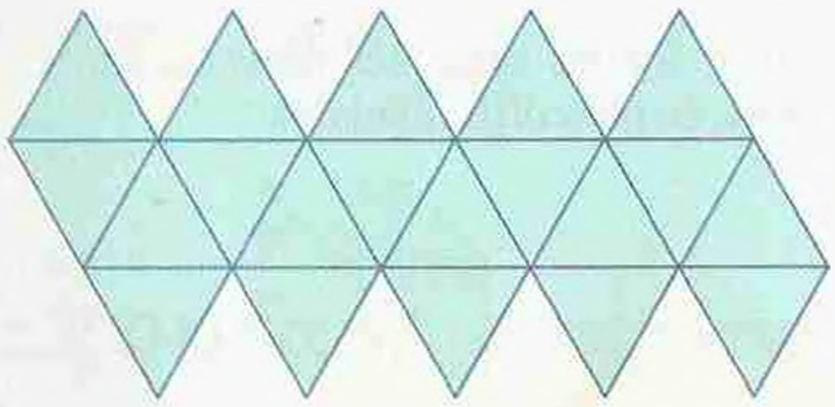
Octaedro regular

d)



Dodecaedro regular

e)



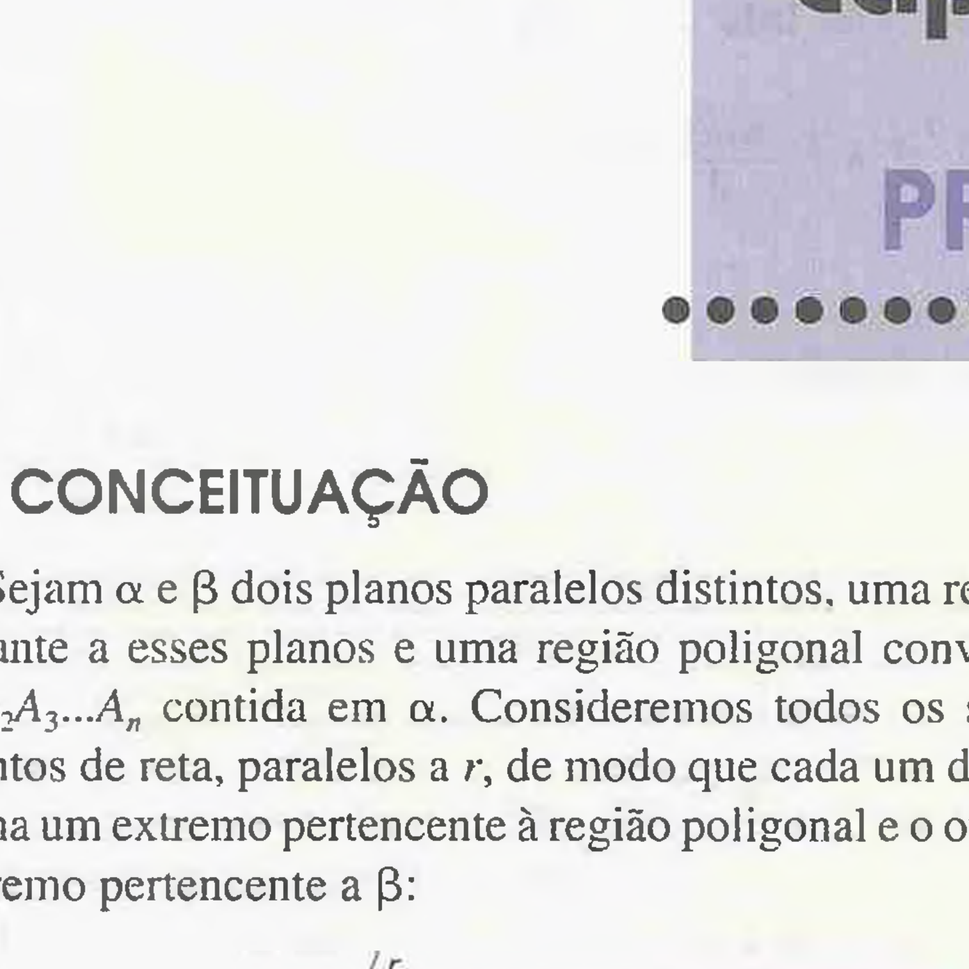
Icosaedro regular

Capítulo 48

PRISMAS

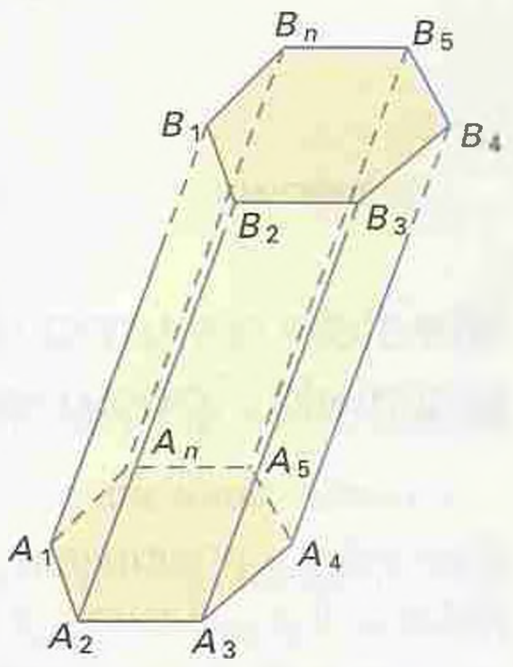
1. CONCEITUAÇÃO

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta r secante a esses planos e uma região poligonal convexa $A_1A_2A_3...A_n$ contida em α. Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a r, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente à região poligonal e o outro extremo pertencente a β:



A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de **prisma limitado** ou simplesmente de **prisma**.

Elementos do prisma

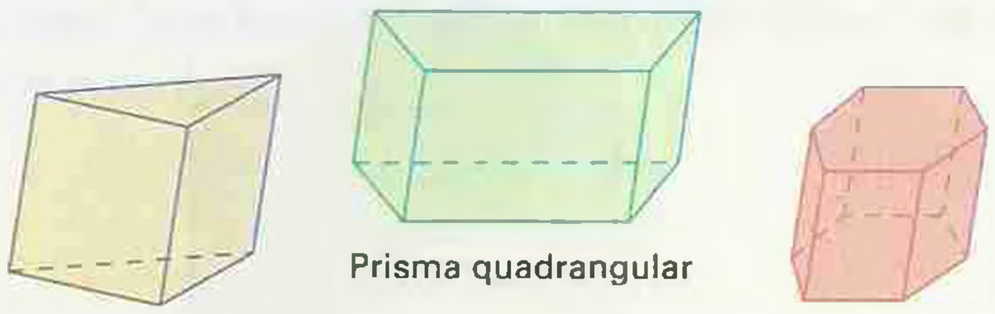


- As regiões poligonais $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$ são chamadas de **bases** do prisma.
- Os polígonos $A_1A_2A_3...A_n$ e $B_1B_2B_3...B_n$ que limitam as bases são chamados de **polígonos das bases** do prisma.
- As demais faces, exceto as bases, são chamadas de **faces laterais** do prisma.
  Por exemplo, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, ... são faces laterais.
- Os vértices das faces são chamados de **vértices** do prisma. Por exemplo, A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ... são vértices.
- Os lados das bases são chamados de **arestas das bases** do prisma. Por exemplo, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, ..., são arestas das bases.
- As demais arestas, exceto as das bases, são chamadas de **arestas laterais** do prisma. Por exemplo, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$, ... são arestas laterais.
- A distância entre os planos das bases é chamada de **altura** do prisma.
- A soma das áreas de todas as faces laterais é chamada de **área lateral** do prisma.
- A soma da área lateral com as áreas das duas bases é chamada de **área total** do prisma.
- Todo segmento de reta cujos extremos são vértices que não pertencem a uma mesma face do prisma é chamado de **diagonal** do prisma. Por exemplo, $\overline{B_1A_4}$ é uma diagonal do prisma.

Nomenclatura

Um prisma é classificado de acordo com o número de arestas de uma base.

Exemplos



Prisma triangular

Prisma quadrangular

Prisma hexagonal

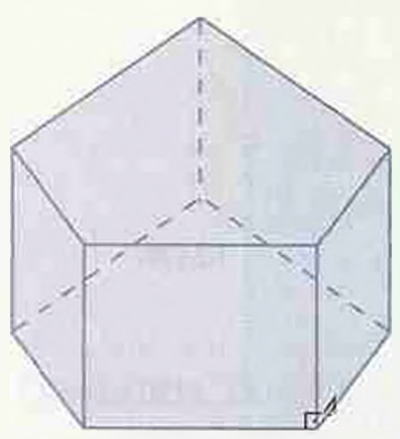
2. PRISMA RETO

Um prisma é **reto** se, e somente se, suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

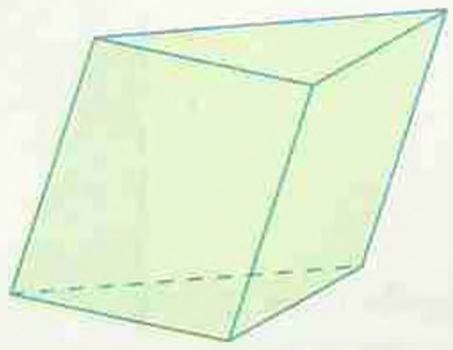
Nota

Se um prisma não é reto, então é chamado de **prisma oblíquo**.

Exemplos



Prisma pentagonal reto



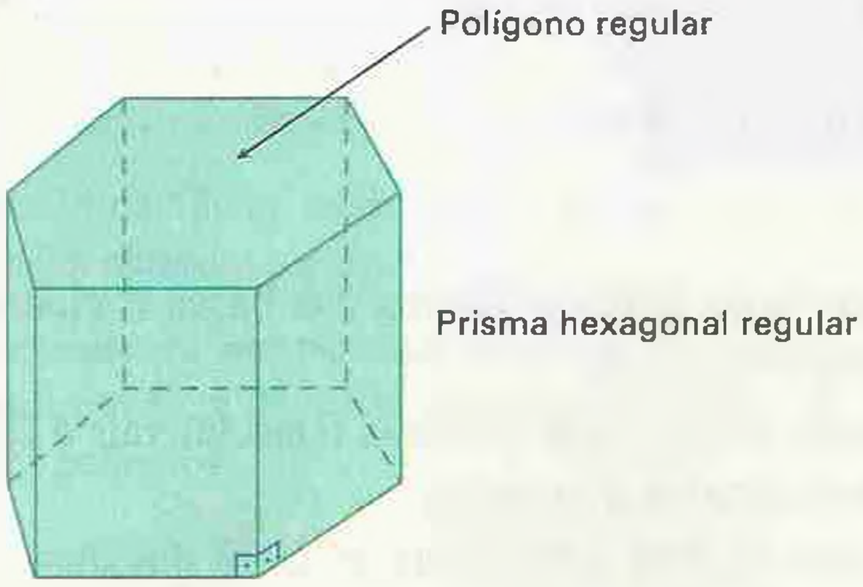
Prisma triangular oblíquo

Note que em todo prisma reto a medida de uma aresta lateral é a própria altura do prisma.

3. PRISMA REGULAR

Um prisma é **regular** se, e somente se, é reto e seus polígonos das bases são regulares.

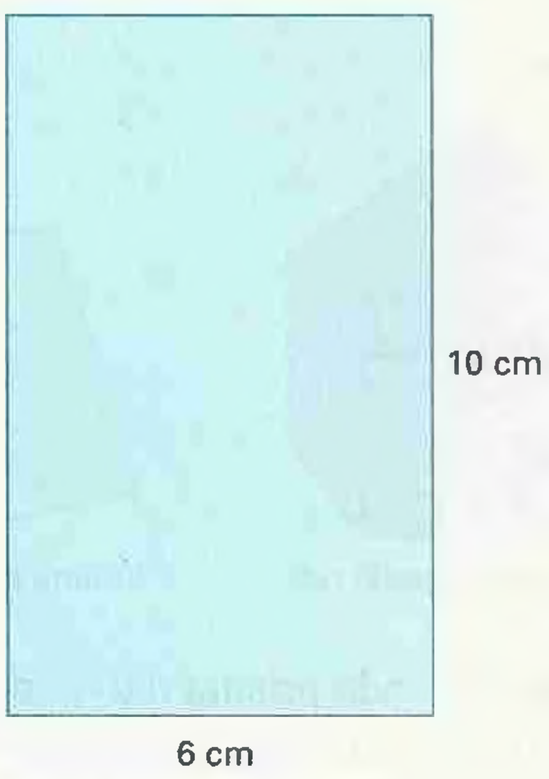
Exemplo



Note que em todo prisma regular as faces laterais são retângulos congruentes entre si.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Em um prisma regular triangular, cada aresta lateral mede 10 cm e cada aresta da base mede 6 cm.
a) Calcular a área de uma face lateral desse prisma.
b) Calcular a área de uma base desse prisma.
c) Carcular a área lateral desse prisma.
d) Calcular a área total desse prisma.



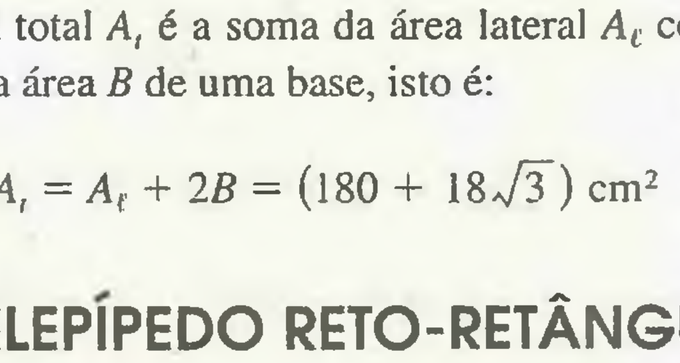
Resolução

a) Cada face lateral é um retângulo de base 6 cm e altura 10 cm, logo, a área A_f de cada face é:

$$A_f = (6 \cdot 10)\ \text{cm}^2 = 60\ \text{cm}^2$$

b) Cada base é um triângulo equilátero de lado 6 cm. Lembrando que a altura h de um triângulo equilátero de lado a é dada por $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, temos que

$$h = \frac{6\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}.$$



Portanto, a área B de uma base é

$$B = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

c) A área lateral A_ℓ é a soma das áreas das três faces laterais, isto é:

$$A_\ell = 3 \cdot A_f = 3 \cdot 60\ \text{cm}^2 = 180\ \text{cm}^2$$

d) A área total A_t é a soma da área lateral A_ℓ com duas vezes a área B de uma base, isto é:

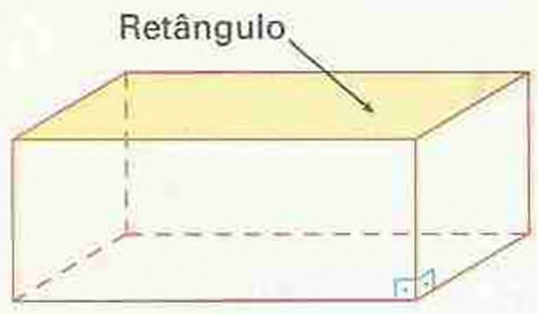
$$A_t = A_\ell + 2B = (180 + 18\sqrt{3})\ \text{cm}^2$$

4. PARALELEPÍPEDO RETO-RETÂNGULO

Todo prisma reto cujos polígonos das bases são retângulos é chamado de **paralelepípedo reto-retângulo**.

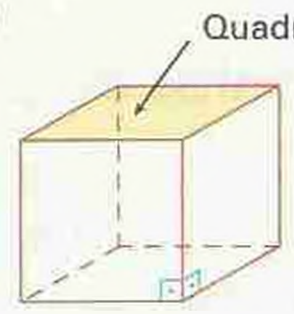
Exemplos

a)



Paralelepípedo reto-retângulo

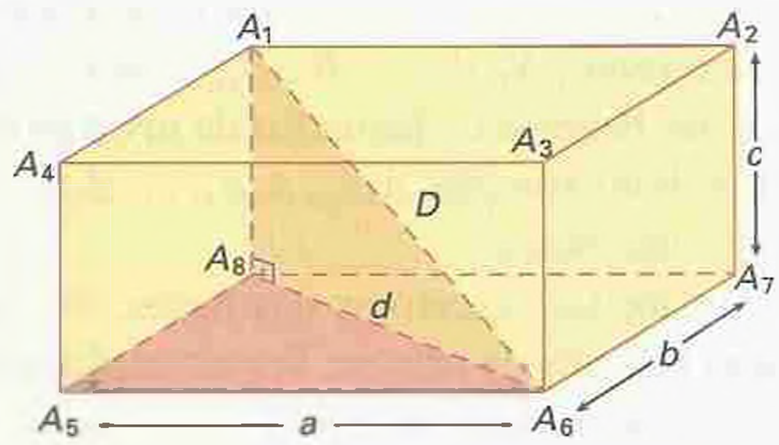
b)



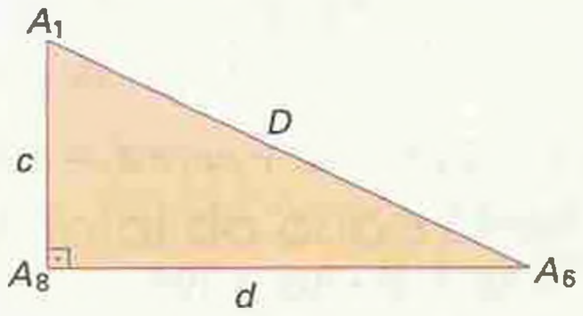
Cubo

Medida de uma diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões, comprimento, largura e altura, sejam as medidas a, b e c. Sejam d e D as medidas de uma diagonal da base e de uma diagonal do paralelepípedo, respectivamente:

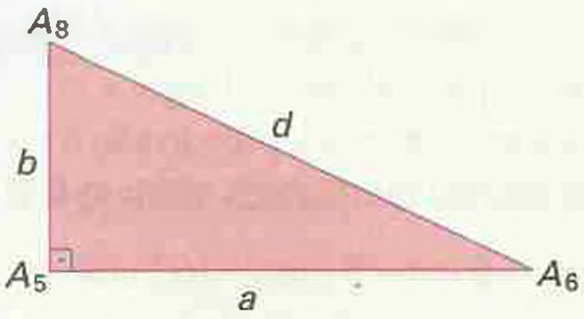


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $A_1A_8A_6$, temos:



$$D^2 = d^2 + c^2 \quad \text{(I)}$$

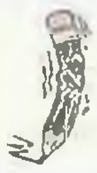
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $A_5A_8A_6$, temos:



$$d^2 = a^2 + b^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \quad D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



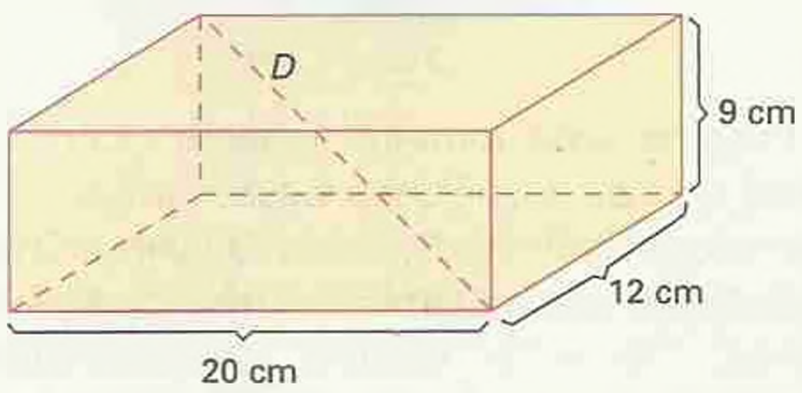
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.2 As dimensões, comprimento, largura e altura, de um paralelepípedo reto-retângulo são 20 cm, 12 cm e 9 cm. Calcular a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

Resolução

A medida D de uma diagonal é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados das dimensões a, b e c, ou seja:

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Logo, temos:

$$D = \sqrt{20^2 + 12^2 + 9^2} \text{ cm} \Rightarrow D = \sqrt{625} \text{ cm}$$

$$\therefore D = 25 \text{ cm}$$

Área total de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões, comprimento, largura e altura, sejam as medidas a, b e c:

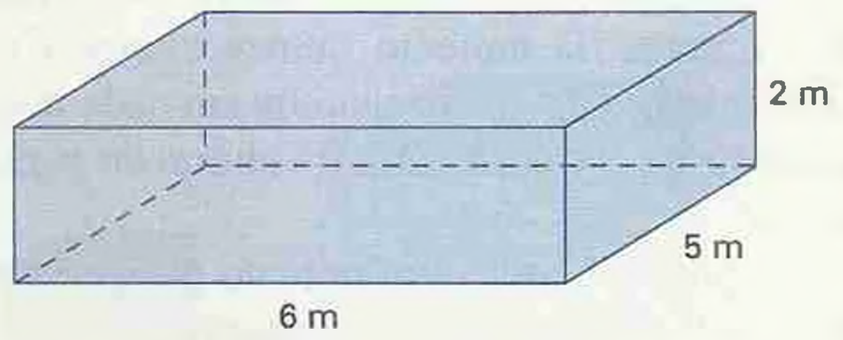
A área total desse paralelepípedo é a soma das áreas de suas seis faces. Temos, dentre essas faces, duas regiões retangulares de área ab, duas de área ac e duas de área bc. Logo, a área total A_t desse paralelepípedo é:

$$A_t = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow \quad A_t = 2(ab + ac + bc)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Calcular a área total de um paralelepípedo cujas dimensões, comprimento, largura e altura, são 6 m, 5 m e 2 m.

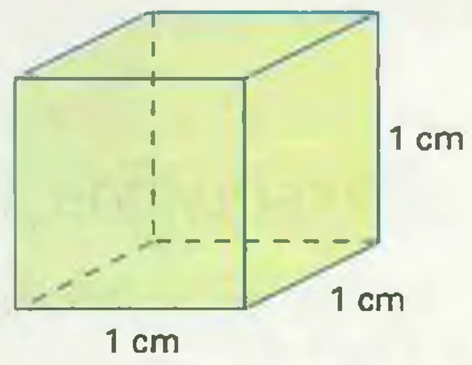
Resolução



$$A_t = 2(6 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 2)\ \text{m}^2 \Rightarrow A_t = 104\ \text{m}^2$$

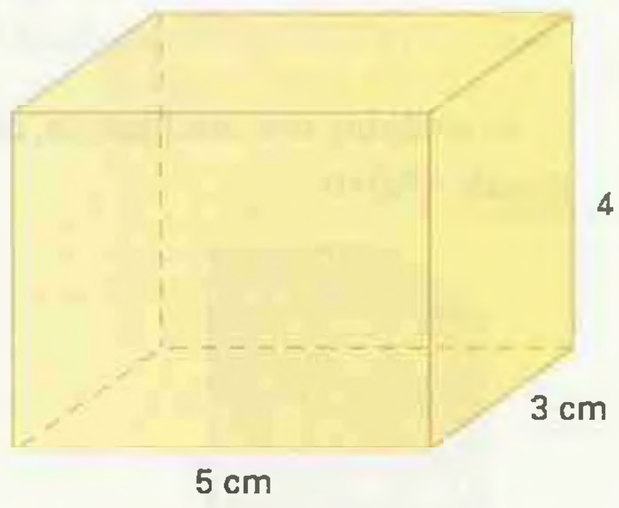
Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

Consideremos um cubo (hexaedro regular) de aresta 1 cm. A porção do espaço ocupada por esse cubo é uma unidade de volume definida como 1 cm^3 (lê-se "um centímetro cúbico").



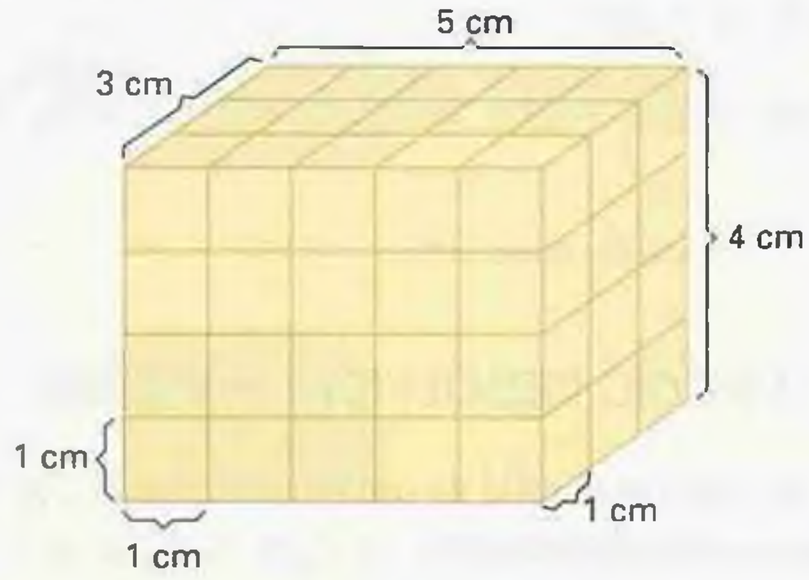
Analogamente definimos 1 dm^3, 1 m^3, 1 mm^3 etc.

Vejamos como medir o volume, em centímetros cúbicos, de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são 5 cm, 3 cm e 4 cm.



Devemos comparar o volume desse paralelepípedo com o volume de um cubo de aresta 1 cm, ou seja, devemos calcular a quantidade desses cubos necessária para formar um volume igual ao volume do paralelepípedo. Para isso, vamos formar, com cubos de 1 cm de aresta,

um paralelepípedo com as dimensões 5 cm, 3 cm e 4 cm, conforme figura abaixo.



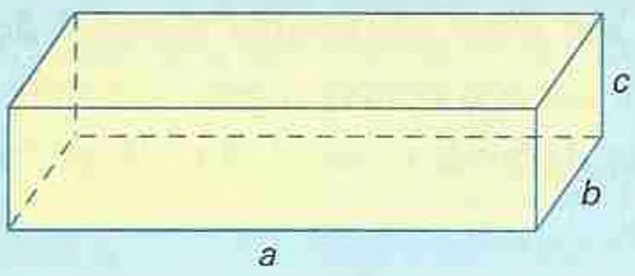
Pense nessa figura como sendo um prédio. No último andar podemos contar quinze cubos e em cada um dos outros andares há também quinze cubos. Como temos quatro andares com quinze cubos em cada um, o total de cubos é $15 \cdot 4 = 60$. Assim, o volume do paralelepípedo é 60 cm³.

Note, portanto, que o volume do paralelepípedo é calculado multiplicando-se suas dimensões:

$$V = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 60\text{ cm}^3$$

De modo geral, temos o seguinte:

O volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é o produto das três dimensões:



$$V = abc$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Calcular o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 6 m, 3 m e 2 m.

Resolução

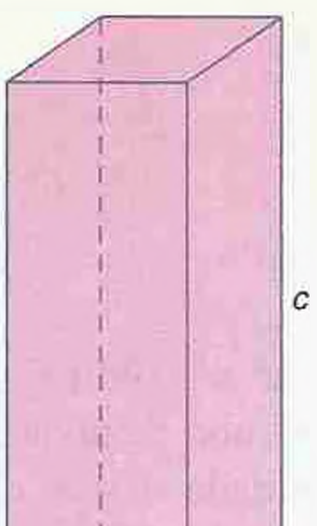
O volume V de um paralelepípedo reto-retângulo é o produto de suas dimensões, ou seja:

$$V = 6\text{ m} \cdot 3\text{ m} \cdot 2\text{ m} \Rightarrow V = 36\text{ m}^3$$

R.5 Calcule o volume V de um paralelepípedo reto-retângulo de área total 198 cm² e dimensões diretamente proporcionais a 1, 2 e 3.

Resolução

Sejam a, b e c as medidas, em centímetros, das dimensões do paralelepípedo abaixo.



Temos que:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \Rightarrow \begin{cases} a = k \\ b = 2k \\ c = 3k \end{cases}$$

Temos ainda que $A_t = 2(ab + ac + bc)$ e $A_t = 198\text{ cm}^2$. Assim, podemos escrever:

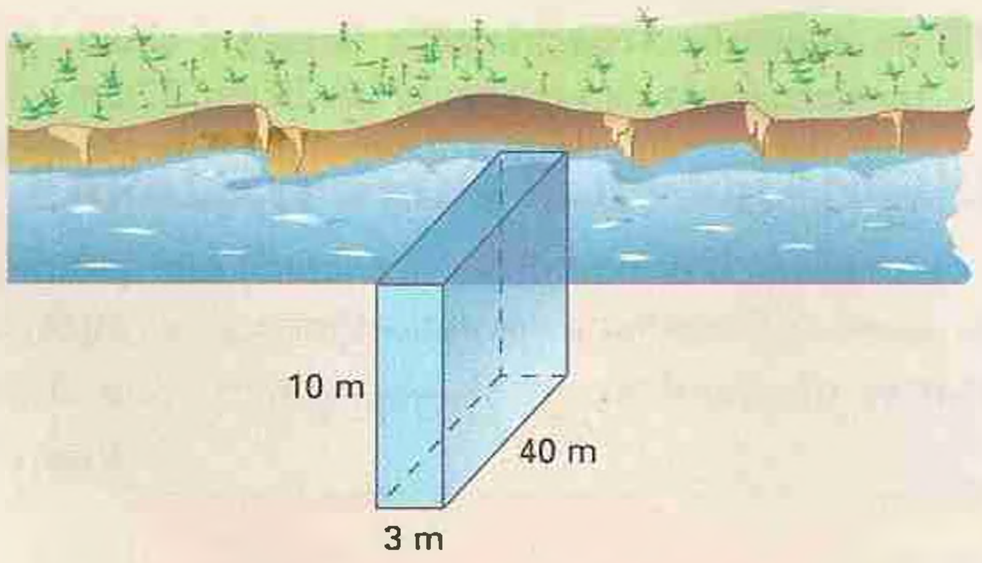
$$2(k \cdot 2k + k \cdot 3k + 2k \cdot 3k) = 198$$
$$\therefore 2(2k^2 + 3k^2 + 6k^2) = 198 \therefore 22k^2 = 198$$
$$\therefore k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$$

O valor de k deve ser positivo, pois, caso contrário, teríamos as dimensões do paralelepípedo representadas por números negativos, o que é absurdo. Logo, $k = 3$. Portanto, as dimensões do paralelepípedo são 3 cm, 6 cm e 9 cm, com o que se conclui que seu volume V é:

$$V = 3\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} \cdot 9\text{ cm} = 162\text{ cm}^3$$

Cálculo da vazão de um rio

Para o cálculo da vazão de um rio em um trecho de margens paralelas, calcula-se a velocidade da correnteza e admite-se o trecho como um paralelepípedo. Vamos supor que a velocidade da correnteza seja 3m/s e que o paralelepípedo tenha dimensões 3 m por 40 m por 10 m, conforme a figura abaixo:



Imagine uma torneira "gigante", com a mesma vazão do rio, despejando água num paralelepípedo com essas dimensões, até então vazio. O paralelepípedo ficaria completamente cheio de água em 1 segundo. Como o volume do paralelepípedo é 1.200 m³ e cada m³ equivale a 1.000 ℓ, tem-se que a vazão do rio é 1.200.000 ℓ/s.

5. CUBO

O cubo (hexaedro regular) é um paralelepípedo reto-retângulo cujas arestas têm todas a mesma medida a. As medidas de uma diagonal, da área total e do volume do cubo são obtidas pelas fórmulas do paralelepípedo reto-retângulo de arestas a, b e c:

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $A_t = 2(ab + ac + bc)$, $V = abc$,

fazendo $a = b = c$.

Medida da diagonal de um cubo cuja aresta mede *a*

$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow D = \sqrt{3a^2} \quad \therefore \quad D = a\sqrt{3}$$

Área total do cubo cuja aresta mede *a*

$$A_t = 2(a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a) \Rightarrow \quad A_t = 6a^2$$

Nota

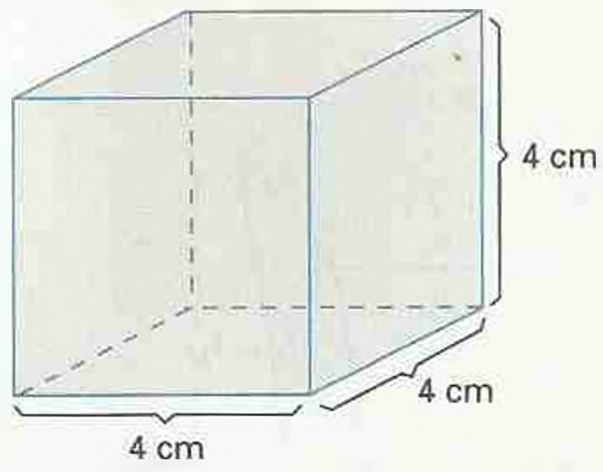
A área lateral do cubo é $A_\ell = 4a^2$

Volume do cubo cuja aresta mede *a*

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \quad V = a^3$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.6 A medida de uma aresta de um cubo é 4 cm. Determinar:
a) a medida de uma diagonal desse cubo;
b) a área total desse cubo;
c) a área lateral desse cubo;
d) o volume desse cubo.



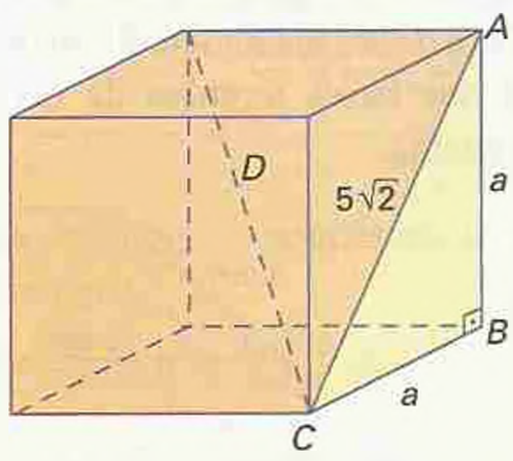
Resolução

a) $D = a\sqrt{3} \Rightarrow D = 4\sqrt{3}$ cm.
b) $A_t = 6a^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot 4^2\ \text{cm}^2 = 96\ \text{cm}^2$
c) $A_\ell = 4a^2 \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 4^2\ \text{cm}^2 = 64\ \text{cm}^2$
d) $V = a^3 \Rightarrow V = 4^3\ \text{cm}^3 = 64\ \text{cm}^3$

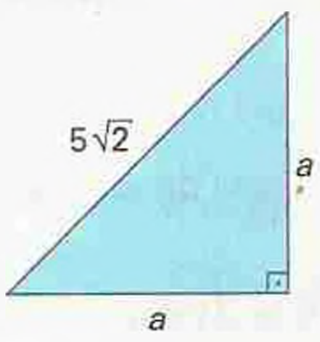
R.7 Uma diagonal de uma face de um cubo mede $5\sqrt{2}$ cm. Determinar a medida de uma diagonal desse cubo.

Resolução

Seja *a* a medida da aresta do cubo:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos:

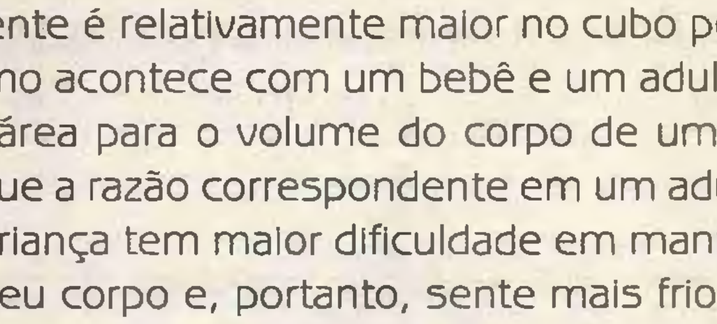


$$a^2 + a^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2a^2 = 50$$
$$\therefore a^2 = 25 \quad \therefore a = \pm 5$$

Como *a* deve ser positivo, pois é medida de uma aresta, temos que $a = 5$.
A medida *D* da diagonal do cubo é dada por $D = a\sqrt{3}$.
Logo, $D = 5\sqrt{3}$ cm.

Por que um bebê sente mais frio que um adulto?

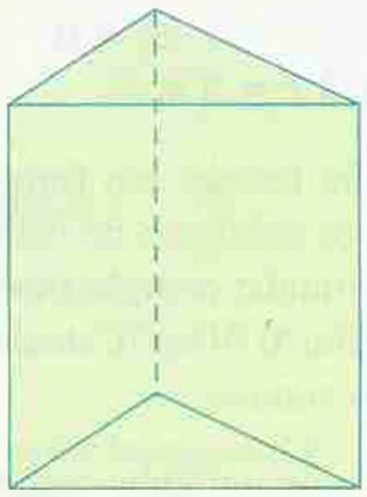
O estudo de áreas e volumes nos ajuda a explicar algumas situações do dia-a-dia como, por exemplo, por que um bebê sente mais frio que um adulto. Para entender esse fato, pense em dois cubos de ferro maciço, um de aresta 3 cm e o outro de aresta 6 cm, ambos à mesma temperatura de 36 °C.



Colocando-os em um ambiente de temperatura mais baixa, o cubo menor perderá calor mais rapidamente que o maior. Na linguagem do cotidiano dizemos que o menor se esfriará mais rapidamente que o maior. Isso ocorre porque a razão da área total para o volume do cubo pequeno, $\frac{6 \cdot 3^2}{3^3} = 2$, é maior que a razão correspondente no cubo grande, $\frac{6 \cdot 6^2}{6^3} = 1$, ou seja, a superfície em contato com o ambiente é relativamente maior no cubo pequeno. O mesmo acontece com um bebê e um adulto. A razão da área para o volume do corpo de um bebê é maior que a razão correspondente em um adulto, por isso a criança tem maior dificuldade em manter o calor de seu corpo e, portanto, sente mais frio.

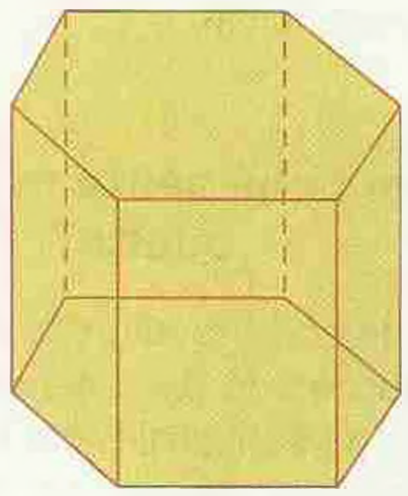
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Em um prisma regular triangular, cada aresta lateral mede 8 cm e cada aresta da base mede 4 cm.



a) Calcule a área de uma face lateral desse prisma.
b) Calcule a área de uma base desse prisma.
c) Calcule a área lateral desse prisma.
d) Calcule a área total desse prisma.

B.2 Em um prisma regular hexagonal, cada aresta lateral mede 4 dm e a área de uma base é $6\sqrt{3}$ dm².



a) Calcule a medida de cada aresta da base desse prisma.
b) Calcule a área lateral desse prisma.
c) Calcule a área total desse prisma.

B.3 As dimensões, comprimento, largura e altura, de um paralelepípedo reto-retângulo são 4 cm, $\sqrt{11}$ cm e 3 cm. Calcule a medida de uma diagonal desse paralelepípedo.

B.4 As medidas, em metros, das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo estão em progressão aritmética de razão igual a 1. Determine essas dimensões, sabendo que uma diagonal desse paralelepípedo mede $2\sqrt{5}$ m.

B.5 Calcule a área total de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são 5 m, 2 m e 1 m.

B.6 As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são diretamente proporcionais a 1, 2 e 4. Determine essas dimensões sabendo que a área total desse paralelepípedo é 252 cm².

B.7 (PUC-MG) A soma das dimensões de um paralelepípedo retângulo é igual a 16 cm. A área total mede 166 cm². A medida, em cm, da diagonal do paralelepípedo é:

a) 10 c) $3\sqrt{10}$ e) 7
b) 9 d) $5\sqrt{2}$

B.8 Calcule o volume de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 5 cm, 4 cm e 2 cm.

B.9 Definição: "Um litro é igual a um decímetro cúbico (1 litro = 1 dm³)". Calcule a capacidade, em litros, de uma piscina cuja forma é de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 20 m, 10 m e 2 m.

B.10 (UFMG) As dimensões de uma caixa retangular são 3 cm, 20 mm e 0,07 m. O volume dessa caixa, em mililitros, é:

a) 0,42 c) 42 e) 4.200
b) 4,2 d) 420

Lembrete. 1 ℓ = 1 dm³.

B.11 (UFSC) Um tanque, em forma de paralelepípedo, tem por base um retângulo de lados 0,50 m e 1,20 m. Uma pedra, ao afundar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,01 m. Calcule o volume da pedra, em decímetros cúbicos.

B.12 Uma aresta de um cubo mede 6 cm. Determine, desse cubo:

a) a medida de uma diagonal;
b) a área total;
c) a área lateral;
d) o volume.

B.13 Calcule o volume de um cubo cuja diagonal mede $\sqrt{6}$ cm.

B.14 Calcule a área total de um cubo cuja diagonal mede 1 cm.

B.15 Uma diagonal de uma face de um cubo mede $\sqrt{2}$ m. Calcule a medida de uma diagonal desse cubo.

B.16 (UFMG) O volume de uma caixa cúbica é 216 litros. A medida de sua diagonal, em centímetros, é:

a) $0{,}8\sqrt{3}$ c) 60 e) $900\sqrt{3}$
b) 6 d) $60\sqrt{3}$

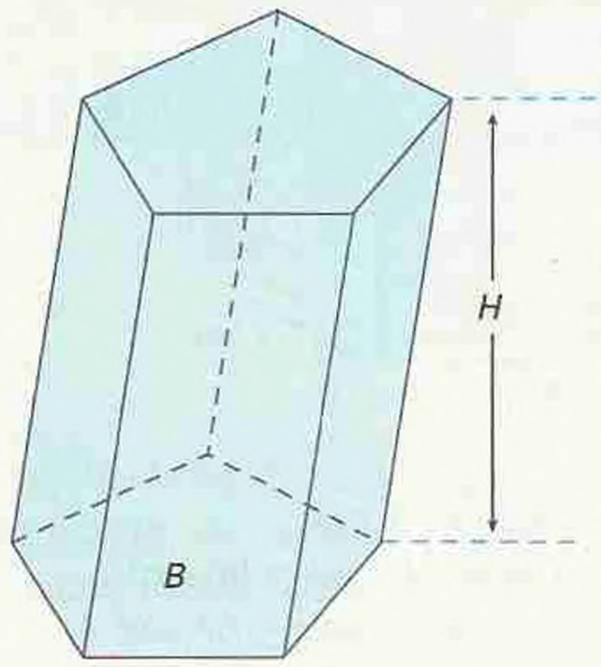
B.17 (Fuvest-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x é:

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

Exercícios complementares de C.1 a C.9

6. VOLUME DE UM PRISMA QUALQUER

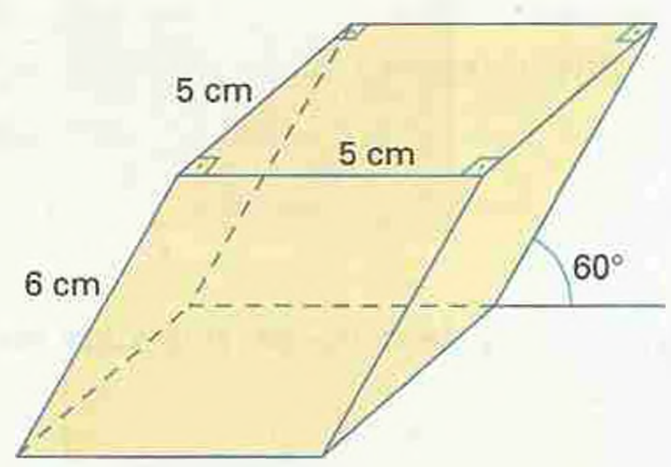
O volume V de um prisma qualquer é igual ao produto da área B de sua base pela sua altura H.



$$V = BH$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 O polígono de uma base de um prisma é um quadrado de lado 5 cm. Cada aresta lateral mede 6 cm e forma com os planos das bases ângulos de 60°. Calcular o volume desse prisma.

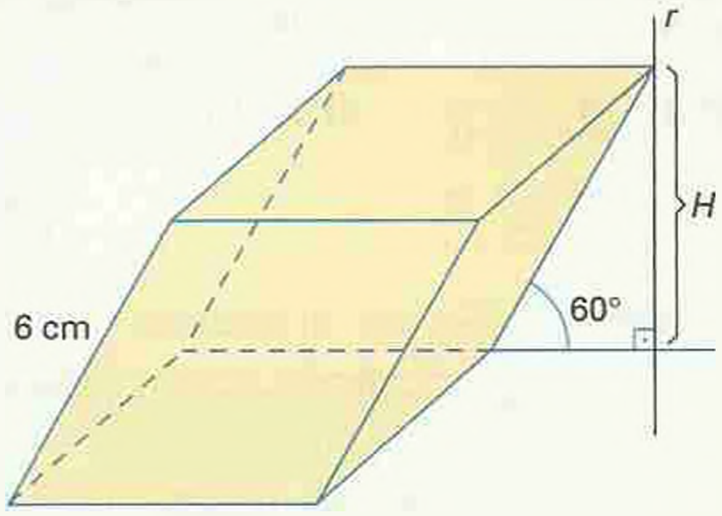


Resolução

A área B da base do prisma é a área de um quadrado de lado 5 cm. Logo, temos que:

$$B = (5\text{ cm})^2 \Rightarrow B = 25\text{ cm}^2$$

Para calcular a altura desse prisma, vamos traçar por um dos vértices a reta r perpendicular aos planos das bases.



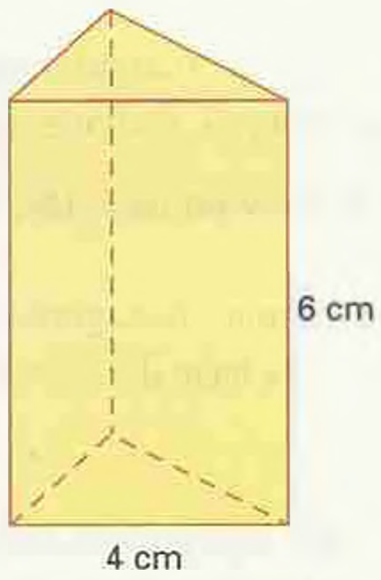
Temos que:

$$\text{sen } 60° = \frac{H}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{6}$$

$$\therefore H = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

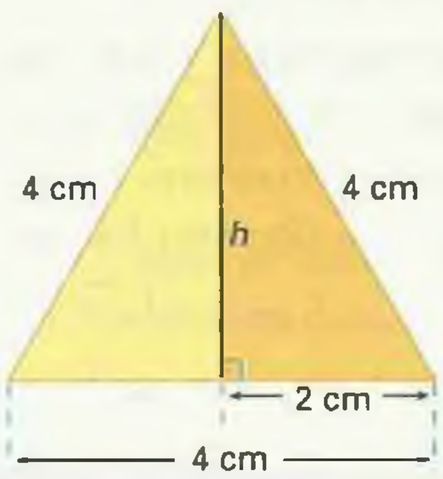
Assim, o volume V do prisma é dado por:
$V = BH \Rightarrow V = 25 \text{ cm}^2 \cdot 3\sqrt{3} \text{ cm} \therefore V = 75\sqrt{3} \text{ cm}^3$

R.9 Um prisma regular triangular tem arestas laterais de 6 cm e arestas da base de 4 cm. Calcular o volume desse prisma.



Resolução

Todo prisma regular é **reto**. Logo, temos que a medida de uma aresta lateral é a própria medida H da altura do prisma. Assim, $H = 6$ cm. Ainda pelo fato de o prisma ser regular, temos que o triângulo da base é equilátero.



Sendo h a altura do triângulo equilátero, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$h^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow h^2 = 12 \therefore h = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

Assim, a área B desse triângulo é:

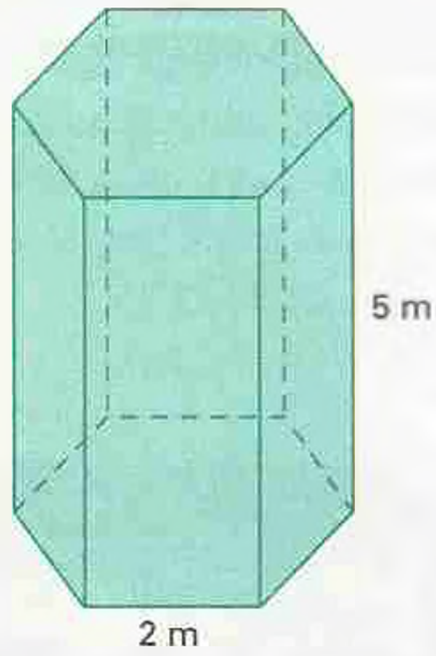
$$B = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Finalmente, o volume V do prisma é:

$$V = BH \Rightarrow V = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm}$$

$$\therefore V = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

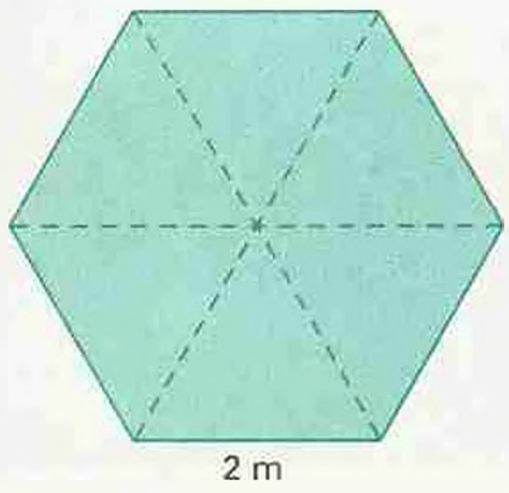
R.10 Um prisma regular hexagonal tem aresta da base com 2 m e aresta lateral com 5 m. Calcular o volume desse prisma.



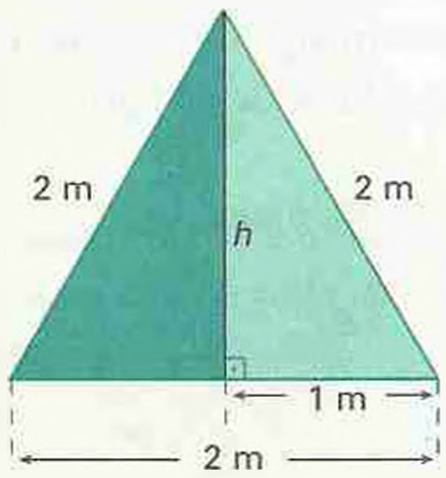
Resolução

Como todo prisma regular é **reto**, temos que a medida H de sua altura é a própria medida de uma aresta lateral. Logo, $H = 5$ m.

Em todo prisma regular, os polígonos das bases são regulares. Logo, cada base desse prisma é um hexágono regular.



A área desse hexágono é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado 2 m.



Sendo h a altura desse triângulo equilátero, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h = \sqrt{3} \text{ m}$$

A área A desse triângulo é:

$$A = \frac{2\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2 \Rightarrow A = \sqrt{3} \text{ m}^2$$

Logo, a área B da região hexagonal é:

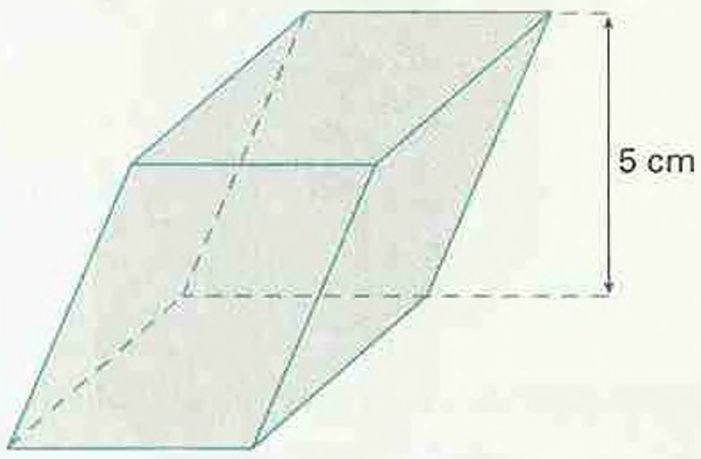
$$B = 6A \Rightarrow B = 6\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Temos então que o volume V do prisma é:

$$V = BH \Rightarrow V = 6\sqrt{3} \text{ m}^2 \cdot 5 \text{ m} \therefore V = 30\sqrt{3} \text{ m}^3$$

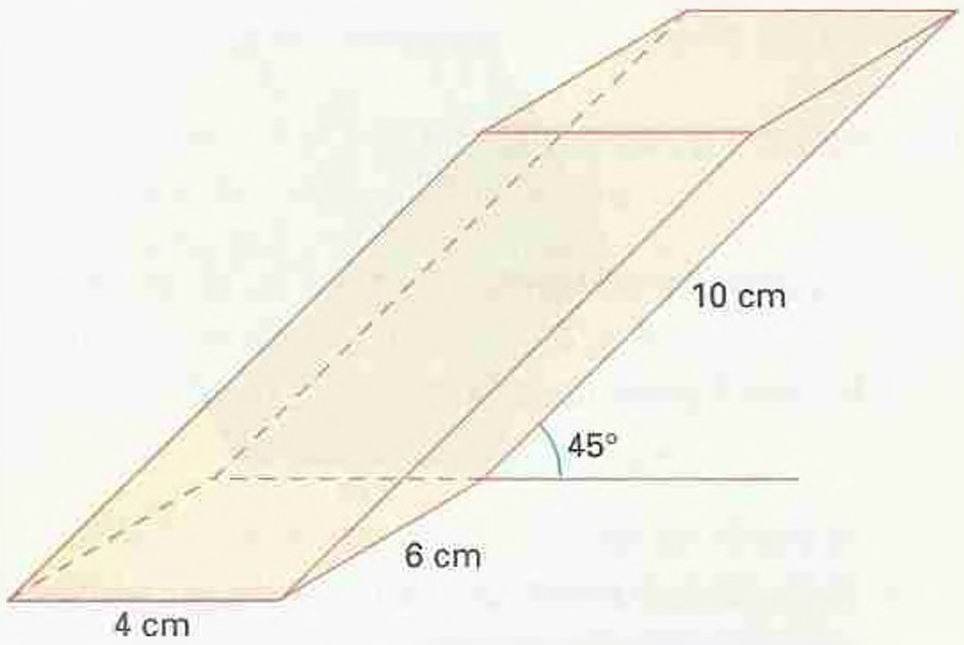
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.18 Calcule o volume de um prisma de altura 5 cm cuja base é um losango com diagonais de 4 cm e 2 cm.



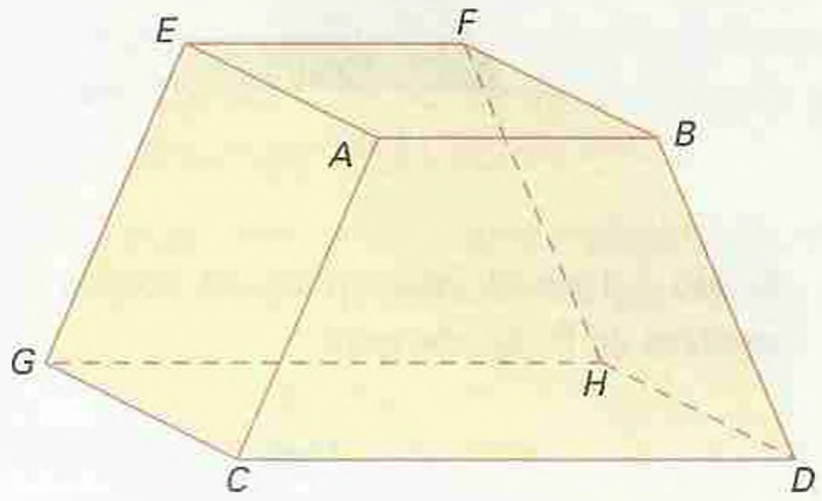
Lembrete. A área do losango é igual ao semiproduto das diagonais.

B.19 O polígono da base de um prisma é um retângulo de lados 6 cm e 4 cm. Cada aresta lateral mede 10 cm e forma com os planos das bases ângulos de 45°. Calcule o volume desse prisma.



B.20 Um prisma reto de aresta lateral 10 m tem como polígono da base um triângulo retângulo de catetos 5 m e 12 m. Calcule o volume desse prisma.

B.21 (Fuvest-SP) Na figura:

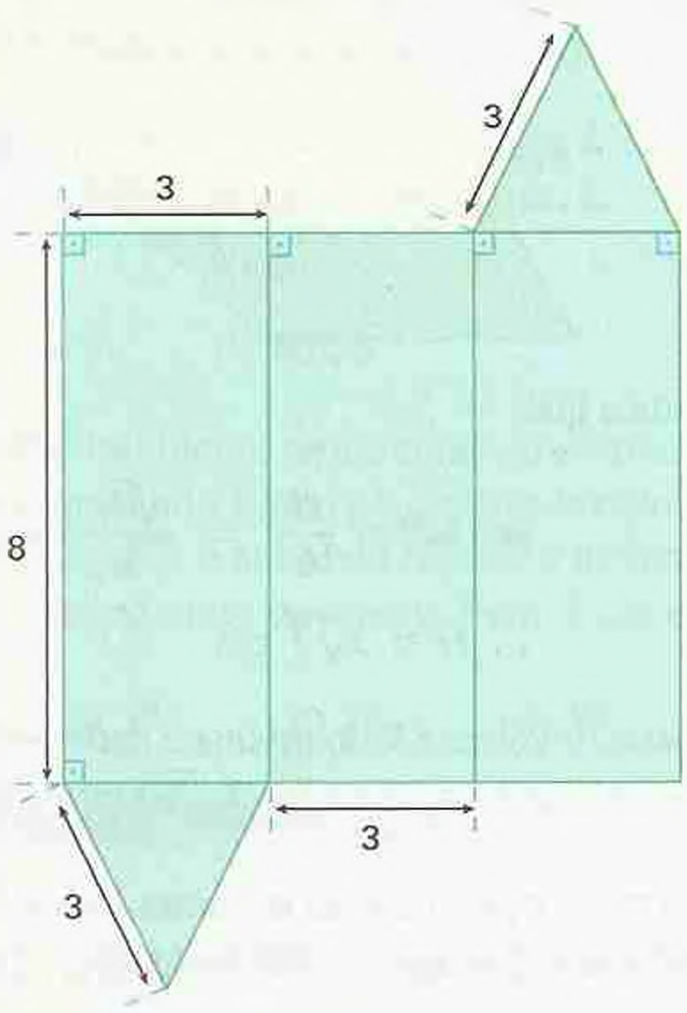


a) *ABCD* e *EFGH* são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5;
b) os trapézios estão em planos paralelos cuja distância é 3;
c) as retas *AE*, *BF*, *DH* e *CG* são paralelas.
Calcule o volume do sólido.
Sugestão. Imagine a face *ABCD* apoiada sobre o tampo de uma mesa.

B.22 Um prisma regular triangular tem arestas laterais de 9 cm e arestas da base de 5 cm. Calcule o volume desse prisma.

B.23 (Fatec-SP) Temos na figura a planificação de um sólido cujo volume é:

a) $6\sqrt{3}$ c) 24 e) 72
b) $12\sqrt{3}$ d) $18\sqrt{3}$



B.24 Um prisma regular triangular tem todas as nove arestas congruentes entre si. Calcule a área total desse prisma, sabendo que seu volume é $16\sqrt{3}$ dm³.

B.25 Um prisma regular hexagonal tem arestas laterais de 5 cm e arestas da base de 2 cm. Calcule, o volume desse prisma.

B.26 (ITA-SP) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de uma base. O volume deste prisma, em cm³, é:

a) $27\sqrt{3}$ c) 12 e) $17\sqrt{5}$
b) $13\sqrt{2}$ d) $54\sqrt{3}$

B.27 (U. F. Santa Maria-RS) Deseja-se construir um aquário de vidro na forma de um prisma regular, de base hexagonal com 20 cm de aresta. Sabendo que 1.000 cm³ equivalem a 1 litro, a altura do aquário, em cm, para que o mesmo, totalmente cheio, contenha 3,6 litros de água, deve ser:

a) $\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$ d) $4\sqrt{3}$

Exercícios complementares de C.10 a C.14

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UNIR) Para construir um prisma regular hexagonal de altura 5 cm e aresta da base 4 cm, um menino pretende recortar as faces laterais e as bases em uma folha retangular de cartolina com 30 cm de comprimento por 20 cm de largura. Considerando a aproximação $\sqrt{3} = 1{,}7$, o percentual da folha usado nessa construção será de:

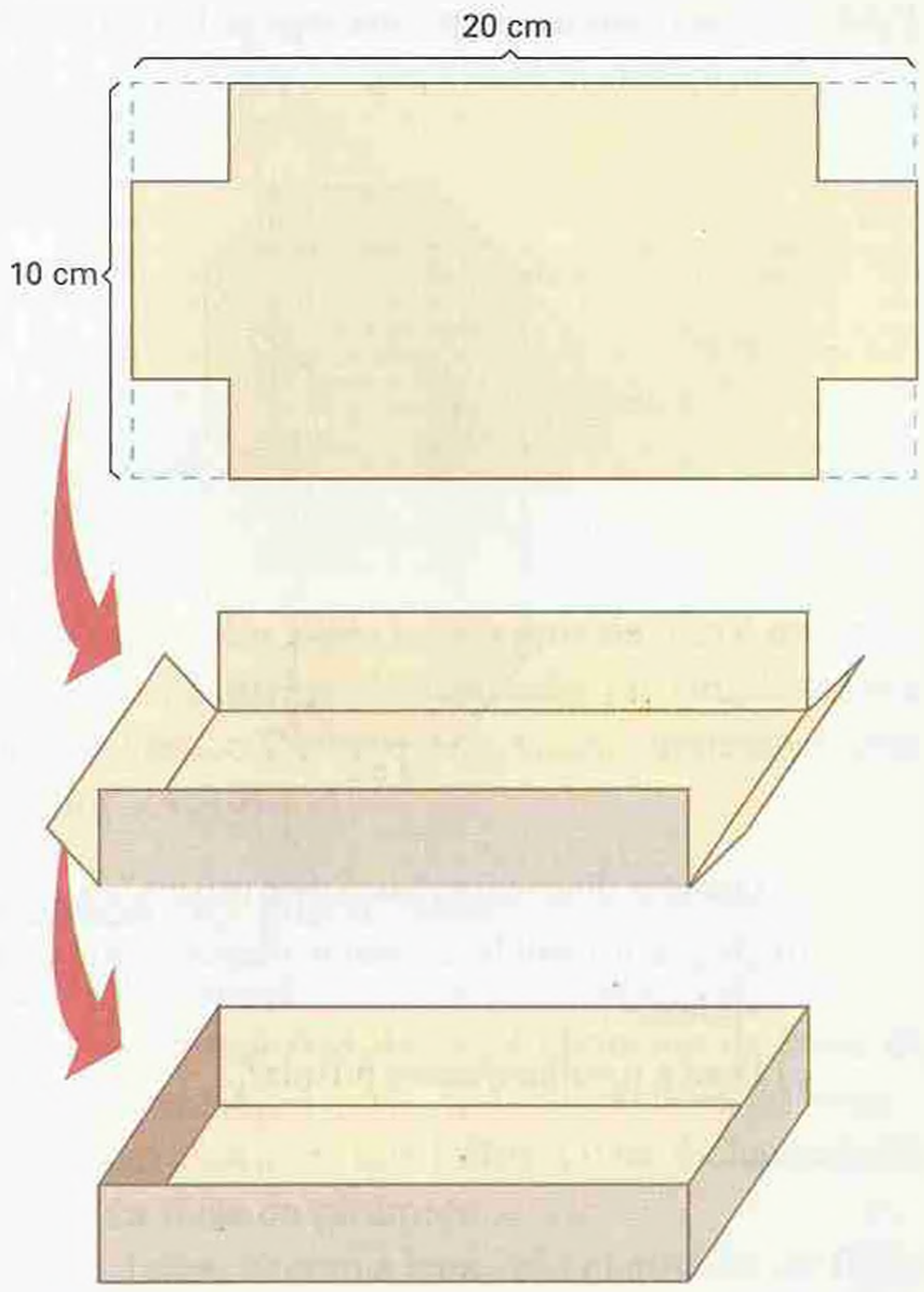
a) 28,6% c) 29,4% e) 33,6%
b) 29,81% d) 30%

C.2 (UFPB) A altura de um prisma regular triangular mede 4 cm e o apótema de uma de suas bases mede $2\sqrt{3}$ cm. A área lateral desse prisma é:

a) 48 cm²
b) 144 cm²
c) 108 cm²
d) 96 cm²
e) 126 cm²

Lembrete. O apótema de um polígono regular é o raio de sua circunferência inscrita.

C.3 Uma folha retangular de cartolina tem comprimento 20 cm e largura 10 cm. Recortam-se dessa folha quatro quadrados congruentes de modo que cada um deles tenha um dos vértices em um vértice da folha. A seguir, dobra-se essa folha, formando-se uma superfície aberta de um paralelepípedo reto-retângulo:



Qual é a medida do lado de cada quadrado retirado, sabendo que a medida de uma diagonal da caixa construída mede $6\sqrt{11}$ cm?

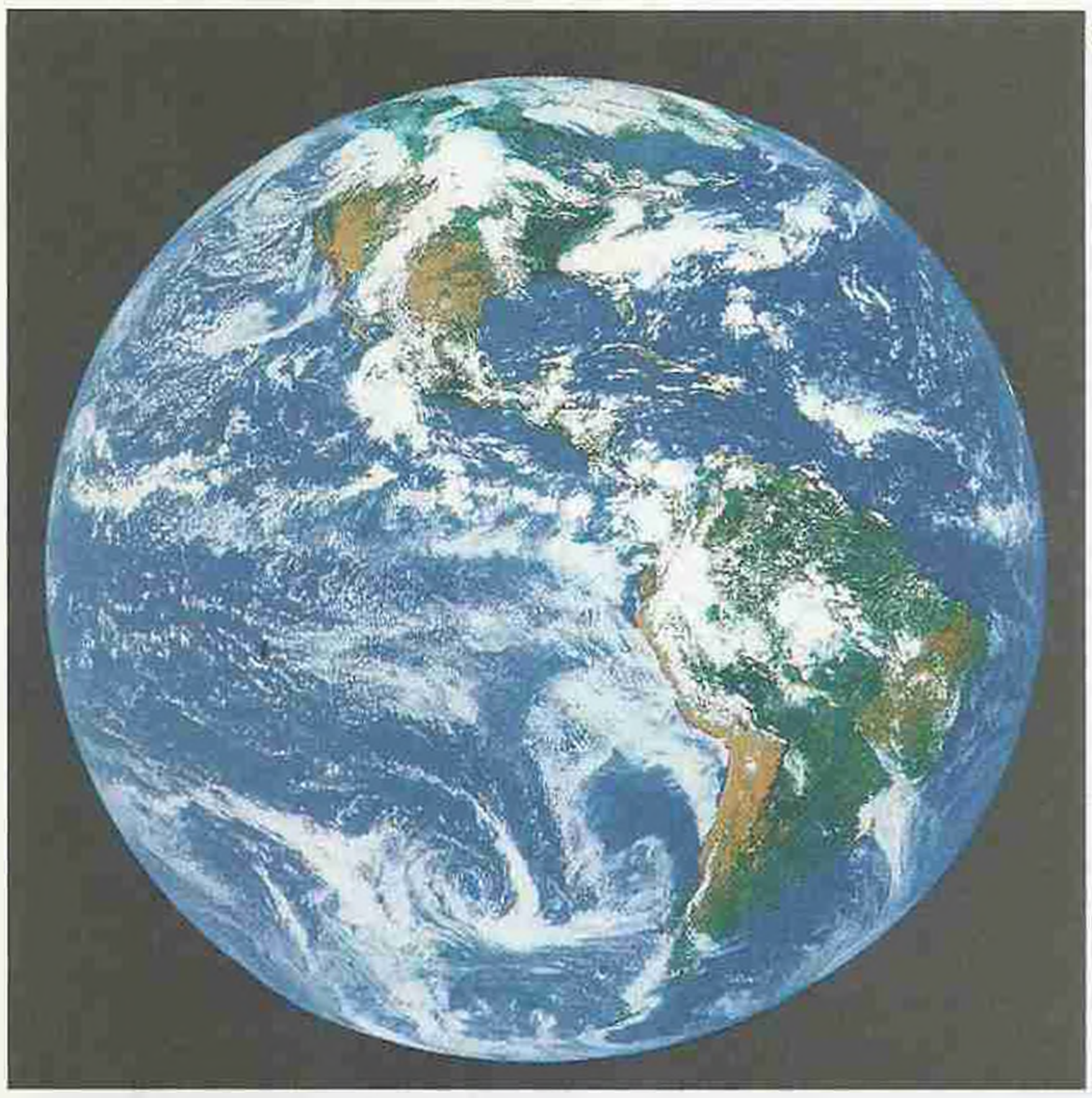
C.4 No exercício anterior, qual deve ser a medida do lado de cada quadrado retirado para que a área lateral seja igual à área do fundo da caixa?

C.5 (Cefet-RJ) Uma piscina com formato de paralelepípedo retângulo com 5 m de largura, 10 m de comprimento e 1,60 m de profundidade deverá ser azulejada. Sabendo que o m² do azulejo custa R$ 20,00 e que deverão ser comprados 10% a mais para as quebras, então o gasto total em reais será de:

a) 1.760,00
b) 1.960,00
c) 2.156,00
d) 2.960,00
e) 3.256,00

C.6 (Vunesp) A área da superfície da Terra é estimada em 510.000.000 km². Por outro lado, estima-se que, se todo vapor de água da atmosfera terrestre fosse condensado, o volume de líquido resultante seria de 13.000 km³. Imaginando que toda essa água fosse colocada no interior de um paralelepípedo retângulo, cuja área da base fosse a mesma da superfície da Terra, a medida que mais se aproxima da altura que o nível da água alcançaria é:

a) 2,54 mm.
b) 2,54 cm.
c) 25,4 cm.
d) 2,54 m.
e) 0,254 km.

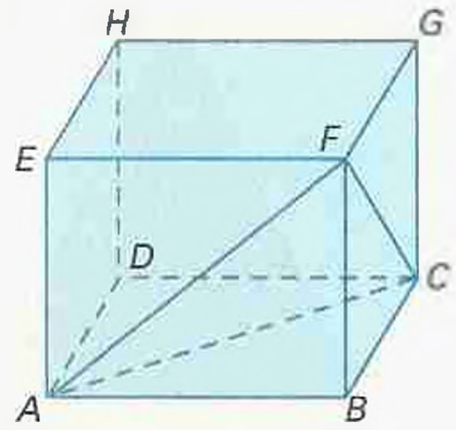


C.7 (Fuvest-SP) O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é de 240 cm³. As áreas de duas de suas faces são 30 cm² e 48 cm². A área total do paralelepípedo, em cm², é:

a) 96
b) 118
c) 236
d) 240
e) 472

C.8 (PUC-MG) A figura abaixo é um cubo cuja aresta mede 6 centímetros. A área do triângulo ACF, em centímetros quadrados, é igual a:

a) $6\sqrt{2}$
b) $12\sqrt{2}$
c) $15\sqrt{3}$
d) $18\sqrt{3}$
e) 36



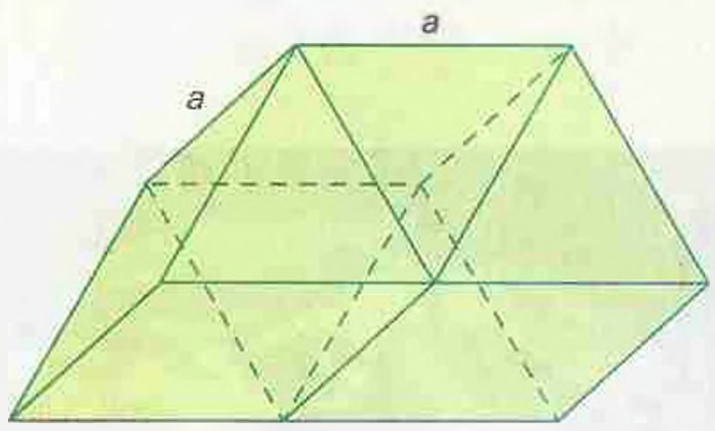
C.9 (Unicamp-SP) Ao serem retirados 128 litros de água de uma caixa-d'água de forma cúbica, o nível da água baixa 20 centímetros.

a) Calcule o comprimento das arestas da referida caixa.
b) Calcule sua capacidade em litros (1 litro equivale a 1 decímetro cúbico).

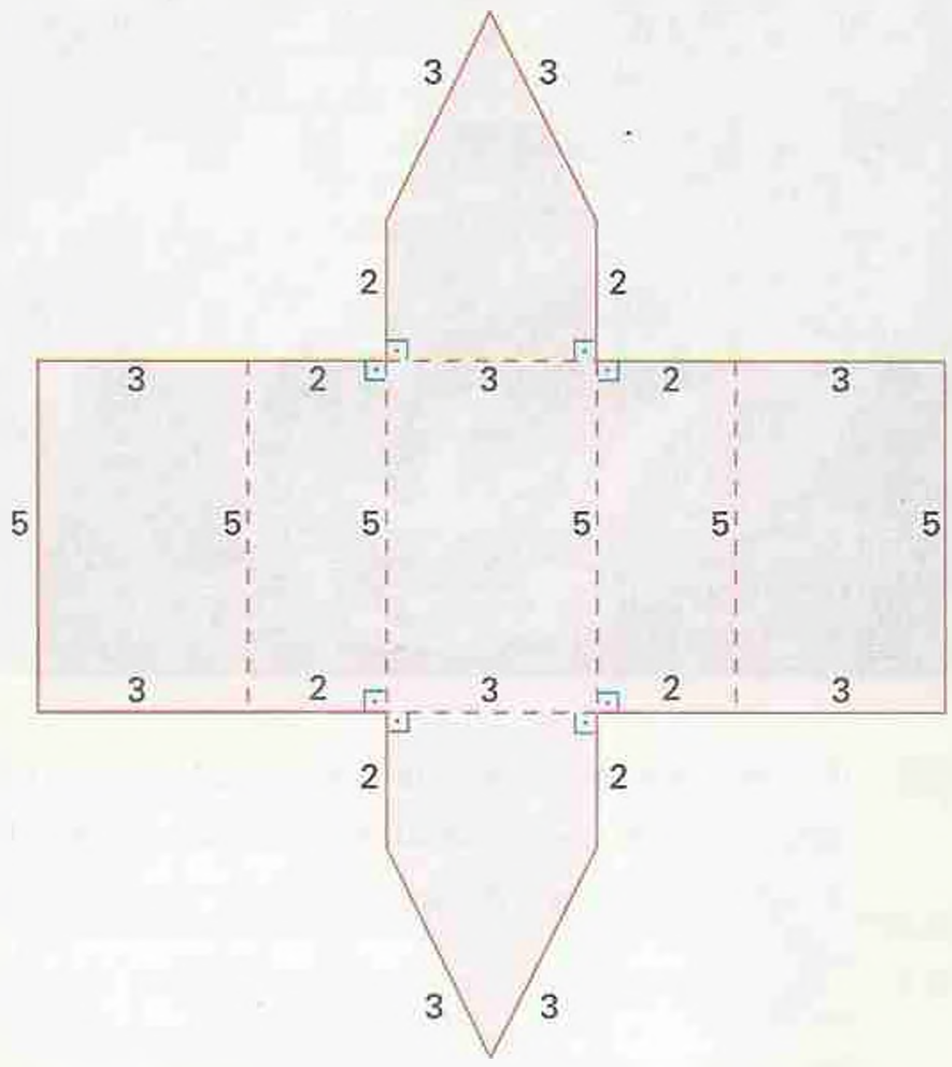
C.10 (UFMG) Dois prismas oblíquos, de mesma altura h, têm um quadrado de lado a como base superior comum, e suas bases inferiores têm apenas uma aresta em comum. O volume do sólido formado pela intersecção dos dois prismas é:

a) $\frac{1}{3}a^2h$ c) a^2h e) $\frac{1}{2}h^2a$

b) $\frac{1}{2}a^2h$ d) $\frac{1}{3}h^2a$



C.11 (UFMG) Observe a figura.



Um prisma reto de base pentagonal foi desdobrado obtendo-se essa figura, na qual as linhas tracejadas indicam as dobras. O volume dessa prisma é:

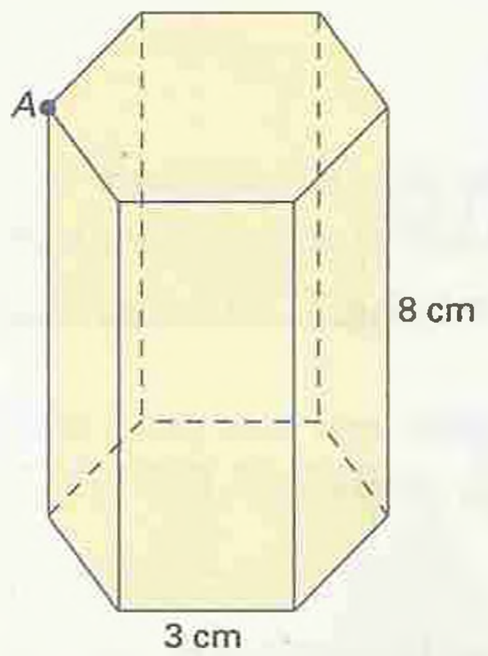
a) $6 + \frac{9\sqrt{3}}{4}$ c) $30 + \frac{9\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ d) $30 + \frac{45\sqrt{3}}{4}$

C.12 Um prisma reto de aresta lateral 8 cm tem como polígono da base um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa 4 cm. Calcule o volume desse prisma.

C.13 Um prisma regular hexagonal possui todas as dezoito arestas congruentes entre si. Calcule o volume desse prisma, sabendo que sua área lateral é 96 m².

C.14 A figura mostra um prisma regular hexagonal de altura 8 cm e aresta da base 3 cm.



a) Quantas diagonais possui esse prisma?

b) Qual é a medida da maior diagonal que passa pelo vértice A?

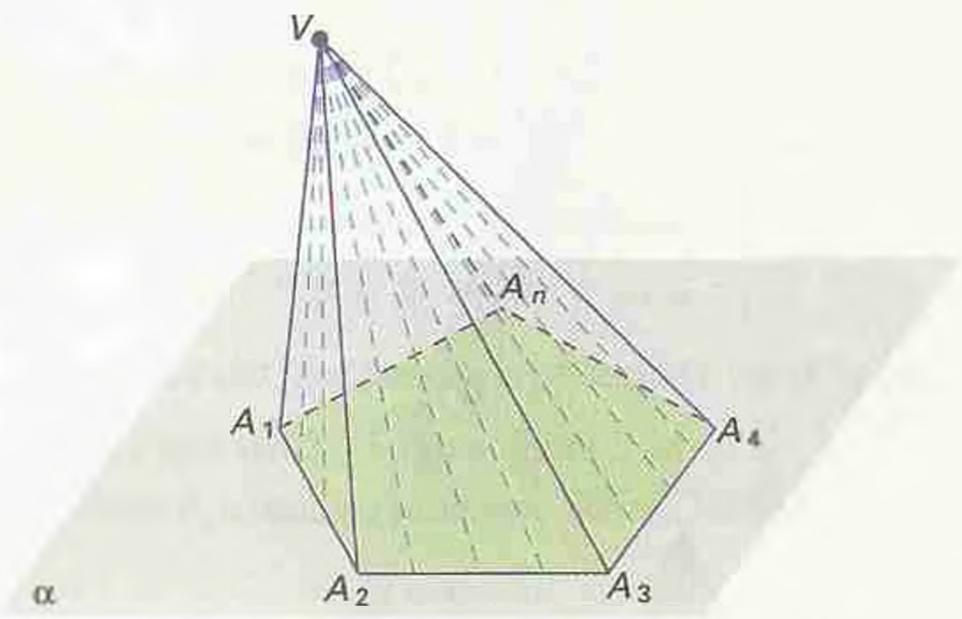
c) Qual é o volume desse prisma?

Capítulo 49

PIRÂMIDES

1. CONCEITUAÇÃO

Sejam uma região poligonal convexa $A_1A_2A_3...A_n$, contida em um plano α, e um ponto V, não-pertencente a α. Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente à região poligonal e o outro extremo V:



A reunião de todos esses segmentos de reta é um poliedro chamado de **pirâmide limitada** ou simplesmente **pirâmide** de vértice V e base $A_1A_2A_3...A_n$. Indicamos essa pirâmide por $VA_1A_2A_3...A_n$.

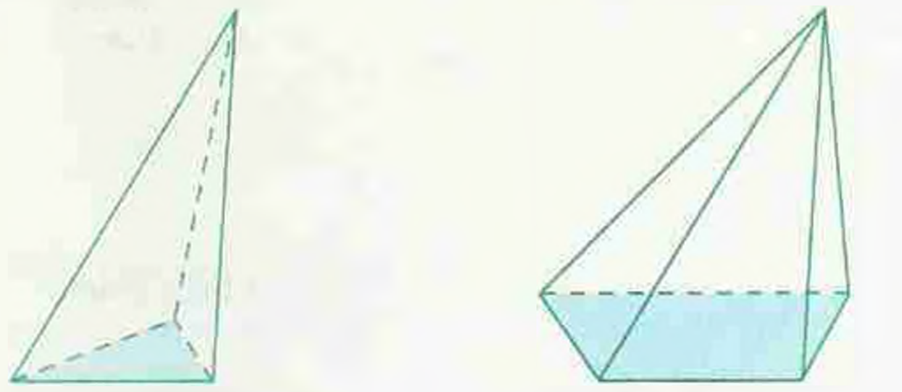
Elementos da pirâmide

- O ponto V é chamado de **vértice** da pirâmide.
- A região poligonal $A_1A_2A_3...A_n$ é chamada de **base** da pirâmide, sendo $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ os **vértices** da base.
- O polígono $A_1A_2A_3...A_n$ que limita a base é chamado de **polígono da base** da pirâmide.
- As demais faces, exceto a base, são chamadas de **faces laterais** da pirâmide. Por exemplo, os triângulos A_1VA_2, A_2VA_3, A_3VA_4, ... são faces laterais.
- Os lados da base são chamados de **arestas da base** da pirâmide. Por exemplo, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ... são arestas da base.
- As demais arestas, exceto as das bases, são chamadas de **arestas laterais** da pirâmide. Por exemplo, $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V}$, ... são arestas laterais.
- A distância entre o vértice V e o plano da base é chamada de **altura** da pirâmide.
- A soma das áreas de todas as faces laterais é chamada de **área lateral** da pirâmide.
- A soma da área lateral com a área da base é chamada de **área total** da pirâmide.

Nomenclatura

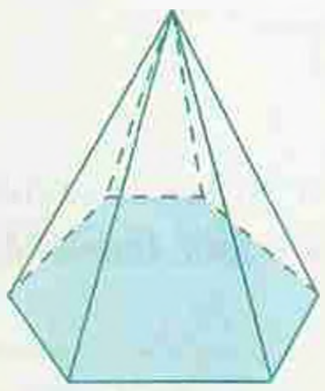
Uma pirâmide é classificada de acordo com o número de arestas da base.

Exemplos



Pirâmide triangular

Pirâmide quadrangular

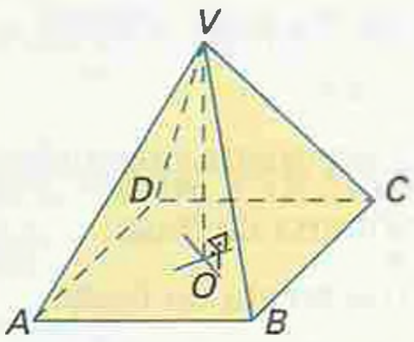


Pirâmide hexagonal

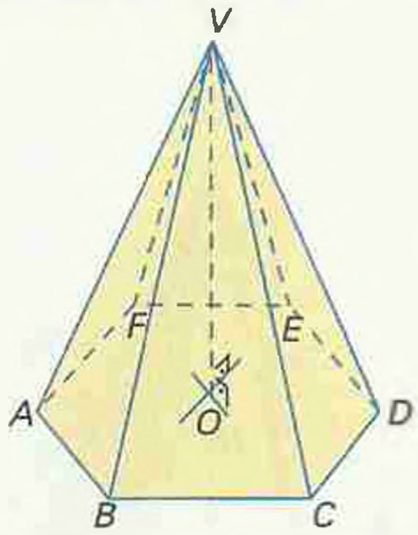
2. PIRÂMIDE REGULAR

Uma pirâmide é **regular** se, e somente se, seu polígono da base é regular e a projeção ortogonal de seu vértice sobre o plano da base é o centro da base.

Exemplos



Pirâmide regular quadrangular
(O ponto *O* é o centro do quadrado *ABCD*.)

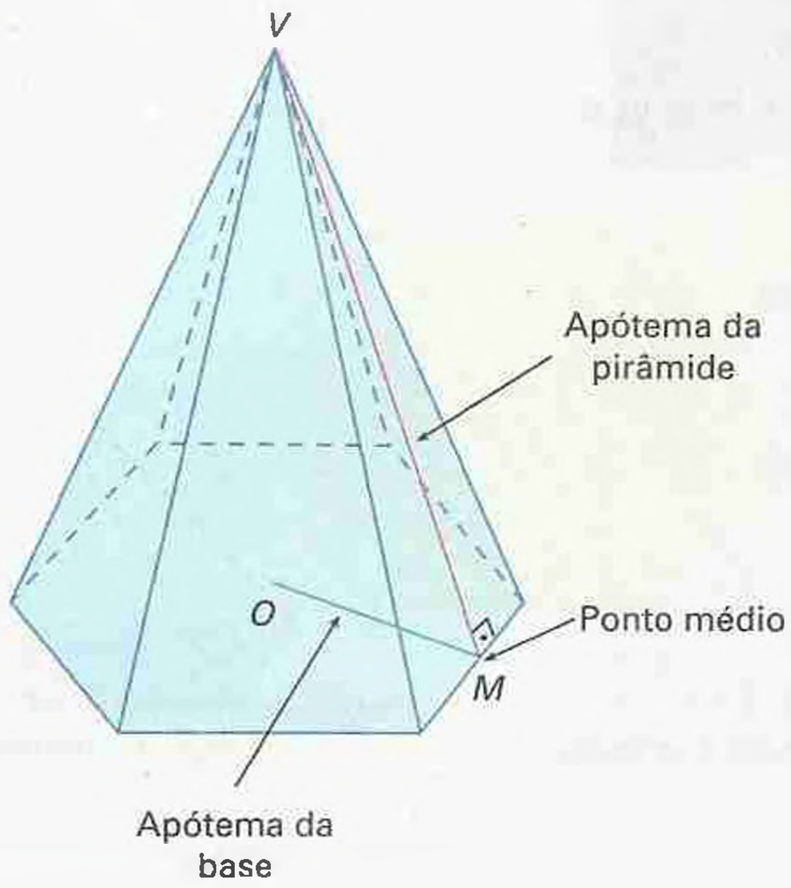


Pirâmide regular hexagonal
(O ponto *O* é o centro do hexágono regular *ABCDEF*.)

Note que em toda pirâmide regular as arestas laterais são congruentes entre si e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si.

Apótema de uma pirâmide regular

Chama-se **apótema** de uma pirâmide regular todo segmento de reta cujos extremos são o vértice da pirâmide e o ponto médio de um dos lados da base.



Note que o apótema da pirâmide regular é a altura de um triângulo isósceles que é face lateral da pirâmide.

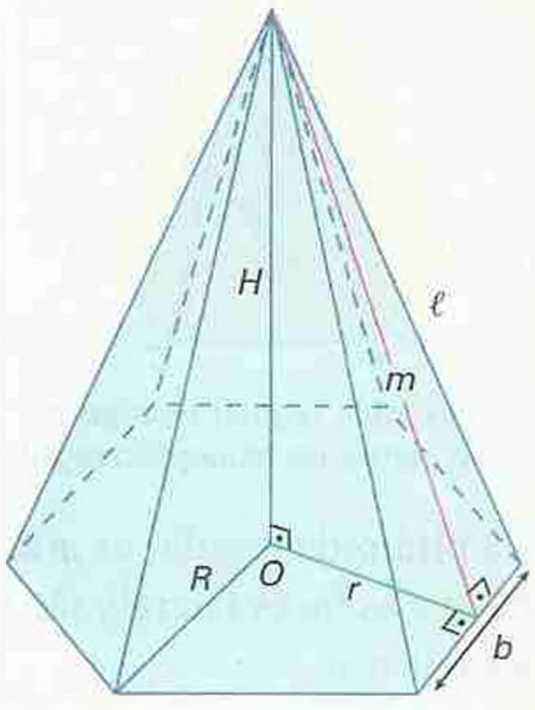
Apótema da base de uma pirâmide regular

O apótema do polígono da base da pirâmide regular é chamado de **apótema da base** da pirâmide.

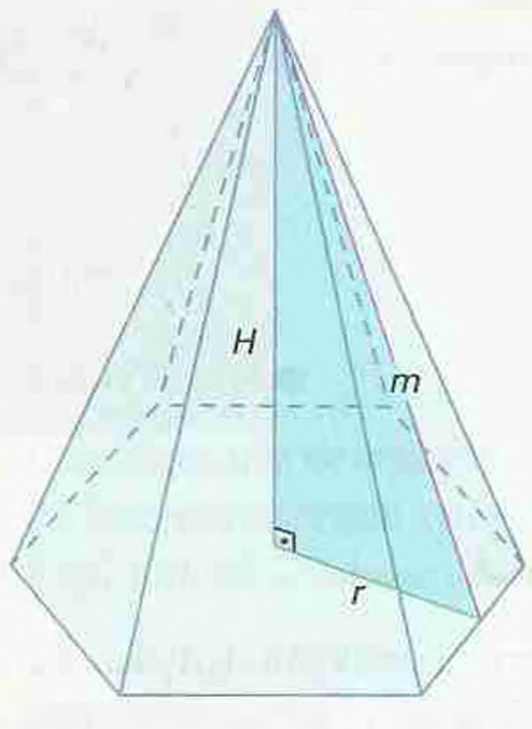
O teorema de Pitágoras e a pirâmide regular

Em uma pirâmide regular, sejam:

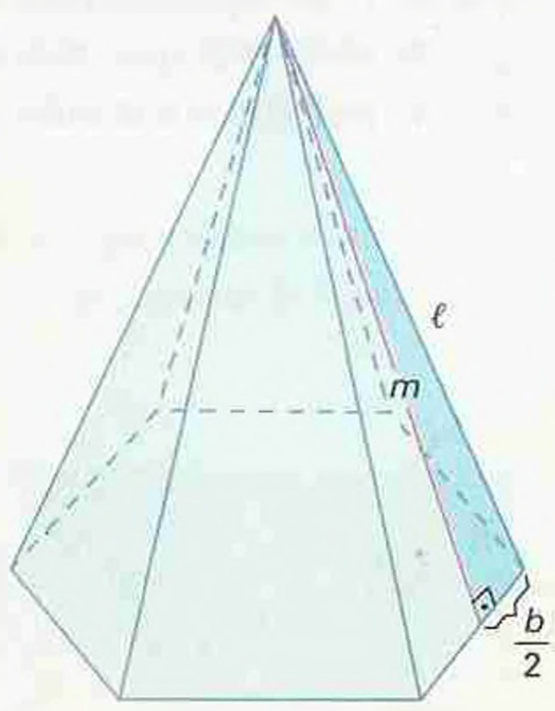
- H a medida da altura;
- m a medida do apótema da pirâmide;
- r a medida do apótema da base;
- b a medida de uma aresta da base;
- ℓ a medida de uma aresta lateral;
- R o raio da circunferência circunscrita ao polígono da base.



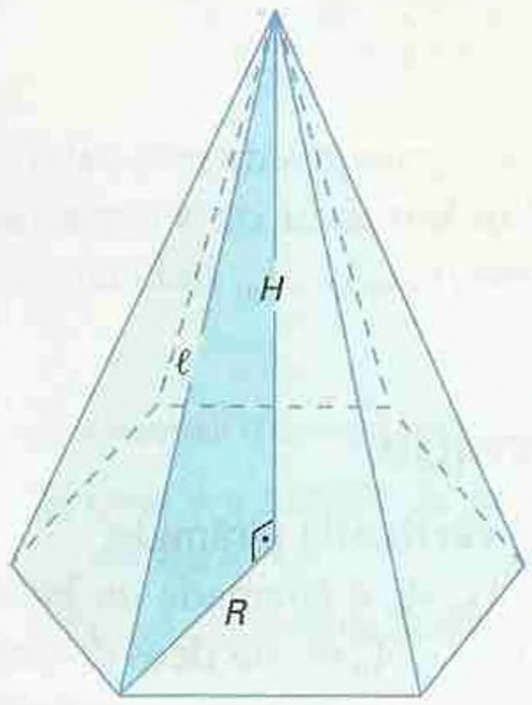
Pelo teorema de Pitágoras, temos:



$$H^2 + r^2 = m^2$$



$$m^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \ell^2$$

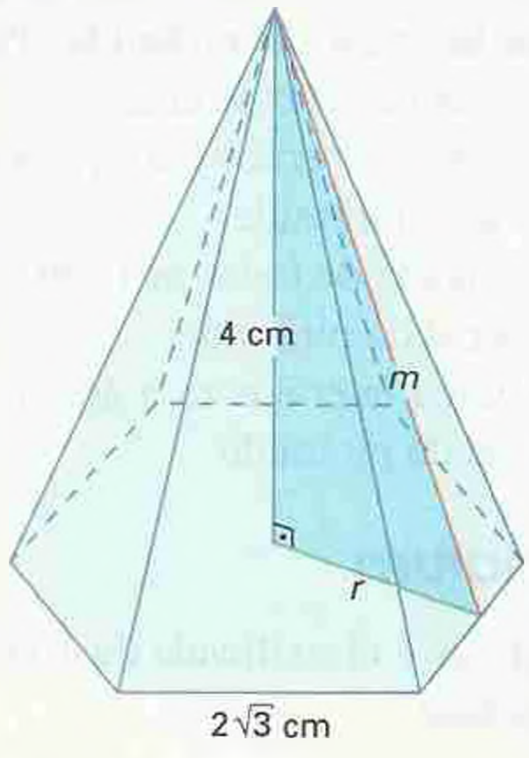


$$H^2 + R^2 = \ell^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular a área lateral (A_ℓ) e a área total (A_t) de uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 4 cm e uma aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm.

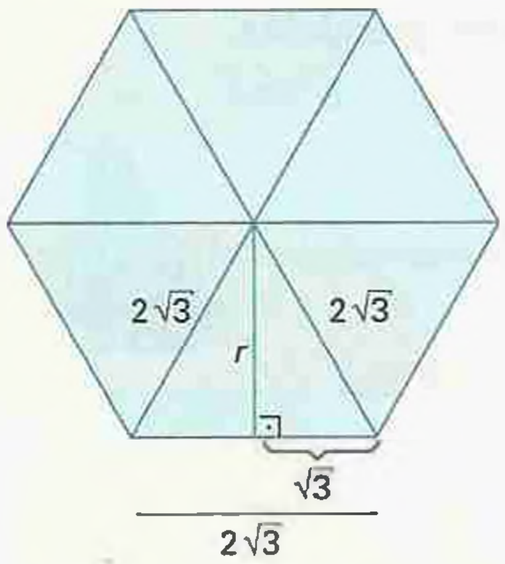
Resolução



Sendo m a medida do apótema da pirâmide e r a medida do apótema da base, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$4^2 + r^2 = m^2 \quad \textbf{(I)}$$

O apótema da base (r) é a altura de um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ cm.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

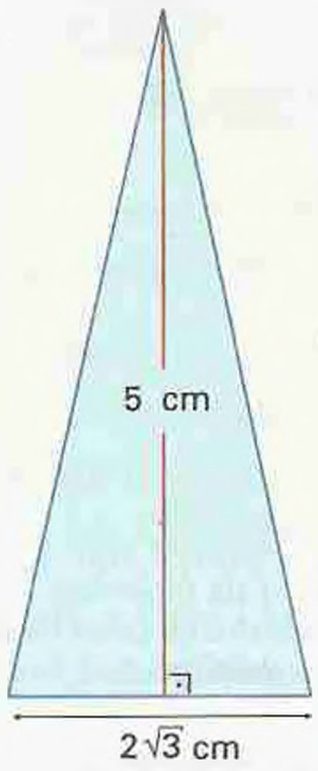
$$r^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 + 3 = 12 \therefore r = 3 \text{ cm}$$

Substituindo $r = 3$ em (I), obtemos:

$$4^2 + 3^2 = m^2 \therefore m = 5 \text{ cm}$$

Assim, cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de base $2\sqrt{3}$ cm e altura 5 cm.
Sendo A_f a área de uma face lateral, temos:

$$A_f = \frac{2\sqrt{3} \cdot 5}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_f = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2$$



A área lateral A_ℓ é igual a seis vezes a área de uma face lateral A_f, ou seja:

$$A_\ell = 6 \cdot 5\sqrt{3} \text{ cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

A área B do hexágono regular da base da pirâmide é 6 vezes a área de um triângulo equilátero de lado $2\sqrt{3}$ cm e altura 3 cm, isto é:

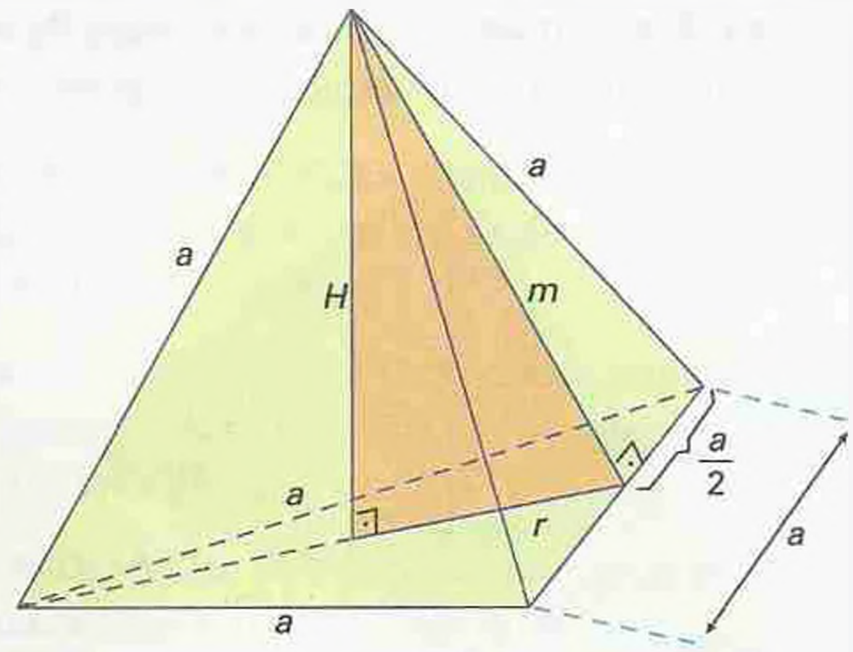
$$B = 6 \cdot \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

A área total A_t é a soma da área lateral A_ℓ com a área da base B, ou seja:

$$A_t = A_\ell + B = (30\sqrt{3} + 18\sqrt{3}) \text{ cm}^2 = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

R.2 Calcular a medida H da altura de um tetraedro regular cujas arestas têm medidas iguais a a.

Resolução
Um **tetraedro regular** é uma pirâmide regular triangular cujas arestas são congruentes entre si; logo, as quatro faces do tetraedro regular são triângulos equiláteros.



Pelo teorema de Pitágoras, temos $m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ **(I)** e $H^2 + r^2 = m^2$. **(II)**
De (I), temos:

$$m^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{3a^2}{4} \therefore m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

O apótema r da base mede $\frac{1}{3}$ da altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ de um triângulo equilátero de lado a, ou seja:

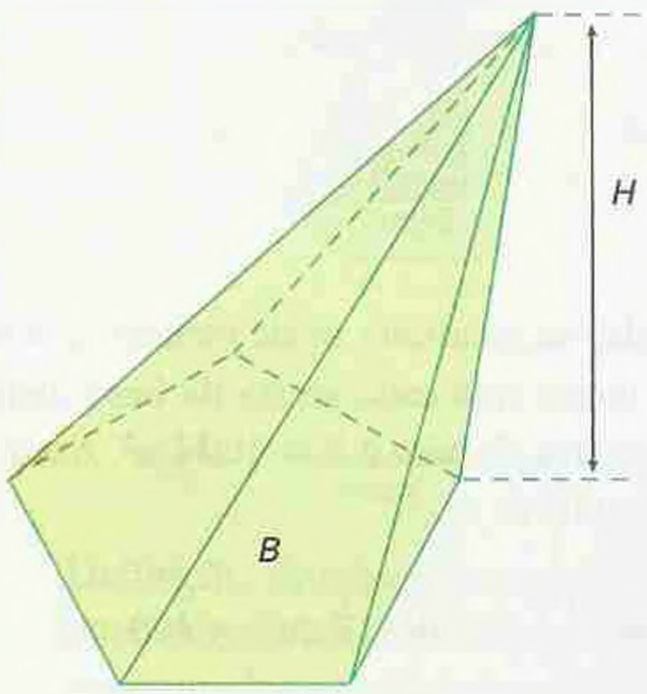
$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Substituindo $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ e $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ em (II), temos:

$$H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$
$$\therefore H^2 = \frac{27a^2}{36} - \frac{3a^2}{36} \therefore H^2 = \frac{24a^2}{36}$$
$$\therefore H = \frac{2a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

3. VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER

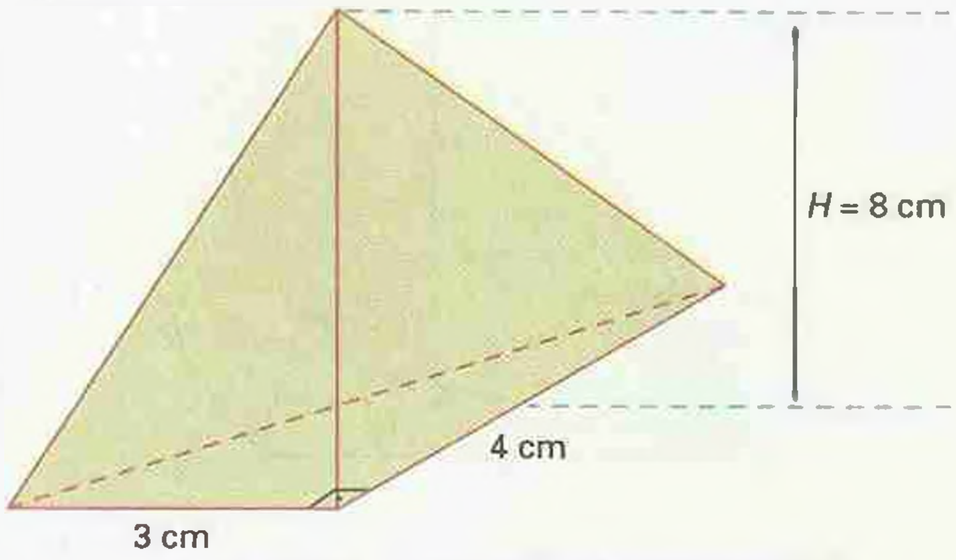
O volume V de uma **pirâmide qualquer** é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área B de sua base por sua altura H.



$$V = \frac{1}{3} BH$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

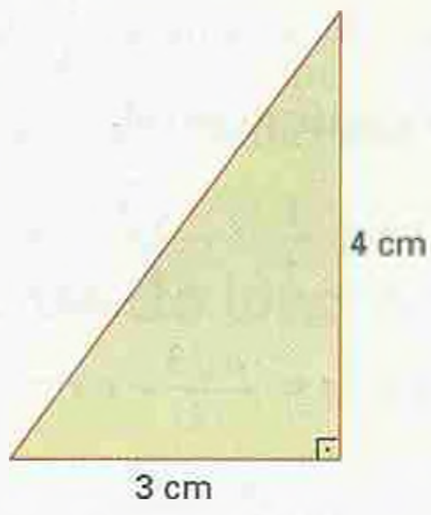
R.3 Uma pirâmide de altura 8 cm tem como polígono da base um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm. Calcular o volume dessa pirâmide.



Resolução

A área B da base da pirâmide é:

$$B = \frac{3 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 6\ \text{cm}^2$$



Assim, o seu volume V é:

$$V = \frac{1}{3}BH \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 8\ \text{cm}^3$$

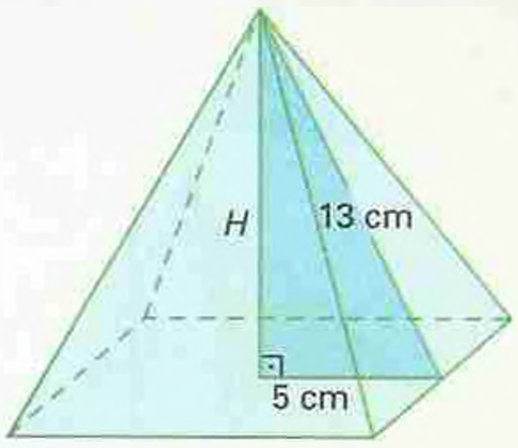
$$\therefore V = 16\ \text{cm}^3$$

R.4 O apótema de uma pirâmide regular quadrangular mede 13 cm e o apótema de sua base mede 5 cm. Calcular o volume dessa pirâmide.

Resolução

Sendo H a medida da altura da pirâmide, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$H^2 + 5^2 = 13^2 \therefore H = 12\ \text{cm}$$

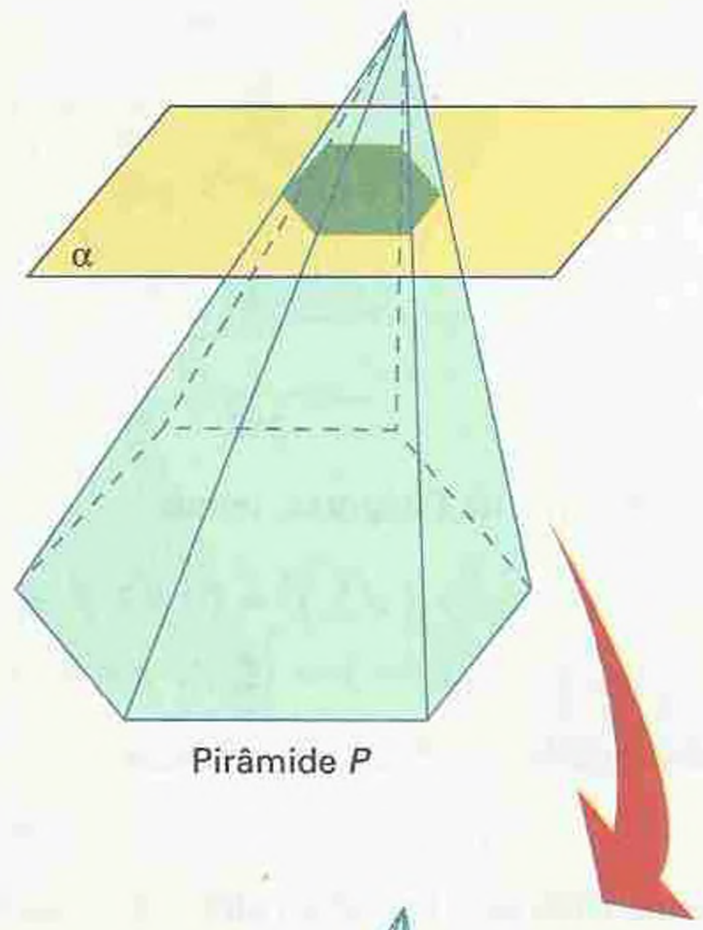


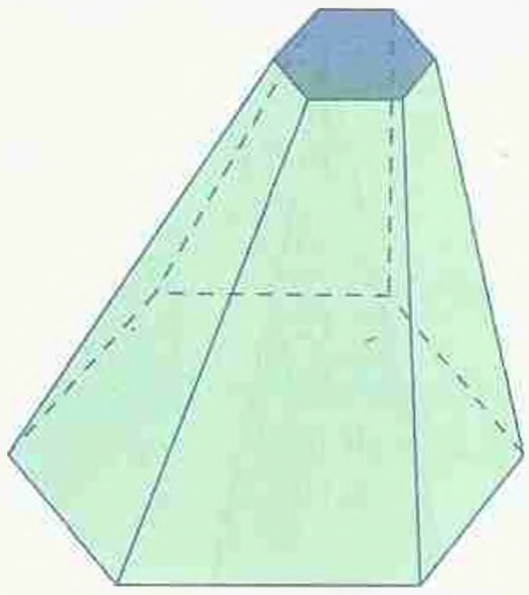
Como o apótema de um quadrado mede metade da medida de um lado, temos que cada aresta da base mede 10 cm e, portanto, a área da base é $B = 100\ \text{cm}^2$. Assim, o volume V da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12\ \text{cm}^3 = 400\ \text{cm}^3$$

4. TRONCO DE PIRÂMIDE DE BASES PARALELAS

Consideremos um plano α paralelo à base de uma pirâmide separando-a em dois poliedros. Um desses dois poliedros é uma pirâmide, e o outro é um **tronco de pirâmides de bases paralelas**.





Tronco T da pirâmide
(A distância entre as duas bases é a altura do tronco.)

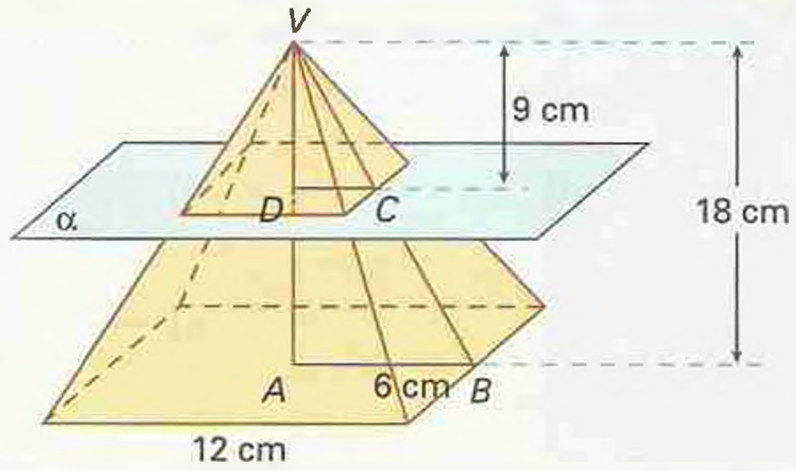
Note que o volume V_T do tronco é igual à diferença entre os volumes V_P e $V_{P'}$, das pirâmides P e P', respectivamente, isto é:

$$V_T = V_P - V_{P'}$$

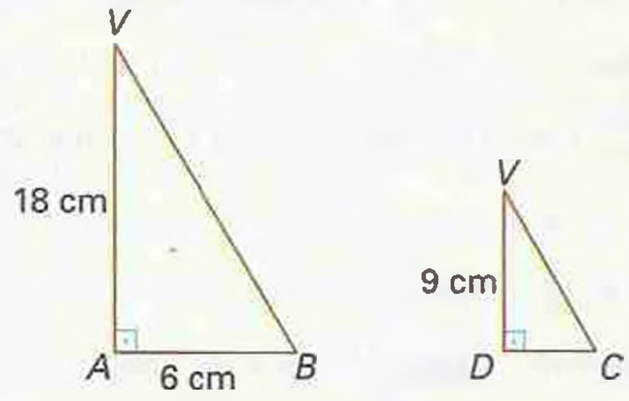
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 A altura de uma pirâmide regular quadrangular mede 18 cm, e cada aresta da base mede 12 cm. Um plano α, paralelo à base e distante 9 cm do vértice, intercepta a pirâmide. Calcular o volume do tronco de pirâmide assim determinado.

Resolução



Os triângulos *VAB* e *VDC* são semelhantes:



Como os lados correspondentes são proporcionais, temos $\frac{18}{9} = \frac{6}{DC} \therefore DC = 3$ cm, e, portanto, a base menor do tronco é um quadrado de lado 6 cm.
O volume V_T do tronco de pirâmide é a diferença entre o volume da pirâmide original e o da pirâmide acima do plano α, isto é:

$$V_T = \left(\frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 18 - \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 9\right) \text{cm}^3 = 756 \text{ cm}^3$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule a medida do apótema de uma pirâmide regular de altura 20 cm cujo apótema da base mede 15 cm.

B.2 O apótema de uma pirâmide regular e a altura medem, respectivamente, 13 m e 12 m. Calcule a medida do apótema da base dessa pirâmide.

B.3 O apótema de uma pirâmide regular e uma aresta da base medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm. Calcule a medida de uma aresta lateral dessa pirâmide.

B.4 Calcule a medida da altura de um tetraedro regular cujas arestas têm medidas iguais a 3 cm.

B.5 (U. Taubaté-SP) A soma *S* das áreas das faces de um tetraedro regular de aresta *a* é:

a) a^2 c) $4a^2$ e) $\sqrt{2}\,a^2$
b) $\sqrt{3}\,a^2$ d) $\sqrt{5}\,a^2$

B.6 A altura de um tetraedro regular mede $2\sqrt{6}$ cm. Calcule:
a) o apótema do tetraedro;
b) o apótema da base;
c) a área total.

B.7 Calcule a área lateral A_ℓ e a área total A_t de uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 6 cm e uma aresta da base mede $3\sqrt{3}$ cm.

B.8 Calcule a área lateral A_ℓ e a área total A_t de uma pirâmide regular quadrangular em que a altura mede 8 cm e o apótema da base mede 6 cm.

B.9 Calcule a área lateral A_ℓ e a área total A_t de uma pirâmide regular triangular de altura $\sqrt{6}$ cm e aresta da base 6 cm.

B.10 Uma pirâmide de altura 8 dm tem como polígono da base um triângulo retângulo de catetos 2 dm e 4 dm. Calcule o volume dessa pirâmide.

B.11 Calcule o volume de uma pirâmide de altura 6 cm cujo polígono da base é um triângulo isósceles de lados 13 cm, 13 cm e 10 cm.

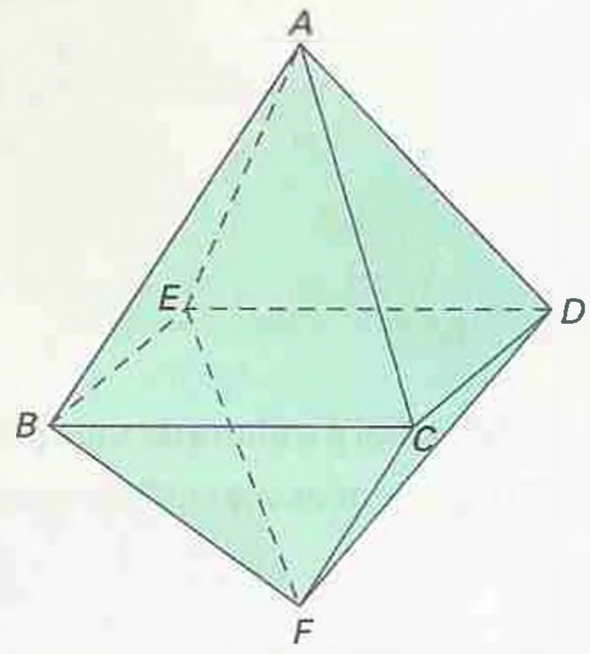
B.12 Qual é o volume de uma pirâmide de altura 15 cm, cujo polígono da base é um trapézio isósceles de lados 5 cm, 5 cm, 4 cm e 10 cm?

B.13 Calcule o volume de uma pirâmide regular quadrangular de altura 6 cm e aresta da base 4 cm.

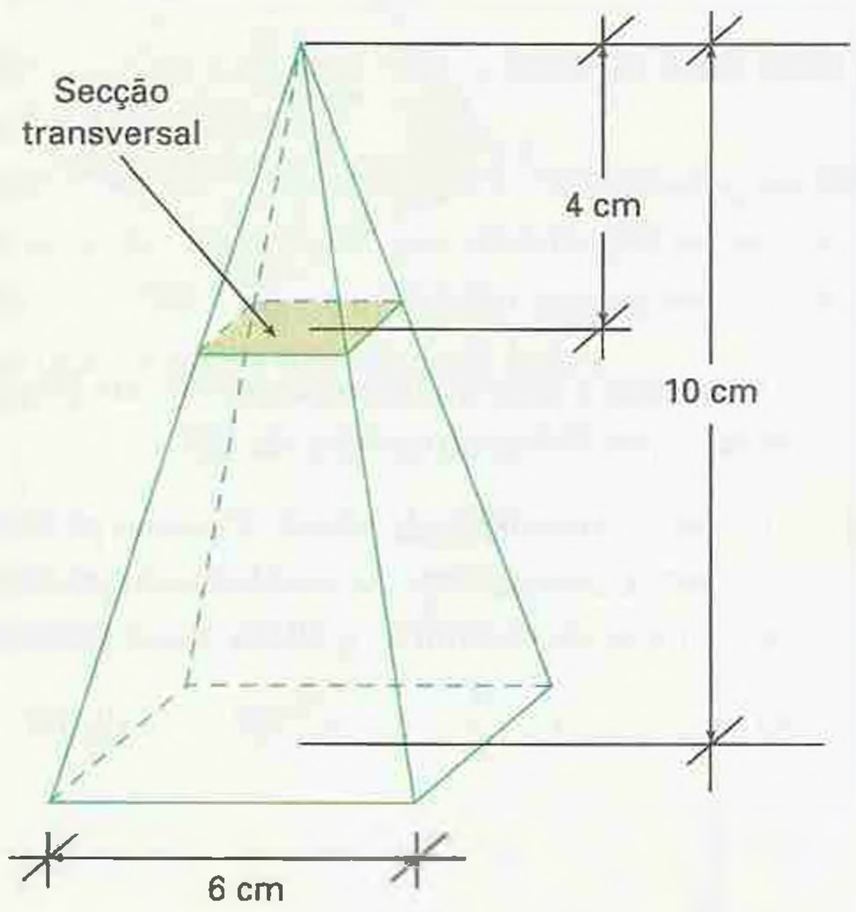
B.14 Calcule o volume de uma pirâmide regular triangular de altura 10 cm e aresta da base $\sqrt{3}$ cm.

B.15 Calcule o volume de uma pirâmide regular hexagonal de altura 5 m e aresta da base $4\sqrt{3}$ m.

B.16 Calcule a área total e o volume de um octaedro regular cujas arestas medem 2 cm.



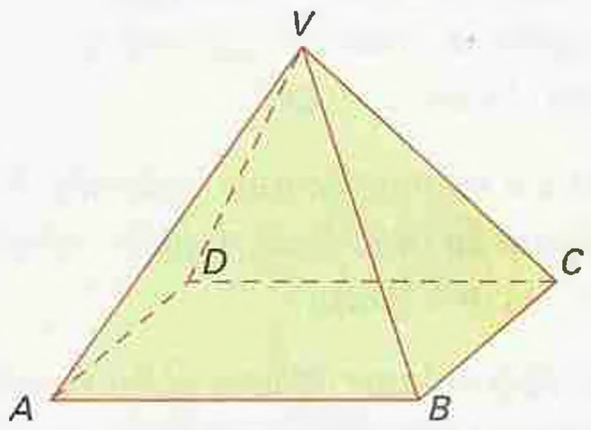
B.17 (UEPA) A figura abaixo representa uma pirâmide quadrangular regular, cuja aresta da base mede 6 cm e a altura 10 cm. Calcule:
a) o volume da pirâmide;
b) a área da secção transversal feita a 4 cm do vértice;
c) o volume do tronco obtido.



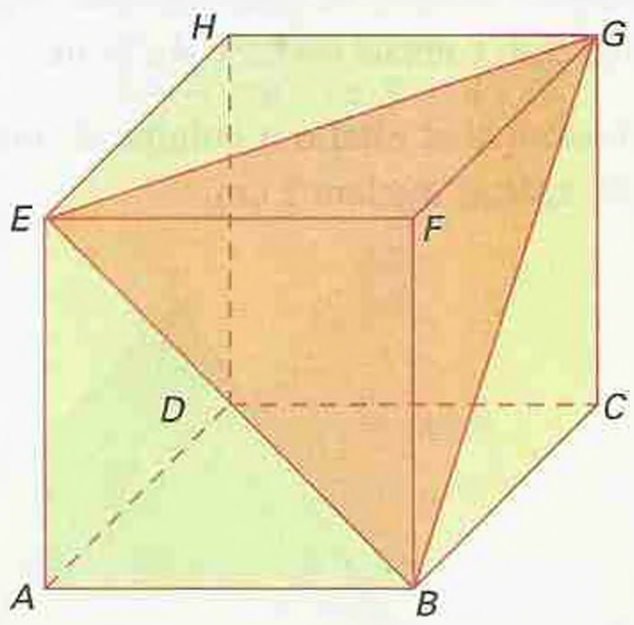
Definição. Secção transversal de uma pirâmide é qualquer intersecção não-vazia e não-unitária da pirâmide com um plano paralelo à sua base.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 A figura mostra uma pirâmide regular quadrangular de altura 9 cm e apótema da base $3\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida do ângulo formado pelas faces *VAD* e *VBC*.



C.2 A figura representa um cubo de aresta 4 cm. Retirando-se desse cubo a pirâmide *FBGE*, qual é a área total do poliedro remanescente?

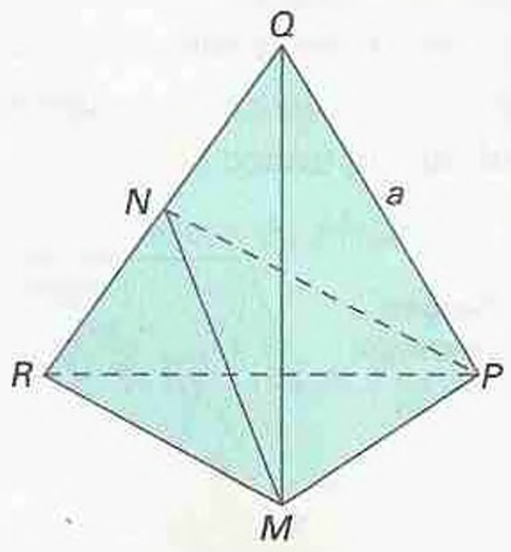


C.3 (Fuvest-SP) Qual é a altura de uma pirâmide regular quadrangular que tem as oito arestas iguais a $\sqrt{2}$?

a) $\sqrt{1}$ c) $\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{1{,}5}$ d) $\sqrt{2{,}5}$

C.4 (UFF-RJ) Considere o tetraedro regular *MPQR*, de aresta *a*, representado na figura.



Determine a área do triângulo *MNP*, em função de *a*, sabendo que *N* é ponto médio de $\overline{QR}$.

C.5 (Unirio) Um prisma de altura *H* e uma pirâmide têm bases com a mesma área. Se o volume do prisma é a metade do volume da pirâmide, a altura dessa pirâmide é:

a) $\frac{H}{6}$ b) $\frac{H}{3}$ c) $2H$ d) $3H$ e) $6H$

C.6 (UFRGS) Numa pirâmide regular, a base é um quadrado de lado *a*. Suas faces laterais são triângulos equiláteros. O volume dessa pirâmide é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ d) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$

b) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ e) $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

C.7 (UECE) Numa pirâmide quadrangular regular, uma aresta da base mede $2\sqrt{2}$ cm e uma aresta lateral mede $\sqrt{22}$ cm. O volume dessa pirâmide, em cm^3, é:

a) $7\sqrt{2}$ c) $9\sqrt{2}$

b) $8\sqrt{2}$ d) $10\sqrt{2}$

Sugestão. Desenhe um triângulo retângulo tendo a altura da pirâmide como um dos catetos e uma aresta lateral como hipotenusa.

C.8 Uma pirâmide regular triangular tem altura 9 m e o apótema da base 2 m. Calcule o volume dessa pirâmide.

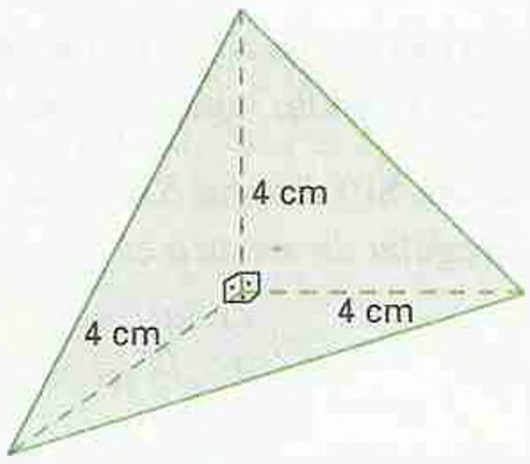
C.9 A medida da altura de uma pirâmide regular quadrangular é igual à medida de uma diagonal de sua base. Sabendo que o apótema da pirâmide mede 6 cm. calcule o volume dessa pirâmide.

C.10 O apótema de um tetraedro regular mede 3 cm. Calcule o volume desse tetraedro.

C.11 O apótema da base de um tetraedro regular mede 2 cm. Calcule o volume desse tetraedro.

C.12 Um tetraedro regular tem arestas de 6 cm. Calcule o volume desse tetraedro.

C.13 Chama-se "tetraedro trirretângulo" toda pirâmide triangular que possui um ângulo triédrico trirretângulo (as três arestas são perpendiculares entre si). Calcule o volume de um tetraedro trirretângulo cujas arestas do ângulo triédrico trirretângulo medem 4 cm.



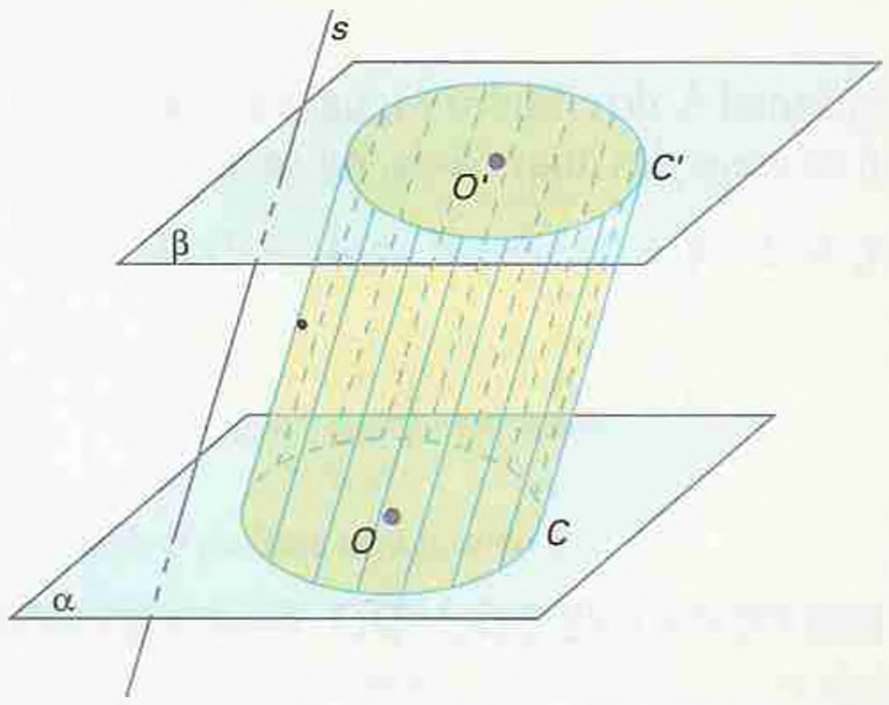
C.14 Uma pirâmide regular quadrangular de altura 8 cm e aresta da base 4 cm é seccionada por um plano paralelo à base e distante 2 cm de seu vértice. Calcule o volume do tronco de pirâmide assim determinado.

Capítulo 50

CILINDRO

1. CILINDRO CIRCULAR

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, uma reta s secante a esses planos e um círculo C de centro O contido em α. Consideremos todos os segmentos de reta, paralelos a s, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e o outro extremo pertencente a β.

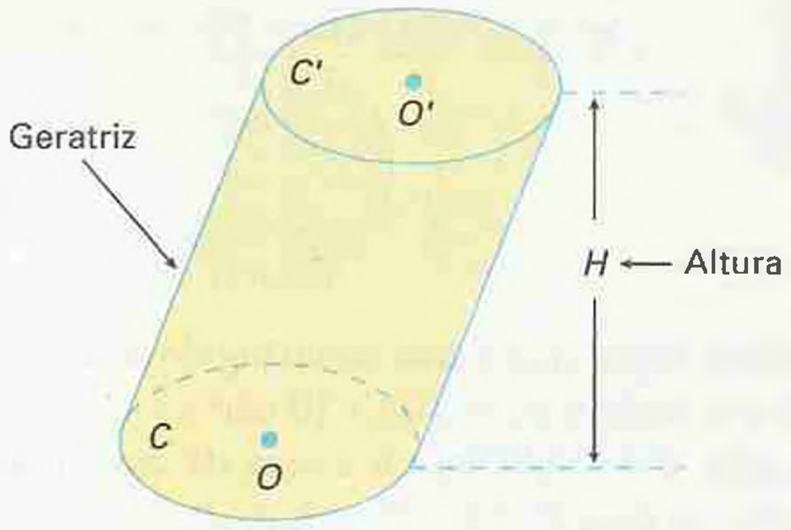


A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de **cilindro circular limitado** de bases C e C' ou simplesmente **cilindro circular**.

Nota

Há outros tipos de cilindro (por exemplo, o cilindro de bases elípticas), porém trataremos neste curso apenas dos cilindros circulares; por comodidade, às vezes omitiremos a palavra "circulares", chamando-os simplesmente de **cilindros**.

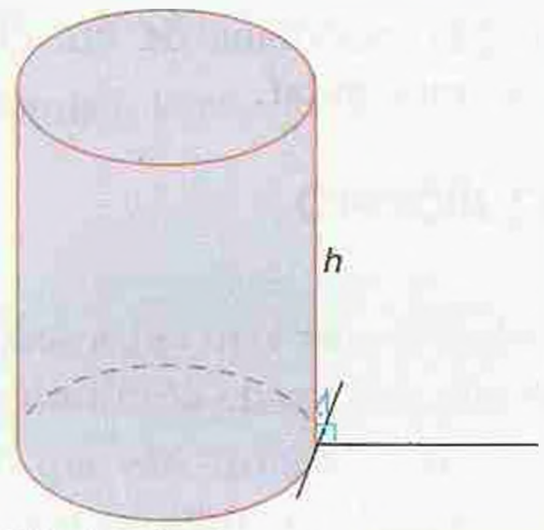
Elementos do cilindro circular



- Os círculos C e C' de centros O e O', respectivamente, são chamados de **bases** do cilindro.
- A reta $\overline{OO'}$ é chamada de **eixo** do cilindro.
- A distância entre as bases é chamada de **altura** do cilindro.
- Todo segmento de reta paralelo ao eixo $\overline{OO'}$ que tem extremidades pertencentes às **circunferências** das bases é chamado de **geratriz** do cilindro.
- Chama-se **área lateral** A_ℓ do cilindro a área da superfície obtida pela reunião de todas as geratrizes.
- Chama-se **área total** A_t do cilindro a soma da área lateral com as áreas das bases.

Cilindro circular reto

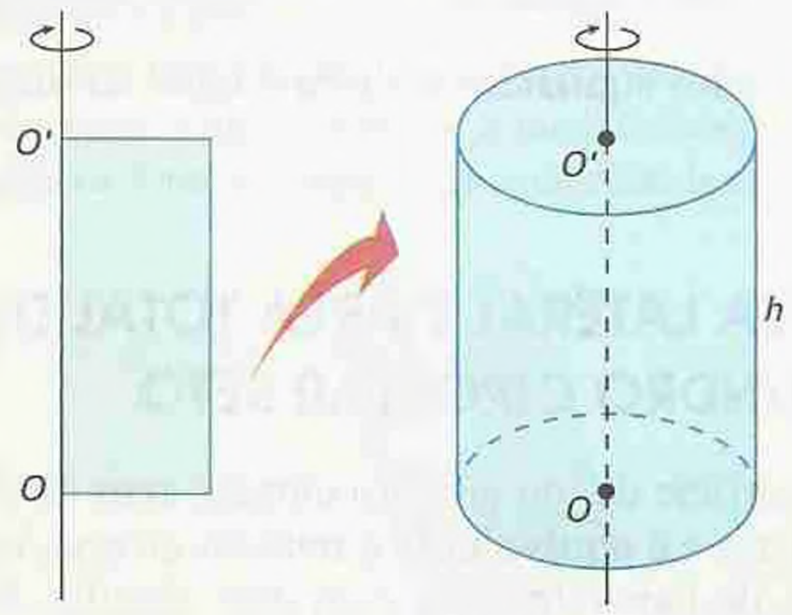
Cilindro circular reto é todo cilindro circular cujas geratrizes são perpendiculares aos planos das bases.



Cilindro circular reto

Em todo cilindro circular reto a medida h de uma geratriz é a altura do cilindro.

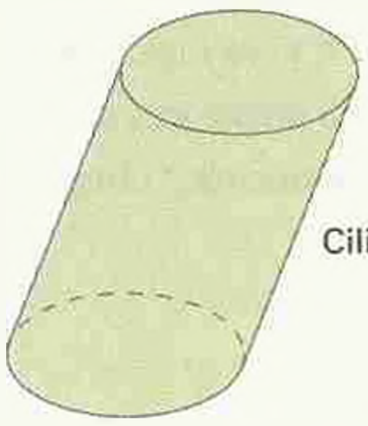
O cilindro circular reto também é conhecido por **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360° de uma região retangular em torno de um eixo que contém um de seus lados.



Cilindro de revolução

Nota

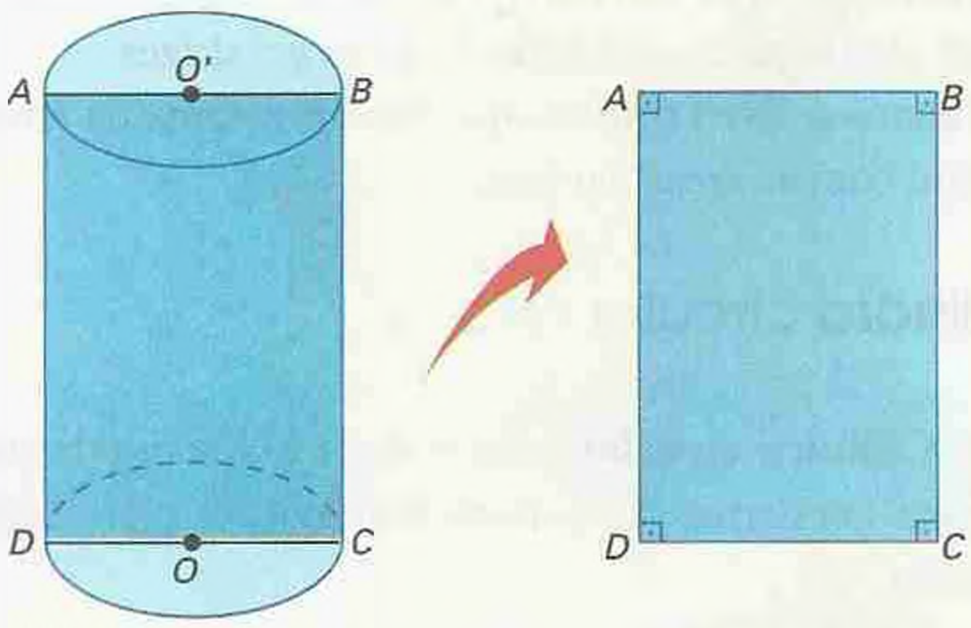
Cilindro circular oblíquo é todo aquele que não é reto.



Cilindro circular oblíquo

Secção meridiana de um cilindro circular

A intersecção de um cilindro circular com um plano que passa pelos centros de suas bases é chamada de **secção meridiana** do cilindro.

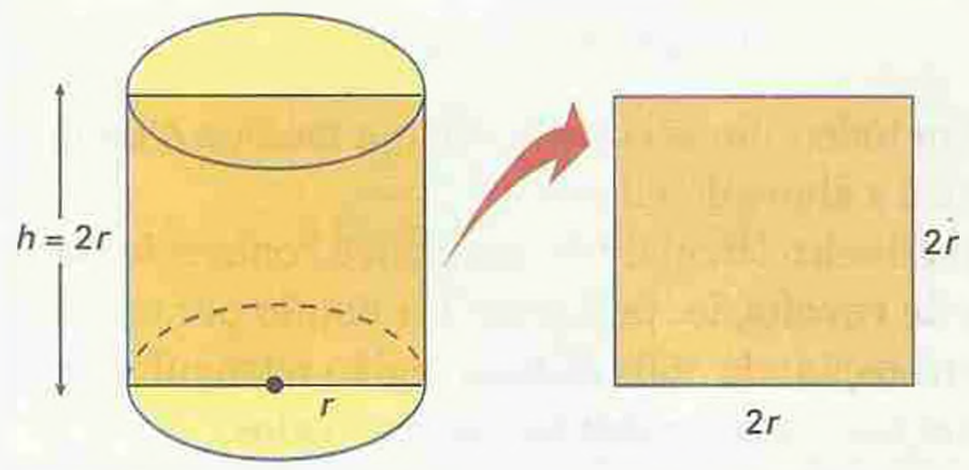


Cilindro circular reto — Secção meridiana

Qualquer secção meridiana de um cilindro circular reto é uma região retangular.

Cilindro equilátero

Todo cilindro circular reto cujas secções meridianas são quadradas é chamado de **cilindro equilátero**.



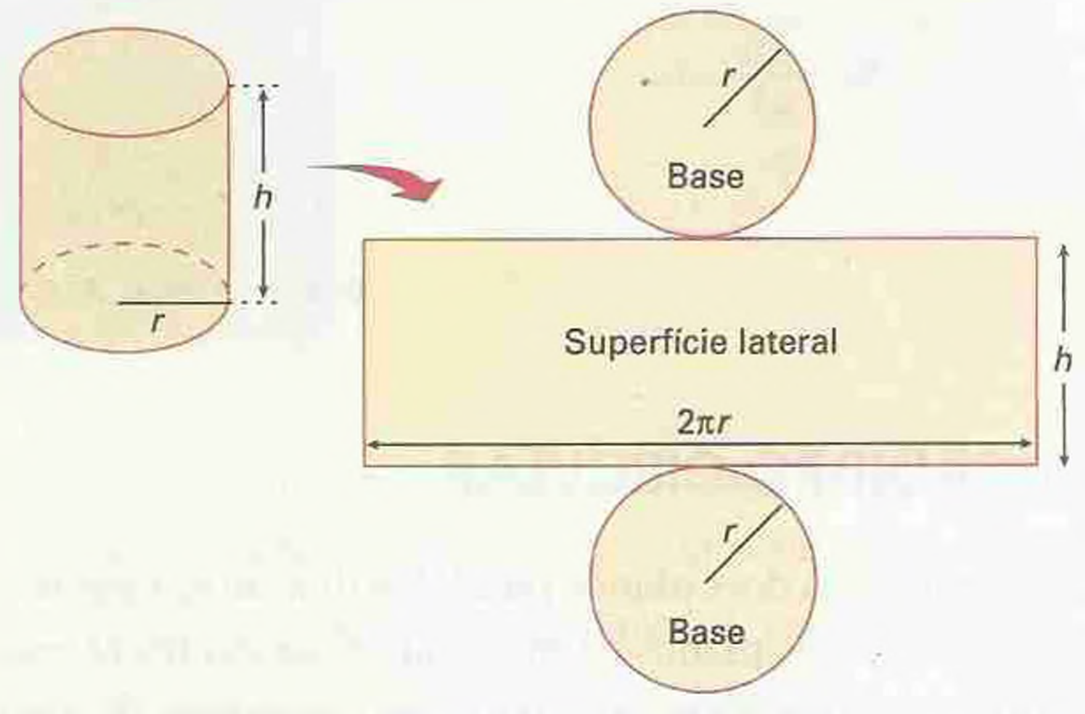
Cilindro equilátero — Secção meridiana

No cilindro equilátero a altura é igual ao diâmetro da base:

$$h = 2r$$

2. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL DE UM CILINDRO CIRCULAR RETO

A superfície de um cilindro circular reto de altura h e raio da base r é **equivalente** à reunião de uma região retangular, de lados $2\pi r$ e h, com dois círculos de raio r. Para entender essa afirmação, retire as bases de um cilindro, corte sua superfície lateral sobre uma geratriz e, por fim, planifique (coloque sobre um plano) as três regiões obtidas.



A área do retângulo equivalente à superfície lateral do cilindro é a **área lateral** A_ℓ do cilindro, ou seja:

$$A_\ell = 2\pi rh$$

A área total A_t do cilindro é igual à soma da área lateral A_ℓ com as áreas das duas bases, ou seja:

$$A_t = 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

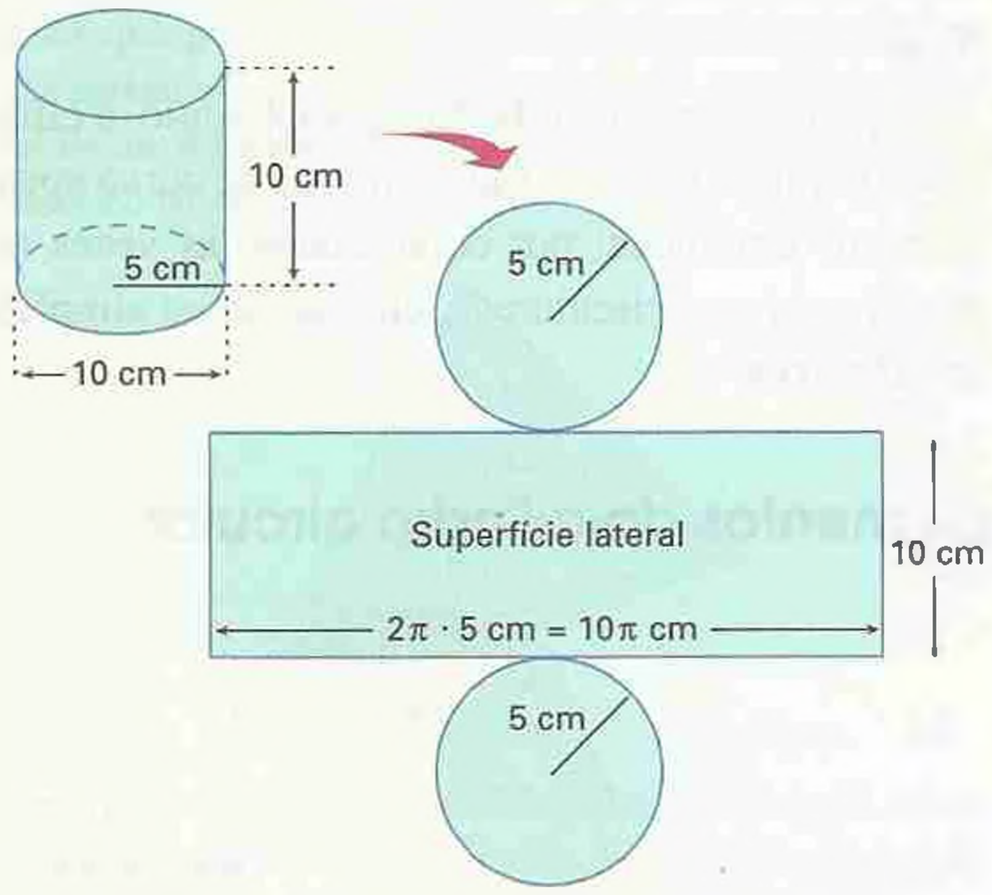
$$\therefore \quad A_t = 2\pi r(h + r)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Calcular a área lateral A_ℓ e a área total A_t de um cilindro equilátero de raio da base 5 cm.

Resolução

A altura de um cilindro equilátero é igual ao diâmetro da base, logo:



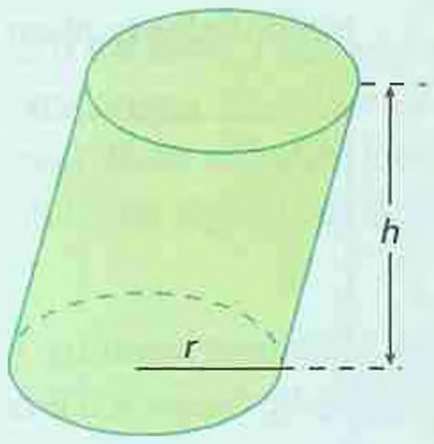
A área lateral A_ℓ é a área do retângulo de lados 10π cm e 10 cm, ou seja, $A_\ell = 10\pi \cdot 10\ \text{cm}^2 \therefore A_\ell = 100\pi\ \text{cm}^2$.
A área B de cada base é a área de um círculo de raio 5 cm, ou seja, $B = \pi \cdot 5^2\ \text{cm}^2 \therefore B = 25\pi\ \text{cm}^2$.
A área total A_t é a soma da área lateral com as áreas das duas bases:

$A_t = 100\pi\,\text{cm}^2 + 25\pi\,\text{cm}^2 + 25\pi\,\text{cm}^2 \therefore A_t = 150\pi\,\text{cm}^2$

3. VOLUME DO CILINDRO CIRCULAR

O volume V de um cilindro circular de altura h e raio da base r é igual ao produto da área da base, πr^2, pela altura h, isto é:

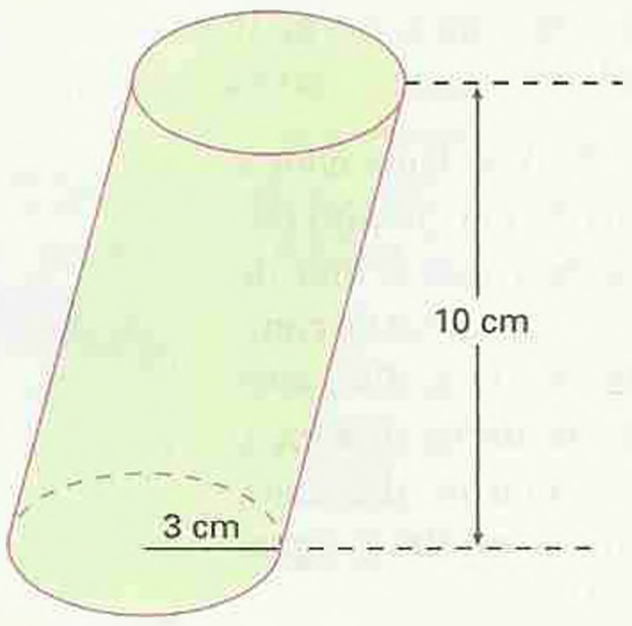
$$V = \pi r^2 h$$



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.2 Calcular o volume de um cilindro circular de altura 10 cm e raio da base 3 cm.

Resolução



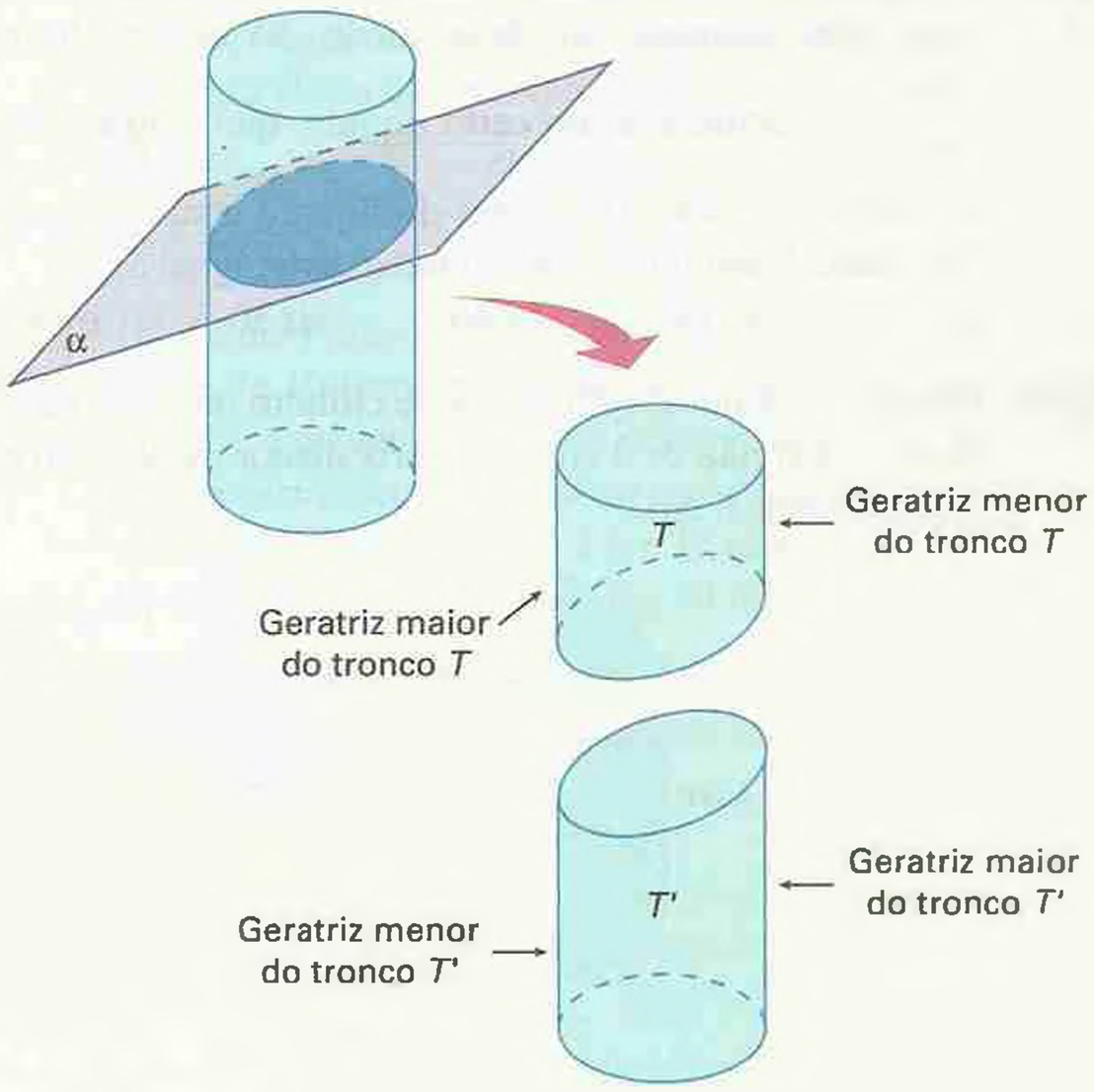
A área B da base do cilindro é:

$$B = \pi 3^2 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = 9\pi \text{ cm}^2$$

O volume V do cilindro é o produto da área da base por sua altura: $V = 9\pi \cdot 10 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 90\pi \text{ cm}^3$.

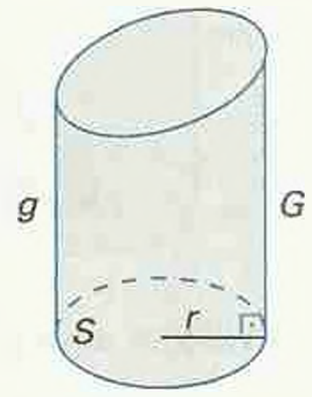
4. TRONCO DE CILINDRO RETO COM UMA BASE CIRCULAR

Um plano α que intercepta todas as geratrizes de um cilindro circular reto separa-o em dois sólidos chamados de **troncos de cilindro com uma base circular**.

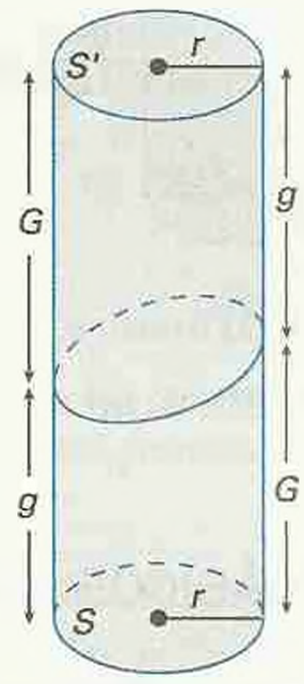


Volume de um tronco de cilindro reto com uma base circular

Consideremos um tronco de cilindro circular reto que possui uma base circular S de raio r, a geratriz maior medindo G e a menor medindo g.



Prolongando suas geratrizes de modo a formar um cilindro circular reto de bases S e S', e altura $G + g$, temos:



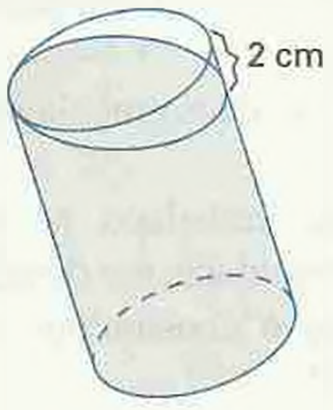
Esse cilindro é composto por dois troncos congruentes, possuindo, cada um, uma base circular de raio r, a geratriz maior medindo G e a menor medindo g. Assim, cada um desses troncos possui volume V igual à metade do volume V_C do cilindro, $V = \dfrac{V_C}{2}$, ou seja:

$$V = \frac{\pi r^2 (G + g)}{2}$$

Note, portanto, que esse tronco é equivalente (tem o mesmo volume) a um cilindro circular reto de raio da base r, cuja altura é a média aritmética entre as medidas das geratrizes maior e menor do tronco, $\dfrac{G + g}{2}$.

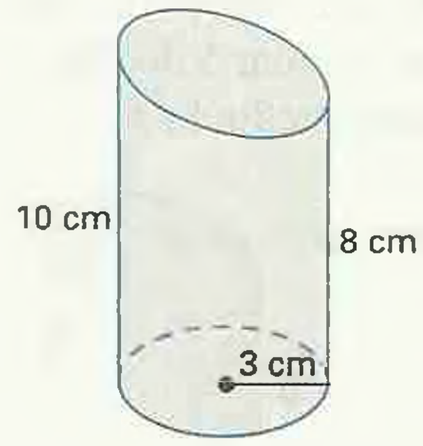
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Um copo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 6 cm e cuja altura interna mede 10 cm, contém um certo volume de água. Inclinando o máximo possível esse copo, sem derramar a água, obtemos a medida descrita na figura abaixo. Qual é o volume da água contida no copo?

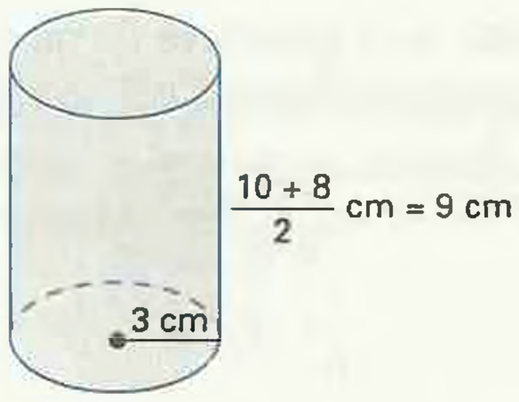


Resolução

O volume da água é o volume do seguinte tronco de cilindro circular reto de base circular:



Esse tronco é equivalente ao seguinte cilindro circular reto:



Logo, o volume V do tronco é:

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 9 \text{ cm}^3 \Rightarrow V = 81\pi \text{ cm}^3$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule a área lateral e a área total de um cilindro circular reto de altura 10 m e raio de base 3 m.

B.2 (UFPE) Um contêiner, na forma de um cilindro circular reto, tem altura igual a 3 m e área total (área da superfície lateral mais áreas da base e da tampa) igual a 20π m^2. Calcule, em metros, o raio da base desse contêiner.

B.3 A área lateral de um cilindro circular reto é igual à metade da área total. Calcule a altura desse cilindro, sabendo que o raio da base mede 5 cm.

B.4 Um cilindro equilátero tem altura 20 cm. Calcule a área lateral e a área total desse cilindro.

B.5 Calcule o volume de um cilindro circular de altura 8 dm e raio da base 2 dm.

B.6 Calcule o volume de um cilindro equilátero cujo raio da base mede 4 cm.

B.7 (U. F. Ouro Preto-MG) Um cilindro equilátero tem volume $V = 16\pi$ cm^3; sua altura é:

a) 2 cm c) $2\sqrt[3]{16}$ cm e) $\sqrt[3]{2}$ cm

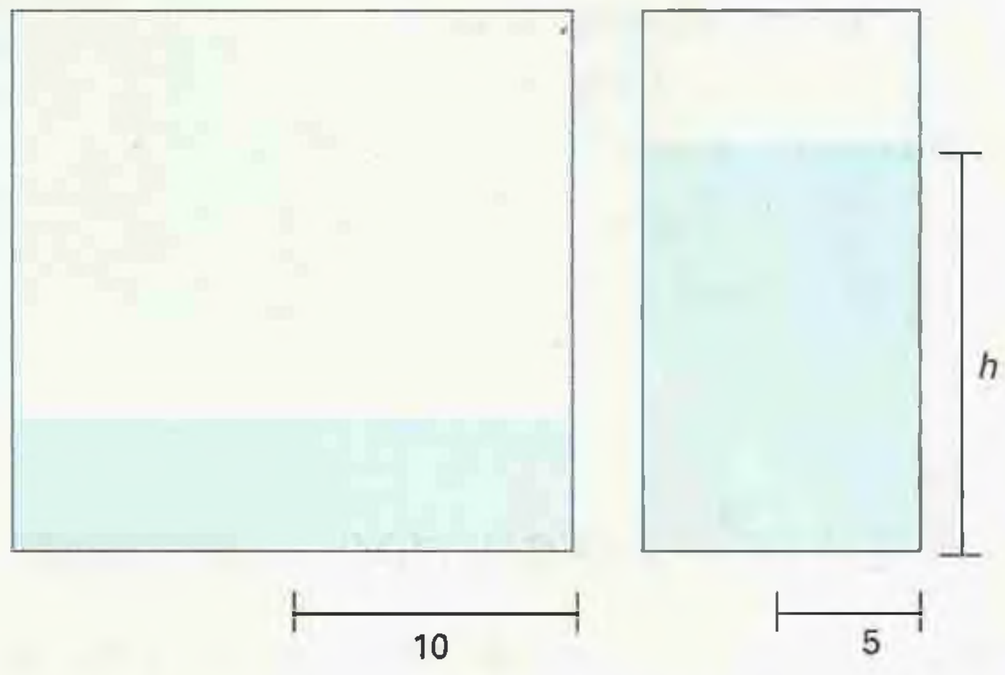
b) $\sqrt[3]{16}$ cm d) 4 cm

B.8 (FGV-SP) Um produto é embalado em recipiente com formato de cilindros retos. O cilindro A tem altura 20 cm e raio da base 5 cm. O cilindro B tem altura 10 cm e raio da base 10 cm.

a) Em qual das duas embalagens gasta-se menos material?

b) O produto embalado no cilindro A é vendido a R$ 4,00 a unidade, e o do cilindro B, a R$ 7,00 a unidade. Para o consumidor, qual a embalagem mais vantajosa?

B.9 (U. E. Londrina-PR) Dois recipientes cilíndricos têm altura de 40 cm e raios da base medindo 10 cm e 5 cm. O maior deles contém água até $\frac{1}{5}$ de sua capacidade.

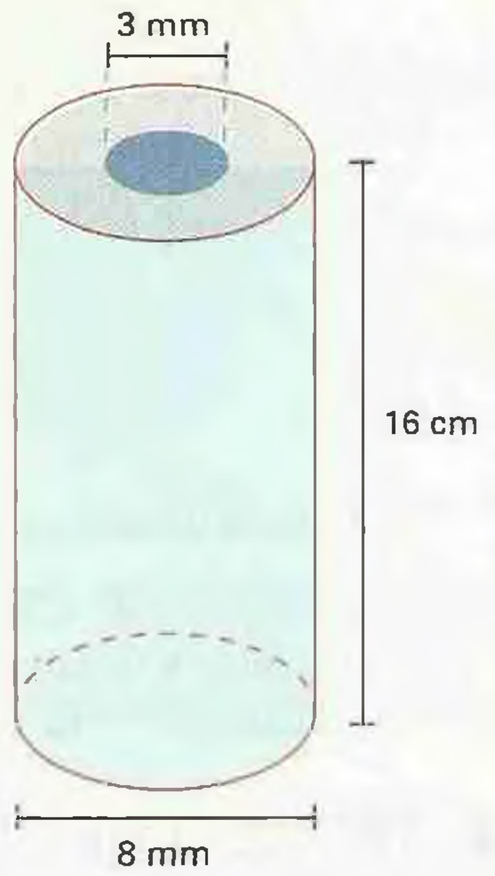


Essa água é despejada no recipiente menor, alcançando a altura h, de:

a) 32 cm c) 16 cm e) 10 cm

b) 24 cm d) 12 cm

B.10 (UNIR) Um lápis com a forma de um cilindro circular reto tem 8 mm de diâmetro e 16 cm de comprimento. O grafite, com a mesma forma cilíndrica, tem 3 mm de diâmetro, conforme mostra a figura ao lado.



O volume de madeira usada na fabricação do lápis é, em centímetros cúbicos, igual a:

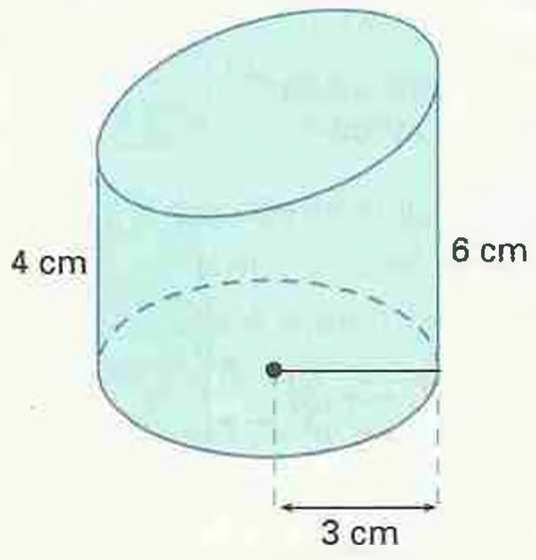
a) $1{,}2\pi$ c) $2{,}5\pi$ e) $3{,}2\pi$

b) π d) $2{,}2\pi$

B.11 (Cesgranrio) Um recipiente com a forma de um cilindro reto, cujo diâmetro da base mede 40 cm e altura $\frac{100}{\pi}$ cm, armazena um certo líquido, que ocupa 40% de sua capacidade. O volume do líquido contido nesse recipiente é, em litros, aproximadamente, igual a:

a) 16 b) 18 c) 20 d) 30 e) 40

B.12 Calcule o volume de um tronco de cilindro reto cuja base circular tem raio de 3 cm, a geratriz menor mede 4 cm e a maior mede 6 cm.



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Um cilindro circular reto de raio da base 5 cm possui uma secção meridiana equivalente a uma de suas bases. Calcule a área lateral e a área total desse cilindro. **Lembrete**. Figuras planas equivalentes são figuras de áreas iguais.

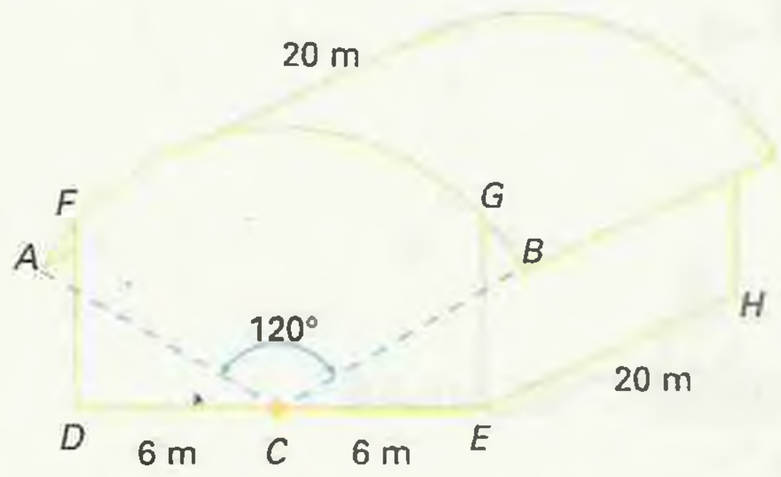
C.2 Uma secção meridiana de um cilindro equilátero tem área 100 m². Calcule a área lateral e a área total desse cilindro.

C.3 Calcule a razão $\frac{A_\ell}{A_t}$, em que A_ℓ é a área lateral e A_t é a área total de um cilindro equilátero de raio da base R.

C.4 Uma lata de óleo, sob a forma de um cilindro circular reto, tem raio da base 5 cm e seu volume é 1 ℓ. Qual é a altura da lata?

C.5 (U. F. Santa Maria-RS) Um orizicultor pretende construir um depósito cujo formato e dimensões aparecem na figura. AB é um arco de circunferência de centro C, as medidas DF e EG são iguais e valem a metade da medida DE. Nessas condições, a medida da área da cobertura, em m², vale:

a) $4\pi\sqrt{2}$ c) $80\pi\sqrt{2}$ e) 400
b) $40\pi\sqrt{2}$ d) $100\pi\sqrt{2}$



C.6 (FEI-SP) No projeto de um prédio foi inicialmente prevista a construção de um reservatório de água com formato cilíndrico, cujas medidas seriam: raio da base igual a 2 m e altura igual a 3 m. Depois foi constatado que o volume do reservatório havia sido subestimado, sendo necessário, na verdade, o dobro do volume inicialmente previsto. Qual deverá ser a medida do raio da base, sabendo que a altura do reservatório não poderá ser alterada?

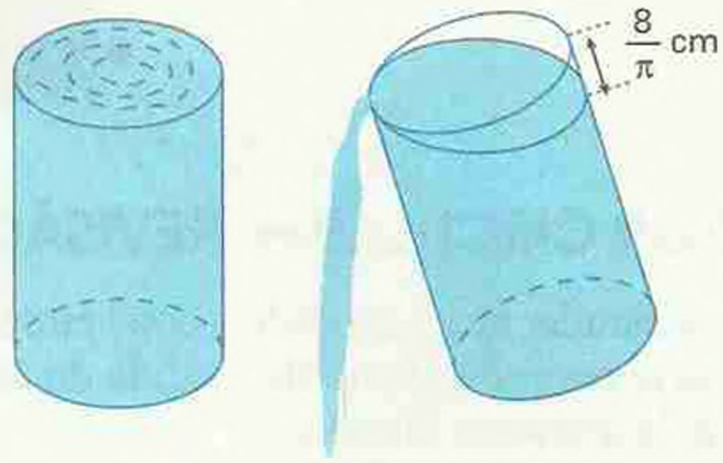
a) 4 m c) $2\sqrt{2}$ m e) 6 m
b) 3 m d) $\sqrt{2}$ m

C.7 (U. Gama Filho-RJ) Utilizando-se uma torneira cuja vazão é de 10 litros por minuto, o tempo necessário para encher completamente um reservatório cilíndrico de 70 cm de altura e 2 m de diâmetro é de aproximadamente:

a) 22 min c) 2 h e 15 min e) 4 h
b) 1 h e 28 min d) 3 h e 40 min

C.8 (Fatec-SP) Um tubo de vidro, com formato de cilindro circular reto, é graduado com uma escala e está cheio de água até a borda. Veja as figuras. O diâmetro interno do tubo é 5 cm. Inclinando-o paulatinamente, despeja-se a água nele contida até que atinja a marca que dista da borda $\frac{8}{\pi}$ cm. O volume da água despejada é:

a) 25 cm³ c) 75 cm³ e) 125 cm³
b) 50 cm³ d) 100 cm³



C.9 (UDESC) Um cubo de aresta h é inscrito num cilindro de mesma altura. A área lateral desse cilindro é:

a) $\pi \cdot \frac{h^2}{4}$ c) $\frac{\pi h^2\sqrt{2}}{2}$ e) $2 \cdot \pi \cdot h^2$
b) $\frac{\pi h^2\sqrt{2}}{4}$ d) $\pi \cdot h^2\sqrt{2}$

Nota. Um prisma se diz inscrito em um cilindro quando todos os seus vértices pertencem às circunferências das bases do cilindro.

C.10 (Enem) Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.

I) Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

II) Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

Capítulo 51

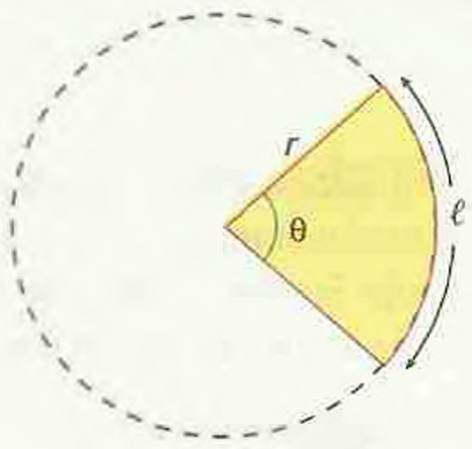
CONE

1. SETOR CIRCULAR — REVISÃO

Vamos estudar neste capítulo o cone circular. Para isso é necessário rever o cálculo da medida do ângulo central e da área de um setor circular.

Ângulo central do setor circular

A medida, em radianos, do ângulo central de um setor circular de raio r cujo arco tem comprimento ℓ é $\frac{\ell}{r}$.

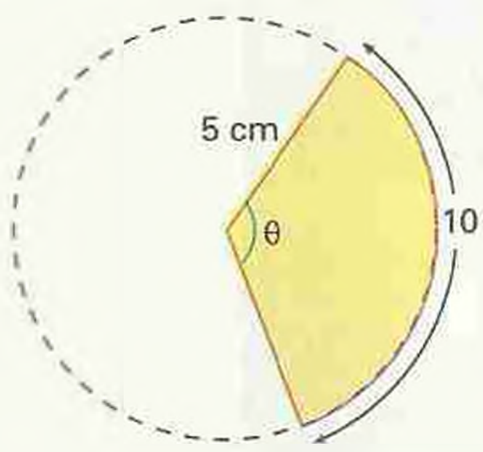


$$\theta = \frac{\ell}{r} \text{ rad}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Um setor circular de raio 5 cm tem arco de comprimento 10 cm. Calcular a medida do ângulo central desse setor.

Resolução



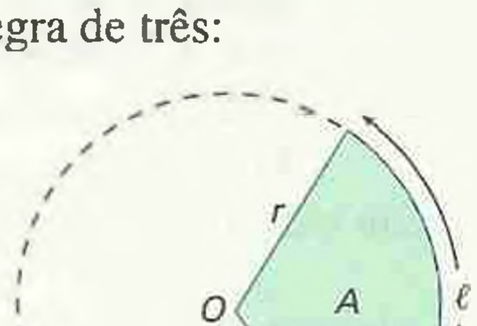
$$\theta = \frac{10}{5} \text{ rad} = 2 \text{ rad}$$

Área do setor circular

A área A de um setor circular de raio r cujo arco tem comprimento ℓ é dada por $A = \frac{\ell r}{2}$.

De fato, resolvendo a seguinte regra de três:

Comprimento do arco	Área
$2\pi r$	πr^2
ℓ	A



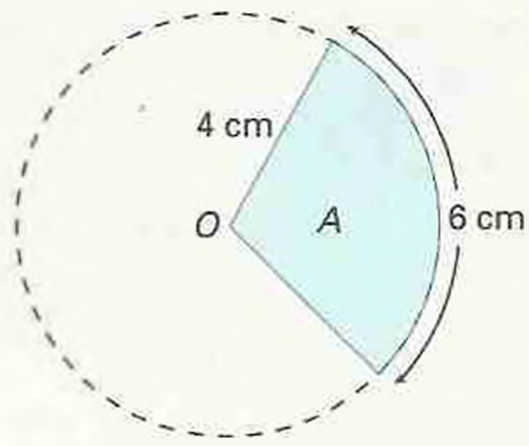
temos:

$$A = \frac{\ell \pi r^2}{2\pi r} \Rightarrow A = \frac{\ell r}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.2 Calcular a área de um setor circular de raio 4 cm cujo arco tem comprimento 6 cm.

Resolução

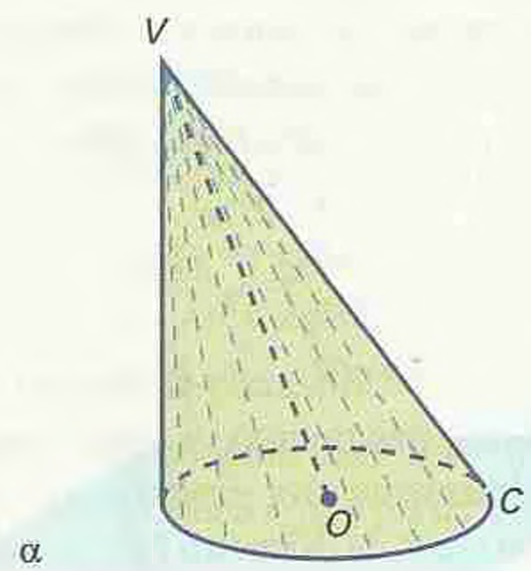


$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2 \Rightarrow A = 12 \text{ cm}^2$$

2. CONE CIRCULAR

Sejam um círculo C de centro O contido em um plano α e um ponto V não-pertencente a α.

Consideremos todos os segmentos de reta que possuem um extremo pertencente ao círculo e o outro extremo é V.

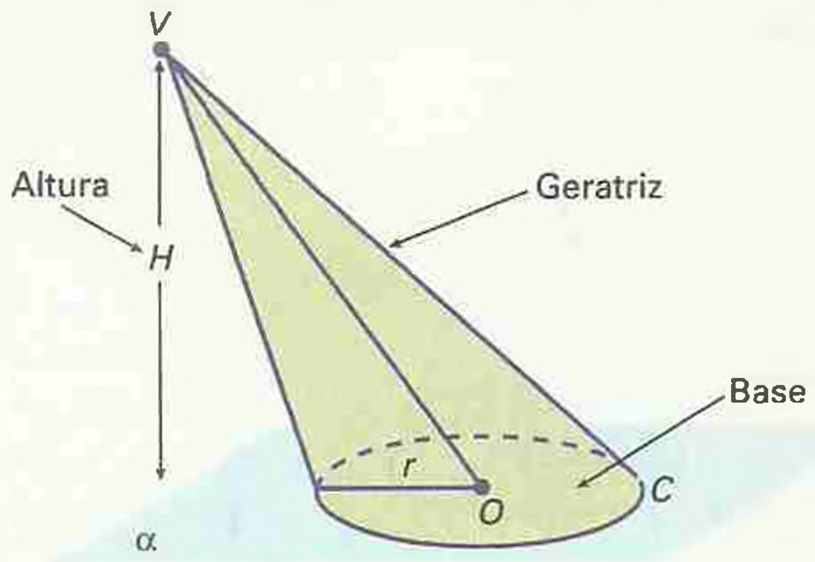


A reunião de todos esses segmentos de reta é um sólido chamado de **cone circular limitado** de base C e vértice V ou simplesmente **cone circular**.

Nota

Há outros tipos de cone (por exemplo, o cone de base elíptica), porém neste curso trataremos apenas do cone circular. Por comodidade, às vezes omitiremos a palavra "circular", chamando-o simplesmente de **cone**.

Elementos do cone circular

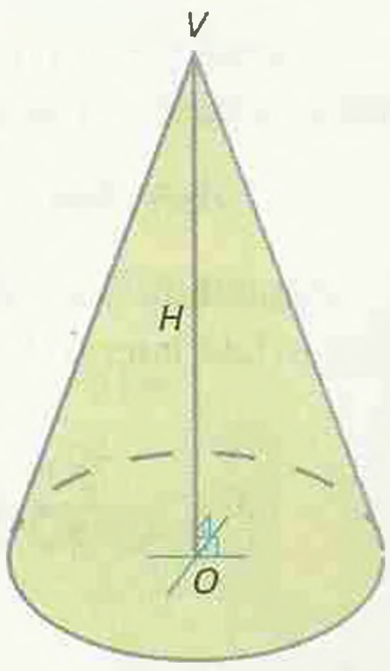


- O círculo C e o ponto V são chamados respectivamente de **base** e **vértice do cone**.
- A reta $\overline{OV}$ é chamada de **eixo** do cone.
- O raio do círculo C é chamado de **raio da base** do cone.
- A distância do vértice ao plano da base é chamada de **altura** do cone.
- Todo segmento de reta, cujos extremos são o ponto V e um ponto da circunferência da base, é chamado de **geratriz** do cone.
- A **área lateral** A_ℓ do cone é a área da superfície obtida pela reunião de todas as geratrizes.
- A **área total** A_t do cone é a soma da área lateral com a área da base.

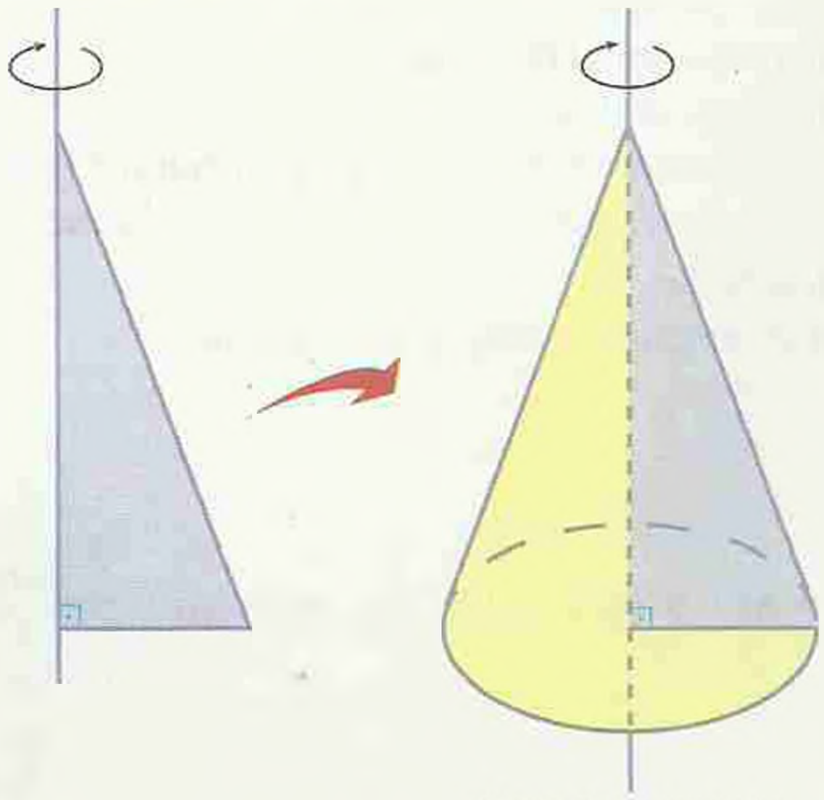
Cone circular reto

Cone circular reto é todo cone circular cujo eixo é perpendicular ao plano da base.

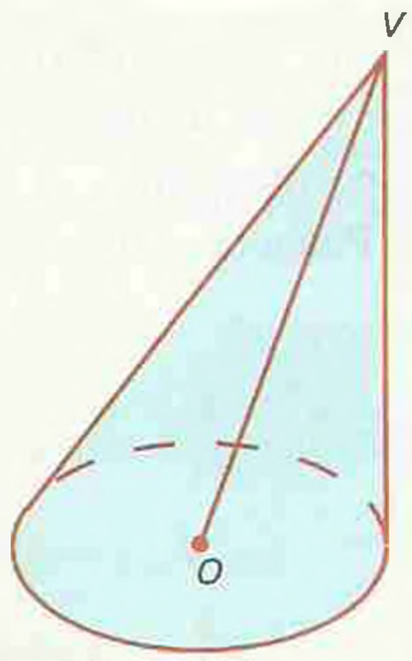
Em todo cone circular reto, a altura é a medida do segmento cujos extremos são o vértice V e o centro O da base.



O cone circular reto também é conhecido por **cone de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução de 360° em torno de um dos catetos de uma região limitada por um triângulo retângulo.


Cone de revolução

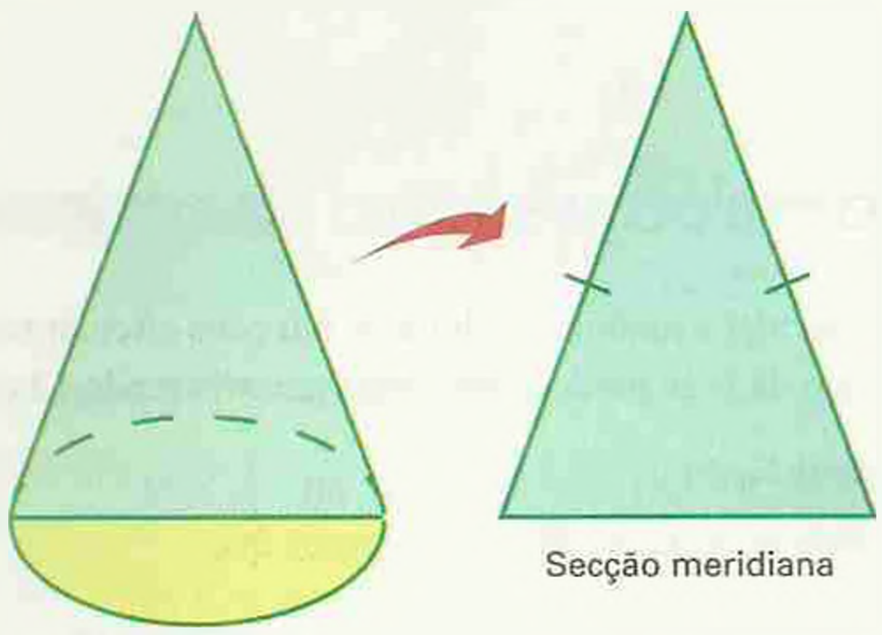
Cone oblíquo é todo cone cujo eixo não é perpendicular ao plano da base.



Cone oblíquo

Secção meridiana de um cone circular

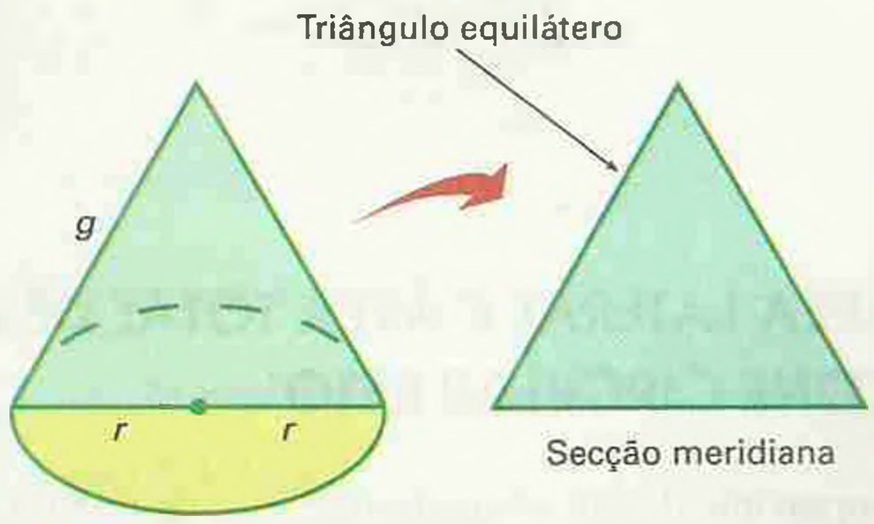
A intersecção de um cone circular com um plano que passa pelo vértice e pelo centro da base é chamada de **secção meridiana do cone circular**.


Secção meridiana

Qualquer secção meridiana de um cone circular reto é uma região triangular isósceles.

Cone equilátero

Todo cone circular reto cujas secções meridianas são regiões limitadas por triângulos equiláteros é chamado de **cone equilátero**.



Em todo cone equilátero a medida g de cada geratriz é igual ao diâmetro $2r$ da base:

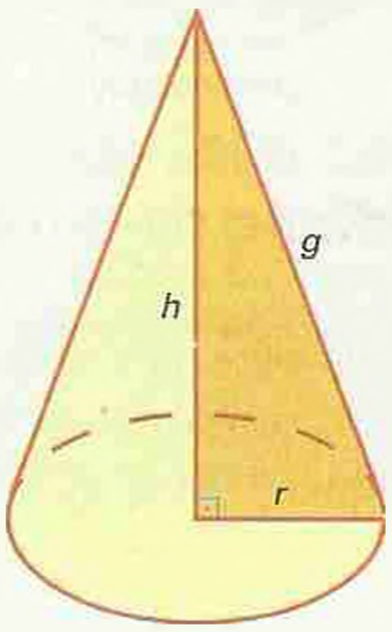
$$g = 2r$$

3. O TEOREMA DE PITÁGORAS E O CONE CIRCULAR RETO

Consideremos uma secção meridiana de um cone circular reto tal que o raio da base, a geratriz e a altura meçam r, g e h, respectivamente.

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$g^2 = r^2 + h^2$$



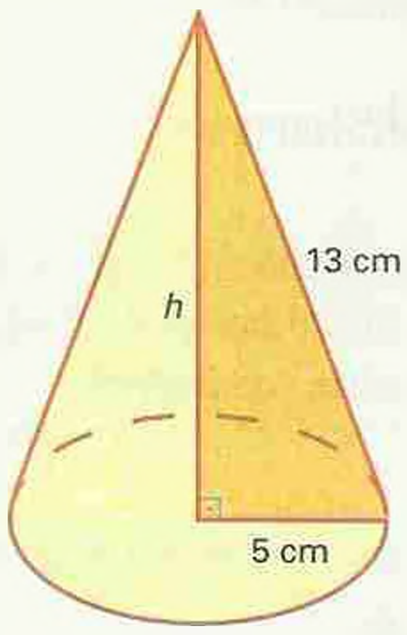
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Calcular a medida da altura de um cone circular reto cujo raio da base mede 5 cm e uma geratriz mede 13 cm.

Resolução

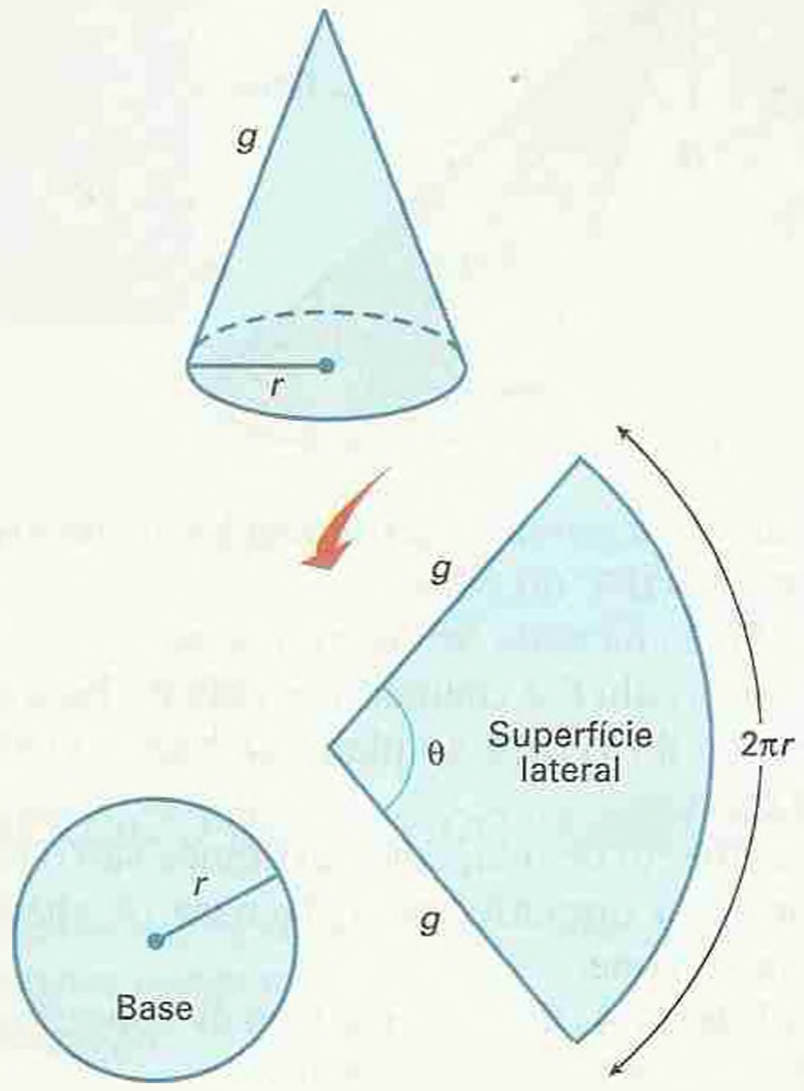
Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 144 \therefore h = 12 \text{ cm}$$



4. ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL DE UM CONE CIRCULAR RETO

A superfície de um cone circular reto de raio da base r e geratriz de medida g é equivalente à reunião de um círculo de raio r com um setor circular de raio g cujo arco mede $2\pi r$. Para visualizar essa equivalência, retire a base do cone, corte sua superfície lateral sobre uma geratriz e, por fim, planifique (coloque sobre um plano) as duas regiões obtidas.



Note que o comprimento do arco do setor é o comprimento da circunferência da base do cone.

A área do setor equivalente à superfície lateral do cone é a **área lateral** A_ℓ do cone, ou seja:

$$A_\ell = \frac{2\pi rg}{2} \Rightarrow A_\ell = \pi rg$$

A **área total** A_t do cone é a soma da área lateral com a área da base, ou seja:

$$A_t = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow A_t = \pi r(g + r)$$

A medida θ do ângulo central do setor equivalente à superfície lateral do cone é:

$$\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{360° \cdot r}{g}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Dado um cone circular reto de raio da base 6 cm e altura 8 cm, calcular:

a) a área lateral do cone;

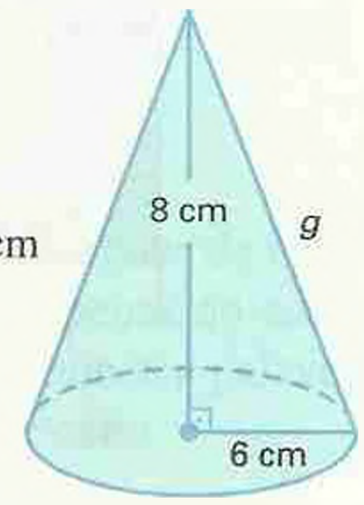
b) a área total do cone;

c) a medida, em graus, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone.

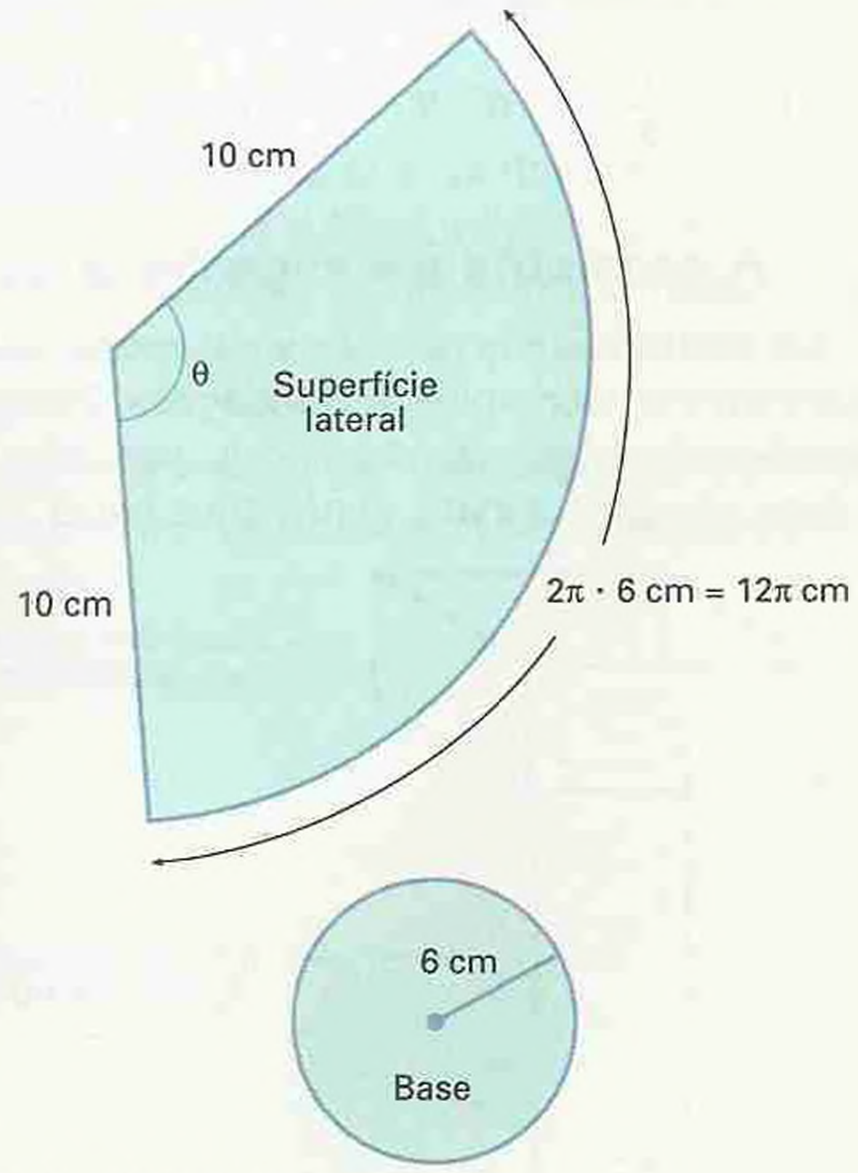
Resolução

Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$g^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow g^2 = 100 \therefore g = 10 \text{ cm}$$



Planificando a superfície do cone, temos:



a) A área lateral A_ℓ é:

$$A_\ell = \frac{12\pi \cdot 10}{2}\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_\ell = 60\pi\ \text{cm}^2$$

b) A área B da base do cone é:

$$B = \pi \cdot 6^2\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 36\pi\ \text{cm}^2$$

Assim, a área total A_t é:

$$A_t = A_\ell + B \Rightarrow A_t = 60\pi\ \text{cm}^2 + 36\pi\ \text{cm}^2$$
$$\therefore\ A_t = 96\pi\ \text{cm}^2$$

c) A medida θ do ângulo do setor é:

$$\theta = \frac{12\pi}{10}\ \text{rad} \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5}\ \text{rad}$$

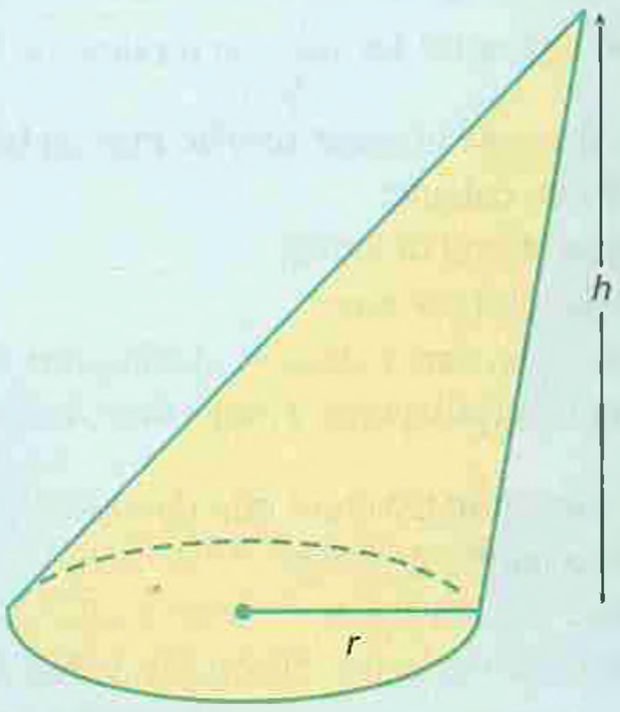
Lembrando que π rad equivalem a 180°, temos:

$$\theta = \frac{6 \cdot 180°}{5} \Rightarrow \theta = 216°$$

5. VOLUME DO CONE CIRCULAR

O volume V de um cone circular de altura h e raio da base r é igual a $\frac{1}{3}$ do produto da área da base, πr^2, pela altura h, isto é:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Um cone circular de vértice L e centro da base O é tal que o segmento de reta $\overline{LO}$ mede 12 cm e forma com o plano da base um ângulo de 60°. Calcular o volume desse cone, sabendo que o raio de sua base mede 4 cm.

Resolução

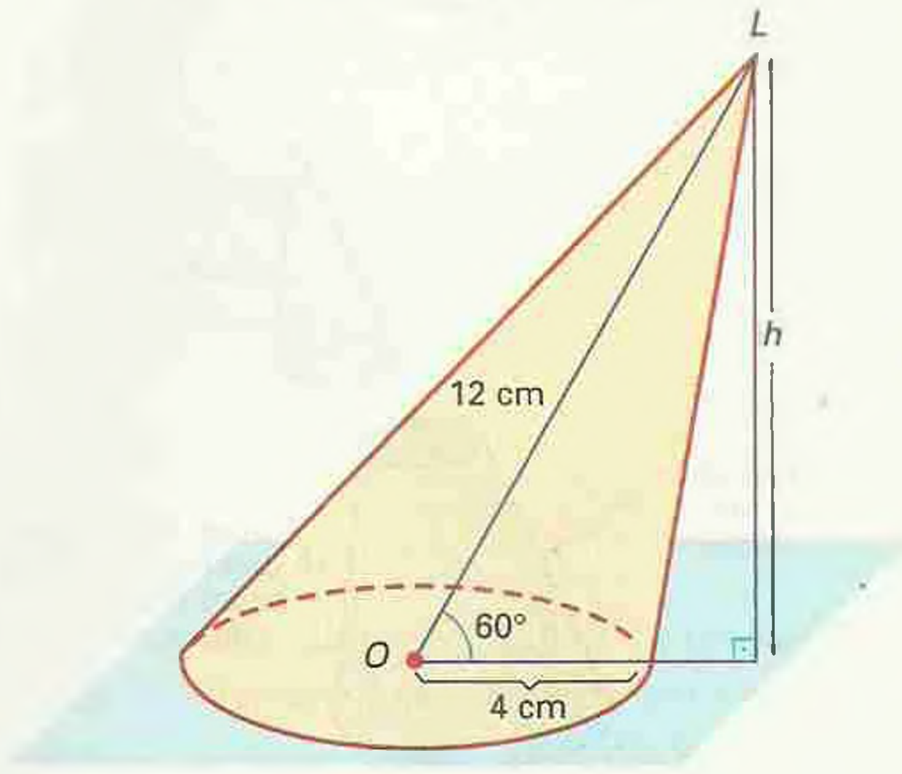
A medida h da altura é obtida por:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{12}$$

$$\therefore h = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

A área B da base é:

$$B = \pi \cdot 4^2\ \text{cm}^2 \Rightarrow B = 16\pi\ \text{cm}^2$$



Logo, o volume V do cone é:

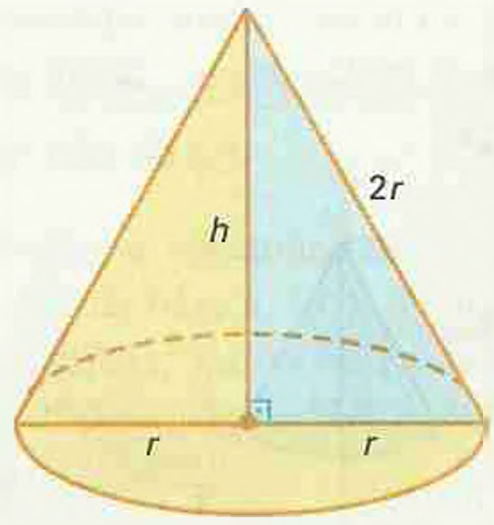
$$V = \frac{1}{3}Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16\pi \cdot 6\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

$$\therefore V = 32\pi\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

R.6 O raio da base de um cone equilátero é r. Calcular o volume desse cone, em função de r.

Resolução

Qualquer geratriz do cone equilátero tem a mesma medida do diâmetro da base.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + r^2 = (2r)^2 \Rightarrow h^2 = 3r^2 \therefore h = r\sqrt{3}$$

A área B da base é:

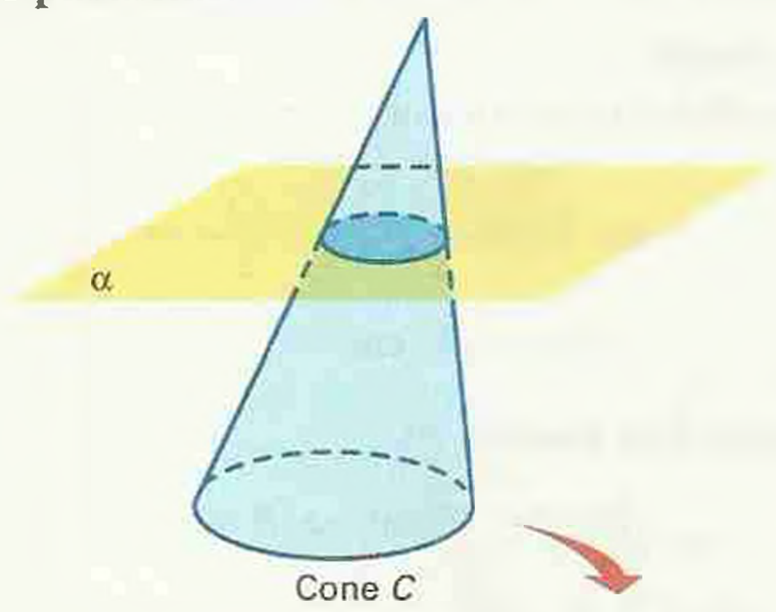
$$B = \pi r^2$$

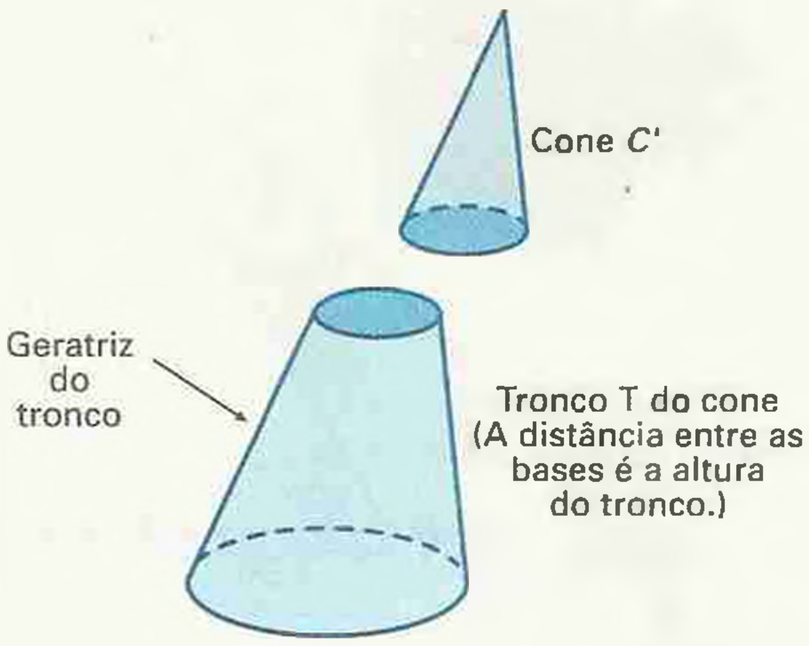
Logo, o volume V do cone é:

$$V = \frac{1}{3}Bh \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} \therefore V = \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$$

6. TRONCO DE CONE CIRCULAR DE BASES PARALELAS

Consideremos um plano α paralelo à base de um cone circular separando-o em dois sólidos. Um desses dois sólidos é um cone e o outro é um **tronco de cone circular de bases paralelas**.





Note que o volume V_T do tronco é igual à diferença entre os volumes V_C e $V_{C'}$, dos cones C e C', respectivamente, isto é:

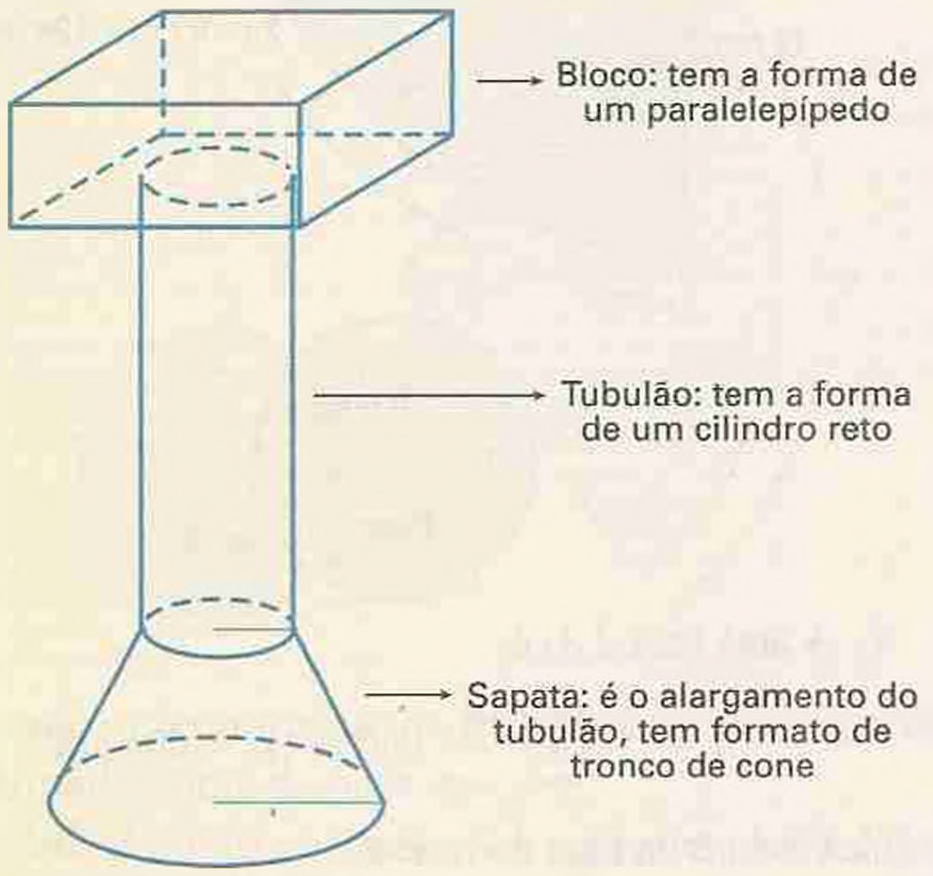
$$V_T = V_C - V_{C'}$$

O volume V_T do tronco de cone é a diferença entre o volume do cone original e o do cone acima do plano α:

$$V_T = \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 9 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6\right) \text{cm}^3 = 76\pi \text{ cm}^3$$

A geometria e a engenharia civil

Os edifícios são construídos sobre estruturas subterrâneas denominadas **fundações**. Basicamente essas estruturas são formadas por três partes: bloco, tubulão e sapata, conforme a figura abaixo.

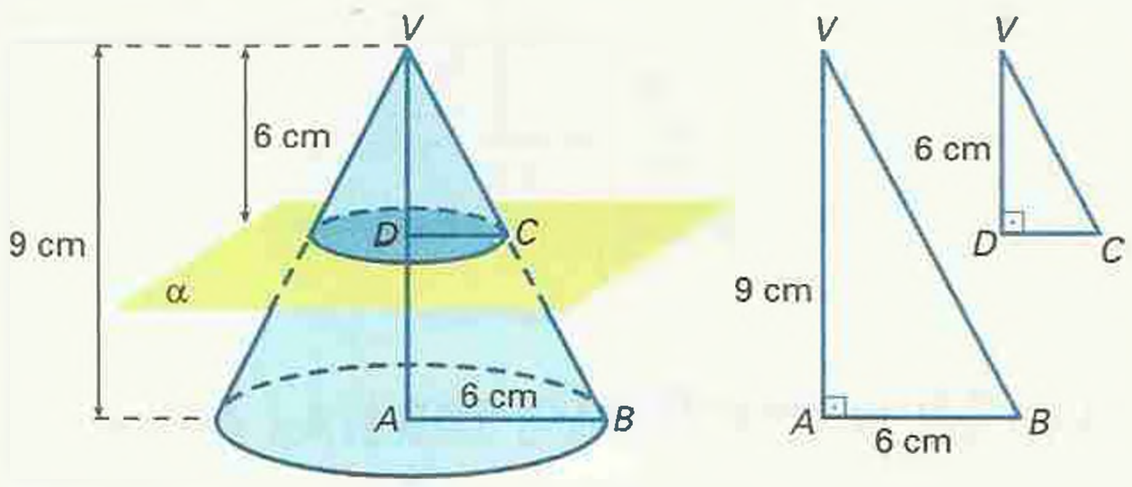


Cálculos de resistência de materiais determinam as dimensões das fundações em função do tipo de terreno e das forças que atuarão sobre elas. Especificadas as dimensões, os cálculos dos volumes do paralelepípedo, do cilindro e do tronco de cone determinam a quantidade de concreto que formará essas estruturas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 A altura de um cone circular reto mede 9 cm, e o raio de sua base mede 6 cm. Um plano α, paralelo à base e distante 6 cm do vértice, intercepta o cone. Calcular o volume do tronco de cone assim determinado.

Resolução



Os triângulos *VAB* e *VDC* são semelhantes.

Como os lados correspondentes são proporcionais, temos $\frac{VA}{VD} = \frac{AB}{DC}$, isto é:

$$\frac{9}{6} = \frac{6}{DC} \therefore DC = 4 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 A medida da geratriz de um cone equilátero é 10 cm. Calcule a medida da altura desse cone.

B.2 Cada geratriz de um cone circular reto de raio da base 4 cm forma com o plano da base um ângulo de 30°. Calcule a medida da altura desse cone.

B.3 Uma secção meridiana de um cone circular reto é uma região limitada por um triângulo isósceles de lados $2\sqrt{2}$ cm, $2\sqrt{2}$ cm e 4 cm. Calcule a medida do ângulo que uma geratriz forma com o plano da base do cone.

B.4 Dado um cone circular reto de raio da base 5 cm e geratriz 13 cm, calcule:
a) a área lateral do cone;
b) a área total do cone;
c) a medida, em radianos, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone.

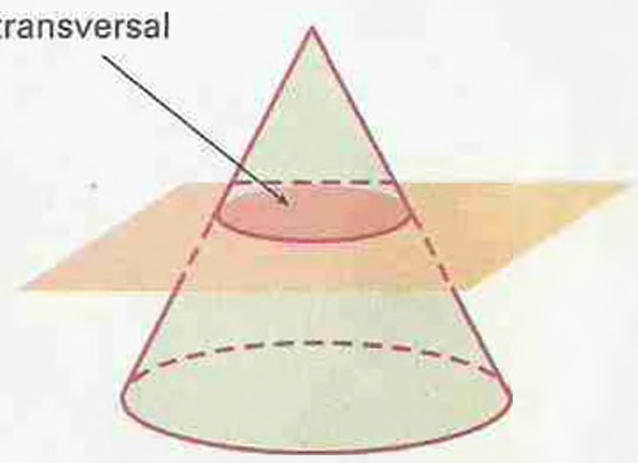
B.5 Um cone equilátero tem raio da base 3 cm. Calcule:
a) a área lateral do cone;
b) a área total do cone;
c) a medida, em graus, do ângulo central do setor circular equivalente à superfície lateral do cone.

B.6 Em um cone circular reto de altura 6 cm, a área lateral é o dobro da área da base. Calcule a medida do raio da base desse cone.

B.7 As áreas da base e de uma secção transversal de um cone circular são 32 cm² e 4 cm², respectivamente. Sabendo que a altura do cone é 12 cm, calcule a distância entre o plano dessa secção transversal e a base do cone.

Nota

Secção transversal de um cone é qualquer intersecção não-vazia e não-unitária do cone com um plano paralelo à sua base.



B.8 Calcule o volume de um cone circular em que a altura mede 9 cm e o raio da base mede 5 cm.

B.9 Um cone circular de vértice L e centro da base O é tal que o segmento de reta $\overline{LO}$ mede 10 m e forma com o plano da base um ângulo de 45°. Calcule o volume do cone, sabendo que o raio de sua base mede 3 m.

B.10 Qual é o volume de um cone circular reto de altura 4 dm cujas geratrizes medem 5 dm?

B.11 A altura de um cone equilátero mede 6 dm. Calcule o volume desse cone.

B.12 (U. Amazonas-AM) Um bar da cidade, em seu *réveillon*, ofereceu a seus brincantes um barril de chope que foi servido em tulipas:

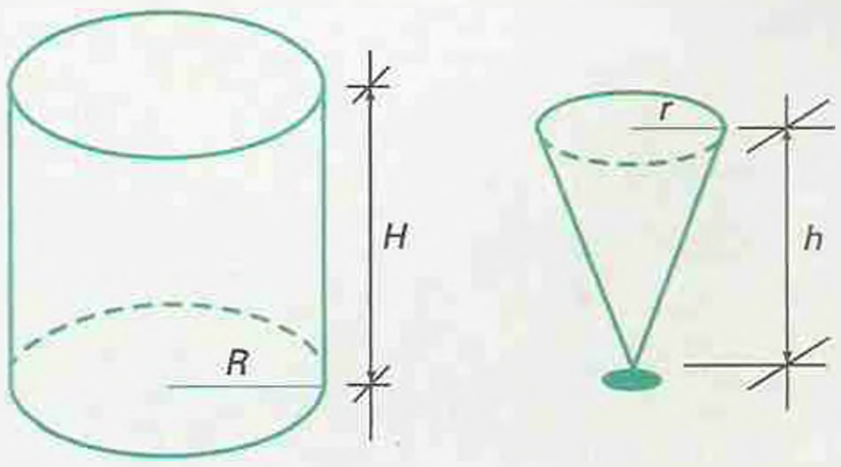
- o barril tinha formato de um cilindro circular reto com 20 cm de raio (R) e 30 cm de altura (H);
- a tulipa tinha formato de um cone reto com 3 cm de raio (r) e 10 cm de altura (h).

Com base nesses dados, pergunta-se:

a) Qual o volume do barril?

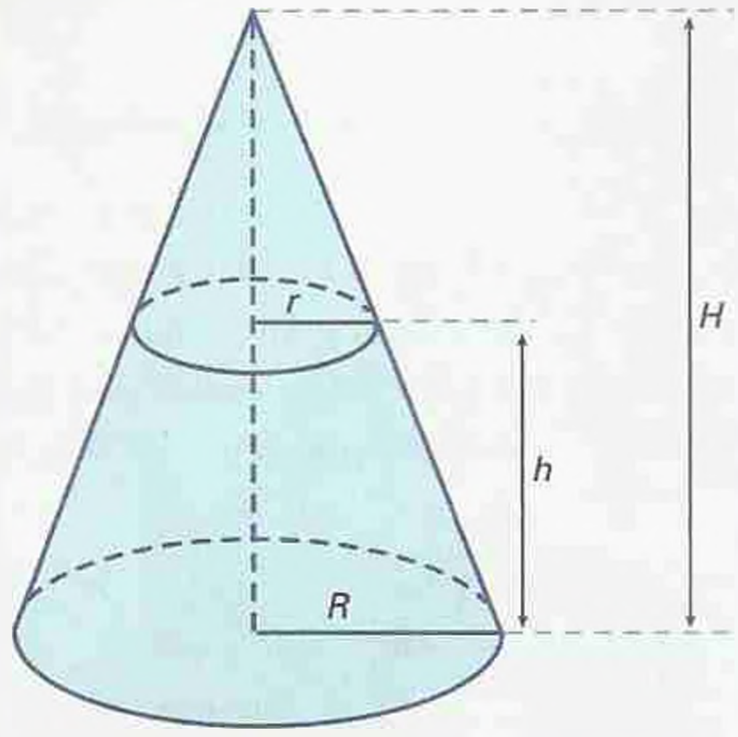
b) Qual o volume da tulipa?

c) Quantas tulipas foram servidas desse barril, admitindo-se que não houve perda?



B.13 Um plano α, paralelo à base de um cone circular de altura 20 cm e raio da base 4 cm, dista 5 cm de seu vértice. Calcule o volume do tronco do cone limitado pelo plano α e pela base do cone.

B.14 (Fuvest-SP) Qual das expressões seguintes dá o volume do tronco de cone circular de bases paralelas em função de H, R, h, r?



a) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 + (H - h)r^2]$

b) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 - (H + h)r^2]$

c) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 - (H - h)r^2]$

d) $\frac{1}{3}\pi[HR^2 + (H + h)r^2]$

e) n.d.a.

B.15 (UFLA) Um cone circular reto tem 10 cm de altura e 10 cm de raio da base. A que distância do vértice do cone deve passar um plano α, paralelo ao plano da base, dividindo o cone em dois sólidos de mesmo volume?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Cefet-RJ) A geratriz de um cone de revolução forma com o eixo um ângulo de 30°. Sendo 12 cm o perímetro da secção meridiana do cone, a sua área total será, em cm²:

a) 10π d) 13π

b) 11π e) 14π

c) 12π

Nota

Eixo do cone de revolução é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base do cone.

C.2 (Fuvest-SP) Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:

a) 144° d) 288°

b) 192° e) 336°

c) 240°

C.3 (Fatec-SP) A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:

a) 64π d) 16π

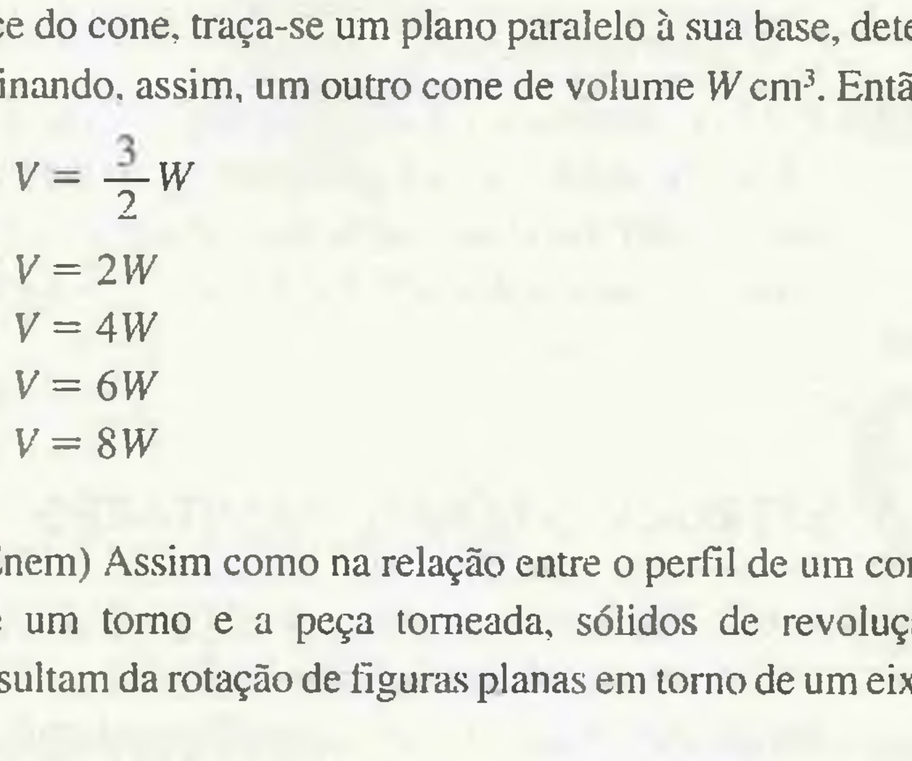
b) 48π e) 8π

c) 32π

C.4 Um cone de revolução de raio da base 12 cm é equivalente a um cilindro de revolução de altura 12 cm e raio da base 8 cm. Qual é a área total do cone?

Nota
Sólidos **equivalentes** são sólidos de volumes iguais.

C.5 Um cilindro de revolução tem raio da base r e altura $2r$. Retiram-se desse cilindro dois cones circulares tais que suas bases coincidem com as bases do cilindro e seus vértices coincidem com o centro do cilindro. Calcule o volume do sólido remanescente, em função de r.

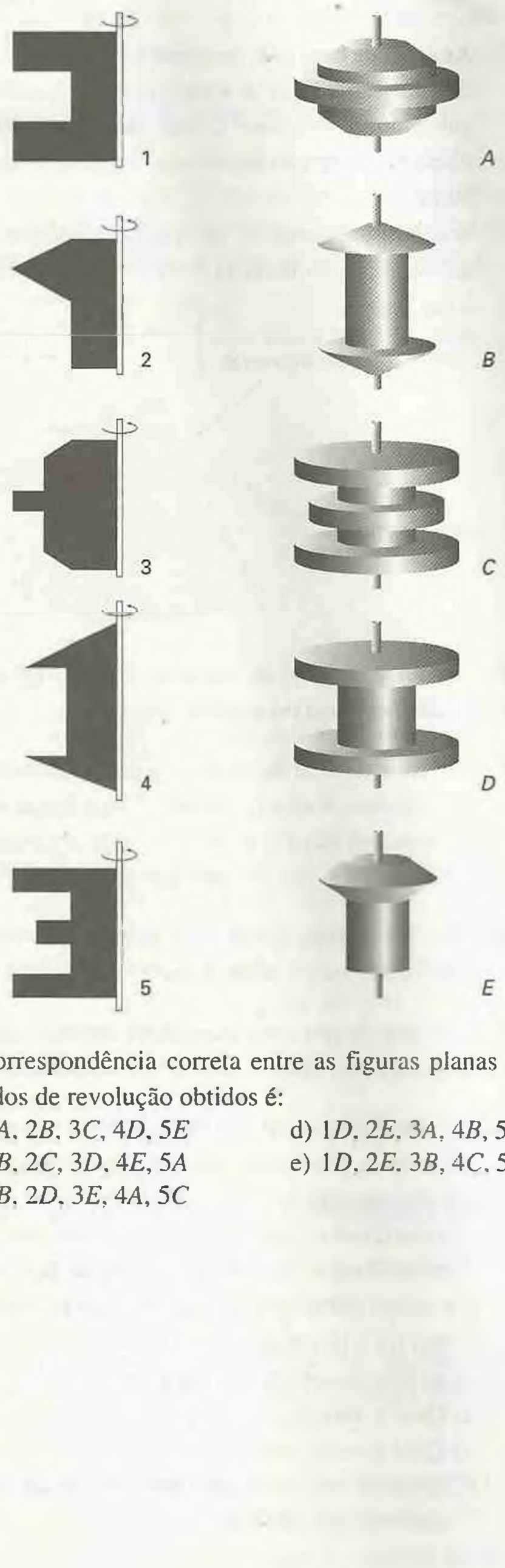


C.6 (U. F. Santa Maria-RS) Um cone circular reto de volume V cm³ tem h cm de altura. A uma distância $\frac{h}{2}$ cm do vértice do cone, traça-se um plano paralelo à sua base, determinando, assim, um outro cone de volume W cm³. Então:

a) $V = \frac{3}{2}W$
b) $V = 2W$
c) $V = 4W$
d) $V = 6W$
e) $V = 8W$

C.7 (Enem) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo.

Girando-se as figuras abaixo em torno da haste indicada, obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é:

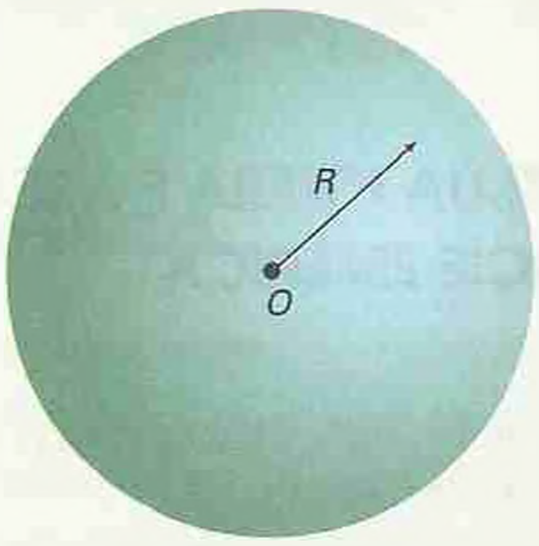
a) 1*A*, 2*B*, 3*C*, 4*D*, 5*E*
b) 1*B*, 2*C*, 3*D*, 4*E*, 5*A*
c) 1*B*, 2*D*, 3*E*, 4*A*, 5*C*
d) 1*D*, 2*E*, 3*A*, 4*B*, 5*C*
e) 1*D*, 2*E*, 3*B*, 4*C*, 5*A*

Capítulo 52

ESFERA

1. CONCEITUAÇÃO

Consideremos um ponto O do espaço e uma medida $R(R > 0)$. Chama-se **esfera** de centro O e raio R o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **menores ou iguais** a R.



- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **menores** do que R é chamado de **interior** da esfera.
- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **iguais** a R é chamado de **superfície esférica**.
- O conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são **maiores** do que R é chamado de **exterior** da esfera.

Não confunda **esfera** com **superfície esférica**. A **superfície esférica** é apenas a "casca" da esfera; a **esfera** é a reunião da superfície com o conjunto de pontos interiores.

Dois bons modelos de superfície esférica e esfera são uma bolinha de pingue-pongue e uma bola de bilhar, respectivamente. A bolinha de pingue-pongue é apenas uma "casca" ("superfície esférica"); já a bola de bilhar é maciça ("esfera").

FOTOS: LUIZ ANTONIO

A bola de pingue-pongue lembra uma fina "casca", sugerindo a idéia de uma superfície esférica.

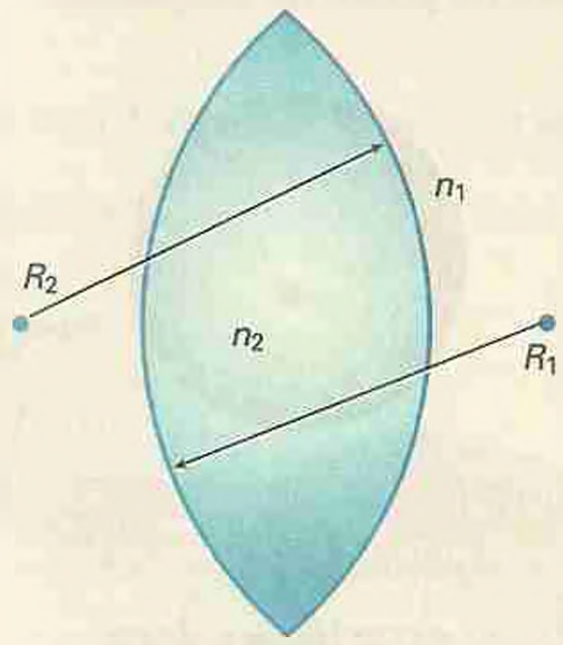
A bola de bilhar é maciça, sugerindo a idéia de uma esfera.

Fabricantes de lentes

Para o cálculo da distância focal f de uma lente com duas superfícies esféricas de raios R_1 e R_2, os fabricantes usam a fórmula:

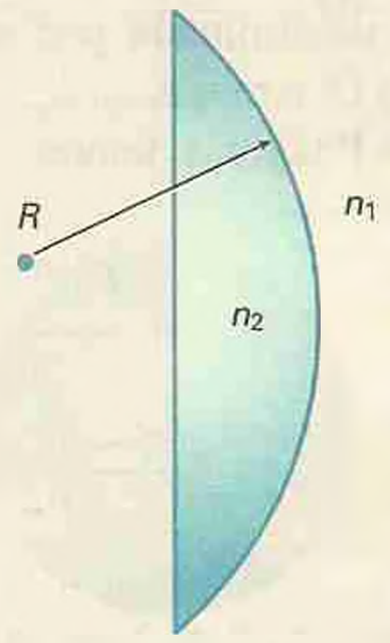
$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

em que n_1 e n_2 são os índices de refração do meio e da lente, respectivamente.

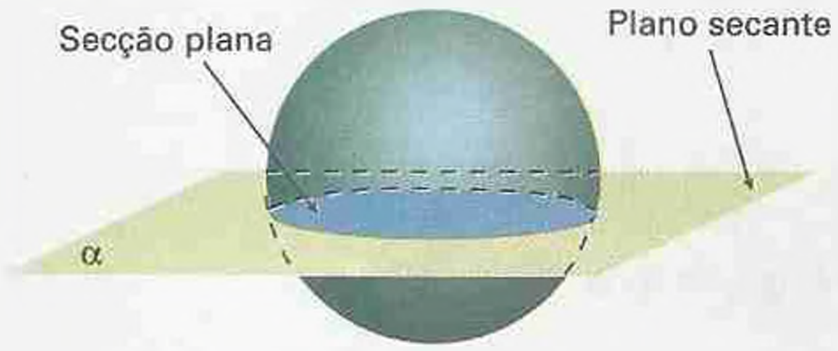


Para lentes que possuem uma superfície plana e uma superfície esférica de raio R é usada a fórmula:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\frac{1}{R}$$

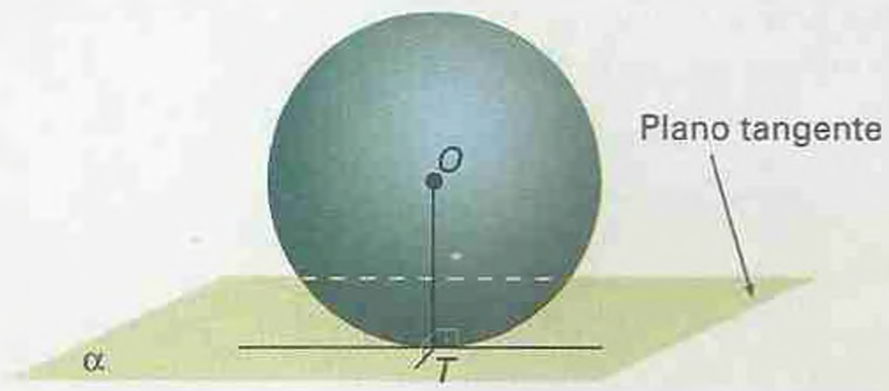


2. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UM PLANO E UMA ESFERA



Plano secante à esfera

O plano e a esfera têm em comum infinitos pontos que formam um círculo chamado de **secção plana** da esfera.



Plano tangente à esfera

O plano e a esfera têm em comum um único ponto. O raio é perpendicular ao plano tangente no ponto de tangência.

Plano exterior à esfera

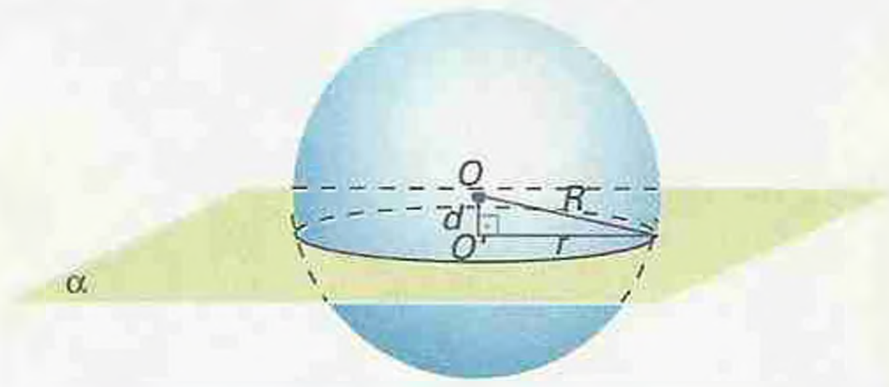
O plano e a esfera não têm ponto em comum.

O teorema de Pitágoras e a secção plana da esfera

Seja α um plano secante a uma esfera de centro O e raio R tal que:

- a distância de α ao ponto O é igual a d ($d > 0$);
- a secção plana determinada por α na esfera é um círculo de centro O' e raio r.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:



$$R^2 = d^2 + r^2$$

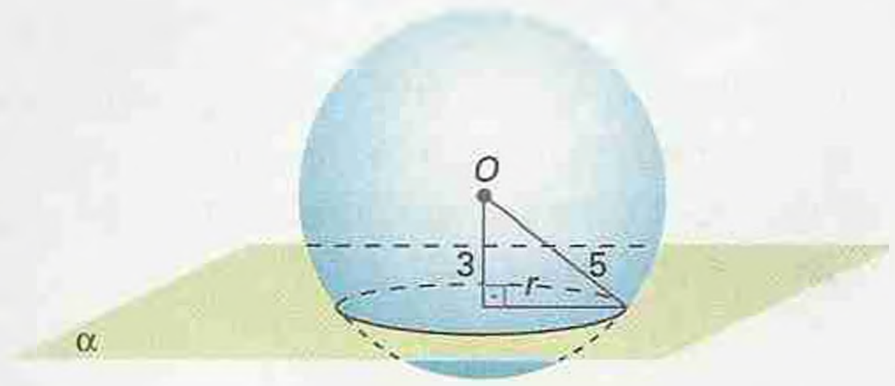
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Um plano α secciona uma esfera de raio 5 cm a 3 cm de seu centro. Calcular o raio da secção plana determinada por α nessa esfera.

Resolução

Pelo teorema de Pitágoras:

$$r^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow r^2 = 16 \therefore r = 4 \text{ cm}$$

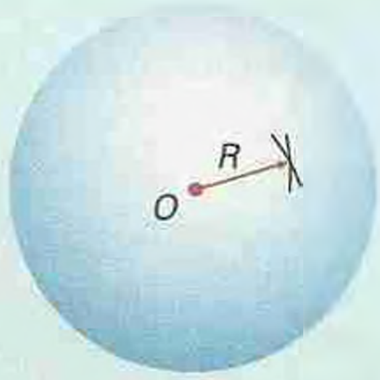


3. VOLUME DA ESFERA E ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

O volume V de uma esfera de raio R e a área A da superfície dessa esfera são:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$A = 4\pi R^2$$



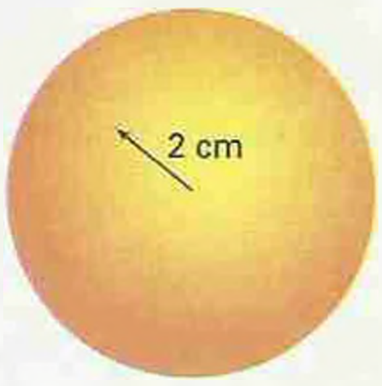
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Dada uma esfera de raio 2 cm, calcular o seu volume e a área de sua superfície.

Resolução

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} \text{ cm}^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4\pi \cdot 2^2 \text{ cm}^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

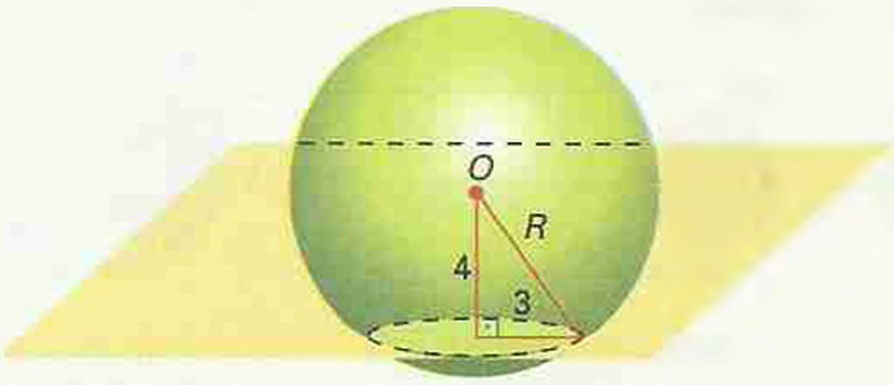


R.3 Uma secção plana de uma esfera tem raio 3 cm e dista 4 cm do centro da esfera. Calcular o volume dessa esfera e a área de sua superfície.

Resolução

Sendo R o raio da esfera, temos:

$$R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R^2 = 25 \therefore R = 5 \text{ cm}$$



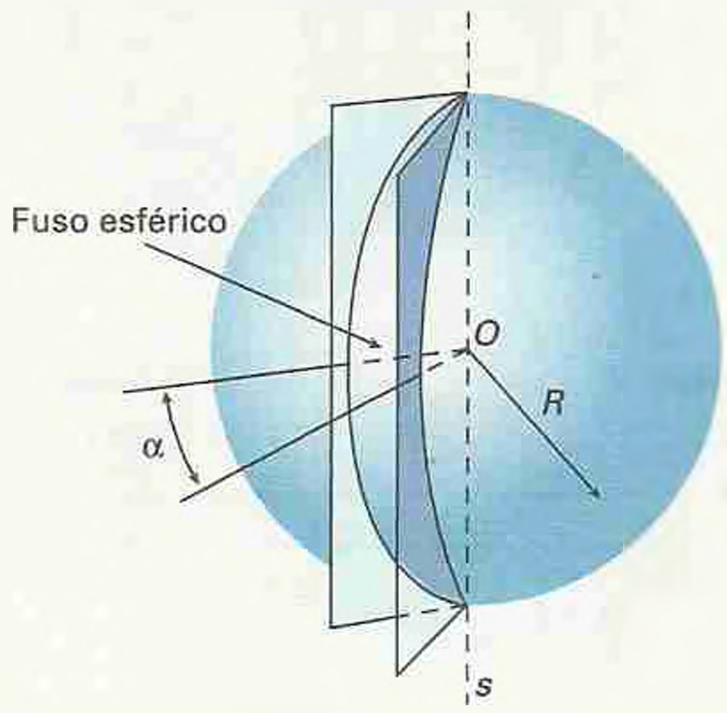
Logo, o volume V da esfera e a área A de sua superfície são:

$$V = \frac{4\pi \cdot 5^3}{3} \text{ cm}^3 \Rightarrow V = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$A = 4\pi \cdot 5^2 \Rightarrow A = 100\,\pi \text{ cm}^2$$

4. FUSO ESFÉRICO

Consideremos uma superfície esférica de centro O e raio R e dois semiplanos de mesma origem s que passa por O. Uma região da superfície esférica limitada por esses dois semiplanos é chamada de **fuso esférico** de centro O e raio R. A medida α do ângulo formado pelos dois semiplanos é chamada de **medida do ângulo diedro** do fuso esférico.



Nota

Diedro é uma porção do espaço limitada por dois semiplanos de mesma origem.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Calcular a área de um fuso esférico de raio 3 cm cujo ângulo diedro mede 60°.

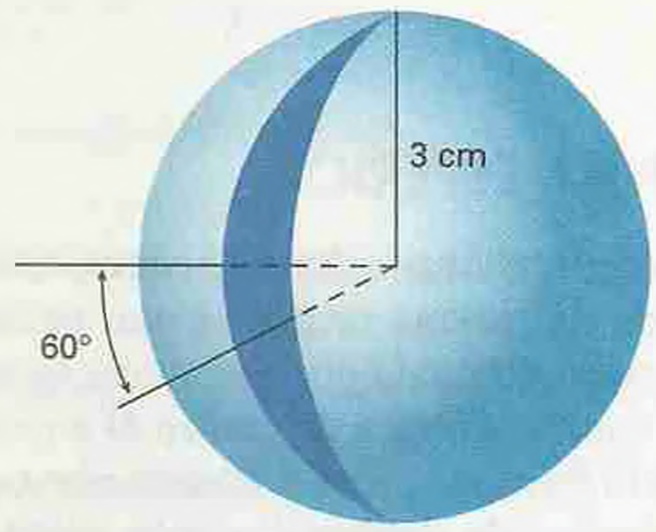
Resolução

A razão entre a área de uma superfície esférica e a medida de um ângulo diedro de uma volta completa (360° ou 2π rad) é igual à razão entre a área da superfície de um fuso qualquer dessa superfície e a medida de seu ângulo diedro. Assim, o cálculo da área A_f do fuso esférico em questão pode ser feito através da regra de três:

Ângulo (graus)		**Área (cm²)**
360	———	$4\pi \cdot 3^2$
60	———	A_f

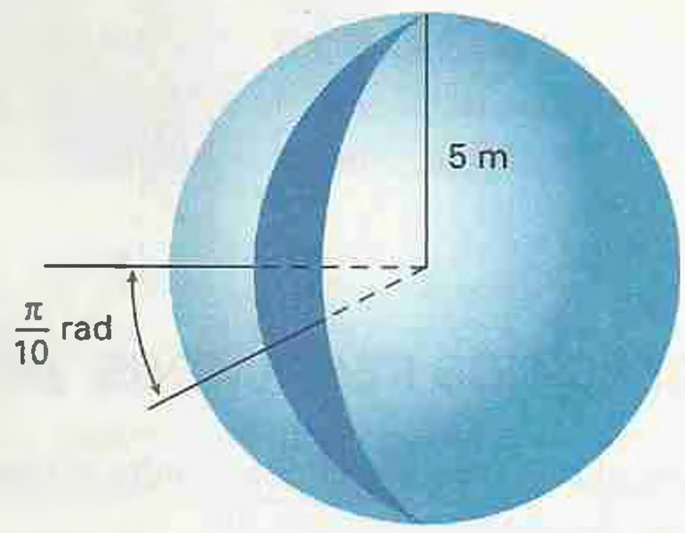
$$\therefore A_f = \frac{60 \cdot 36\pi}{360} \text{ cm}^2$$

$$\therefore \quad A_f = 6\pi \text{ cm}^2$$



R.5 Calcular a área A_f de um fuso esférico de raio 5 m cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{10}$ rad.

Resolução



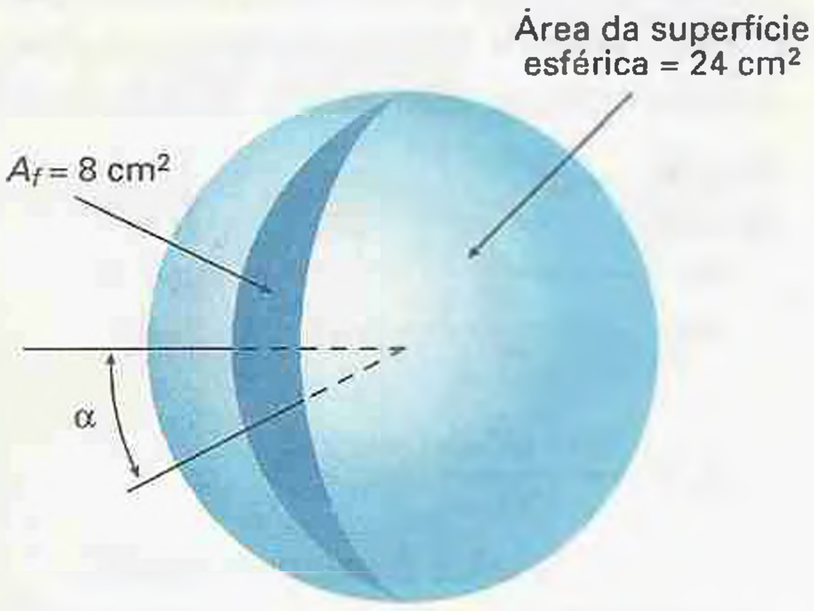
Ângulo (rad)		**Área (m²)**
2π	———	$4\pi \cdot 5^2$
$\frac{\pi}{10}$	———	A_f

$$\therefore A_f = \frac{\frac{\pi}{10} \cdot 100\pi}{2\pi} \text{ m}^2$$

$$\therefore A_f = 5\pi \text{ m}^2$$

R.6 Um fuso esférico de área 8 cm² está contido em uma superfície esférica de área 24 cm². Calcular a medida, em graus, do ângulo diedro desse fuso.

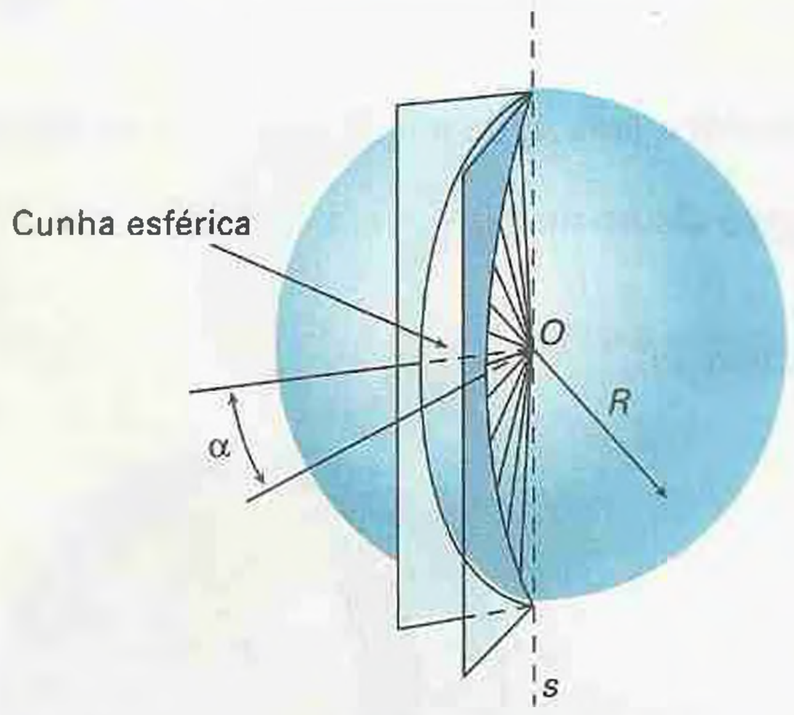
Resolução



Ângulo (graus)		Área (cm²)	
360	———	24	$\therefore \alpha = \frac{360° \cdot 8}{24}$
α	———	8	$\therefore \alpha = 120°$

5. CUNHA ESFÉRICA

Consideremos uma esfera de centro O e raio R e dois semiplanos de mesma origem s que passa por O. Uma parte da esfera limitada por esses dois semiplanos é chamada de **cunha esférica** de centro O e raio R. A medida α do ângulo formado pelos dois semiplanos é chamada de **medida do ângulo diedro** da cunha esférica.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 Calcular o volume de uma cunha esférica de raio 3 cm cujo ângulo diedro mede 45°.

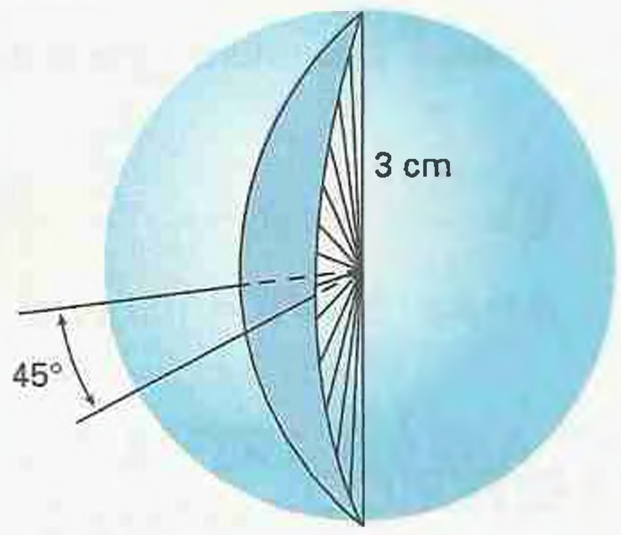
Resolução

A razão entre o volume de uma esfera e a medida de um ângulo diedro de uma volta completa (360° ou 2π rad) é igual à razão entre o volume de uma cunha qualquer dessa esfera e a medida de seu ângulo diedro. Assim, o cálculo do volume V_c da cunha em questão pode ser feito através da regra de três:

Ângulo (graus)		Volume (cm³)
360	———	$\frac{4\pi \cdot 3^3}{3}$
45	———	V_c

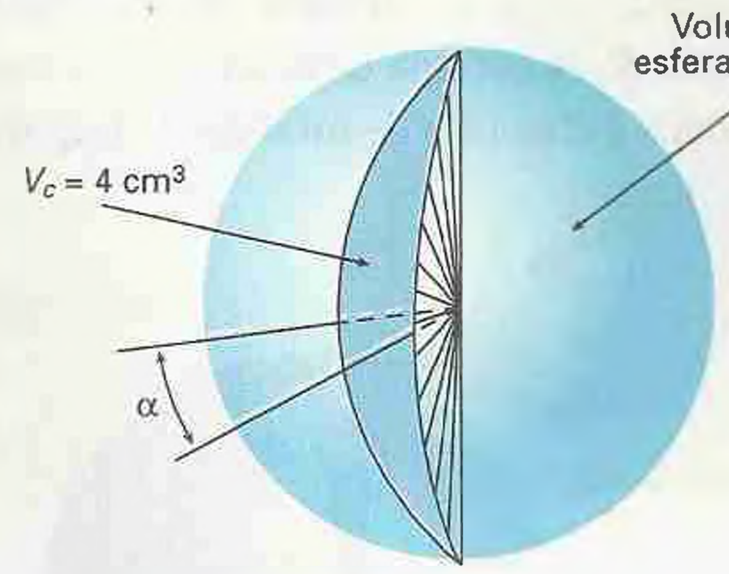
$$\therefore V_c = \frac{45 \cdot 36\pi}{360} \text{ cm}^3$$

$$\therefore V_c = \frac{9\pi}{2} \text{ cm}^3$$



R.8 Uma cunha esférica de volume 4 cm³ é obtida de uma esfera de volume 32 cm³. Calcular a medida, em radianos, do ângulo diedro dessa cunha.

Resolução



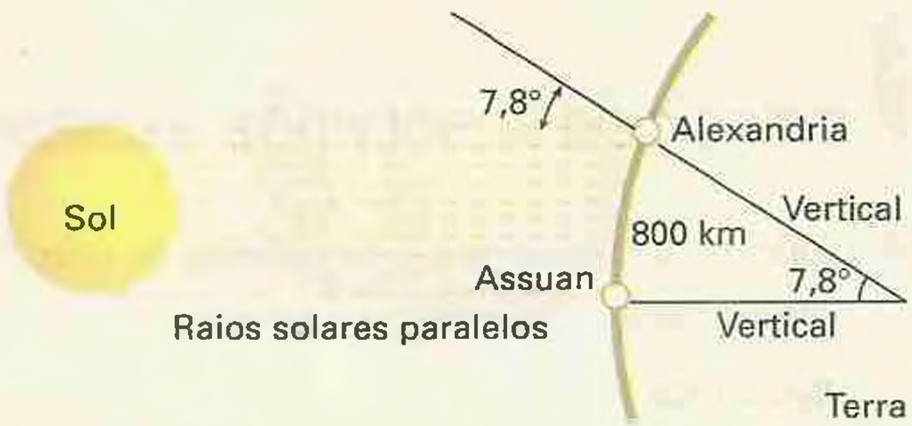
Ângulo (rad)		Volume (cm³)
2π	———	32
α	———	4

$$\therefore \alpha = \frac{2\pi \cdot 4}{32} \text{ rad}$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

A medida de uma circunferência máxima da Terra

Há 2.200 anos o matemático grego Eratóstenes (276-194 a.C.) realizou a proeza de medir o perímetro de uma circunferência que contém um meridiano da Terra. Eratóstenes fez seu cálculo fundamentado nas seguintes observações: quando em Assuan (então Siene) os raios de Sol incidiam verticalmente à superfície terrestre, em Alexandria, a 800 km ao norte, os raios solares formavam 7,8° com uma vertical. Deduziu que essa diferença se devia à esfericidade da Terra. Através de uma simples proporção, o matemático obteve o perímetro c da circunferência máxima que passa por Assuan e Alexandria. Observe:



$$\frac{7,8°}{800} = \frac{360°}{c} \Rightarrow c = 36.923 \text{ km}$$

Medidas atuais estimam em 40.000 km o perímetro de um meridiano.

6. ESFERAS TANGENTES

Duas esferas são tangentes se, e somente se, suas superfícies têm um único ponto comum.

Esferas tangentes interiormente

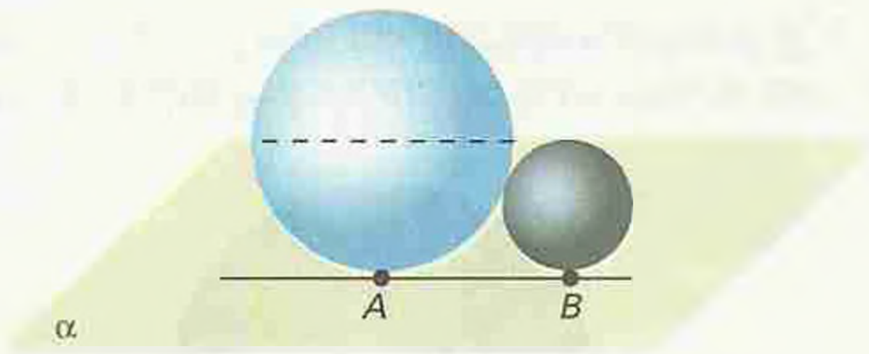
Esferas tangentes exteriormente

Propriedade

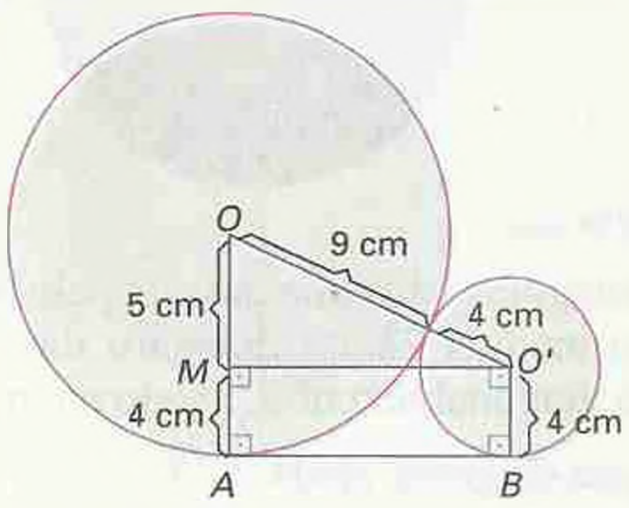
Se duas esferas de centros O e O' são tangentes num ponto T, então os pontos O, O' e T são colineares.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.9 Duas esferas tangentes exteriormente e tangentes a um plano α nos pontos A e B têm raios iguais a 9 cm e 4 cm. Calcular a distância entre os pontos A e B



Resolução



No triângulo $OO'M$, temos:

$(MO')^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow (MO')^2 = 144 \therefore MO' = 12$ cm

Como $MO' = AB$, temos que $AB = 12$ cm.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Uma secção plana de uma esfera é um círculo de raio 6 cm. Sabendo que o raio da esfera mede 10 cm, calcule a distância dessa secção ao centro da esfera.

B.2 (Fuvest-SP) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm, é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

B.3 Calcule o volume de uma esfera de raio 3 cm.

B.4 Uma secção plana de uma esfera tem raio 1 cm e dista 3 cm do centro da esfera. Calcule o volume dessa esfera.

B.5 (UFES) Um ourives deixou como herança para seus oito filhos uma esfera maciça de ouro. Os herdeiros resolveram fundir o ouro e, com ele, fazer oito esferas iguais. Cada uma dessas esferas terá um raio igual a:
a) $\frac{1}{2}$ do raio da esfera original.
b) $\frac{1}{3}$ do raio da esfera original.
c) $\frac{1}{4}$ do raio da esfera original.
d) $\frac{1}{6}$ do raio da esfera original.
e) $\frac{1}{8}$ do raio da esfera original.

B.6 Calcule a área de uma superfície esférica de raio 3 cm.

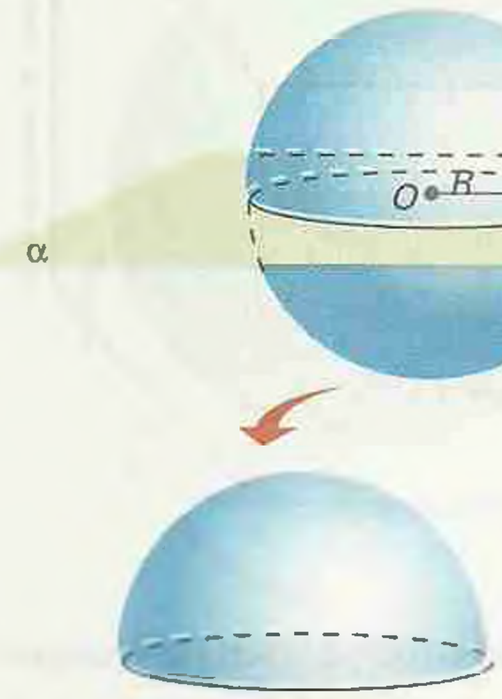
B.7 O volume de uma esfera é $\frac{8\pi}{3}$ cm³. Qual é a área da superfície dessa esfera?

B.8 A área da superfície de uma esfera é 100π m². Calcule o volume dessa esfera.

B.9 (U. F. Fluminense-RJ) Uma lata, cuja capacidade é igual a 300 mℓ, contém água e 60 bolas de gude iguais e perfeitamente esféricas com diâmetro de 2 cm cada. Sabendo que a lata está completamente cheia, determine o volume de água, em mℓ. Considere $\pi = 3{,}14$.

B.10 (UFPA) Um cone reto tem raio de base R e altura H. Se uma esfera tem raio R e volume igual ao dobro do volume desse cone, podemos afirmar que:
a) $H = R$ c) $H = \frac{R}{3}$ e) $H = \frac{R}{2}$
b) $H = 2R$ d) $H = 3R$

B.11 Um círculo máximo de uma esfera separa-a em dois sólidos chamados de **hemisférios** ou **semi-esferas**. Calcule o volume e a área de um hemisfério de raio R.



Hemisfério

Nota
Círculo máximo de uma esfera de centro O é uma secção plana que passa por O.

B.12 (FGV-SP) Deseja-se construir um galpão em forma de um hemisfério, para uma exposição. Se, para o revestimento total do piso, utilizaram-se 78,5 m² de lona, quantos metros quadrados de lona se utilizariam na cobertura completa do galpão? (Considerar $\pi = 3{,}14$.)

a) 31,4 c) 157 e) 261,66
b) 80 d) 208,2

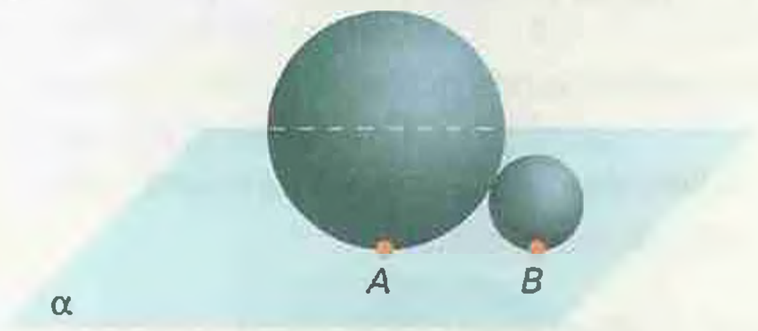
B.13 Calcule a área de um fuso esférico de raio 5 m cujo ângulo diedro mede 80°.

B.14 Calcule a área de um fuso esférico de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede $\frac{\pi}{5}$ rad.

B.15 Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 2 cm cujo ângulo diedro mede $\frac{3\pi}{8}$ rad.

B.16 Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 1 m cujo ângulo diedro mede 20°.

B.17 Duas esferas tangentes entre si exteriormente e tangentes a um plano α têm raios 8 cm e 2 cm. Calcule a distância entre os pontos de tangência A e B dessas esferas no plano α.

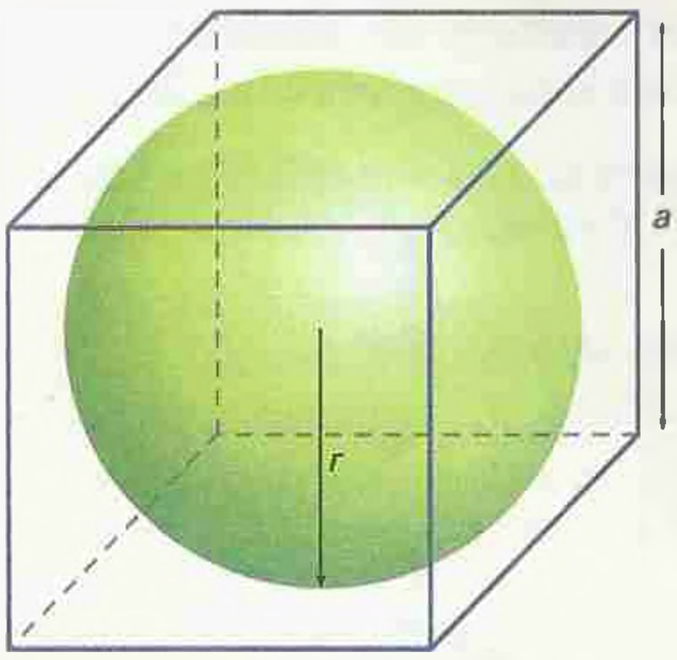


Exercícios complementares de C.1 a C.8

7. ESFERA INSCRITA E ESFERA CIRCUNSCRITA A UM SÓLIDO

Esfera inscrita em cubo

Uma esfera está **inscrita** em um cubo se, e somente se, é tangente a todas as faces do cubo.



Conseqüências

1ª) As diagonais do cubo passam pelo centro da esfera.

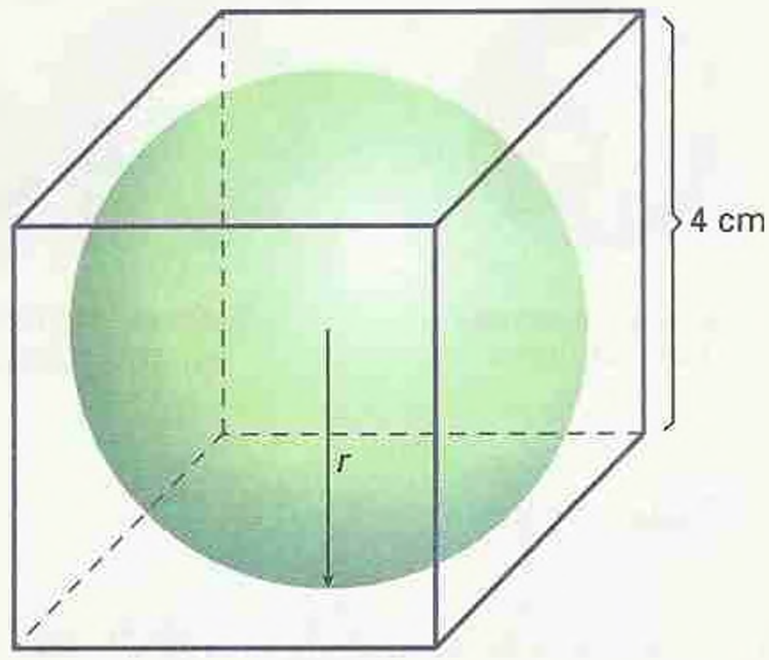
2ª) O diâmetro $2r$ da esfera tem a mesma medida a da aresta do cubo $2r = a \Rightarrow r = \frac{a}{2}$

3ª) O cubo está **circunscrito** à esfera.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.10 Calcular o volume de uma esfera inscrita em um cubo de aresta 4 cm.

Resolução



Sendo r o raio da esfera, temos $r = \frac{4}{2}$ cm $\Rightarrow r = 2$ cm.

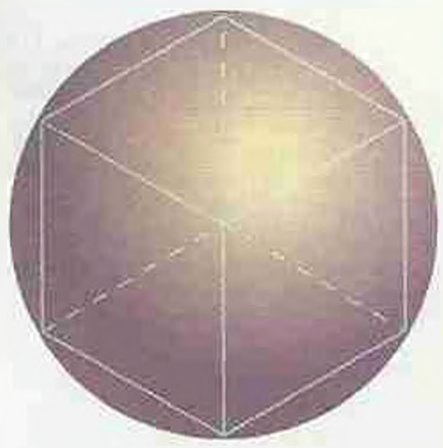
O volume V da esfera é:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V = \frac{4\pi \cdot 2^3}{3} \text{ cm}^3$$

$$\therefore V = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Cubo inscrito em esfera

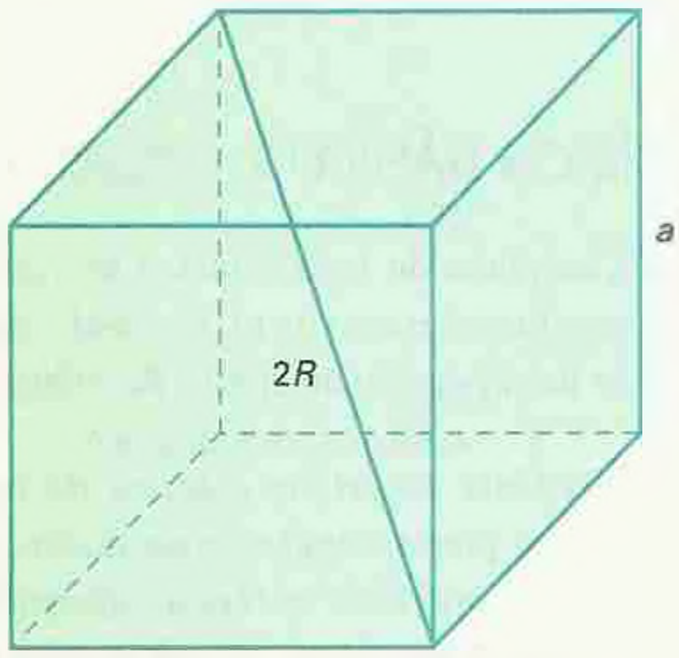
Um cubo está **inscrito** em uma esfera se, e somente se, todo os seus vértices pertencem à superfície da esfera.



Conseqüências

1ª) As diagonais do cubo passam pelo centro da esfera. Portanto a medida $2R$ do diâmetro da esfera é igual à medida da diagonal do cubo. Sendo a a medida da aresta do cubo, sua diagonal mede $a\sqrt{3}$.
Assim, o raio R da esfera **circunscrita** ao cubo é dado por:

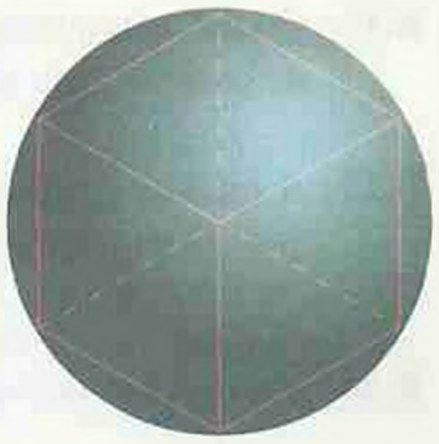
$$2R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



2ª) A esfera está **circunscrita** ao cubo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.11 Um cubo está inscrito em uma esfera de raio 3 cm. Calcular o volume do cubo.



Resolução

Sendo a a medida da aresta do cubo, sua diagonal mede $a\sqrt{3}$. O raio R da esfera é:

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \; a = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \; a = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

O volume V do cubo é:

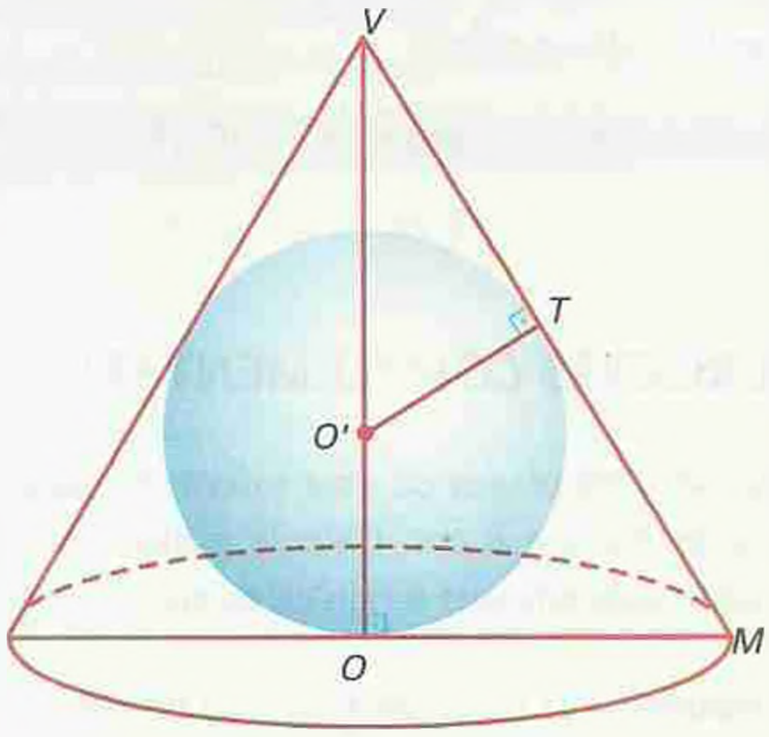
$$V = a^3 \Rightarrow V = \left(2\sqrt{3}\right)^3 \text{cm}^3 \quad \therefore \; V = 24\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Esfera inscrita em cone circular reto

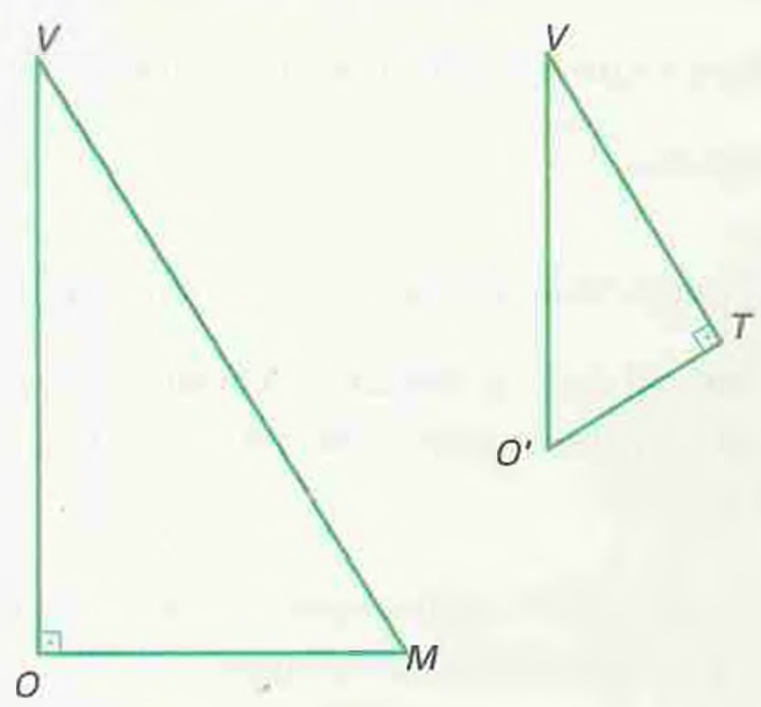
Uma esfera está **inscrita** em um cone circular reto se, e somente se, tangencia todas as geratrizes e a base do cone.

Conseqüências

1ª) O centro O' da esfera, o vértice V e o centro O da base do cone são pontos colineares.



2ª) Uma secção meridiana do cone determina os triângulos semelhantes VOM e VTO'.

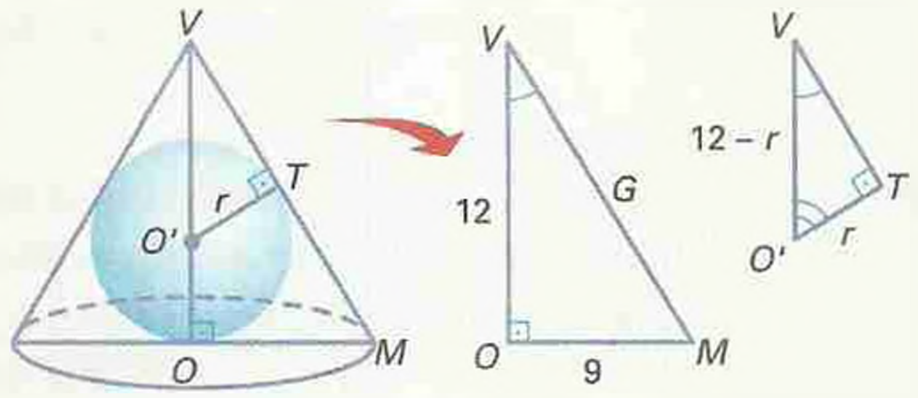


3ª) O cone está **circunscrito** à esfera.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.12 Calcular a medida do raio da esfera inscrita em um cone circular reto de altura 12 cm e raio da base 9 cm.

Resolução



Os triângulos VOM e VTO' são semelhantes. Sendo G a medida da geratriz do cone e r o raio da esfera, temos:

$$G^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow G^2 = 225 \quad \therefore \; G = 15 \text{ cm}$$

Da semelhança entre os triângulos VOM e VTO', concluímos que:

$$\frac{G}{12 - r} = \frac{9}{r} \Rightarrow \frac{15}{12 - r} = \frac{9}{r}$$

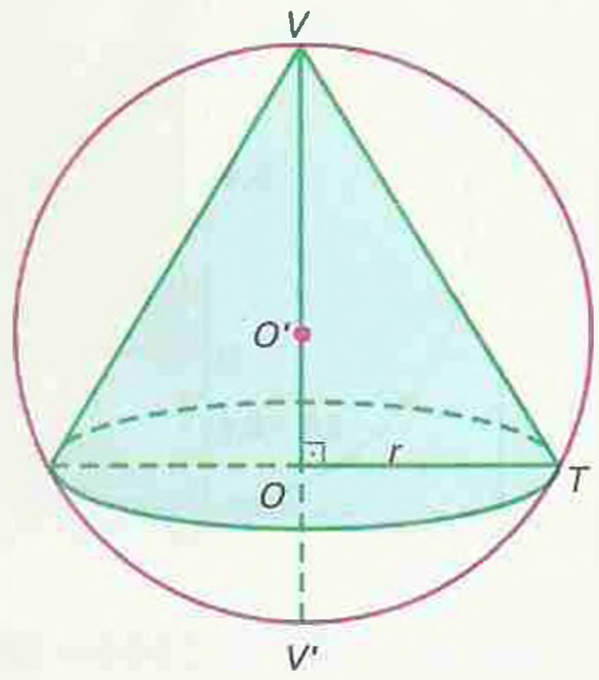
$$\therefore \; 15r = 108 - 9r \quad \therefore \; 24r = 108 \quad \therefore \; r = 4{,}5 \text{ cm}$$

Cone circular reto inscrito em esfera

Um cone circular reto está **inscrito** em uma esfera se, e somente se, sua circunferência da base está contida na superfície dessa esfera e seu vértice pertence à superfície dessa esfera.

Conseqüências

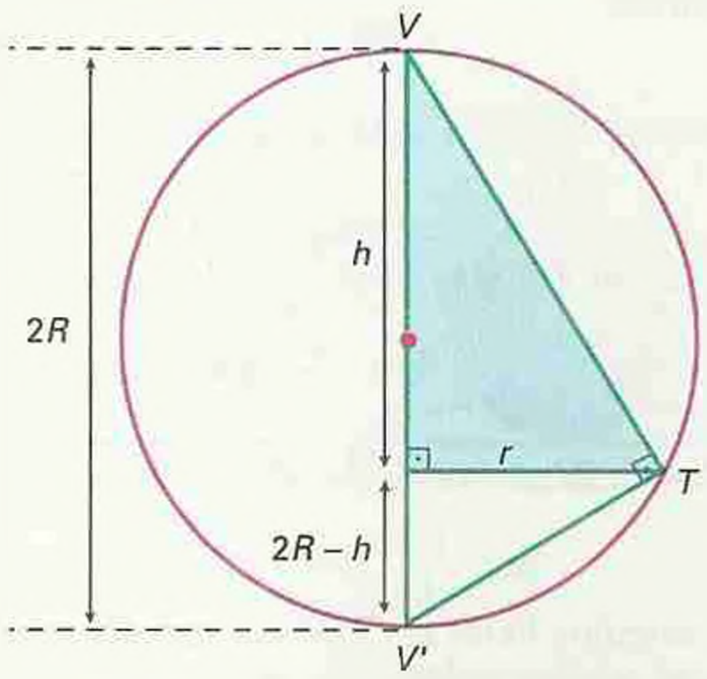
1ª) O centro O' da esfera, o vértice V e o centro O da base do cone são pontos colineares.



2ª) Sendo VV' um diâmetro da esfera e T um ponto da circunferência da base do cone, temos que o triângulo $VV'T$ é retângulo em T, pois está incrito em uma semi-

circunferência. Assim, o raio R da esfera, o raio r da base e a altura h do cone satisfazem a seguinte relação métrica no triângulo retângulo:

$$r^2 = h(2R - h)$$



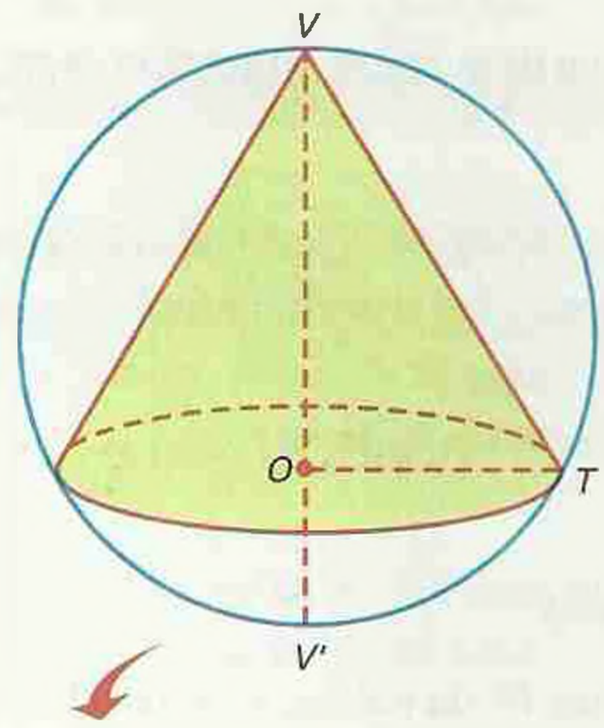
3ª) A esfera está **circunscrita** ao cone.

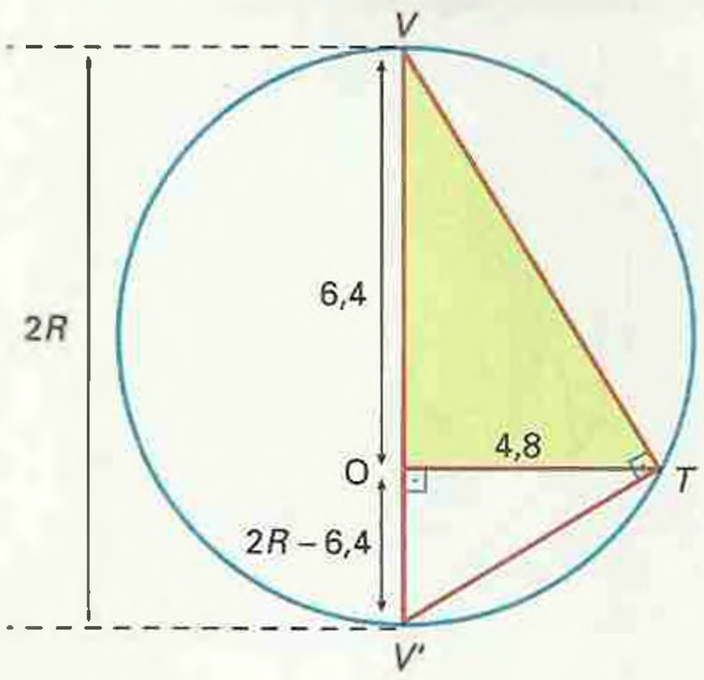
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.13 Um cone circular reto de altura 6,4 cm e raio da base 4,8 cm está inscrito em uma esfera. Calcular a área da superfície dessa esfera.

Resolução

Sendo R o raio da esfera, temos:





$(4{,}8)^2 = 6{,}4(2R - 6{,}4) \therefore 23{,}04 = 12{,}8R - 40{,}96$

$\therefore 64 = 12{,}8R \therefore R = 5$ cm

A área A da superfície da esfera é:

$$A = 4\pi R^2 \Rightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 5^2 \text{ cm}^2$$

$$\therefore A = 100\pi \text{ cm}^2$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.18 Qual é a área total de um cubo circunscrito a uma esfera de volume 36π cm³?

B.19 A medida de uma aresta de um cubo é 5 cm. Calcule a área da superfície esférica circunscrita a esse cubo.

B.20 Uma esfera de volume $\frac{4\pi}{3}$ m³ está circunscrita a um cubo. Qual é o volume desse cubo?

B.21 (Mackenzie-SP) A razão entre os volumes das esferas circunscrita e inscrita a um mesmo cubo é:

a) $\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $2\sqrt{3}$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

B.22 (ITA-SP) Um cone circular reto tem altura 12 cm e raio da base 5 cm. O raio da esfera inscrita nesse cone mede, em cm:

a) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{12}{5}$ e) 2

b) $\frac{7}{4}$ d) 3

B.23 Um cone circular reto de geratriz 10 cm e raio da base 6 cm está inscrito em uma esfera. Calcule a área da superfície dessa esfera.

Exercícios complementares de C.9 a C.11

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Duas secções planas de uma esfera são paralelas e têm raios de 6 cm e 8 cm. Calcule a distância entre essas secções, sabendo que o raio da esfera mede 10 cm.

C.2 (Unicamp-SP) O volume V de uma bola de raio r é dado pela fórmula $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

a) Calcule o volume de uma bola de raio $r = \frac{3}{4}$ cm.

Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número $\frac{22}{7}$.

b) Se uma bola de raio $r = \frac{3}{4}$ cm é feita com um material cuja densidade volumétrica (quociente da massa pelo volume) é de 5,6 g/cm³, qual será a sua massa?

C.3 (U. Taubaté-SP) Aumentando em 10% o raio de uma esfera, a sua superfície aumentará:

a) 21% c) 31% e) 30%

b) 11% d) 24%

C.4 (Fuvest-SP) Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base é 6 cm, contém água até uma certa altura. Uma esfera de aço é colocada no interior do recipiente, ficando totalmente submersa. Se a altura da água subiu 1 cm, então o raio da esfera é:

a) 1 cm c) 3 cm e) 5 cm
b) 2 cm d) 4 cm

C.5 (Fuvest-SP) Para pintar a base plana de um hemisfério maciço, gastamos doze galões de tinta. Quantos galões serão necessários para pintar toda a parte externa do hemisfério?

C.6 (Cesgranrio) Uma laranja pode ser considerada como uma esfera de raio R, composta por doze gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

a) $2\pi R^2$ c) $\frac{3\pi R^2}{4}$ e) $\frac{4\pi R^2}{3}$
b) $4\pi R^2$ d) $3\pi R^2$

C.7 (Fuvest-SP) Numa caixa em forma de paralelepípedo reto-retângulo, de dimensões 26 cm, 17 cm e 8 cm, que deve ser tampada, coloca-se a maior esfera que nela couber. O maior número de esferas iguais a essa que cabem juntas na caixa é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

C.8 (UFPE) Quatro bolas de raio $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm cada estão dispostas sobre uma mesa plana de forma que seus centros são vértices de um quadrado de lado $3\sqrt{2}$ cm. Uma quinta bola, de mesmo raio, é colocada sobre estas quatro bolas tangenciando as mesmas. Seja α o plano que é tangente a esta quinta bola e paralelo à mesa. Calcule a distância do plano α à mesa.

C.9 (Fuvest-SP) Um cubo de aresta m está inscrito em uma semi-esfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semi-esfera e os demais vértices pertencem à superfície da semi-esfera. Então, m é igual a:

a) $R\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $R\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $R\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) R

Nota
Plano equatorial é aquele que contém a base da semi-esfera.

C.10 Calcule a área da superfície de uma esfera inscrita em um cone circular reto de altura 8 cm e raio da base 6 cm.

C.11 (UFMG) Dois cones circulares retos de mesma base estão inscritos numa mesma esfera de volume 36π. A razão entre os volumes desses cones é 2. A medida do raio da base comum dos cones é:

a) 1 c) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{2}$
b) $\sqrt{2}$ d) 2

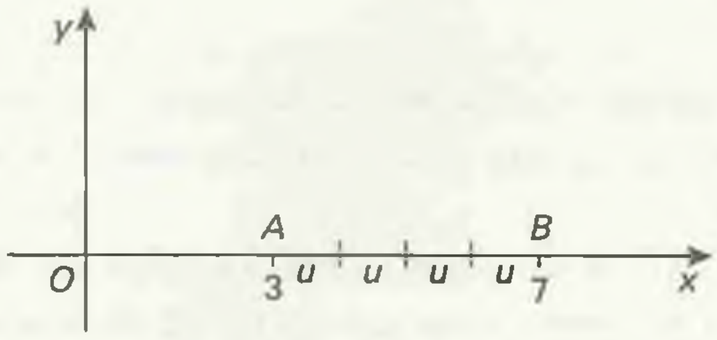
Capítulo 53
DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS E PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO DE RETA

1. O QUE É GEOMETRIA ANALÍTICA?

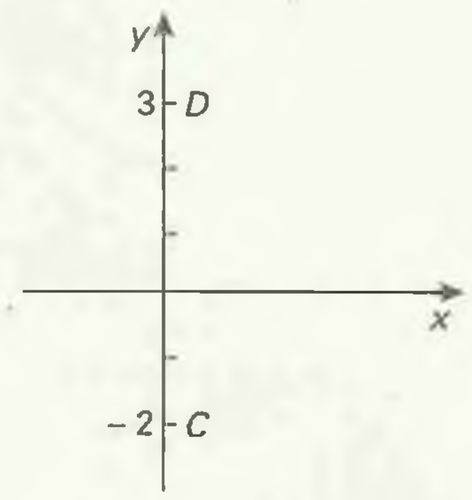
A geometria analítica foi concebida por René Descartes. Aliando a álgebra à geometria, ela possibilita o estudo das figuras geométricas, associando-as a um sistema de coordenadas. Desse modo as figuras podem ser representadas através de pares ordenados, equações ou inequações.

2. DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Consideremos no eixo Ox dois pontos A e B com abscissas 3 e 7, respectivamente:



Quatro unidades u separam os pontos A e B. Por isso dizemos que a **distância** entre A e B é 4 ou que o **comprimento** do segmento $\overline{AB}$ é 4. Essa distância pode ser calculada como o módulo da diferença entre as abscissas de A e B, isto é, $|7 - 3|$ ou $|3 - 7|$. Analogamente, para pontos que pertencerem ao eixo Oy:



A distância entre C e D é $|3 - (-2)| = 5$ ou $|-2 - 3| = 5$.

O teorema a seguir generaliza o conceito de distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano, não necessariamente pertencentes a um dos eixos.

Teorema

A distância d_{AB} entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é dada por:

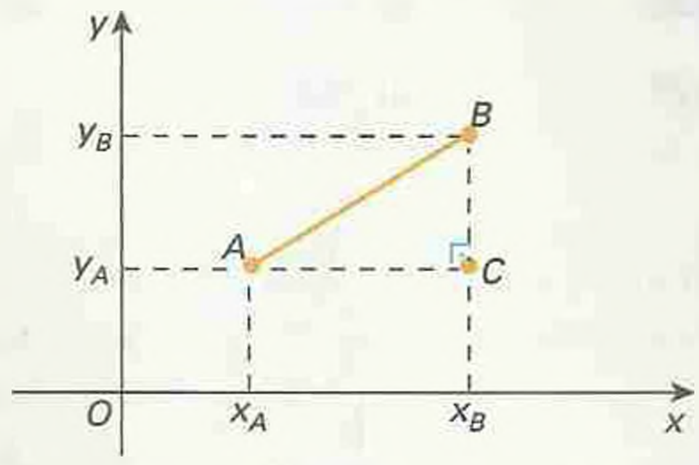
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

A distância d_{AB} é também denominada **comprimento do segmento** $\overline{AB}$ e pode ser indicada simplesmente por AB.

Demonstração

A demonstração deve ser separada em dois casos:

- Primeiro caso: o segmento $\overline{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados.



O triângulo ABC, com $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_B, y_A)$, é retângulo em C.

$\overline{AC}$ é paralelo ao eixo Ox. Assim, o comprimento AC é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre o eixo Ox, ou seja, $AC = |x_B - x_A|$.

Analogamente, $\overline{CB}$ é paralelo ao eixo Oy; logo:

$$CB = |y_B - y_A|$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AB)^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$
$$\therefore (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$\therefore AB = \pm\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Como o comprimento de um segmento não pode ser negativo, temos que:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- O segundo caso, em que $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos coordenados, é imediato. Verifique você mesmo!

Nota

Observando que $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ e que $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$, a fórmula da distância AB pode ser $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, ou mais simplificadamente:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

em que os símbolos Δx (lê-se "delta x") e Δy (lê-se "delta y") representam, respectivamente, a diferença entre as abscissas e a diferença entre as ordenadas dos pontos A e B, em qualquer ordem. Assim, temos que:

$$(\Delta x)^2 = (x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$$
$$(\Delta y)^2 = (y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular a distância entre os pontos $A(4, 6)$ e $B(9, 18)$.

Resolução

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$$

$$= \sqrt{(9 - 4)^2 + (18 - 6)^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{169} \quad \therefore AB = 13$$

Note que, se calculássemos $(\Delta x)^2$ e $(\Delta y)^2$ como $(\Delta x)^2 = (4 - 9)^2 = (-5)^2 = 5^2$ e $(\Delta y)^2 = (6 - 18)^2 = (-12)^2 = 12^2$, obteríamos o mesmo resultado.

R.2 Sendo $A(-3, 2)$ e $B(5, -4)$, calcular o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Resolução

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} =$$

$$= \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-4 - 2)^2}$$

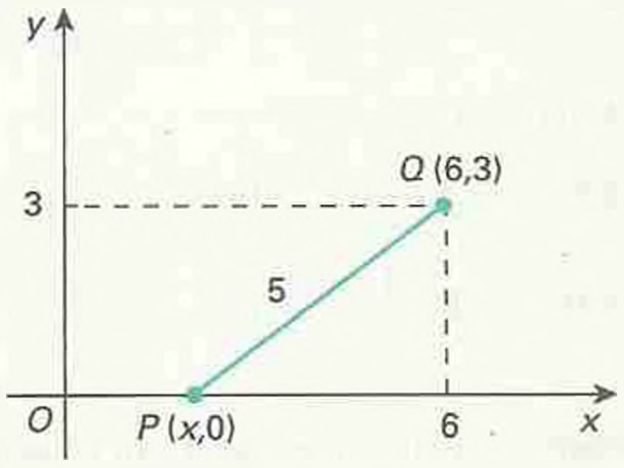
$$\therefore AB = \sqrt{8^2 + (-6)^2}$$

$$\therefore AB = \sqrt{100} \quad \therefore AB = 10$$

R.3 Determinar o ponto P, pertencente ao eixo Ox, que dista 5 unidades do ponto $Q(6, 3)$.

Resolução

Todo ponto do eixo Ox possui ordenada zero. Logo, o ponto P é da forma $P(x, 0)$.



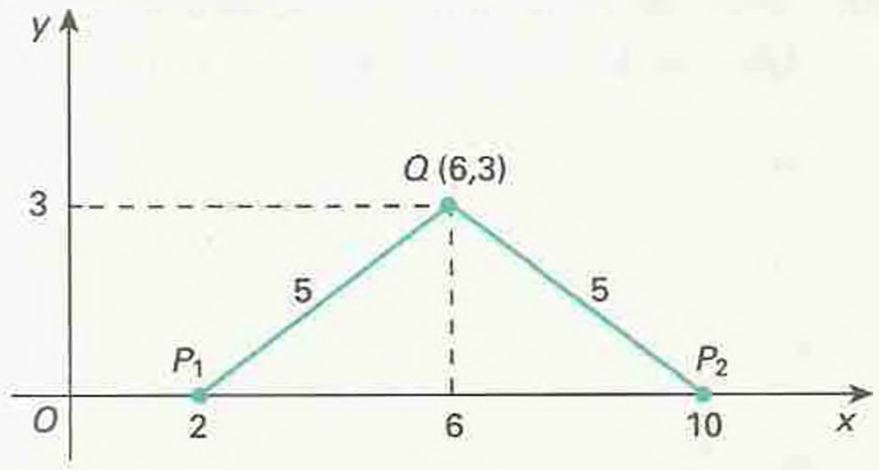
Devemos ter $PQ = 5$, ou seja:

$$\sqrt{(x - 6)^2 + (0 - 3)^2} = 5$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x - 6)^2 + (0 - 3)^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 + 9 = 25$$
$$\therefore x^2 - 12x + 20 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $x = 2$ ou $x = 10$. Assim, existem dois pontos $P(x, 0)$ que satisfazem a condição do enunciado. São eles $P_1(2, 0)$ e $P_2(10, 0)$.



Nota

Normalmente, ao quadrarmos ambos os membros de uma equação poderão aparecer raízes "estranhas" à equação original. Nesse exercício, quadramos os membros da equação $\sqrt{(x - 6)^2 + (0 - 3)^2} = 5$ e obtivemos $(x - 6)^2 + (0 - 3)^2 = 25$. As raízes dessas equações são exatamente as mesmas, pois é verdadeira a equivalência:

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \Leftrightarrow (AB)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Logo, ao quadrarmos ambos os membros da primeira equação, não aparecerão raízes estranhas.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule a distância entre os pontos A e B em cada um dos seguintes casos:

a) $A(1, 2)$ e $B(4, 6)$
b) $A(-3, 5)$ e $B(3, 13)$
c) $A(-1, 3)$ e $B(1, -1)$
d) $A(4, 6)$ e $B(9, 18)$
e) $A(0, -3)$ e $B(3, -7)$
f) $A(0, 0)$ e $B(1, 1)$

B.2 São dados $A(3, -1)$, $B(1, 1)$ e $C(5, 5)$.

a) Calcule o perímetro do triângulo ABC.
b) Mostre que ABC é um triângulo retângulo.

B.3 Obtenha o ponto P do eixo das ordenadas que dista 10 unidades do ponto $Q(6, -5)$.

B.4 Qual é o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, que dista 13 unidades do ponto $Q(-8, 5)$?

B.5 (UFF-RJ) Considere os pontos $A(3, 2)$ e $B(8, 6)$. Determine as coordenadas do ponto P, pertencente ao eixo x, de modo que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tenham o mesmo comprimento.

B.6 (U. E. Londrina-PR) Considere, no plano cartesiano, o paralelogramo de vértices (1, 1), (3, 3), (6, 1) e (8, 3). A maior diagonal desse paralelogramo mede:

a) $5\sqrt{5}$
b) $\sqrt{71}$
c) $5\sqrt{3}$
d) $\sqrt{53}$
e) $3\sqrt{5}$

Exercícios complementares de C.1 a C.4

3. COORDENADAS DO PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

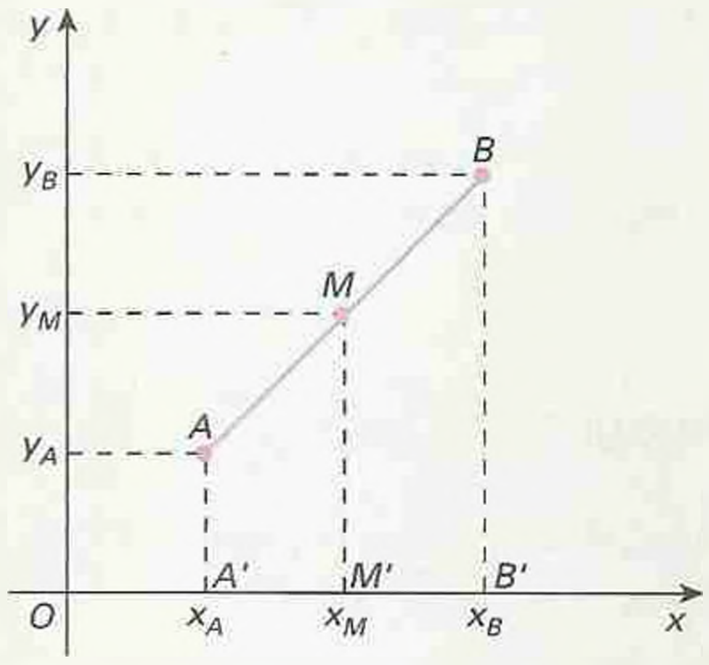
Teorema

Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são pontos distintos, então o ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$ é tal que:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Demonstração

Vamos fazer a demonstração para o caso em que $\overline{AB}$ não é paralelo a um dos eixos, com $x_B > x_M > x_A$ e $y_B > y_M > y_A$.



As retas paralelas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{MM'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ concorrem com as transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$. Pelo teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'} \quad \text{(I)}$$

Como $AM = MB$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$, temos que:

$$\frac{AM}{MB} = 1 \quad \text{(II)}$$

As condições $x_B > x_M > x_A$ e $y_B > y_M > y_A$ garantem que $A'M' = x_{M'} - x_{A'}$ e $M'B' = x_{B'} - x_{M'}$, e, portanto:

$$\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{x_{M'} - x_{A'}}{x_{B'} - x_{M'}} = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \quad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), temos:

$$1 = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$\therefore\ 2x_M = x_A + x_B \ \therefore\ x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Raciocinando do mesmo modo em relação ao eixo Oy, obtém-se $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Analogamente, é feita a demonstração para o caso em que $\overline{AB}$ não é paralelo a um dos eixos com $x_B < x_M < x_A$ e $y_B < y_M < y_A$. Também, de modo análogo, demonstra-se para o caso em que $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos. Faça essas demonstrações como exercício.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Dados $A(5, 1)$ e $B(7, -9)$, determinar o ponto médio $M(x_M, y_M)$ do segmento $\overline{AB}$.

Resolução

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{5 + 7}{2} = 6 \text{ e}$$

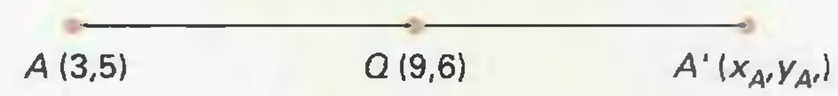
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1 + (-9)}{2} = -4$$

Logo, o ponto M é $M(6, -4)$.

R.5 Determinar o simétrico do ponto $A(3, 5)$ em relação ao ponto $Q(9, 6)$.

Resolução

O simétrico de $A(3, 5)$ em relação a $Q(9, 6)$ é o ponto $A'(x_{A'}, y_{A'})$ tal que Q é ponto médio do segmento $\overline{AA'}$:



Assim, temos:

$$9 = \frac{3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 15 \text{ e}$$

$$6 = \frac{5 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 7$$

Logo, o ponto A' é A'(15, 7).

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 Encontre o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $A(4, 6)$ e $B(8, 10)$

b) $A(-3, 1)$ e $B(5, -7)$

c) $A(1, 3)$ e $B\left(2, \frac{3}{5}\right)$

d) $A(10, 2)$ e $B(6, 8)$

e) $A(6, -3)$ e $B(-2, -1)$

f) $A(0, 3)$ e $B\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

B.8 Determine o simétrico de A em relação ao ponto Q em cada um dos seguintes casos:

a) $A(3, 8)$ e $Q(-2, 1)$

b) $A(-5, 2)$ e $Q\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

B.9 Dois vértices consecutivos de um paralelogramo $ABCD$ são os pontos $A(2, 3)$ e $B(5, 4)$. O ponto de intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é $Q(4, 6)$. Obtenha C e D. **Sugestão.** O ponto comum às diagonais de um paralelogramo é ponto médio de cada uma delas.

B.10 (PUC-MG) O comprimento da mediana $\overline{CM}$ do triângulo ABC, sendo $A = (2, 3)$, $B = (4, 3)$ e $C = (3, 5)$, é:

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) 2

d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

e) 3

Exercícios complementares de C.5 a C.9

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (U. E. Londrina-PR) Seja $\overline{AC}$ uma diagonal do quadrado $ABCD$. Se $A = (-2, 3)$ e $C = (0, 5)$, a área de $ABCD$, em unidade de área, é:

a) 4

b) $4\sqrt{2}$

c) 8

d) $8\sqrt{2}$

e) 16

C.2 (PUC-SP) Sendo $A(3, 1)$, $B(4, -4)$ e $C(-2, 2)$ vértices de um triângulo, então esse triângulo é:

a) triângulo retângulo e não isósceles.

b) triângulo retângulo e isósceles.

c) triângulo equilátero.

d) triângulo isósceles e não retângulo.

e) n.d.a.

C.3 Os pontos $A(2, 2)$, $B(x, 1)$ e $C(-1, 3)$ são vértices de um triângulo retângulo em B. Determine x.

C.4 O triângulo equilátero ABC é tal que $A(0, 2)$ e $B(2, 0)$. Obtenha o vértice C.

C.5 (UFMG) Considere $A = (2, 1)$ e $B = (4, 0)$ dois pontos no plano coordenado. As coordenadas do ponto C, simétrico do ponto A em relação ao ponto B, são:

a) $(6, -1)$

b) $(3, 1)$

c) $(2, -1)$

d) $\left(3, \frac{1}{2}\right)$

e) $(1, 0)$

C.6 (UFRGS) Os pontos $A(4, -2)$ e $C(6, 10)$ são extremos do diâmetro de uma circunferência de centro:

a) $(1, 4)$

b) $(0, -2)$

c) $(11, 3)$

d) $(4, -2)$

e) $(5, 4)$

C.7 Dois vértices opostos de um quadrado $ABCD$ são os pontos $A(2, 5)$ e $C(2, 9)$. Obtenha os outros dois vértices.

C.8 Os pontos $M(2, 3)$, $N(-1, -1)$ e $P(11, 4)$ são pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de um triângulo ABC. Calcule o perímetro do triângulo ABC.

C.9 As bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um trapézio são tais que $A(2, 4)$, $B(8, 10)$, $C(6, 14)$ e $D(4, 12)$. Calcule a medida da base média do trapézio.

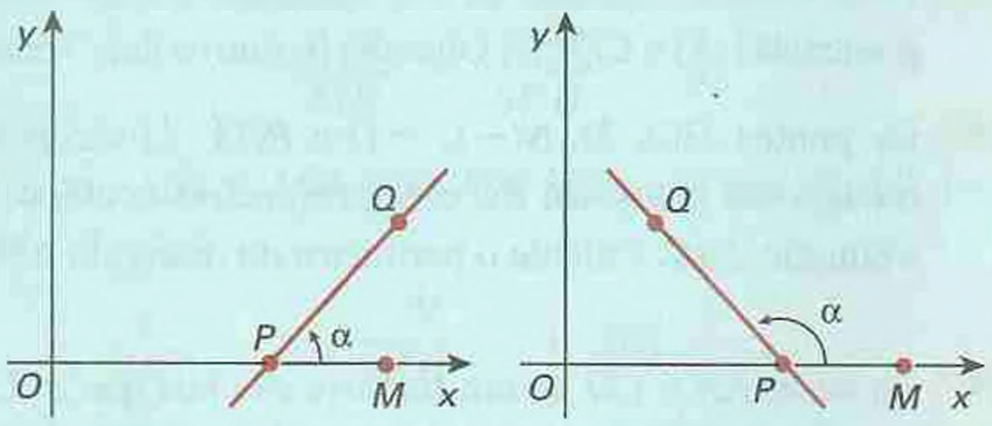
Capítulo 54

EQUAÇÃO DA RETA

1. INCLINAÇÃO DE UMA RETA

Definição

Seja r uma reta do plano cartesiano ortogonal concorrente com o eixo Ox no ponto $P(x_P, 0)$ e que passa pelo ponto $Q(x_Q, y_Q)$, com $y_Q > 0$. Seja $M(x_M, 0)$, com $x_M > x_P$:



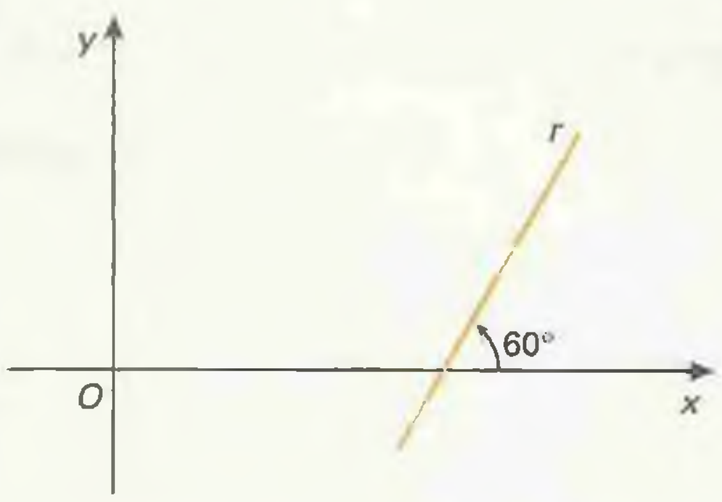
Chama-se **inclinação da reta** r a medida α, $0° \leq \alpha < 180°$, do ângulo $M\hat{P}Q$ orientado a partir do lado $\overrightarrow{PM}$ no sentido anti-horário.

Nota

Se uma reta s é paralela ao eixo Ox, então dizemos que sua inclinação é 0°.

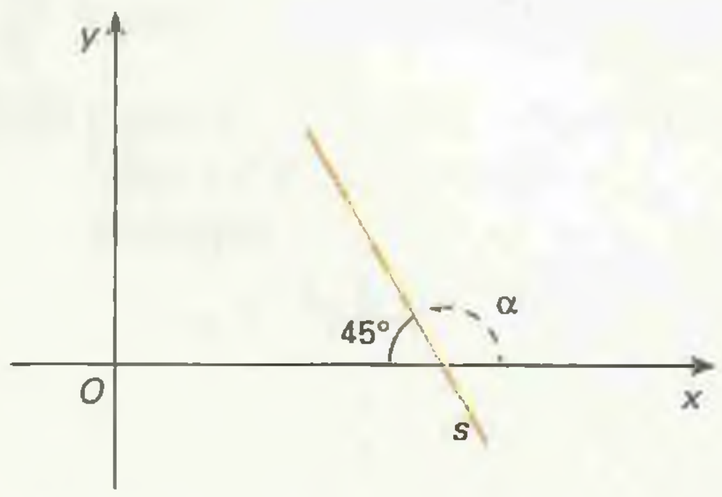
Exemplos

a)



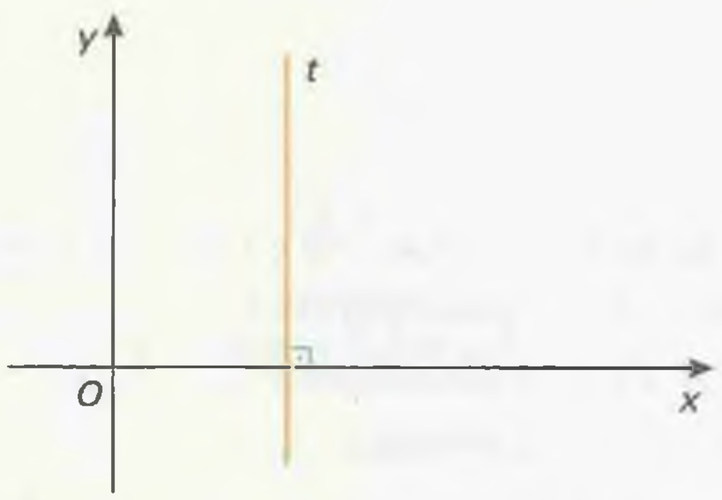
A inclinação α da reta r é $\alpha = 60°$.

b)



A inclinação α da reta s é $\alpha = 135°$.

c)

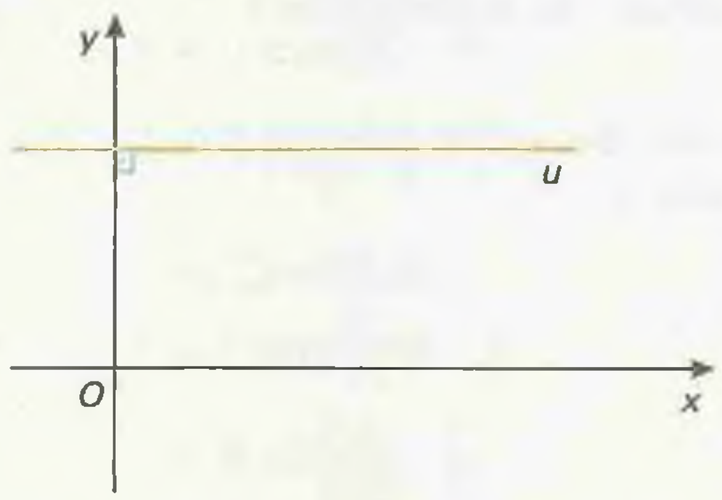


A inclinação α da reta t é $\alpha = 90°$.

Nota

Toda reta perpendicular ao eixo Ox é denominada **reta vertical**.

d)



A inclinação α da reta u é $\alpha = 0°$.

Nota

Toda reta paralela ao eixo Ox é denominada **reta horizontal**.

2. COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

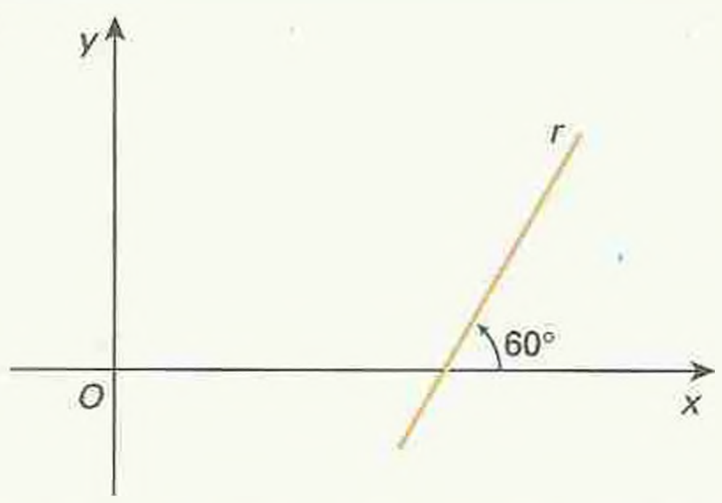
Definição

Chama-se **coeficiente angular de uma reta r de inclinação α, $\alpha \neq 90°$**, o número m tal que:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

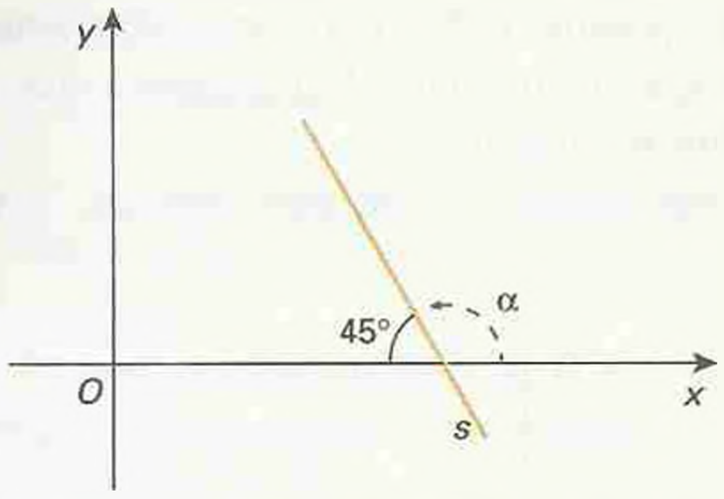
Exemplos

a)



O coeficiente angular de r é $m_r = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

b)

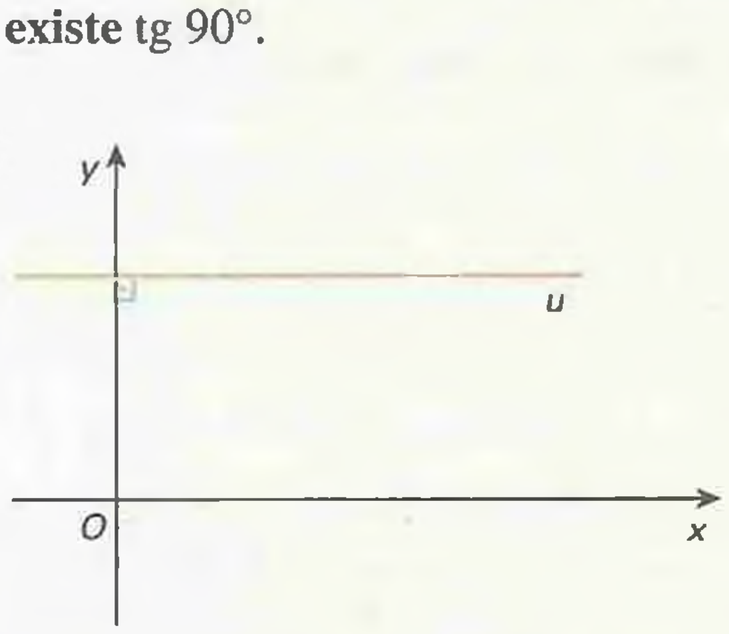


O coeficiente angular de s é $m_s = \text{tg } 135° = -1$.

c)

Retas verticais **não têm** coeficiente angular, pois **não existe** tg 90°.

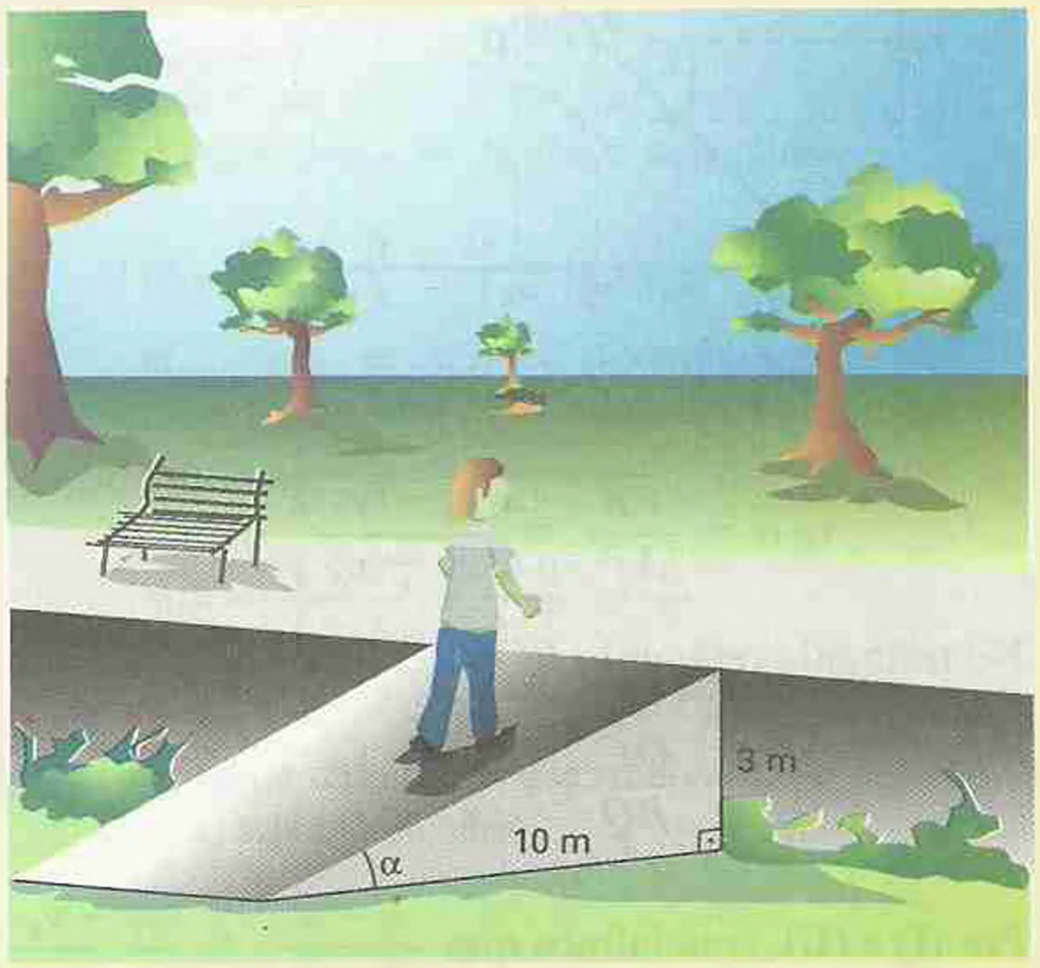
d)



O coeficiente angular de u é $\text{tg } 0° = 0$.

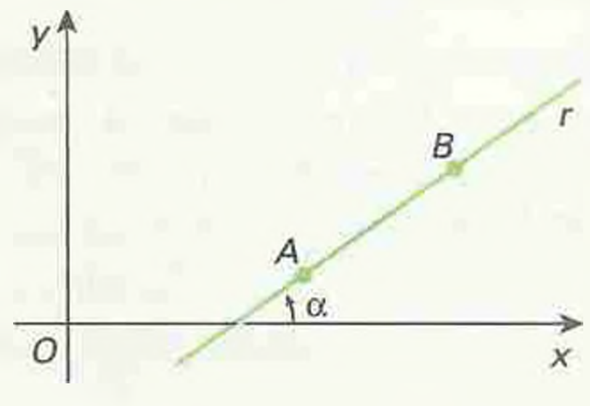
Declividade de uma rampa

Na engenharia civil, quando se diz que uma rampa tem declive de 30%, isso significa que a tangente do ângulo α que a rampa forma com um plano horizontal é 0,3, ou seja, $\text{tg } \alpha = 0{,}3$.

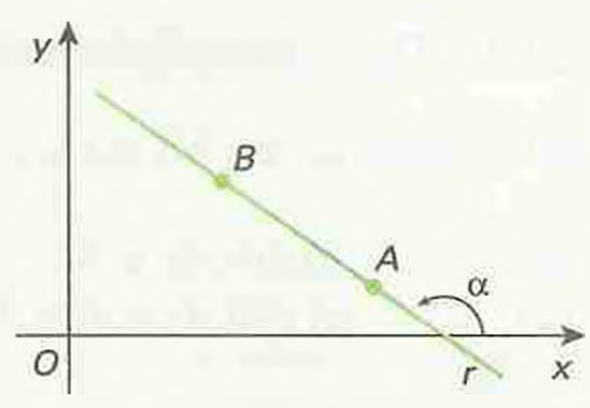


Cálculo do coeficiente angular de uma reta não-vertical por dois de seus pontos

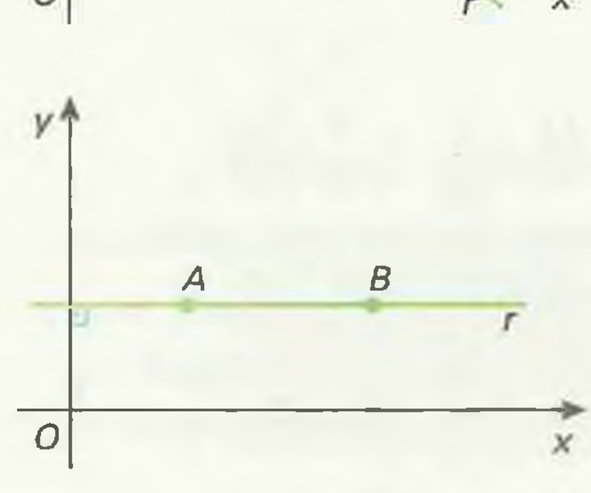
Consideremos dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma reta r não-vertical, de inclinação α:



Primeiro caso: $0° < \alpha < 90°$



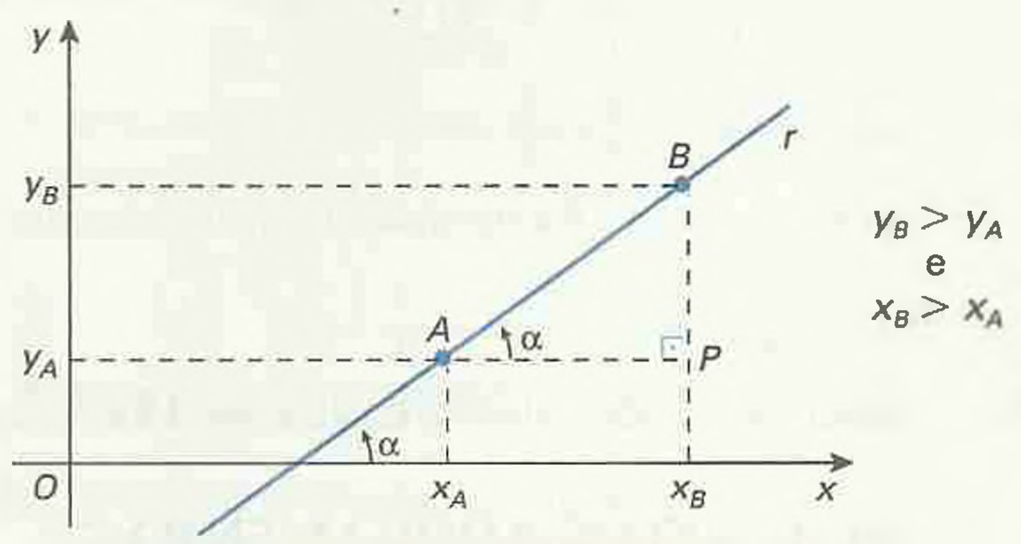
Segundo caso: $\alpha > 90°$



Terceiro caso: $\alpha = 0°$

Sem perda de generalidade, podemos supor os pontos A e B nas posições indicadas nesses três casos.

- Primeiro caso:



$y_B > y_A$ e $x_B > x_A$

No triângulo retângulo ABP, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{PB}{AP} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo, o coeficiente angular da reta r é $m_r = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Também para o 2º e para o 3º caso obtém-se como coeficiente angular da reta r a razão da diferença das ordenadas de A e B para a diferença de suas abscissas, isto é:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Multiplicando por -1 o numerador e o denominador dessa fração, obtemos uma fração equivalente a ela:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Para simplificar a notação, vamos indicar por Δy a diferença entre as ordenadas e por Δx a diferença entre as abscissas:

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Cuidado! As diferenças Δy e Δx devem ser efetuadas num mesmo sentido, isto é, ambas de A para B, $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, ou ambas de B para A, $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Calcular o coeficiente angular da reta $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(2, 5)$ e $B(4, 11)$
b) $A(6, 4)$ e $B(2, 12)$
c) $A(-1, 4)$ e $B(5, -8)$
d) $A(5, 8)$ e $B(3, 8)$
e) $A(6, 1)$ e $B(6, 4)$

Resolução

a) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 5}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$

Note que podemos calcular esse coeficiente angular de A para B, ou seja:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 11}{2 - 4} = \frac{-6}{-2} = 3$$

b) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12 - 4}{2 - 6} = \frac{8}{-4} = -2$

c) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-8 - 4}{5 - (-1)} = \frac{-12}{6} = -2$

d) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8 - 8}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$

Note que a reta $\overline{AB}$ é paralela ao eixo das abscissas.

e) $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 1}{6 - 6} = \frac{3}{0}$ $(\nexists)$

Assim sendo, não existe m. Logo, a reta $\overline{AB}$ é vertical.

3. CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Teorema

Três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são colineares se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

Os símbolos m_{AB} e m_{BC} indicam, respectivamente, os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

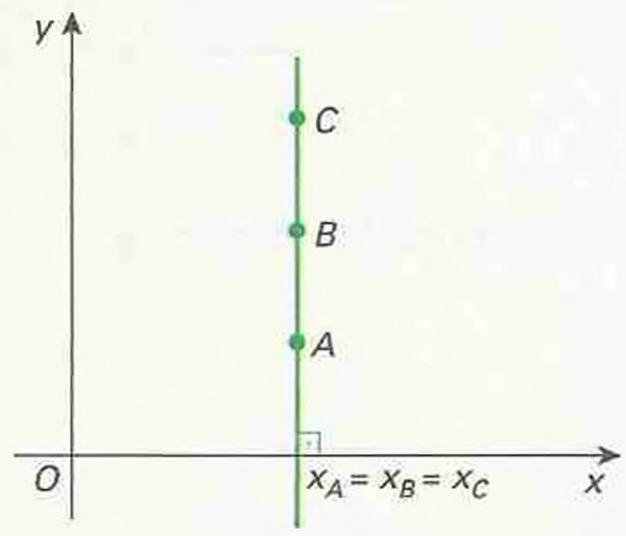
Demonstração

- Primeira parte:

Hipótese		Tese
A, B e C são pontos colineares.	$\Rightarrow$	$m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

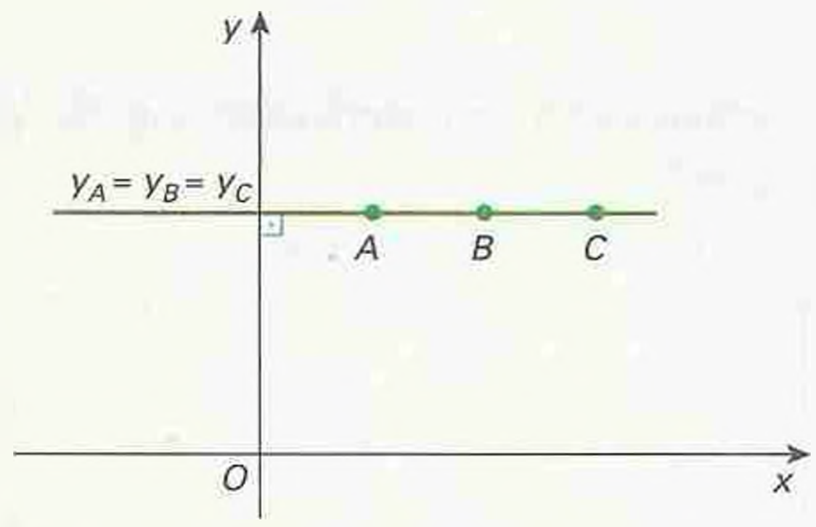
Se dois dos três pontos A, B e C forem coincidentes, então a demonstração é imediata. Suponhamos que os pontos sejam distintos entre si.

Se A, B e C pertencem a uma reta vertical, então $x_A = x_B = x_C$:



Logo, não existem m_{AB} e m_{BC}.

Se A, B e C pertencem a uma reta horizontal, então $y_A = y_B = y_C$:



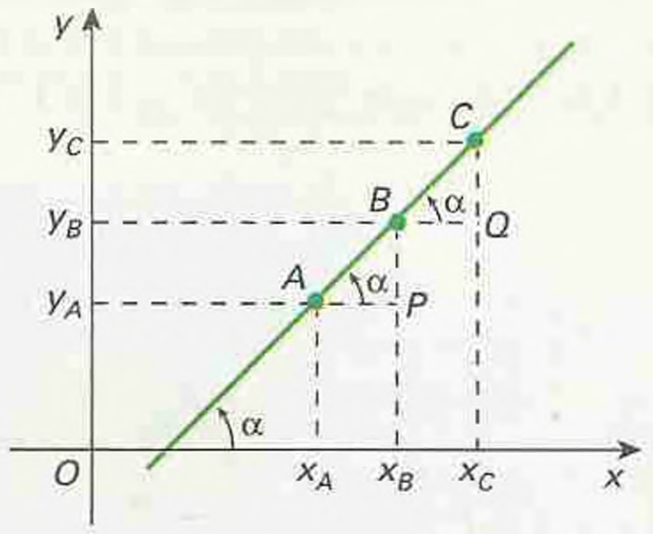
Logo, temos que:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0}{x_B - x_A} = 0 \quad (B \neq A)$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0}{x_C - x_B} = 0 \quad (C \neq B)$$

Portanto $m_{AB} = m_{BC}$.

Se A, B e C pertencem a uma reta não-vertical e não-horizontal:



$y_C > y_B > y_A$;
$x_C > x_B > x_A$.

No triângulo retângulo ABP, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{PB}{AP} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{(I)}$$

No triângulo retângulo BCQ, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{QC}{BQ} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \quad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), concluímos que $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$.

Logo, $m_{AB} = m_{BC}$.

- Segunda parte:

Hipótese		Tese
$m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.	$\Rightarrow$	A, B e C são colineares.

Se dois dos três pontos A, B e C forem coincidentes, então a demonstração é imediata. Suponhamos que os pontos sejam distintos entre si.

Se $m_{AB} = m_{BC}$, então temos que as retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ têm a mesma inclinação e, portanto, são paralelas. Ora, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e têm o ponto B em comum, então são paralelas **coincidentes** e, portanto, os pontos A, B e C são colineares.

Se não existem m_{AB} e m_{BC}, então as retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são verticais e, portanto, são paralelas. Ora, se as retas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são paralelas e têm o ponto B em comum, então são paralelas **coincidentes** e, portanto, A, B e C são colineares.

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Verificar se os pontos A, B e C são ou não colineares, nos seguintes casos:

a) $A(2, 5)$, $B(3, 7)$ e $C(5, 11)$

b) $A(3. 9)$, $B(3, 6)$ e $C(3, 10)$

c) $A(2, 6)$, $B(5, 6)$ e $C(9, 6)$

d) $A(4, 5)$, $B(8, 7)$ e $C(1, 1)$

Resolução

Devemos calcular m_{AB} e m_{BC}.

- Se $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}, então concluímos que A, B e C são colineares.
- Se $m_{AB} \neq m_{BC}$ ou existe apenas um, m_{AB} ou m_{BC}, então A, B e C não são colineares.

a) $m_{AB} = \dfrac{7-5}{3-2} = 2$; $m_{BC} = \dfrac{11-7}{5-3} = 2$

$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow A$, B e C são colineares.

b) $m_{AB} = \dfrac{9-6}{3-3} = \dfrac{3}{0}$ $(\nexists)$;

$m_{BC} = \dfrac{6-10}{3-3} = \dfrac{-4}{0}$ $(\nexists)$

$\nexists\, m_{AB}$ e $\nexists\, m_{BC} \Rightarrow A$, B e C são colineares.

c) $m_{AB} = \dfrac{6-6}{5-2} = \dfrac{0}{3} = 0$; $m_{BC} = \dfrac{6-6}{9-5} = \dfrac{0}{4} = 0$

$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow A$, B e C são colineares.

d) $m_{AB} = \dfrac{7-5}{8-4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$m_{BC} = \dfrac{1-7}{1-8} = \dfrac{-6}{-7} = \dfrac{6}{7}$

$m_{AB} \neq m_{BC} \Rightarrow A$, B e C **não** são colineares.

R.3 Determinar a de modo que os pontos $A(4, 2)$, $B(5, 8)$ e $C(3, a)$ sejam colineares.

Resolução

$$m_{AB} = \frac{8-2}{5-4} = 6;\ m_{BC} = \frac{8-a}{5-3} = \frac{8-a}{2}$$

Para que A, B e C sejam colineares, devemos ter $m_{AB} = m_{BC}$, ou seja:

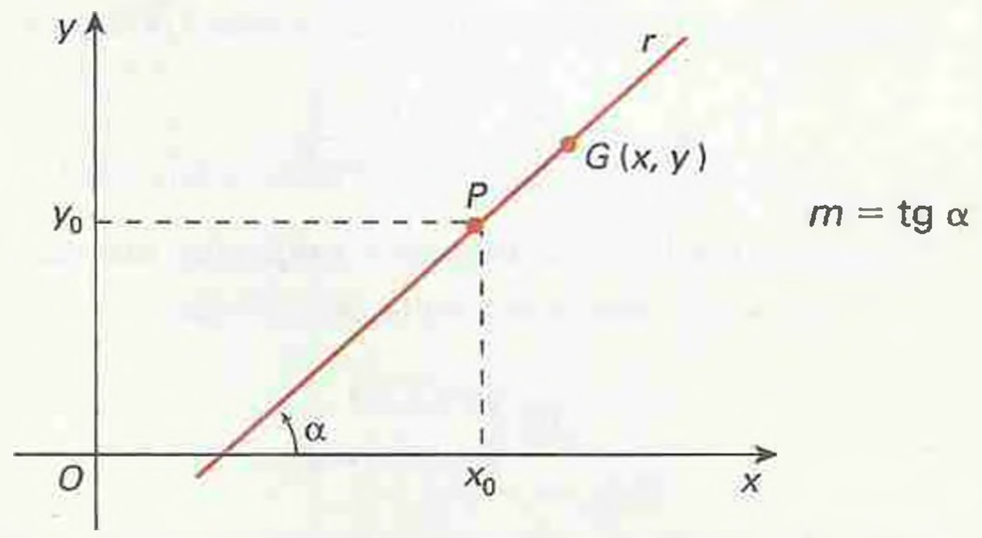
$$\frac{8-a}{2} = 6 \Rightarrow 8 - a = 12 \therefore a = -4$$

4. EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DA RETA

Teorema

Se r é a reta **não-vertical** que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m, então uma equação de r é $y - y_0 = m(x - x_0)$, denominada **equação fundamental da reta**.

Demonstração



Seja $G(x, y)$ um ponto genérico, distinto de P. O ponto G pertence à reta r se, e somente se, o coeficiente angular calculado através de P e G é igual a m, ou seja:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \therefore y - y_0 = m(x - x_0)$$

Note que o ponto $P(x_0, y_0)$ também satisfaz essa equação. Observe:

$$y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0) \Rightarrow 0 = 0$$

Assim, a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ representa **todos** os pontos da reta r.

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Determinar uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-2, 1)$ e tem coeficiente angular $m = -3$.

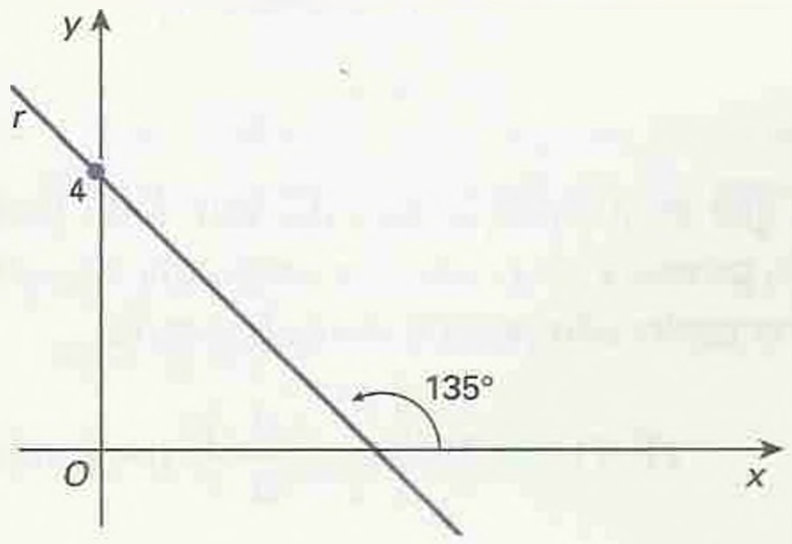
Resolução

Na equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, substituindo x_0, y_0 e m, respectivamente, por -2, 1 e -3, temos:

$$y - 1 = -3(x - (-2)) \therefore y - 1 = -3(x + 2)$$
$$\therefore y - 1 = -3x - 6 \therefore 3x + y + 5 = 0$$

Assim, uma equação da reta r é $3x + y + 5 = 0$.

R.5 Determinar uma equação da reta r do gráfico.



Resolução

A reta r passa pelo ponto $P(0, 4)$ e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$:

$$r \begin{cases} P(0, 4) \\ m = -1 \end{cases}$$

Substituindo $x_0 = 0$, $y_0 = 4$ e $m = -1$ na equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 4 = -1(x - 0) \Rightarrow y - 4 = -x$$
$$\therefore x + y - 4 = 0$$

Assim, a reta r tem como equação $x + y - 4 = 0$.

R.6 Usando a equação fundamental, obter uma equação da reta que passa pelos pontos $A(2, 5)$ e $B(4, 1)$.

Resolução

Calculando o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 5}{4 - 2} = -2$$

Com esse coeficiente angular e **qualquer** um dos dois pontos A ou B, obtemos a equação pedida:

$$\overleftrightarrow{AB} \begin{cases} A(2, 5) \\ m = -2 \end{cases}$$

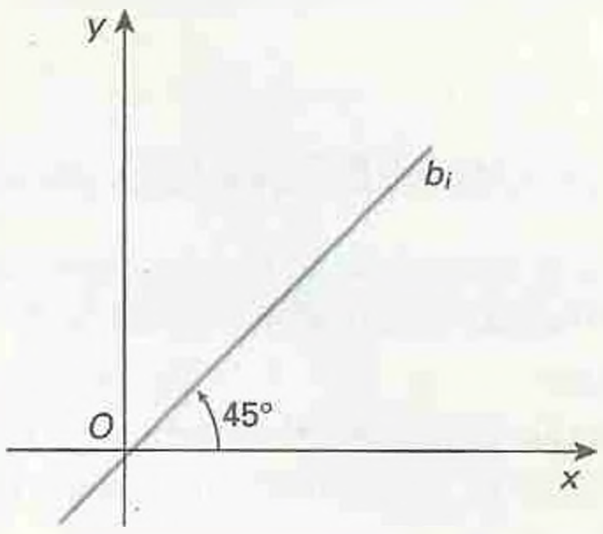
Fazendo $x_0 = 2$, $y_0 = 5$ e $m = -2$ na equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 5 = -2(x - 2) \Rightarrow y - 5 = -2x + 4$$
$$\therefore 2x + y - 9 = 0$$

Essa é uma equação de $\overleftrightarrow{AB}$.

As bissetrizes dos quadrantes ímpares

As bissetrizes dos quadrantes 1 e 3 estão contidas na reta b_i, denominada **reta bissetriz dos quadrantes ímpares**.



Observando que a reta b_i passa pela origem $O(0, 0)$ e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 45° = 1$, podemos obter sua equação através da equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$:

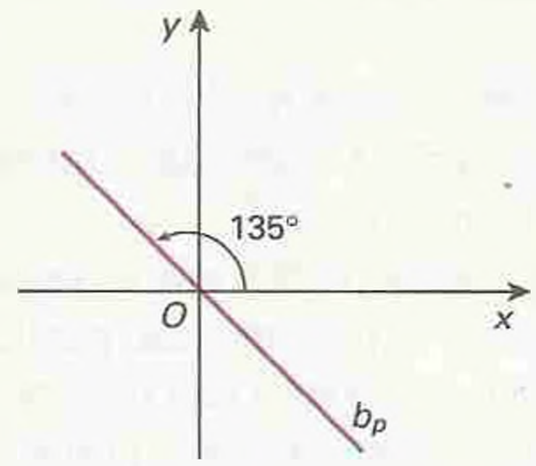
$$y - 0 = 1(x - 0)$$
$$\therefore \quad y = x$$

Note que essa equação nos diz que todo ponto (x, y) da reta b_i possui $y = x$, isto é, a ordenada é igual à abscissa. Por exemplo, são pontos dessa bissetriz:

$$(1, 1); (2, 2); \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); (-5, -5)$$

As bissetrizes dos quadrantes pares

As bissetrizes dos quadrantes 2 e 4 estão contidas na reta b_p, denominada **reta bissetriz dos quadrantes pares**.



Observando que a reta b_p passa pela origem $O(0, 0)$ e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$, podemos obter sua equação através da equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 0 = -1(x - 0)$$
$$\therefore \quad y = -x$$

Note que essa equação nos diz que todo ponto (x, y) da reta b_p possui $y = -x$, isto é, a ordenada e a abscissa são opostas. Por exemplo, são pontos dessa bissetriz:

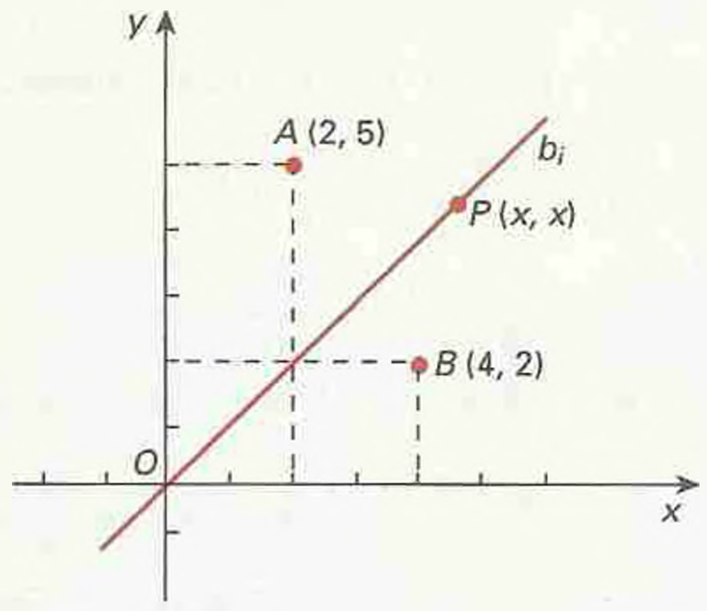
$$(1, -1); (-1, 1); \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 Determinar o ponto P, pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares, eqüidistante dos pontos $A(2, 5)$ e $B(4, 2)$.

Resolução

Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares possui a abscissa igual à ordenada. Logo, o ponto P é da forma $P(x, x)$.



Devemos ter $AP = BP \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + (x - 5)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (x - 2)^2}.$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

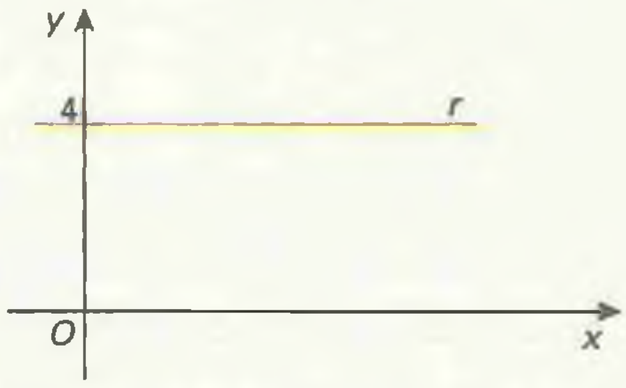
$$\cancel{(x - 2)^2} + (x - 5)^2 = (x - 4)^2 + \cancel{(x - 2)^2}$$
$$\therefore x^2 - 10x + 25 = x^2 - 8x + 16$$
$$\therefore 2x = 9$$
$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

Assim, o ponto P é $P\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Reta horizontal e reta vertical

Como já vimos, toda reta paralela ao eixo das abscissas é chamada de **reta horizontal**, e toda reta perpendicular a esse eixo é chamada de **reta vertical**.

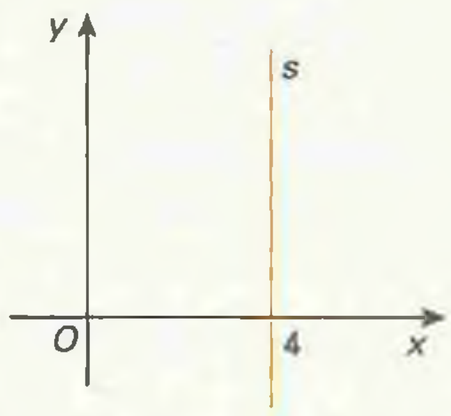
Exemplos



a) A reta r é horizontal, portanto seu coeficiente angular é $\text{tg}\,0° = 0$. Como ela passa pelo ponto $(0, 4)$, podemos obter sua equação através de $y - y_0 = m(x - x_0)$, isto é, $y - 4 = 0\,(x - 0)$, ou, ainda, $y = 4$.

Note que essa equação nos diz que todo ponto dessa reta horizontal possui ordenada igual a 4. Esse fato poderia ter sido observado diretamente no gráfico, evitando, assim, todo o trabalho anterior, bastando escrever $y = 4$ como equação da reta.

b)

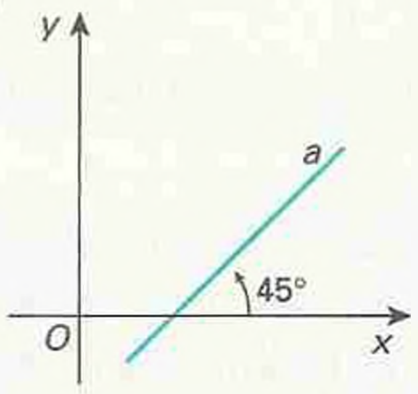


A reta s é vertical, portanto ela não possui coeficiente angular. Assim, não é possível obter-se a equação dessa reta a partir de $y - y_0 = m(x - x_0)$. Porém, observando o gráfico, constatamos que no plano cartesiano todo os pontos dessa reta, e somente eles, têm abscissa 4, o que nos permite representar essa reta pela equação $x = 4$.

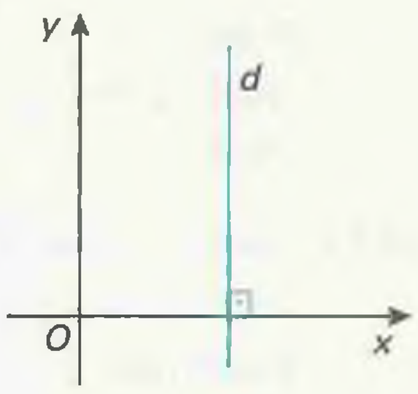
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine a inclinação e o coeficiente angular de cada uma das seguintes retas:

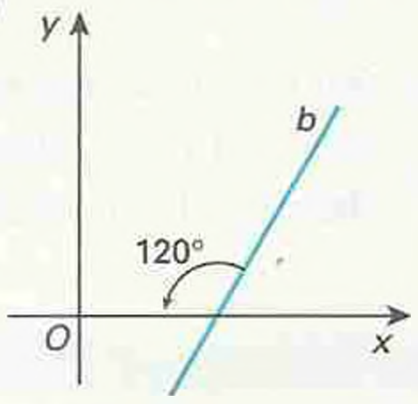
a)



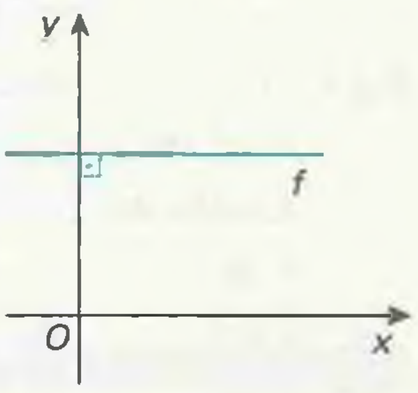
c)



b)



d)



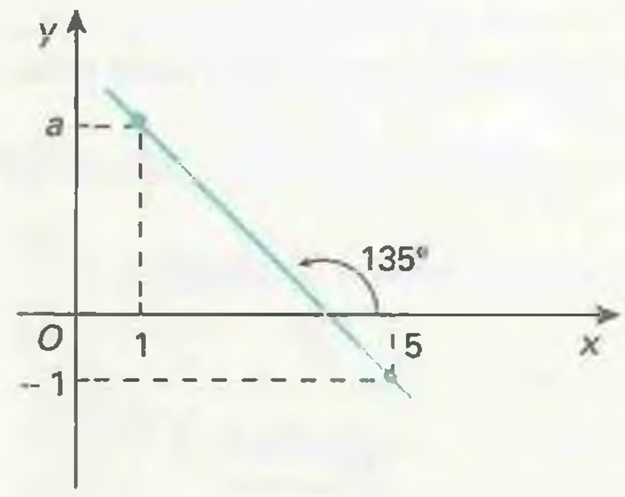
B.2 Calcule o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $A(2, 6)$ e $B(4, 14)$
b) $A(1, 4)$ e $B(2, 1)$
c) $A(-3, 5)$ e $B(1, -1)$
d) $A(4, 6)$ e $B(3, 6)$
e) $A(2, 5)$ e $B(2, 8)$
f) $A(1, 3)$ e $B(4, 7)$
g) $A(4, 8)$ e $B(2, 9)$
h) $A(-5, -1)$ e $B(-3, -4)$
i) $A(-1, 3)$ e $B(-2, 3)$
j) $A(8, 1)$ e $B(8, 6)$

B.3 (U. Taubaté-SP) A inclinação da reta que passa pelos pontos $A(3, 7)$ e $B(5, 9)$ é:

a) 30° c) 60° e) 135°
b) 45° d) 90°

B.4 Obtenha o valor de a no gráfico:



B.5 Usando a condição de alinhamento por coeficiente angular, verifique se os pontos A, B e C são colineares, nos seguintes casos:

a) $A(1, 6)$, $B(0, 4)$ e $C(-1, 2)$
b) $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ e $C(6, 2)$
c) $A(4, 1)$, $B(4, 7)$ e $C(4, 9)$
d) $A(3, 6)$, $B(1, 4)$ e $C(4, 1)$
e) $A\left(\frac{1}{3}, 2\right)$, $B\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ e $C\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$
f) $A(\sqrt{3}, 1)$, $B(\sqrt{2}, 1)$ e $C(\pi, 1)$
g) $A(3, \sqrt{3})$, $B(3, \sqrt{5})$ e $C(3, \sqrt{7})$
h) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $B(1, 3)$ e $C\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}\right)$

B.6 (Vunesp) Dado um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos $A(2, 2)$, $B(4, -1)$ e $C(m, 0)$. Para que $AC + CB$ seja mínimo, o valor de m deve ser:

a) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{10}{3}$ e) $\frac{11}{3}$
b) $\frac{8}{3}$ d) 3,5

B.7 Determine uma equação da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m em cada um dos seguintes casos:

a) $P(2, 4)$ e $m = -3$
b) $P(-1, 6)$ e $m = 2$
c) $P(4, 0)$ e $m = -\frac{1}{2}$

d) $P\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$ e $m = -\frac{2}{5}$

e) $P(0, -1)$ e $m = -4$

f) $P\left(-\frac{1}{2},\ 2\right)$ e $m = 3$

g) $P\left(-\frac{2}{3},\ -1\right)$ e $m = -3$

h) $P(0, 0)$ e $m = 6$

B.8 (UFPE) A equação cartesiana da reta que passa pelo ponto (1, 1) e tem inclinação de 60° é:

a) $\sqrt{2}\,x - y = \sqrt{2} - 1$

b) $\sqrt{3}\,x + y = 1 - \sqrt{3}$

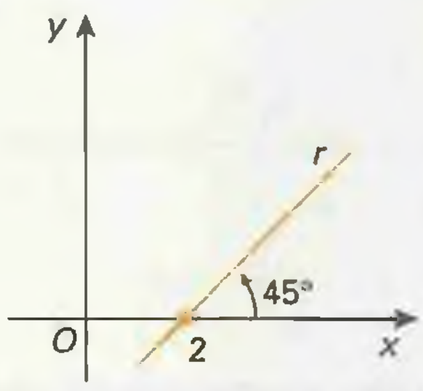
c) $\sqrt{3}\,x - y = \sqrt{3} - 1$

d) $\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + y = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

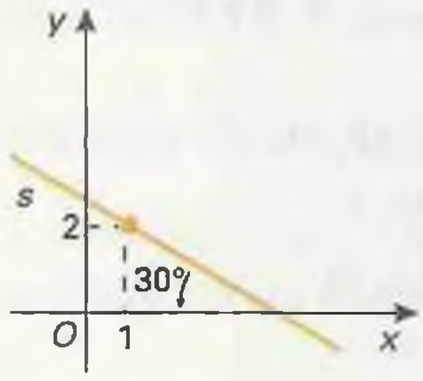
e) $\frac{\sqrt{3}\,x}{2} - y = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$

B.9 Obtenha uma equação para cada uma das retas dos gráficos.

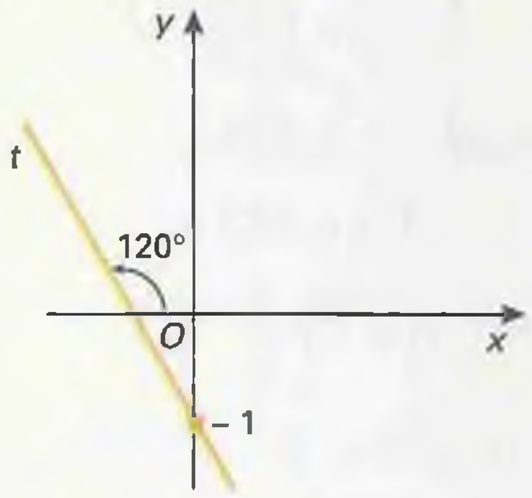
a)



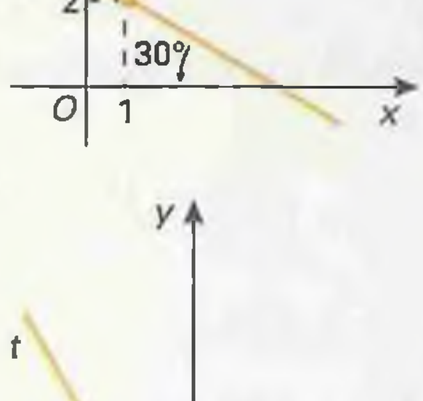
b)



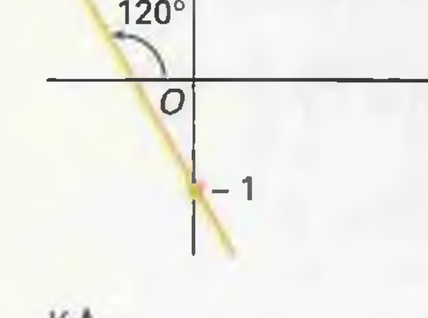
c)



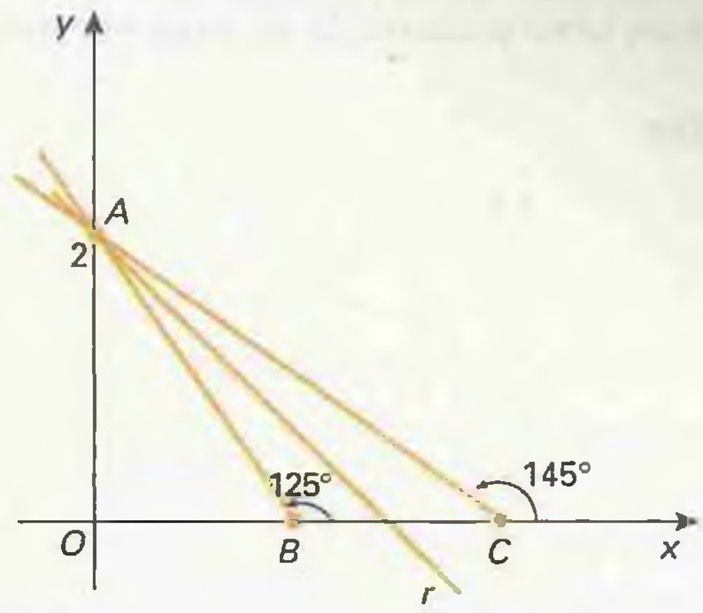
d)



e)



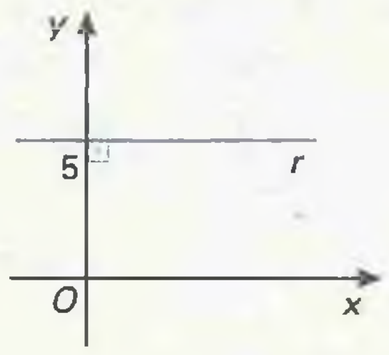
B.10 (UFSE) Na figura, os ângulos têm as medidas indicadas. A reta r contém a bissetriz do triângulo ABC, relativa ao vértice A. A equação de r é:



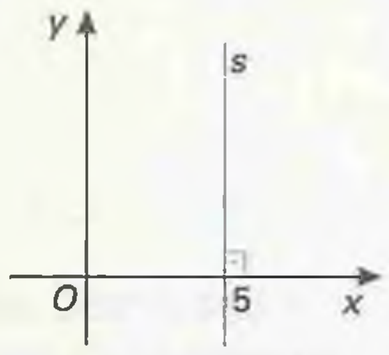
a) $y = x + 2$
b) $y = x - 2$
c) $y = -2x + 1$
d) $y = -x + 1$
e) $y = -x + 2$

B.11 Quais as equações das retas r e s dos gráficos?

a)



b)



B.12 Usando a equação fundamental, obtenha uma equação da reta que passa pelos pontos A e B em cada um dos seguintes casos:

a) $A(3, 8)$ e $B(-3, 2)$
b) $A(5, 0)$ e $B(-1, 12)$
c) $A(-6, 3)$ e $B(-5, 6)$
d) $A(1, 6)$ e $B(3, 1)$

B.13 (U. E. Londrina-PR) São dados os pontos $A = (-2, 1)$, $B = (0, -3)$ e $C = (2, 5)$. A equação da reta suporte da mediana do triângulo ABC, traçada pelo vértice A, é:

a) $y = 1$
b) $x = 1$
c) $x = y$
d) $x - y = 1$
e) $x + y = 1$

Nota

Reta suporte de um segmento é a reta que contém o segmento.

B.14 Qual é o ponto P pertencente à bissetriz dos quadrantes ímpares cuja distância à origem $O(0, 0)$ é igual a $4\sqrt{2}$?

Lembrete. Todo ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares é da forma (x, x).

B.15 O ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes pares e sua distância ao ponto $Q(6, -5)$ é igual a $\sqrt{5}$. Determine P.

Lembrete. Todo ponto da bissetriz dos quadrantes pares é da forma $(x, -x)$.

Exercícios complementares de C.1 a C.6

5. EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Todo reta do plano cartesiano é gráfico de uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que x e y são variáveis e a, b e c são números reais com a e b não simultaneamente nulos. Essa equação é chamada de **equação geral da reta**.

Exemplos

a) A reta de quação $y = 3x - 5$ pode ser representada pela equação geral $3x - y - 5 = 0$.

b) A reta de equação $x = 7$ pode ser representada pela equação geral $x - 0y - 7 = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Construir o gráfico da reta r, de equação geral:

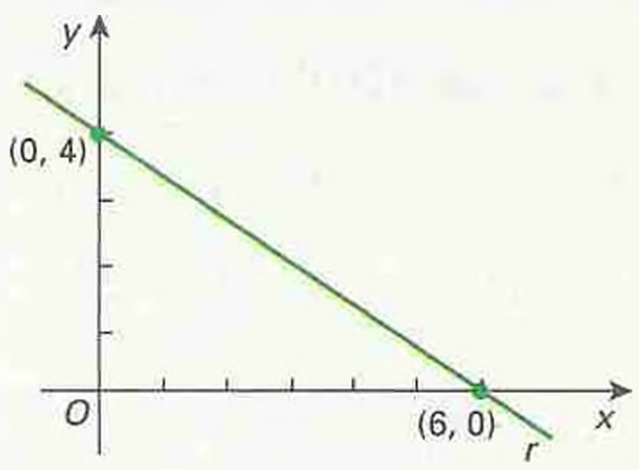
$$2x + 3y - 12 = 0$$

Resolução

Dois pontos distintos determinam uma reta. Assim, vamos obter dois pontos distintos da reta r e construir a reta que passa por eles:

- fazendo $x = 0$, temos $2 \cdot 0 + 3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$;
- fazendo $y = 0$, temos $2x + 3 \cdot 0 - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$.

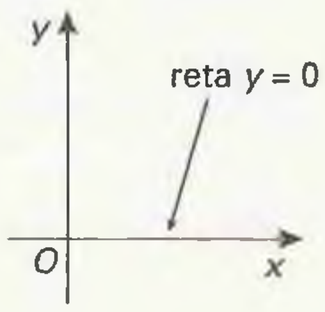
Portanto, dois pontos distintos de r são $(0, 4)$ e $(6, 0)$. Logo, o gráfico de r é:



R.9 Dar uma equação geral do eixo Ox.

Resolução

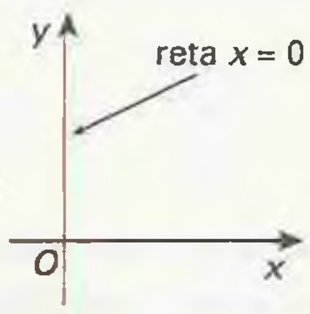
No plano cartesiano, todos os pontos do eixo Ox, e somente eles, têm ordenada zero. Logo, podemos representar esse eixo através da equação $y = 0$.



R.10 Dar uma equação geral do eixo Oy.

Resolução

No plano cartesiano, todos os pontos do eixo Oy, e somente eles, têm abscissa zero. Logo, podemos representar esse eixo através da equação $x = 0$.



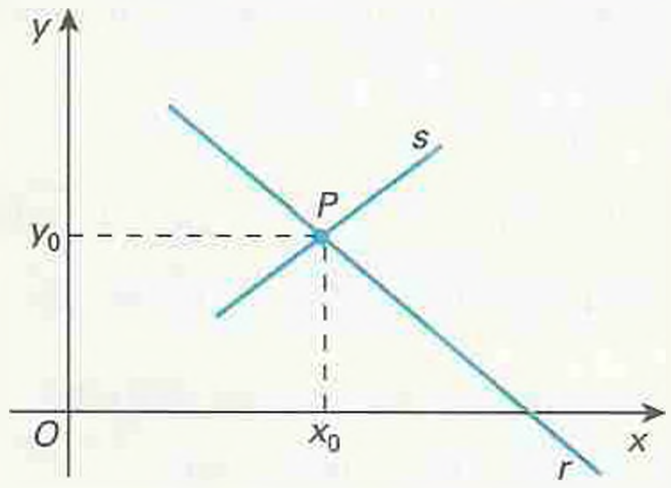
6. INTERSECÇÃO DE DUAS RETAS CONCORRENTES

Se $P(x_0, y_0)$ é o ponto de intersecção das retas concorrentes r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, então

$$\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$$

, ou seja, as coordenadas de P satisfazem as equações r e s simultaneamente. Sendo assim, para obter $r \cap s$, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$



O sistema anterior, que é equivalente a

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

, é possível e determinado se, e somente se, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, conforme já vimos no estudo dos sistemas lineares. Sendo assim, temos que essa é condição necessária e suficiente para que as retas r e s sejam concorrentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.11 Mostrar que as retas r: $2x - y - 5 = 0$ e s: $3x + y - 10 = 0$ são concorrentes e determinar o ponto comum a ambas.

Resolução

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \quad (r) \\ 3x + y = 10 \quad (s) \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5$$

Como $D \neq 0$, temos que r e s são concorrentes. Somando membro a membro as equações de r e s, temos:

$$5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

Substituindo $x = 3$ na equação de r, obtemos:

$$2 \cdot 3 - y = 5 \Rightarrow y = 1$$

Logo, $r \cap s = \{(3, 1)\}$.

R.12 Determinar o ponto de intersecção da reta

r: $5x - 2y + 3 = 0$ com o eixo Ox

Resolução

Vimos no exercício R.9 que a equação do eixo Ox é $y = 0$. Assim, o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox é dado pelo sistema $\begin{cases} 5x - 2y + 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Substituindo $y = 0$ na primeira equação, temos:

$$5x - 2 \cdot 0 + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

Logo, o ponto comum à reta r e ao eixo Ox é $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$.

R.13 Determinar o(s) ponto(s) da reta r: $2x + y - 5 = 0$ que dista(m) 10 unidades do ponto $P(-5, -5)$.

Resolução

Tomemos um ponto **genérico** da reta r. Para isso, basta atribuir um valor **genérico** para x. Fazendo $x = a$, temos:

$$2a + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 - 2a$$

Assim, um ponto genérico da reta r é $G(a, 5 - 2a)$.
A equação $d_{GP} = 10$ nos fornecerá o valor conveniente de a, isto é:

$$d_{GP} = 10$$
$$\therefore \sqrt{(a - (-5))^2 + (5 - 2a - (-5))^2} = 10$$
$$\therefore \sqrt{(a + 5)^2 + (10 - 2a)^2} = 10$$

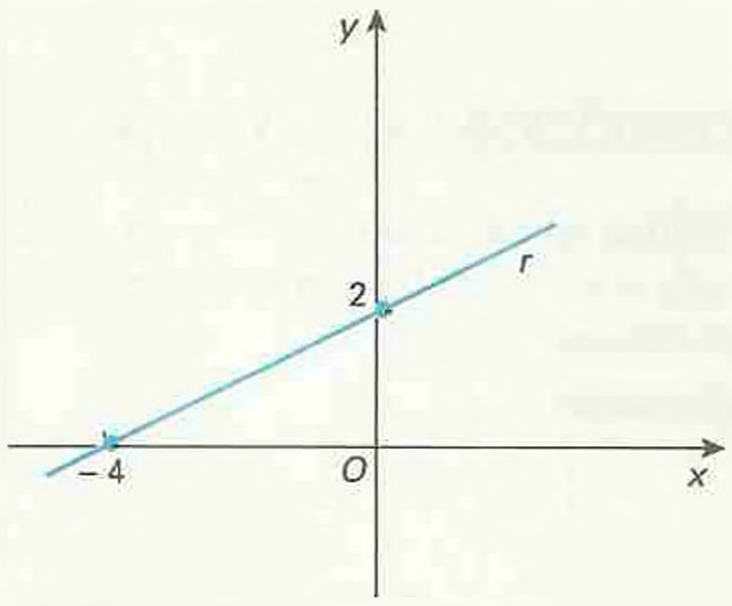
Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$(a + 5)^2 + (10 - 2a)^2 = 10^2$$
$$\therefore a^2 + 10a + 25 + 100 - 40a + 4a^2 = 100$$
$$\therefore 5a^2 - 30a + 25 = 0$$
$$\therefore a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ ou } a = 5.$$

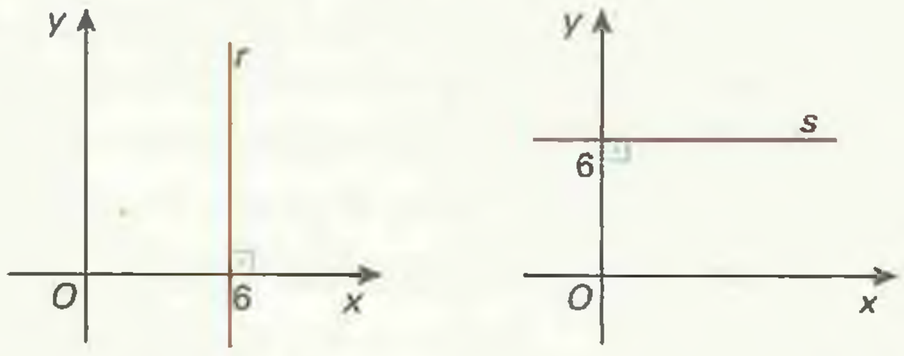
- Para $a = 1$, temos $G(1, 5 - 2 \cdot 1)$, ou seja, $G(1, 3)$.
- Para $a = 5$, temos $G'(5, 5 - 2 \cdot 5)$, ou seja, $G'(5, -5)$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.16 Obtenha uma equação geral da reta r do gráfico:



B.17 São dados os gráficos:



Obtenha uma equação geral para cada uma das retas, r e s.

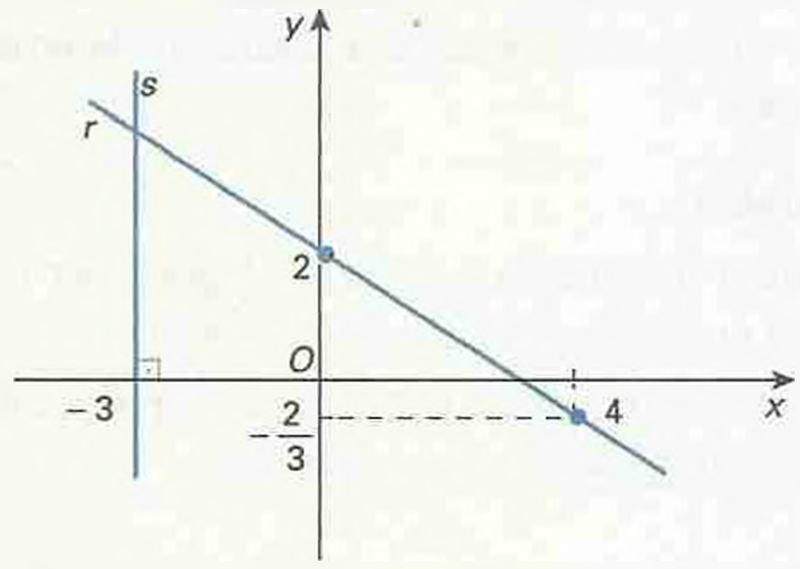
B.18 Construa o gráfico de cada uma das seguintes retas:

a) $5x - 4y - 20 = 0$
b) $2x + 7y = 0$
c) $x = 3$
d) $y = 2$
e) $x = 0$

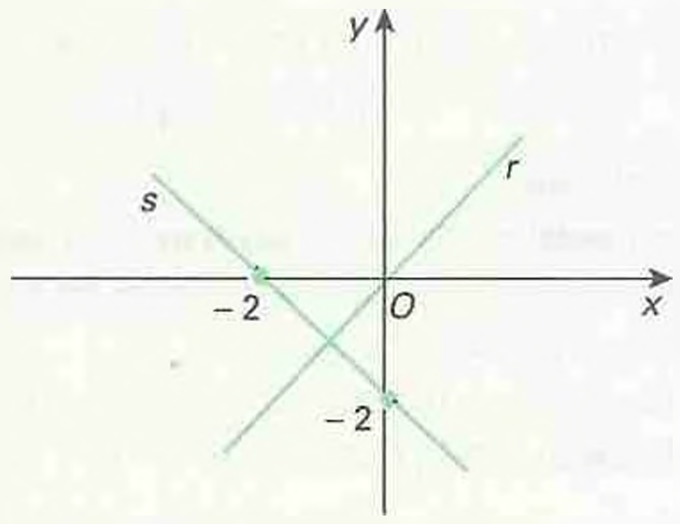
B.19 Mostre que as retas r: $5x - y - 4 = 0$ e s: $2x + y - 3 = 0$ são concorrentes e determine o ponto comum a ambas.

B.20 Para que valores de a as retas r: $ax + 2y - 5 = 0$ e s: $3x + y - 3 = 0$ são concorrentes?

B.21 Obtenha o ponto de intersecção das retas r e s do gráfico:



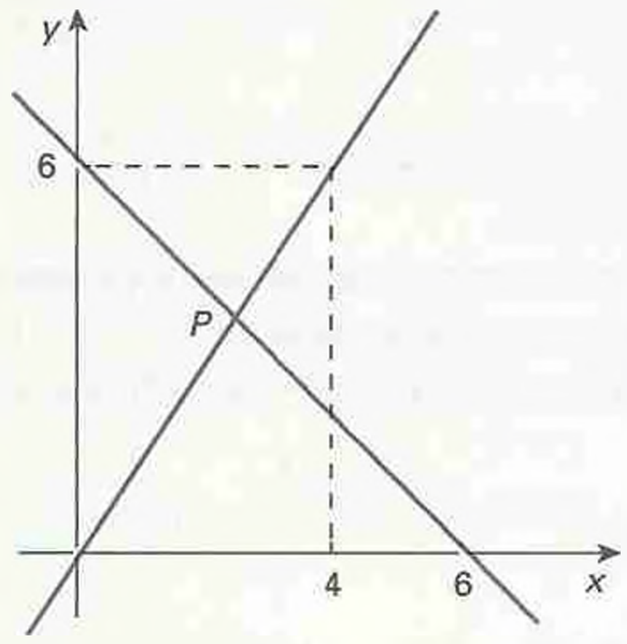
B.22 No gráfico, a reta r é bissetriz dos quadrantes ímpares. Determine o ponto comum a r e s.



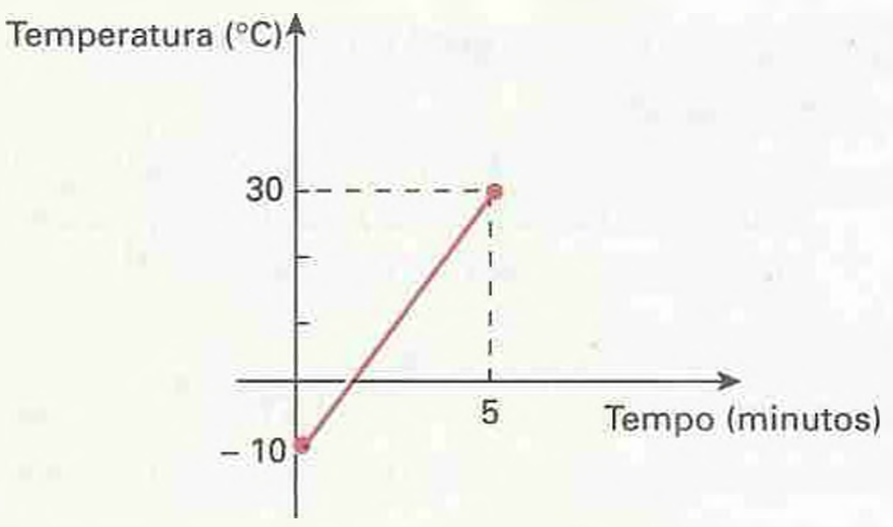
B.23 Qual é o ponto de intersecção da reta r: $3x - 2y + 5 = 0$ com o eixo Oy?

B.24 (U. Amazonas-AM) O ponto P no gráfico abaixo é:

a) (4, 3)
b) $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$
c) $\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{4}\right)$
d) $\left(\frac{12}{5}, \frac{18}{5}\right)$
e) (2, 4)



B.25 (Cesgranrio)



Uma barra de ferro com temperatura inicial de -10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico acima representa a va-

riação da temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência. Calcule em quanto tempo, após o início da experiência, a temperatura da barra atingiu 0 °C.

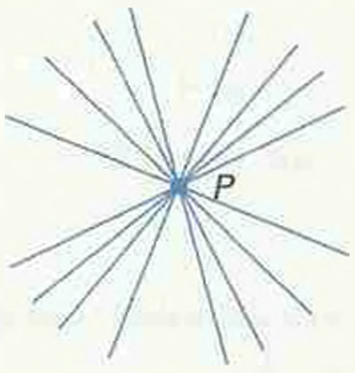
a) 1 min
b) 1 min 5 seg
c) 1 min 10 seg
d) 1 min 15 seg
e) 1 min 20 seg

B.26 (UFBA) Determine os pontos da reta $x + y + 2 = 0$ que distam 5 unidades do ponto $P(-2, -1)$. **Sugestão.** Tome um ponto genérico da reta. Ver exercício R. 13.

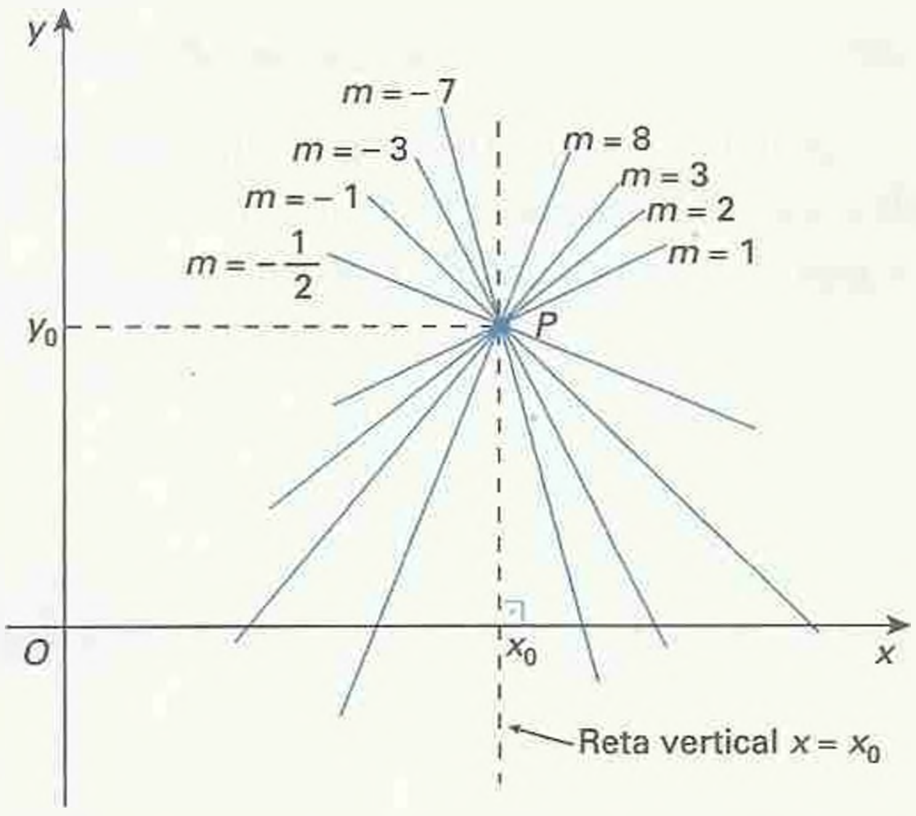
Exercício complementar C.7

7. FEIXE PLANO DE RETAS CONCORRENTES

Chama-se **feixe plano de retas concorrentes de centro** P o conjunto formado por todas as retas de um plano α que passam por P.



Na equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, atribuindo a m **todos** os valores reais, obtemos todas as retas não-verticais que passam pelo ponto $P(x_0, y_0)$. A única reta que passa por $P(x_0, y_0)$ e não pode ser obtida dessa equação é a reta vertical $x = x_0$.



Assim, o **feixe plano de retas concorrentes** de centro $P(x_0, y_0)$ é determinado por:

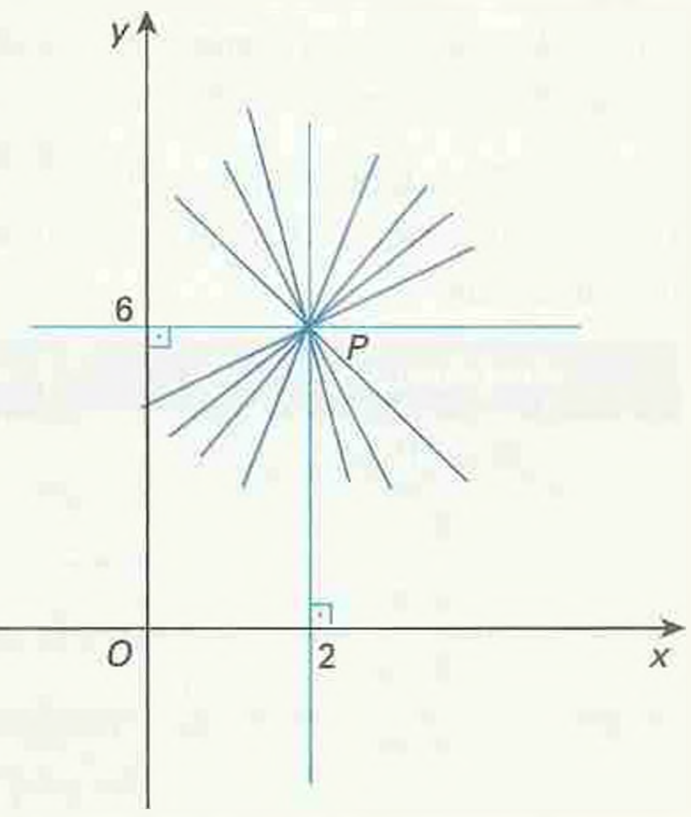
$$y - y_0 = m(x - x_0),\ m \in \mathbb{R},\ \text{ou}\ x = x_0$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.14 Dar as equações de todas as retas do plano cartesiano que passam pelo ponto $P(2, 6)$.

Resolução

A equação $y - 6 = m(x - 2)$, $m \in \mathbb{R}$, representa todas as retas não-verticais que passam por $P(2, 6)$. A única reta que não é representada por essa equação é a vertical $x = 2$. Assim, as equações de todas as retas que passam por $P(2, 6)$ são $y - 6 = m(x - 2)$, $m \in \mathbb{R}$, ou $x = 2$. Em outras palavras, dizemos que essas são as equações do **feixe plano de retas concorrentes** de centro $P(2, 6)$.



EXERCÍCIO BÁSICO

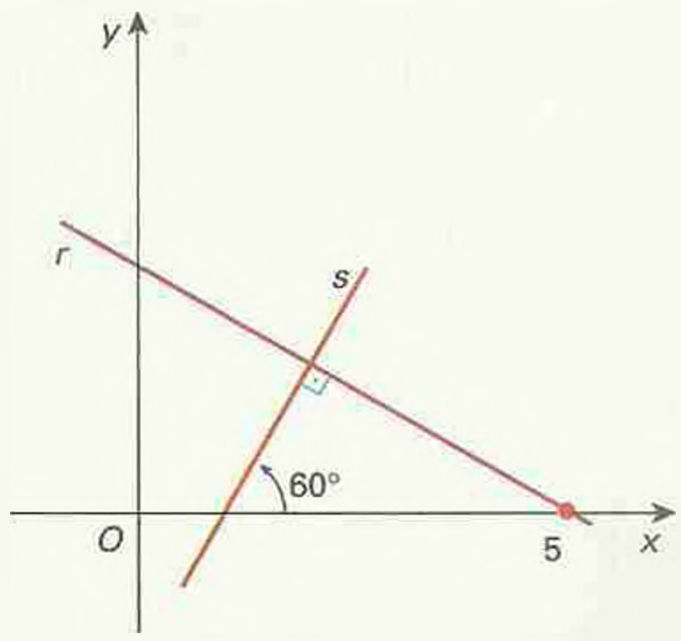
B.27 Considere no plano cartesiano o feixe de retas concorrentes de centro $P(2, 4)$.

a) Obtenha as equações de todas as retas desse feixe.
b) Das equações do item anterior, qual representa a reta de inclinação 45°?
c) Das equações do item a, qual representa a reta horizontal que passa por $Q(2, -1)$?
d) Das equações do item a, qual representa a reta horizontal que passa por P?
e) Das equações do item a, qual representa a reta vertical que passa por P?
f) Das equações do item a, qual representa a reta que intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3?

Exercício complementar C.8

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Determine uma equação da reta r do gráfico:



C.2 O ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares e o ponto Q pertence ao eixo das abscissas. Determine esses pontos, sabendo que a distância entre eles é 5 unidades e que a abscissa de Q tem 4 unidades a mais que a de P.

C.3 (PUC-SP) Os pontos $A(5, 3)$ e $B(5, y)$, $y \neq 5$, pertencem a semiplanos opostos em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares se, e somente se:

a) $y > 5$ c) $y > 3$ e) $y = 2$
b) $y < 5$ d) $y < 3$

Nota

Uma reta r divide um plano que a contém em dois semiplanos opostos em relação a r.

C.4 (Fuvest-SP) A tabela mostra a temperatura das águas do Oceano Atlântico (ao nível do equador) em função da profundidade.

Profundidade	Temperatura
Superfície	27 °C
100 m	21 °C
500 m	7 °C
1.000 m	4 °C
3.000 m	2,8 °C

Admitindo que a variação da temperatura seja linear entre duas quaisquer das medições consecutivas feitas para a profundidade, a temperatura prevista para a profundidade de 400 m é de:

a) 16 °C c) 12,5 °C e) 8 °C
b) 14 °C d) 10,5 °C

C.5 (Fatec-SP) No plano cartesiano xOy, as equações $x - 1 = 0$ e $y - 2 = 0$ representam:

a) duas retas, uma vertical e outra horizontal, que se interceptam no ponto (1, 2).
b) duas retas, uma vertical e outra horizontal, que se interceptam no ponto (2, 1).
c) uma reta que intercepta os eixos cartesianos nos pontos (1, 0) e (0, 2).
d) dois pontos: (1, 0) e (0, 2), respectivamente.
e) dois pontos: (0, 1) e (2, 0), respectivamente.

C.6 (Unifor-CE) A reta r, de equação $y = 2x - 1$, intercepta os eixos cartesianos nos pontos A e B. O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é o ponto:

a) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ d) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$
b) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ e) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$
c) $(0, -1)$

C.7 (Fesp-PE) No triângulo isósceles ABC, os vértices da base são $A(3, 0)$ e $B(0, 4)$. Se o vértice C pertence à reta $x + y - 7 = 0$, podemos afirmar que a diferença entre as coordenadas de C é:

a) 3 c) 7 e) 0
b) 5 d) 4

Sugestão. Tome um ponto genérico da reta. Ver exercício R. 13.

C.8 Considere no plano cartesiano o feixe de retas concorrentes de centro $P(2, 0)$.

a) Obtenha as equações de todas as retas desse feixe.
b) Das equações do item anterior, qual representa a reta que forma com os eixos Ox e Oy um triângulo de área 5?

Capítulo 55

OUTRAS FORMAS DA EQUAÇÃO DA RETA — PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

1. EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Vimos, no capítulo anterior, que uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular igual a m é $y - y_0 = m(x - x_0)$. Isolando a variável y nessa equação, obtemos:

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Fazendo $y_0 - mx_0 = q$, podemos escrever:

$$y = mx + q$$

Essa equação é chamada de **equação reduzida** da reta r. Note que o coeficiente de x na equação reduzida é exatamente o **coeficiente angular** m da reta. Ao termo independente q daremos o nome de **coeficiente linear** da reta.

Exemplos

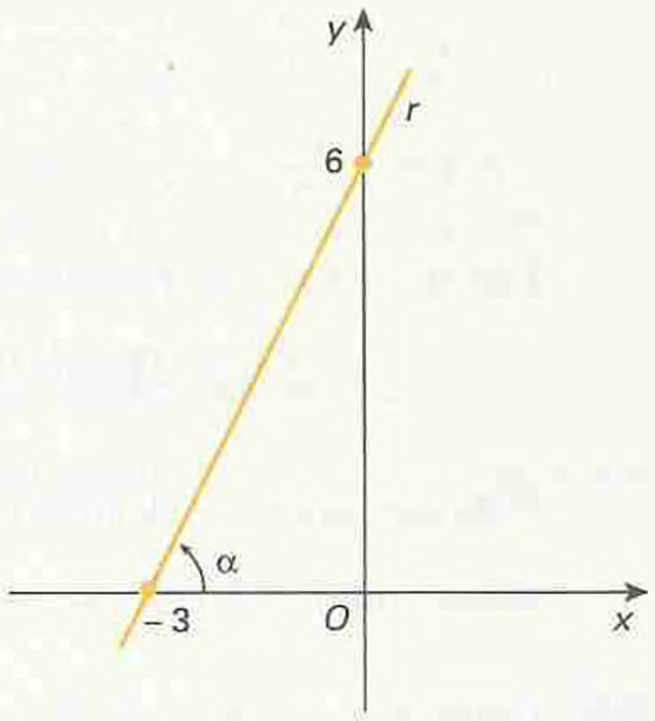
a) Na equação reduzida $y = 3x + 5$ temos:

$m = 3$ (**Coeficiente angular**) e $q = 5$ (**Coeficiente linear**)

b) Para construir o gráfico da reta r de equação $y = 2x + 6$, basta formar uma tabela atribuindo valores a x ou y a fim de obter dois pontos distintos da reta r:

x	y
0	6
−3	0

$\Rightarrow$



Note que o coeficiente de x na equação $y = 2x + 6$ é exatamente o coeficiente angular da reta $m = \text{tg}\,\alpha = 2$. Note ainda que o coeficiente linear, 6, é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo Oy.

c) Seja r a reta de equação geral $3x + 5y - 10 = 0$. A forma reduzida da equação de r é obtida isolando-se a variável y, ou seja $5y = -3x + 10 \Rightarrow y = -\frac{3x}{5} + 2$.

Assim, temos que:

$$m = -\frac{3}{5} \quad \textbf{(Coeficiente angular de } r\textbf{)}$$

e

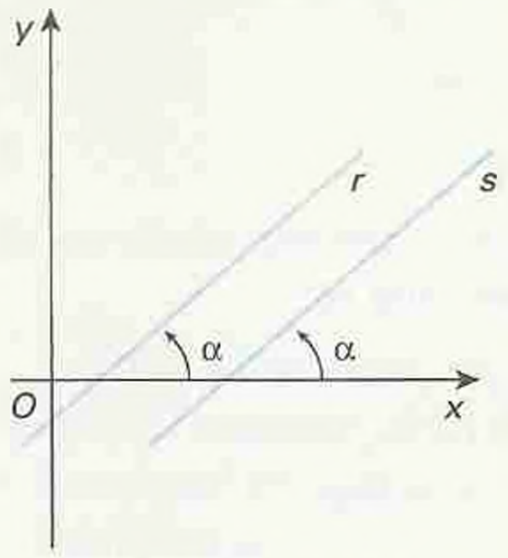
$$q = 2 \quad \textbf{(Coeficiente linear de } r\textbf{)}$$

O raciocínio usado nesse exemplo pode ser generalizado: sendo r uma reta não-vertical de equação geral $ax + by + c = 0$, o seu coeficiente angular m e seu coeficiente linear q são $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$, pois a forma reduzida da equação dessa reta é $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$.

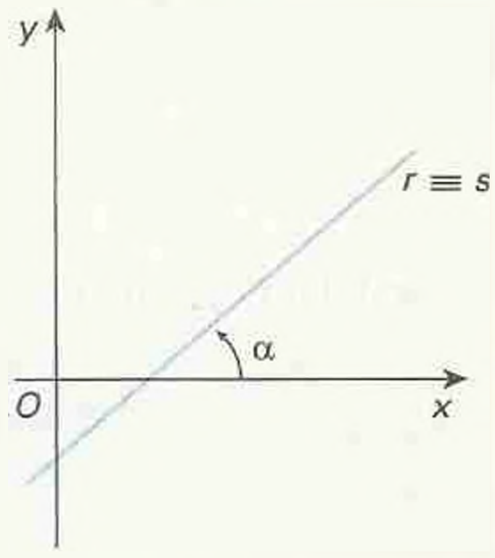
2. ESTUDO DAS POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS EM FUNÇÃO DE SUAS INCLINAÇÕES

No plano cartesiano, duas retas r e s são paralelas se, e somente se, têm o mesmo coeficiente angular ou não existem seus coeficientes angulares:

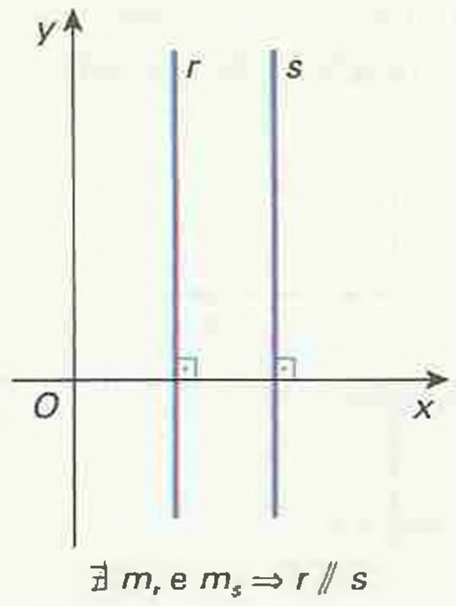
$$r \parallel s \Leftrightarrow m_r = m_s \text{ ou } \nexists\, m_r \text{ e } m_s$$



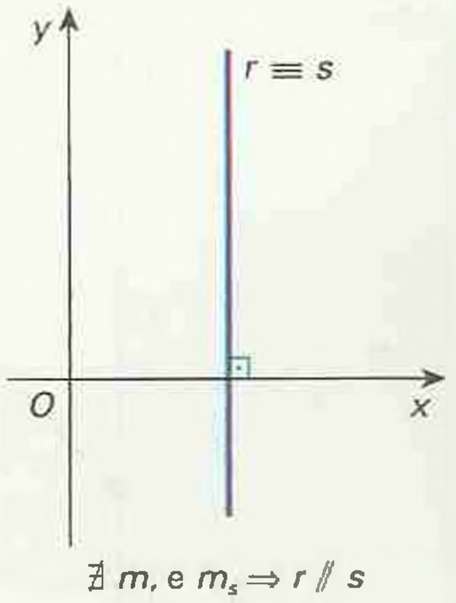
$m_r = m_s \Rightarrow r \parallel s$



$m_r = m_s \Rightarrow r \parallel s$

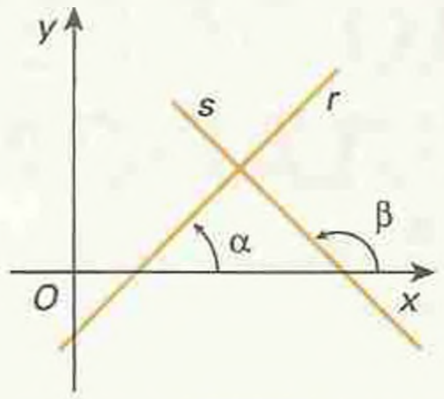


$\nexists\, m_r \text{ e } m_s \Rightarrow r \parallel s$

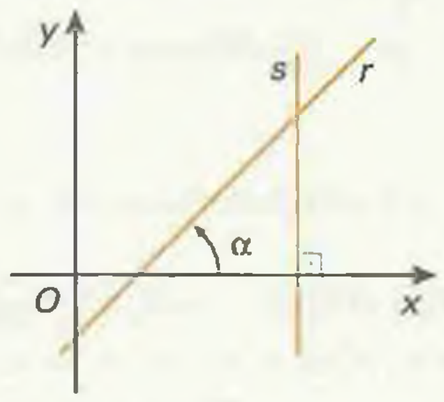


$\nexists\, m_r \text{ e } m_s \Rightarrow r \parallel s$

No plano cartesiano, duas retas r e s são concorrentes se, e somente se, têm coeficientes angulares diferentes ou existe coeficiente angular de uma das retas e não existe da outra:



$m_r \neq m_s \Rightarrow r$ concorre com s



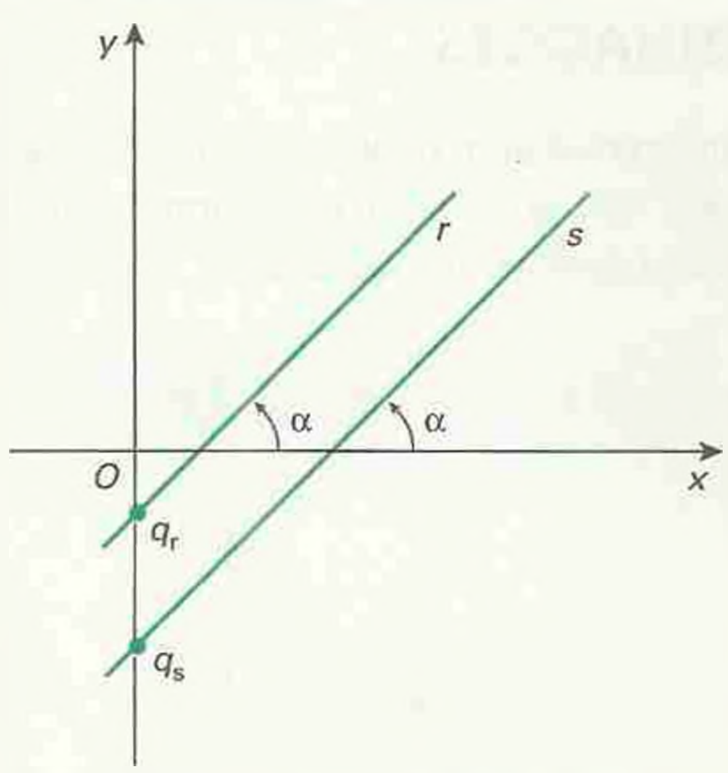
$\exists m_r$ e $\nexists m_s \Rightarrow r$ concorre com s

Após essas análises, podemos enunciar:

Duas retas não-verticais r e s de equações reduzidas $y = m_r x + q_r$ e $y = m_s y + q_s$, respectivamente, são:

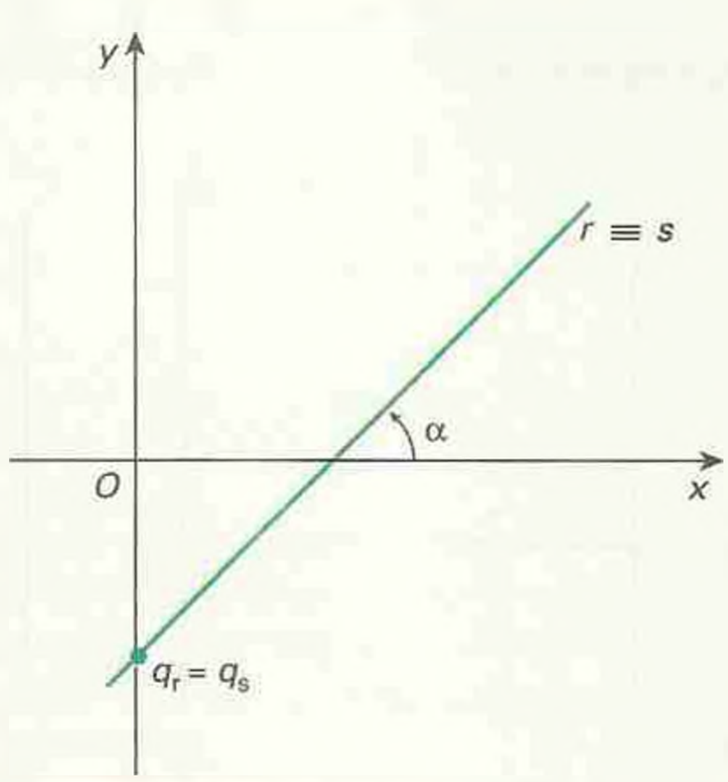
- paralelas distintas se, e somente se:

$$m_r = m_s \text{ e } q_r \neq q_s$$



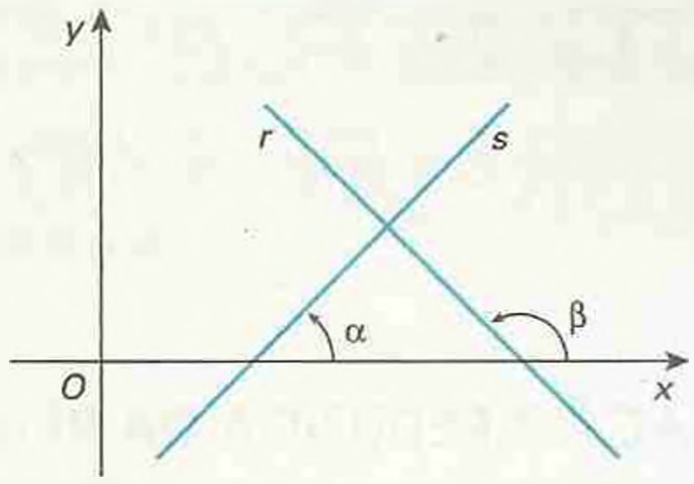
- paralelas coincidentes se, e somente se:

$$m_r = m_s \text{ e } q_r = q_s$$



- concorrentes se, e somente se:

$$m_r \neq m_s$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 São dadas as seguintes retas:

$r: y = 3x + 5$

$s: y = 3x - 2$

$t: 6x - 2y + 10 = 0$

$u: y = 5x$

Descrever a posição relativa entre:

a) r e s b) r e t c) s e u

Resolução

Temos que:

- $m_r = 3$ e $q_r = 5$
- $m_s = 3$ e $q_s = -2$
- a forma reduzida da equação da reta t é $y = 3x + 5$; logo, $m_t = 3$ e $q_t = 5$
- $m_u = 5$ e $q_u = 0$

Assim, temos:

a) $m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s \Rightarrow r$ e s são paralelas distintas;

b) $m_r = m_t$ e $q_r = q_t \Rightarrow r$ e t são paralelas coincidentes;

c) $m_s \neq m_u \Rightarrow s$ e u são concorrentes.

R.2 Para que valor de a as retas r: $3x + 2y - 1 = 0$ e s: $ax + 5y + 3 = 0$ são paralelas?

Resolução

Escrevendo as equações sob a forma reduzida, temos:

$$r: y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow m_r = -\frac{3}{2} \text{ e } q_r = \frac{1}{2}$$

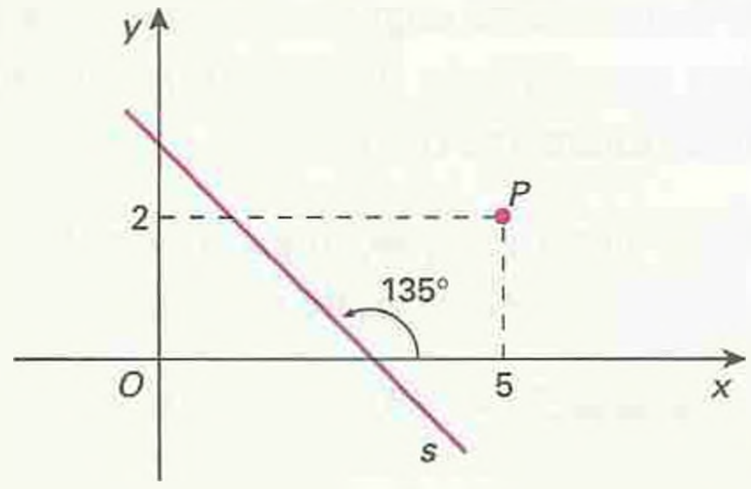
$$s: y = -\frac{ax}{5} - \frac{3}{5} \Rightarrow m_s = -\frac{a}{5} \text{ e } q_s = -\frac{3}{5}$$

Para que r e s sejam paralelas, devemos ter:

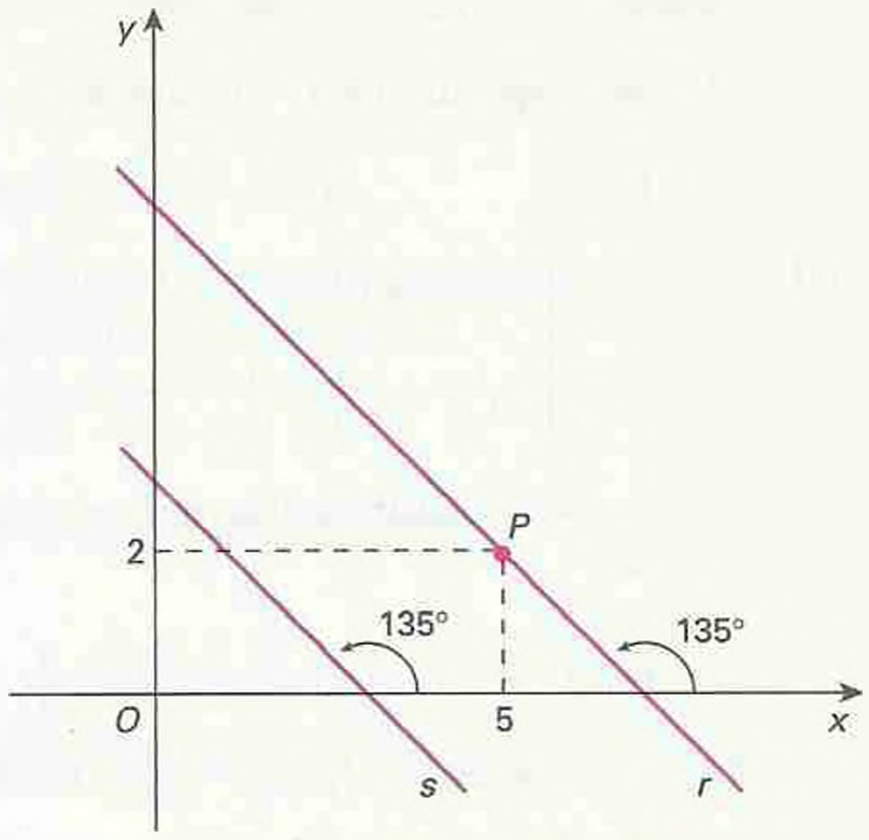
$$m_r = m_s \Rightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{a}{5} \therefore a = \frac{15}{2}$$

Note que para esse valor de a as retas serão paralelas distintas, pois $q_r \neq q_s \left(\frac{1}{2} \neq -\frac{3}{5}\right)$.

R.3 Obter uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(5, 2)$ e é paralela à reta s do gráfico.



Resolução



Para que r e s sejam paralelas, elas devem ter o mesmo coeficiente angular. Assim, temos:

$$r\begin{cases} P(5,\ 2) \\ m_r = m_s = \text{tg } 135° = -1 \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos $y - 2 = -1(x - 5) \Rightarrow y - 2 = -x + 5$.
Portanto uma equação da reta r é $y = -x + 7$.

R.4 Determinar uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-1, 6)$ e é paralela à reta s: $4x + 2y - 1 = 0$.

Resolução

Escrevendo a equação da reta s sob a forma reduzida, temos $y = -2x + \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = -2$.

Para que r e s sejam paralelas, devem ter o mesmo coeficiente angular. Assim:

$$r\begin{cases} P(-1,\ 6) \\ m_r = m_s = -2 \end{cases}$$

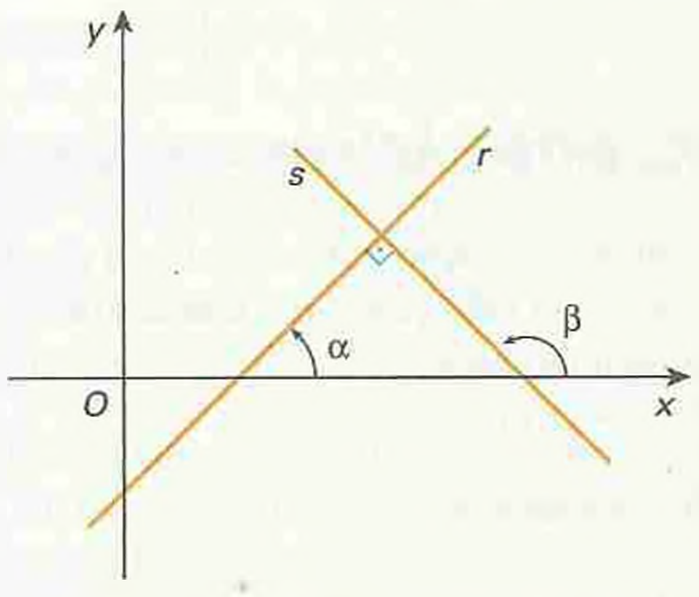
Pela equação fundamental da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 6 = -2(x - (-1)) \Rightarrow y - 6 = -2(x + 1)$$
$$\therefore\ y - 6 = -2x - 2$$

Portanto uma equação da reta r é $2x + y - 4 = 0$.

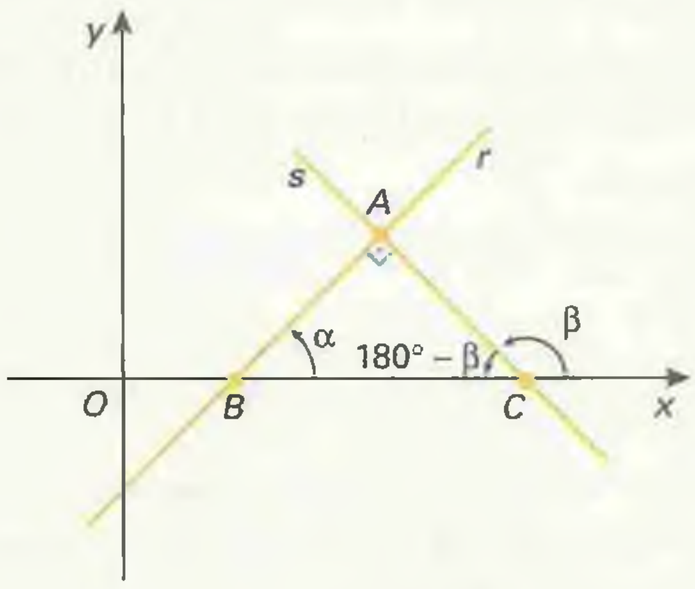
3. RETAS PERPENDICULARES

Consideremos as retas perpendiculares r e s do seguinte gráfico:



em que $m_r = \text{tg } \alpha$ é o coeficiente angular de r e $m_s = \text{tg } \beta$ é o coeficiente angular de s.

No triângulo retângulo ABC, limitado por r, s e o eixo Ox, temos:



$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{AC}{AB} \\ \text{e} \\ \text{tg}(180° - \beta) = \dfrac{AB}{AC} \end{cases}$$

Da trigonometria, temos que $\text{tg } (180° - \beta) = -\text{tg } \beta$. Assim:

$$\begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{AC}{AB} \\ \text{e} \\ -\text{tg } \beta = \dfrac{AB}{AC} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg } \alpha = \dfrac{AC}{AB} \quad \text{(I)} \\ \text{tg } \beta = -\dfrac{AB}{AC} = -\dfrac{1}{\frac{AC}{AB}} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

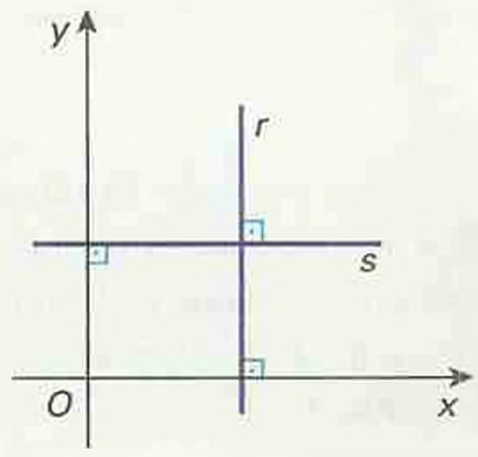
Substituindo (I) em (II), temos $\text{tg } \beta = -\dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, ou seja:

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

Desse modo, podemos enunciar:

> Duas retas r e s, não-verticais, são perpendiculares, se e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

Note que, sendo r uma reta vertical, uma reta s é perpendicular a r se, e somente se, s é horizontal.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Obter uma equação geral da reta s que passa pelo ponto $P(2, -3)$ e é perpendicular à reta $r: x + 2y + 5 = 0$.

Resolução

Escrevendo sob a forma reduzida a equação da reta r, obtemos:

$$2y = -x - 5 \Rightarrow y = -\frac{x}{2} - \frac{5}{2} \therefore m_r = -\frac{1}{2}$$

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, o coeficiente angular de s deve ser o oposto do inverso do coeficiente angular de r. Assim, temos:

$$s\begin{cases} P(2, -3) \\ m_s = -\dfrac{1}{m_r} = -\dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = 2 \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos $y - (-3) = 2(x - 2) \Rightarrow y + 3 = 2x - 4$.

Logo, uma equação geral da reta s é $2x - y - 7 = 0$.

R.6 Qual é a equação reduzida da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, dados $A(3, 9)$ e $B(1, 5)$?

Resolução

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

O ponto médio de $\overline{AB}$ é $M\left(\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{9+5}{2}\right)$, ou seja, $M(2, 7)$.

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $m_{AB} = \dfrac{9-5}{3-1} = 2$.

A mediatriz r de $\overline{AB}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e, portanto, $m_r = -\dfrac{1}{m_{AB}}$. Assim, temos:

$$r\begin{cases} M(2, 7) \\ m_r = -\dfrac{1}{m_{AB}} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y - 7 = -\frac{x}{2} + 1$$

Logo, a equação reduzida da mediatriz r é $y = -\dfrac{x}{2} + 8$.

R.7 Determinar o simétrico do ponto $P(5, -2)$ em relação à reta $r: 2x + y + 2 = 0$.

Resolução

Dois pontos P e P', $P \neq P'$, são simétricos em relação à reta r se, e somente se, P e P' equidistam de r e pertencem a uma mesma perpendicular a r.

Assim, para obter o ponto P', vamos seguir os seguintes passos:

1º) obtemos uma equação da reta s que passa por $P(5, -2)$ e é perpendicular a r;
2º) determinamos o ponto Q de intersecção de r e s;
3º) obtemos o ponto P' de modo que o ponto Q seja ponto médio de $\overline{PP'}$.

1º) Escrevendo sob a forma reduzida a equação de r, temos $y = -2x - 2 \therefore m_r = -2$.

A reta s perpendicular à r é tal que $m_s = -\dfrac{1}{m_r}$. Então, temos:

$$s\begin{cases} P(5, -2) \\ m_s = -\dfrac{1}{m_r} = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pela equação fundamental da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow y + 2 = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$$

$$\therefore 2y + 4 = x - 5 \therefore s: x - 2y - 9 = 0$$

2º) A intersecção de r e s é dada por:

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4 = 0 \\ x - 2y - 9 = 0 \end{cases} +$$

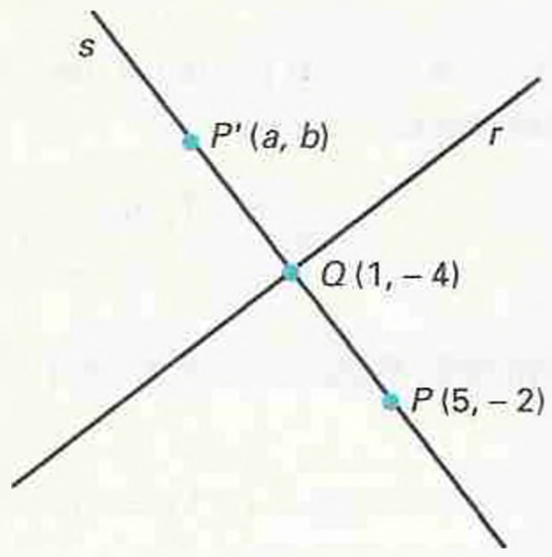
$$5x + 0y - 5 = 0 \therefore x = 1$$

Substituindo $x = 1$ em $x - 2y - 9 = 0$, obtemos:

$$1 - 2y - 9 = 0 \Rightarrow y = -4$$

Logo, $r \cap s = \{Q(1, -4)\}$.

3º) Seja $P'(a, b)$ tal que o ponto $Q(1, -4)$ é ponto médio de $\overline{PP'}$.



Logo, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{5+a}{2} = 1 \Rightarrow a = -3 \\ \dfrac{-2+b}{2} = -4 \Rightarrow b = -6 \end{cases}$$

Assim, o ponto simétrico é $P'(-3, -6)$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine a equação reduzida e uma equação geral da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular m nos seguintes casos:

a) $P(5, -4)$ e $m = -8$

b) $P(0, 3)$ e $m = \dfrac{3}{2}$

c) $P\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$ e $m = -4$

d) $P(0, 0)$ e $m = 1$

B.2 Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear de cada uma das seguintes retas:

a) $r: y = 3x - \frac{5}{2}$ c) $t: y = -4x$

b) $s: 3x + 2y - 1 = 0$

B.3 Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta $\overleftrightarrow{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(4, 6)$ e $B(-1, -9)$ c) $A(3, 2)$ e $B(3, 5)$

b) $A(5, -1)$ e $B(2, 1)$

B.4 São dadas as seguintes retas

$$r: 3x - 6y - 2 = 0;\ s: y = \frac{x}{2} - 5$$

$$t: y = \frac{x}{2} - \frac{1}{3};\ u: 4x + y - 1 = 0$$

Descreva a posição relativa entre:

a) r e s c) r e u e) s e u

b) r e t d) s e t

B.5 Para que valor de a as retas $r: (a - 2)x - 3y - 1 = 0$ e $s: ax + y - 2 = 0$ são paralelas?

B.6 Obtenha a de modo que as retas $r: (2a - 1)x - 2y + 1 = 0$ e $s: ax + 3y = 0$ sejam concorrentes.

B.7 Sabe-se que as retas $r: (a - 1)x - 2y + a = 0$ e $s: (3a - 2)x - 4y + a - 3 = 0$ são paralelas.

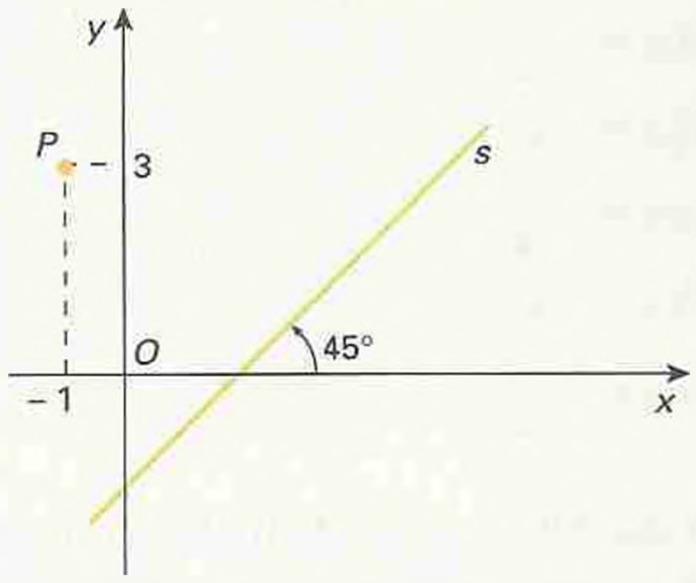
a) Obtenha a.

b) Para o valor de a encontrado, as retas paralelas são distintas ou coincidentes?

B.8 Para que valor de a as retas $r: ax - y + 5 = 0$ e $s: (4a - 2)x - 3y + 7a + 1 = 0$ são paralelas distintas?

B.9 Para que valores de a as retas $r: 2ax + y - 1 = 0$ e $s: (3a - 1)x + 3y - a = 0$ têm um único ponto em comum?

B.10 Encontre uma equação da reta r que passa pelo ponto $P(-1, 3)$ e é paralela à reta s do gráfico a seguir.



B.11 Determine uma equação geral da reta r que passa pelo ponto P e é paralela à reta s nos seguintes casos:

a) $P(-2, 6)$ e $s: y = -3x + 8$

b) $P(0, 3)$ e $s: 4x + 2y - 1 = 0$

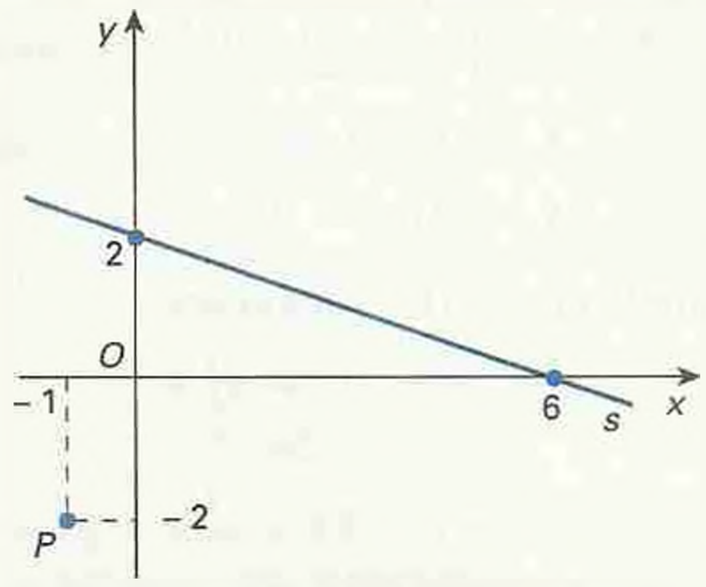
c) $P(1, 4)$ e $s: y = x$

B.12 (UEMA) Dado o triângulo, determinado pelos pontos $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$ e $C(3, -2)$, a equação da reta que passa pelo ponto $P(-1, -8)$ e é paralela à mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ é:

a) $y = 4x - 4$ c) $y = 2x - 2$

b) $y = 3x + 3$ d) $y = -4x + 1$

B.13 Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P(-1, -2)$ e é perpendicular à reta s do gráfico.



B.14 Obtenha uma equação geral da reta r que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta s nos seguintes casos:

a) $P(-1, 4)$ e $s: 2x - y - 1 = 0$

b) $P(9, -1)$ e $s: y = \frac{x}{5} + 2$

c) $P(3, 0)$ e $s: 4x - 3y + 1 = 0$

B.15 Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(-1, 6)$ e $B(3, -2)$ c) $A(-4, -1)$ e $B(-2, -7)$

b) $A(0, 6)$ e $B(6, 0)$

B.16 (U. Taubaté-SP) A reta r é perpendicular à bissetriz dos quadrantes pares e intercepta um eixo coordenado no ponto $A(0, -1)$. Escreva a equação geral da reta r.

B.17 (PUC-SP) Os pontos $A = (-1, 1)$ e $C = (0, -4)$ são vértices opostos de um quadrado $ABCD$. A equação da reta suporte da diagonal $\overline{BD}$, desse quadrado, é:

a) $x + 5y + 3 = 0$ d) $x + 2y - 3 = 0$

b) $x - 2y - 4 = 0$ e) $x - 3y - 5 = 0$

c) $x - 5y - 7 = 0$

B.18 Determine o simétrico do ponto P em relação à reta r nos seguintes casos:

a) $P(4, 2)$ e $r: x - 2y + 15 = 0$

b) $P(1, 6)$ e $r: y - 9 = 0$

Exercícios complementares de C.1 a C.8

4. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Um físico, estudando o movimento de um projétil, conclui que sua trajetória é plana e que seus deslocamentos na horizontal e na vertical são descritos, respectivamente, pelas equações $\begin{cases} x = t + 5 \\ y = 3t + 6 \end{cases}$, em que t representa o tempo.

Se esse cientista quiser descrever a trajetória do projétil através de uma equação que relacione apenas os deslocamentos x e y, basta que isole a variável t em uma das equações e substitua o valor obtido na outra:

$$\begin{cases} x = t + 5 \Rightarrow t = x - 5 \text{ (I)} \\ y = 3t + 6 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtém-se:

$$y = 3(x - 5) + 6$$
$$\therefore\ y = 3x - 9$$

As equações $x = t + 5$ e $y = 3t + 6$ são chamadas de **equações paramétricas** da trajetória de equação $y = 3x - 9$. A variável t é chamada de **parâmetro** das equações paramétricas.

De modo geral, podemos apresentar as coordenadas de cada ponto (x, y) de uma reta r em função de um parâmetro t:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Essas são as equações **paramétricas** da reta r.

Se a partir das equações paramétricas de uma reta desejarmos obter uma equação geral ou reduzida, basta que eliminemos o parâmetro.

Nota

Quando as equações paramétricas são usadas em situações práticas como em física, química, economia etc., o parâmetro t pode representar qualquer grandeza, como: tempo, temperatura, pressão, preço etc.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.8 As equações paramétricas de uma reta r são:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 4t + 1 \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Obter uma equação geral dessa reta.

Resolução

Devemos eliminar o parâmetro t. Para isso, isolamos t numa das equações e o substituímos na outra.

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \Rightarrow t = \dfrac{x + 3}{2} \text{ (I)} \\ y = 4t + 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$y = 4 \cdot \frac{x + 3}{2} + 1$$
$$\therefore\ y = 2(x + 3) + 1$$
$$\therefore\ y = 2x + 7$$

Assim, uma equação geral da reta r é $2x - y + 7 = 0$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.19 Dê uma equação geral da reta cujas equações paramétricas são:

a) $\begin{cases} x = t - 4 \\ y = 3t + 5 \end{cases} t \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 6t - 4 \end{cases} t \in \mathbb{R}$

B.20 (UFRS) Um ponto $P(x, y)$ descreve uma trajetória no plano cartesiano, tendo sua posição a cada instante $t (t \geqslant 0)$ dada pelas equações:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$$

A distância percorrida pelo ponto $P(x, y)$ para $0 \leqslant t \leqslant 3$ é:

a) 2

b) 3

c) $\sqrt{13}$

d) $3\sqrt{13}$

e) $\sqrt{61}$

Exercícios complementares de C.9 a C.11

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Em um paralelogramo $ABCD$, tem-se que $A(1, 4)$, $B(2, 6)$ e $C(3, 2)$. Determine a equação reduzida da reta suporte do lado $\overline{CD}$.

C.2 Em um triângulo ABC, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são, respectivamente, $M(2, 5)$ e $N(4, -3)$. Sendo $B(5, 10)$, determine a equação reduzida da reta $\overleftrightarrow{BC}$.

C.3 (ITA-SP) Dadas as retas (r_1): $x + 2y - 5 = 0$, (r_2): $x - y - 2 = 0$ e (r_3): $x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:

a) são duas a duas paralelas.

b) (r_1) e (r_3) são paralelas.

c) (r_1) é perpendicular a (r_3).

d) (r_2) é perpendicular a (r_3).

e) as três retas são concorrentes num mesmo ponto.

C.4 (FEI-SP) No triângulo ABC, cujos vértices são $A = (0, 0)$, $B = (-3, 1)$ e $C = (1, 5)$, a equação da reta que contém a altura relativa a $\overline{BC}$ é:

a) $y = -\dfrac{1}{2}\ x$

b) $y = -2x$

c) $y = -\dfrac{3}{4}\ x$

d) $y = -x$

e) $y = -\dfrac{2}{3}\ x$

C.5 (Fatec-SP) Se $A = (-1, 3)$ e $B = (1, 1)$, então a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ encontra a bissetriz dos quadrantes pares no ponto:

a) $(-1, 1)$

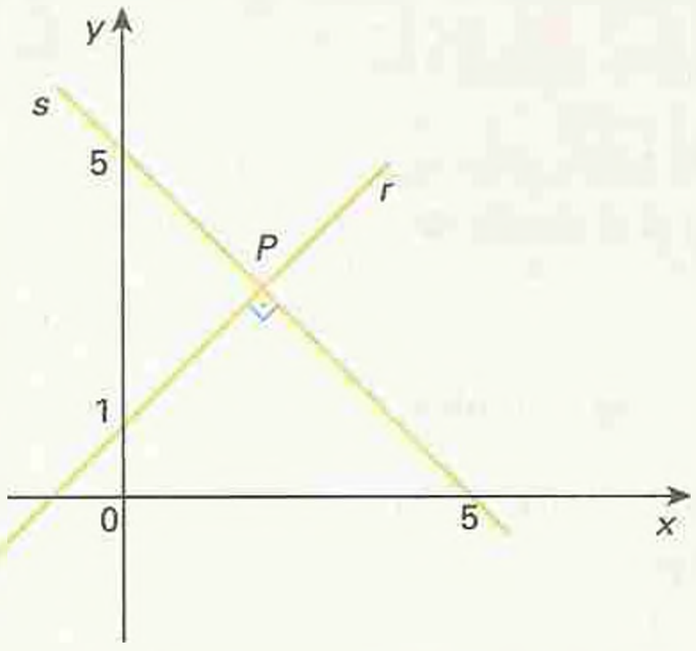
b) $\left(-\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{4}\right)$

c) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

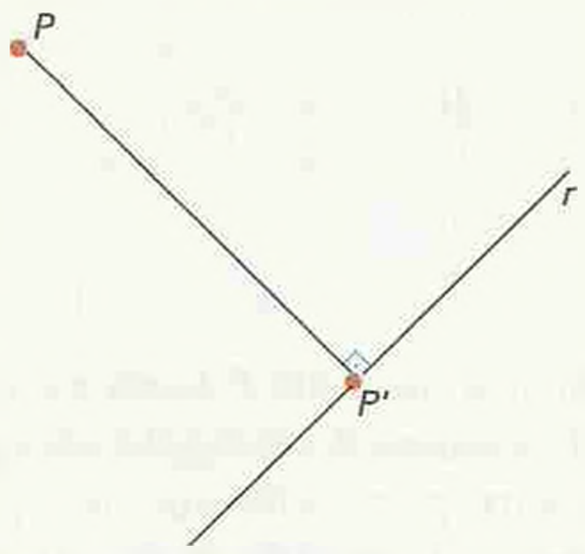
d) $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

e) $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$

C.6 (UEPA) Com base no gráfico abaixo, determine:
a) uma equação geral da reta r;
b) a equação reduzida da reta s;
c) as coordenadas do ponto P.



C.7 (UNIR) A projeção ortogonal de um ponto P sobre uma reta r é o ponto P' de r tal que $\overline{PP'} \perp r$.



A projeção ortogonal do ponto $P(3, 5)$ sobre a reta (r) $x + 2y + 2 = 0$ é o ponto:
a) $P'(0, -1)$ c) $P'(-2, 0)$ e) $P'(8, -5)$
b) $P'(-6, 2)$ d) $P'(-4, 1)$

C.8 No exercício anteror, determine o simétrico de P em relação a r.

C.9 (Unifor-CE) As coordenadas de um ponto genérico de uma reta r são dadas por $x = \frac{2t - 1}{3}$ e $y = t + 2$, onde t é um parâmetro real. A equação geral de r é:
a) $2x + 3y - 5 = 0$
b) $2x + 3y + 5 = 0$
c) $3x + 2y - 5 = 0$
d) $3x - 2y - 5 = 0$
e) $3x - 2y + 5 = 0$

C.10 As equações paramétricas de uma reta r são:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = at - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Determine a constante real a, sabendo que o coeficiente angular da reta r é igual a 3.

C.11 Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que:

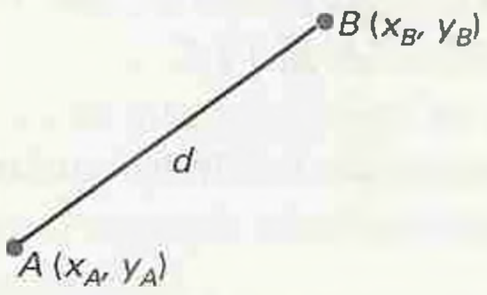
$$\begin{cases} x = \cos^2 \theta \\ y = \operatorname{sen}^2 \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Capítulo 56
DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA — ÁREA DE UM TRIÂNGULO

1. CÁLCULO DA DISTÂNCIA DE UM PONTO A UMA RETA

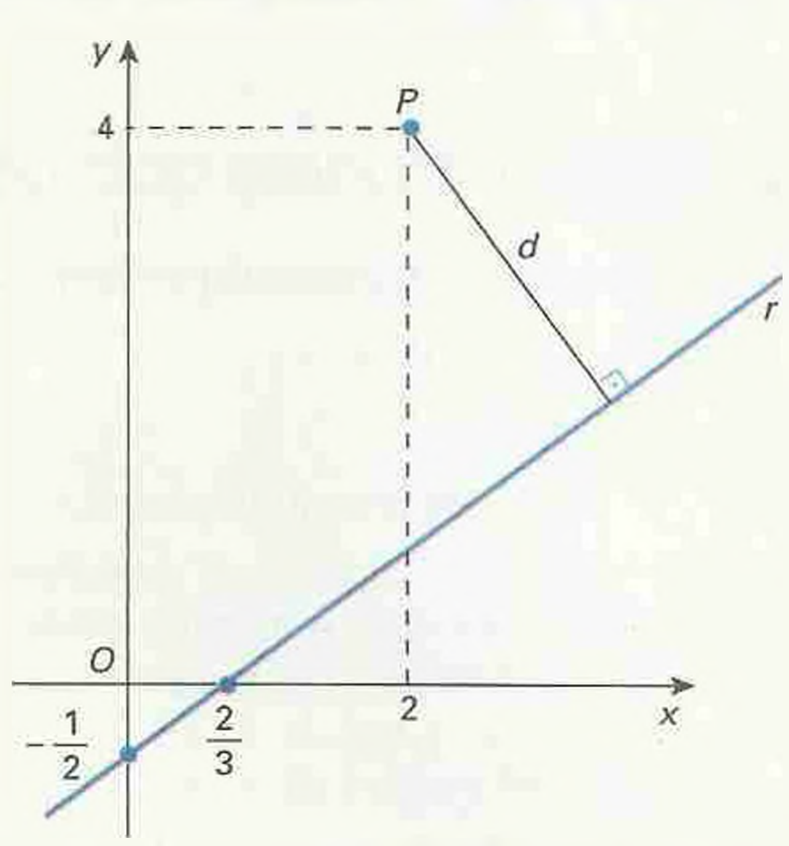
Estudamos no capítulo 53 a distância entre dois pontos:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

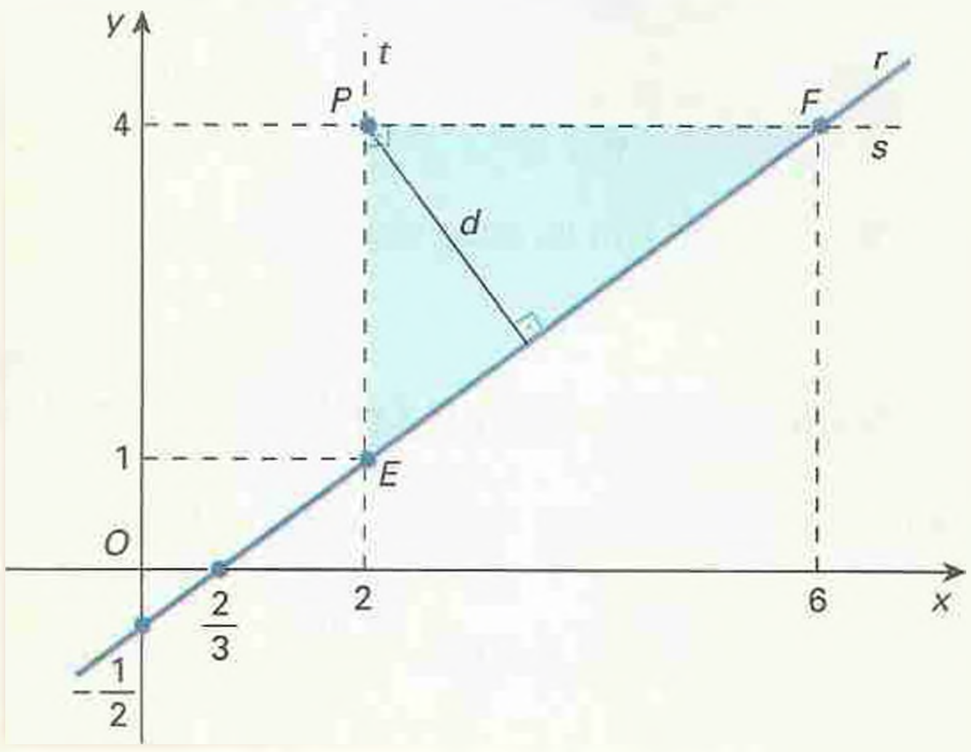


Vamos ver agora o cálculo da distância entre um ponto P e uma reta r.

Para o entendimento do próximo teorema, convém resolvermos antes o seguinte problema: Qual é a distância d do ponto $P(2, 4)$ à reta r: $3x - 4y - 2 = 0$?

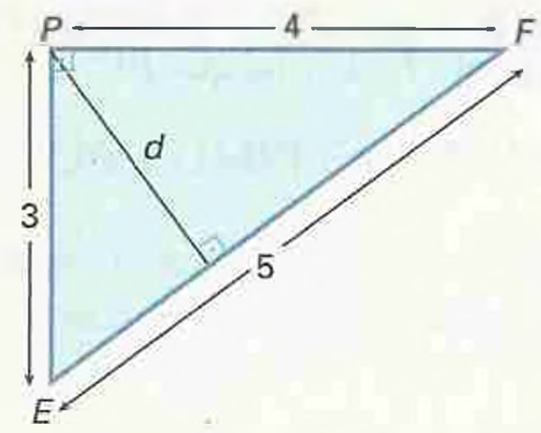


Consideremos as retas s e t que passam por P e são, respectivamente, paralelas aos eixos Ox e Oy. As retas r, s e t determinam o triângulo PFE retângulo em P:



Observe as medidas:

$$EF = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$EP = 3$$
$$PF = 4$$



A distância d do ponto P à reta r é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo PFE.

Da geometria plana, sabemos que o produto da medida da hipotenusa pela medida de sua altura relativa é igual ao produto das medidas dos catetos; assim, temos:

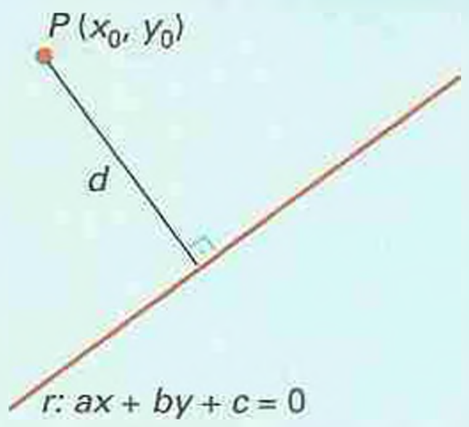
$$5 \cdot d = 3 \cdot 4 \quad \therefore \quad d = \frac{12}{5}$$

Generalizando esse raciocínio, obtém-se o resultado descrito pelo teorema a seguir.

Teorema

A distância d entre um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r: $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular a distância do ponto $P(2, 1)$ à reta r:

$$3x - 4y + 8 = 0$$

Resolução

A distância d de P à reta r é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

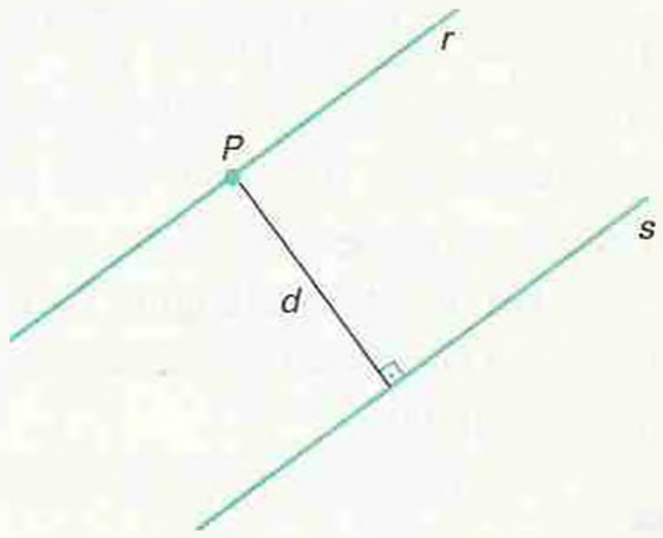
em que $a = 3$; $b = -4$; $c = 8$; $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$.

Logo, $d = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{10}{5} = 2$.

R.2 Calcular a distância entre as retas r: $12x + 5y + 38 = 0$ e s: $12x + 5y + 25 = 0$.

Resolução

As retas r e s são paralelas, pois têm o mesmo coeficiente angular $-\frac{12}{5}$. Para calcular a distância entre elas, basta tomarmos um ponto P qualquer de uma delas e calcularmos a distância de P à outra reta.



Para obter um ponto P em r, basta atribuir um valor qualquer a x e encontrar o correspondente valor de y. Por exemplo, atribuindo o valor 1 a x, temos:

$$12 \cdot 1 + 5y + 38 = 0 \Rightarrow y = -10$$

Assim, um ponto de r é $P(1, -10)$.
Calculando a distância de P a s, temos:

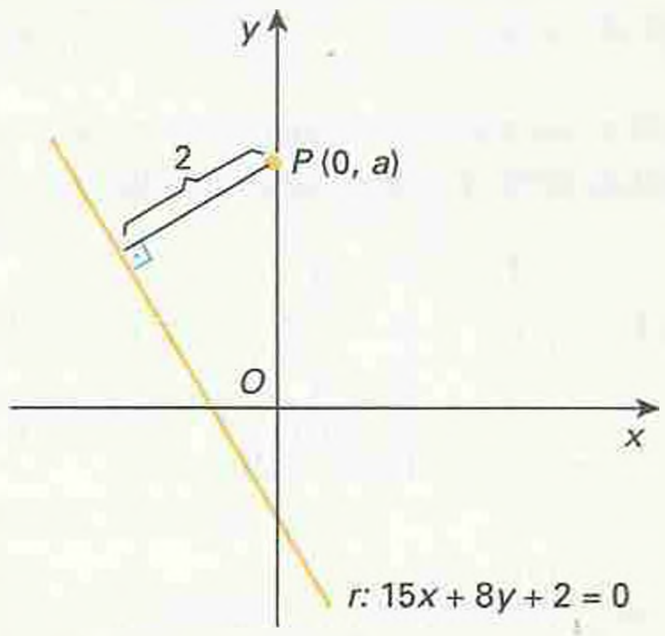
$$d = \frac{|12 \cdot 1 + 5(-10) + 25|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{|-13|}{13} = 1$$

Portanto a distância d entre r e s é $d = 1$.

R.3 Determinar o(s) ponto(s) do eixo Oy que dista(m) 2 unidades da reta r: $15x + 8y + 2 = 0$.

Resolução

O ponto P procurado pertence ao eixo Oy; logo, sua abscissa é igual a zero, ou seja, o ponto é da forma $P(0, a)$.



Devemos ter $d_{Pr} = 2 \Rightarrow \frac{|15 \cdot 0 + 8a + 2|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = 2$

$\therefore \frac{|8a + 2|}{17} = 2 \quad \therefore |8a + 2| = 34.$

Logo, obtemos: $8a + 2 = 34 \Rightarrow a = 4$ ou

$8a + 2 = -34 \Rightarrow a = -\frac{9}{2}$.

Assim, temos dois pontos que satisfazem a condição do problema $P(0, 4)$ e $P'\left(0, -\frac{9}{2}\right)$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos:
a) $P(3, 1)$ e r: $3x + 4y + 2 = 0$
b) $P(1, -2)$ e r: $5x - 12y - 3 = 0$
c) $P(-5, 2)$ e r: $y = -2x + 5$
d) $P(-4, 6)$ e r: $y = 3$
e) $P(8, -4)$ e r: $x = 5$
Sugestão. Para a aplicação da fórmula, a equação da reta deve estar na forma geral.

B.2 Determine a distância entre as retas paralelas r e s, nos seguintes casos:
a) r: $12x - 5y + 10 = 0$ e s: $12x - 5y - 3 = 0$
b) r: $y = 2x - 2$ e s: $y = 2x - 1$

B.3 (U. E. Londrina-PR) Considere os pontos $A(0, 0)$, $B(2, 3)$ e $C(4, 1)$. O comprimento da altura do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$, é:

a) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{2}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Sugestão. O comprimento dessa altura é a distância do ponto A à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

B.4 (U. F. Ouro Preto-MG) Calcule a medida do lado do quadrado $ABCD$, sabendo-se que $A = (2, 0)$ e o lado $\overline{BC}$ está contido na reta $y = x$.

B.5 Obtenha o(s) ponto(s) do eixo das abscissas que dista(m) 2 unidades da reta r: $3x + 4y + 5 = 0$.

B.6 Encontre o(s) ponto(s) do eixo das ordenadas cuja distância à reta r: $y = 2x - 7$ é igual a $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

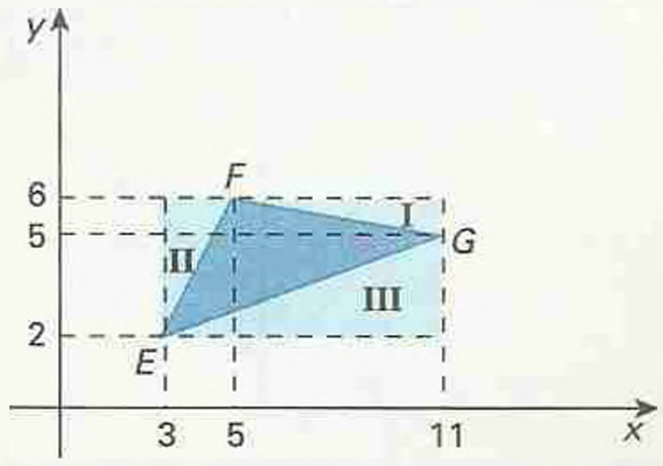
Exercícios complementares de C.1 a C.5

2. APLICAÇÃO DE DETERMINANTES NO CÁLCULO DE ÁREAS E NA CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Área de um triângulo

Observe que o retângulo em destaque é formado pelos triângulos EFG, I, II e III. Logo a área A do triângulo EFG é igual à diferença entre a área desse retângulo e a soma das áreas I, II e III, isto é:

$$A = 8 \cdot 4 - \frac{6 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 4}{2} - \frac{8 \cdot 3}{2} = 13$$



Generalizando esse raciocínio, obtém-se o resultado descrito a seguir.

Teorema

A área A de um triângulo cujos vértices são os pontos $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$ é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Determinar a área do triângulo cujos vértices são $E(2, 5)$, $F(0, 1)$ e $G(3, 6)$.

Resolução

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 15 - 3 - 12 = 2$$

A área A do triângulo EFG é:

$$A = \frac{|D|}{2} \Rightarrow A = \frac{|2|}{2} = 1$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 (Cesgranrio) A área do triângulo cujos vértices são $(1, 2)$, $(3, 4)$ e $(4, -1)$ é igual a:

a) 6 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

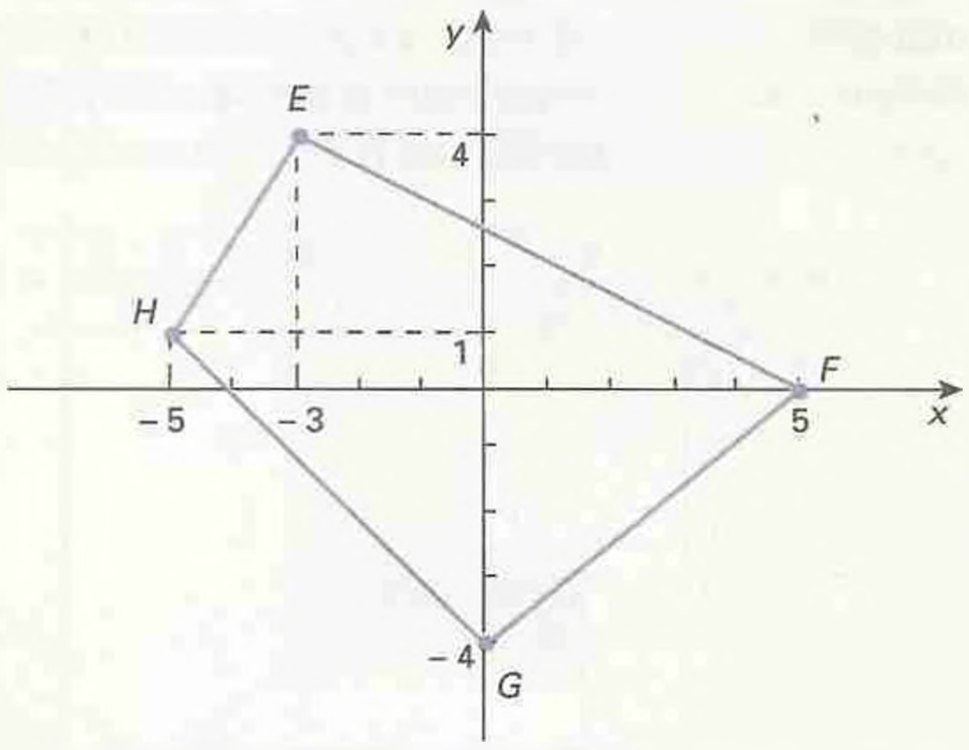
B.8 (UEMA) Um valor de k, de modo que a área do triângulo determinado pelos pontos $A(0, 1)$, $B(-2, 4)$ e $C(k, k-1)$ seja 10 unidades, é:

a) $k = 3$ c) $k = -\frac{16}{5}$ e) $k = \frac{3}{4}$

b) $k = 4$ d) $k = -3$

B.9 Determine a área da região do plano limitada pelas retas $y = 3x$, $x + y = 4$ e $y = 0$.

B.10 Calcule a área do quadrilátero $EFGH$ do gráfico a seguir:



Sugestão. Adicione as áreas dos triângulos HEF e FGH.

Exercícios complementares de C.6 a C.8

Condição de alinhamento de três pontos

No capítulo 54 estudamos a condição de alinhamento de três pontos por coeficiente angular. Agora, vamos estudar uma maneira de verificar se três pontos estão alinhados, usando determinante. Sabemos que a área A de um triângulo cujos vértices são os pontos $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$ é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix}$$

Como interpretar esse teorema no caso em que $D = 0$?

Se $D = 0$, não existe o triângulo EFG e, portanto, os três pontos E, F e G estão em uma mesma reta. Desse modo, podemos enunciar:

Teorema

Três pontos $E(x_E, y_E)$, $F(x_F, y_F)$ e $G(x_G, y_G)$ são colineares se, e somente se, $\begin{vmatrix} x_E & y_E & 1 \\ x_F & y_F & 1 \\ x_G & y_G & 1 \end{vmatrix} = 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Verificar se os pontos A, B e C são ou não colineares nos seguintes casos:

a) $A(1, 2)$, $B(0, -1)$ e $C(2, 5)$

b) $A(1, 4)$, $B(2, 5)$ e $C(1, 3)$

Resolução

Basta calcular o determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$

- $D = 0 \Rightarrow A$, B e C são colineares;
- $D \neq 0 \Rightarrow A$, B e C não são colineares.

a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 4 + 2 - 5 = 0$

Logo, A, B e C são colineares.

b) $D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 + 4 - 5 - 3 - 8 = -1$

Como $D \neq 0$, temos que A, B e C **não** são colineares.

R.6 Determinar os valores de a de modo que os pontos $A(5a - 6, 2)$, $B(a^2, 8)$ e $C(4, 12)$ sejam colineares.

Resolução

Os pontos A, B e C são colineares se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} 5a - 6 & 2 & 1 \\ a^2 & 8 & 1 \\ 4 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo esse determinante, temos:

$8(5a - 6) + 12a^2 + 8 - 32 - 12(5a - 6) - 2a^2 = 0$

$\therefore 40a - 48 + 12a^2 + 8 - 32 - 60a + 72 - 2a^2 = 0$

$\therefore 10a^2 - 20a = 0$

$\therefore a(10a - 20) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 2$

Logo, A, B e C são colineares se, e somente se, $a = 0$ ou $a = 2$.

Obtenção da equação de uma reta através de determinante

Consideremos os pontos $A(2, 1)$, $B(1, -1)$ e um ponto genérico $G(x, y)$. Para que A, B e G sejam colineares, devemos ter $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Desenvolvendo esse determinante, temos:

$$x - 2 + y - 1 + x - 2y = 0$$

$$\therefore \quad 2x - y - 3 = 0$$

Essa equação representa todos os pontos $G(x, y)$ que estão alinhados com $A(2, 1)$ e $B(1, -1)$ e, por isso, é uma **equação da reta** $\overleftrightarrow{AB}$.

Generalizando, temos:

Dados dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, uma equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.11 Usando a condição de alinhamento por determinante, verifique se os pontos A, B e C são ou não colineares nos seguintes casos:

a) $A(0, -1)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 1)$

b) $A(4, 5)$, $B(1, 0)$ e $C(2, 3)$

c) $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ e $C(1, 3)$

d) $A(1, 3)$, $B(3, 4)$ e $C(0, -2)$

B.12 O ponto $P(1, -2)$ pertence à reta que passa pelos pontos $A(2, 1)$ e $B(-1, -8)$? Por quê?

B.13 Para que valor de p os pontos $A(1, p)$, $B(2, 7)$ e $C(p - 1, -5)$ são colineares?

B.14 (UFPI) Para que valores reais de y os pontos $A(1, 4)$, $B(3, y)$ e $C(-1, 0)$ são vértices de um triângulo?

B.15 Usando o conceito de determinante, obtenha uma equação da reta que passa pelos pontos A e B, nos seguintes casos:

a) $A(3, 2)$ e $B(1, -1)$

b) $A(2, 5)$ e $B(2, 6)$

c) $A(-2, 5)$ e $B(-2, 3)$

Exercício complementar C.9

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (U. F. Santa Maria-RS) Dados os pontos $A(0, 0)$ e $B(1, 2)$, considere o ponto C determinado pela intersecção das retas r: $y = x$ e s: $y = -3x + 5$. A altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AB}$ vale, em cm:

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ c) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ d) $\frac{4\sqrt{5}}{25}$

C.2 (U. F. Santa Maria-RS) A soma dos possíveis valores de k, para que a distância do ponto $P = (3, 4)$ à reta r: $4x - 3y + k = 0$ seja igual a 1, é:

a) -5 c) 2 e) 5

b) -1 d) 0

C.3 (UNEB) No plano cartesiano, existem dois pontos de abscissas iguais a 1 que distam 3 unidades da reta r: $5x + 12y + 10 = 0$. A distância entre esses dois pontos é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{13}{2}$

b) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{1}{4}$

C.4 Determine o(s) ponto(s) pertecente(s) à reta s: $y = x + 3$ e que dista(m) 3 unidades da reta r: $5x - 12y + 4 = 0$.
Sugestão. Tome um ponto genérico da reta s; para isso, faça $x = a$ e obtenha o valor de y em função de a.

C.5 Dois lados de um quadrado estão contidos nas retas r: $3x + y - 1 = 0$ e s: $3x + y - 2 = 0$. Calcule a área desse quadrado.

C.6 Obtenha o valor de a, sabendo que a reta r: $ax + y - 6 = 0$ determina com os eixos coordenados um triângulo de área 9 unidades.

C.7 (U. F. Viçosa-MG) As retas r e s do gráfico abaixo têm equações $y = -x + 5$ e $y = x - 3$, respectivamente. Pode-se afirmar que a área do triângulo ABC é:

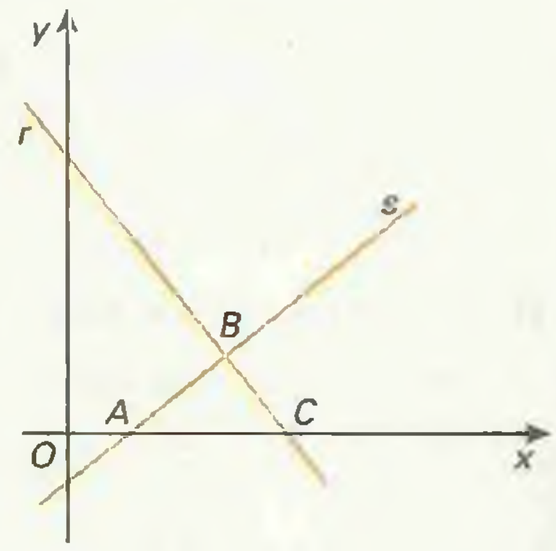
a) 2

b) $\frac{1}{2}$.

c) 1

d) $2\sqrt{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



C.8 (FGV-SP) A área da figura colorida no diagrama vale:

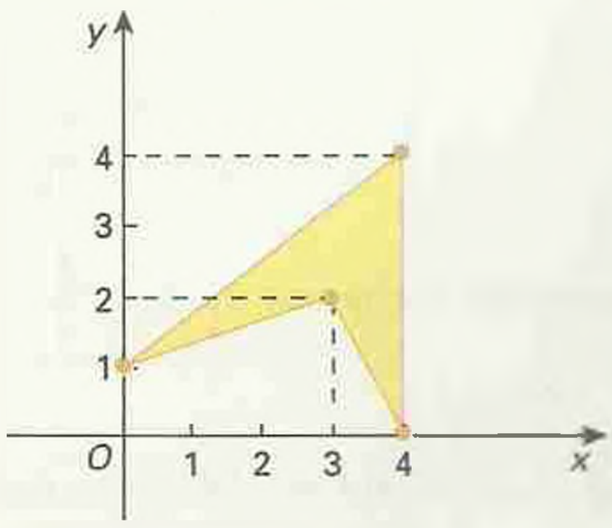
a) 4,0

b) 3,5

c) 3,0

d) 5,0

e) 4,5

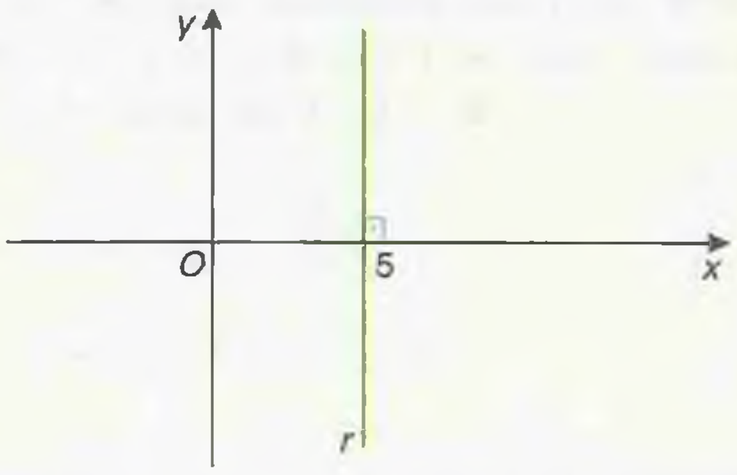


C.9 Prove que os pontos $A(1, 4)$, $B(a - 1, 3a - 2)$ e $C(0, 1)$ são colineares para qualquer valor real de a.

Capítulo 57
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UMA INEQUAÇÃO DO 1º GRAU

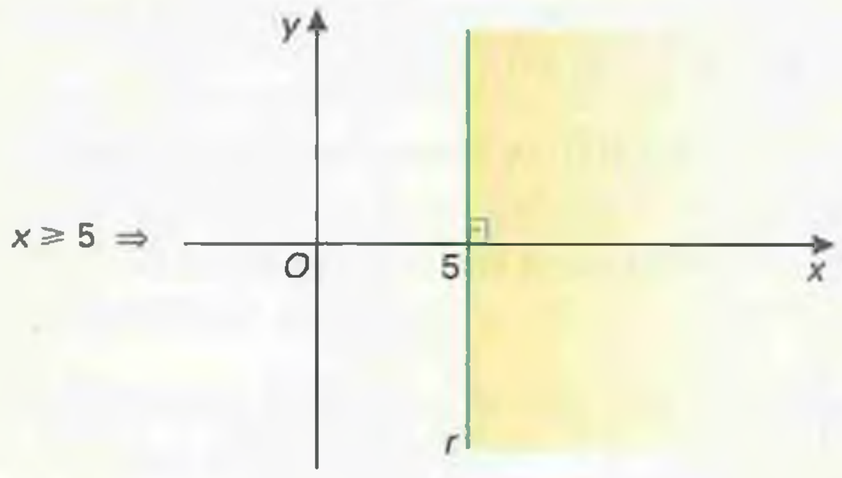
1. SEMIPLANO DE ORIGEM PARALELA A UM DOS EIXOS COORDENADOS

Consideremos a reta r de equação $x = 5$, cujo gráfico é:

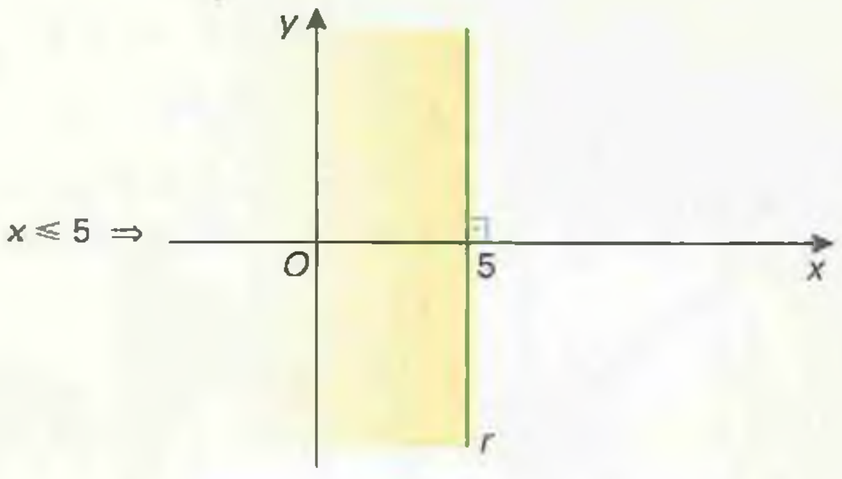


A reta r é origem de dois semiplanos contidos no plano cartesiano:

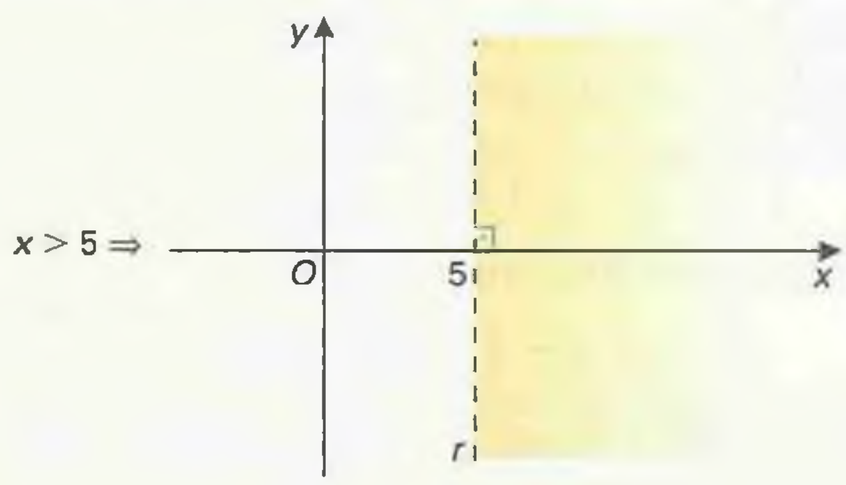
I. o semiplano formado pelos pontos cujas abscissas são maiores ou iguais a 5:



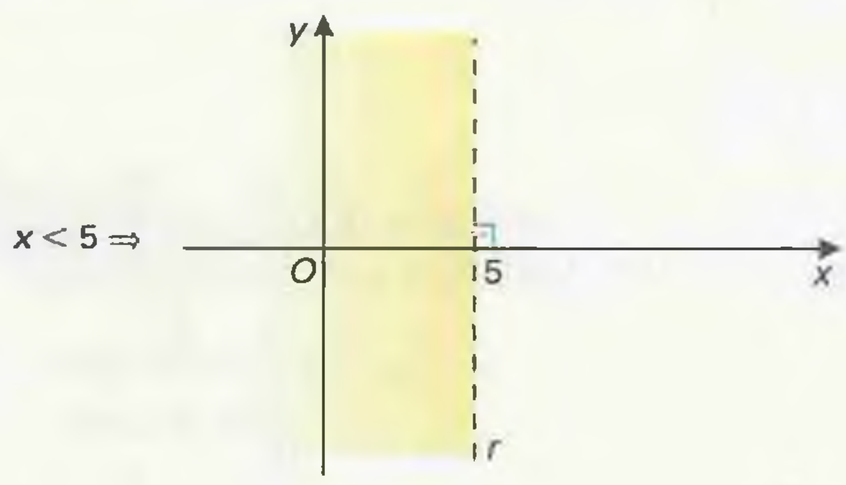
II. o semiplano formado pelos pontos de abscissas menores ou iguais a 5:



Se quisermos representar o semiplano aberto (que não contém a reta origem) formado pelos pontos de abscissas maiores que 5, basta, em (I), desenharmos a reta r tracejada (seccionada):



Analogamente, o semiplano aberto formado pelos pontos de abscissas menores que 5 é:

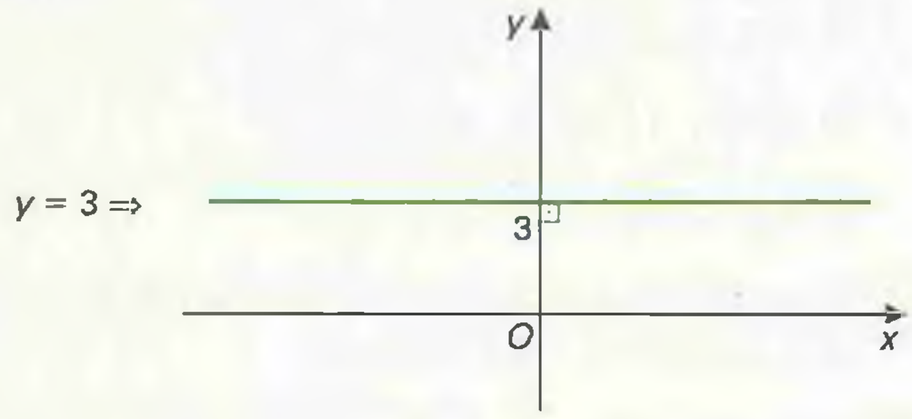


EXERCÍCIO RESOLVIDO

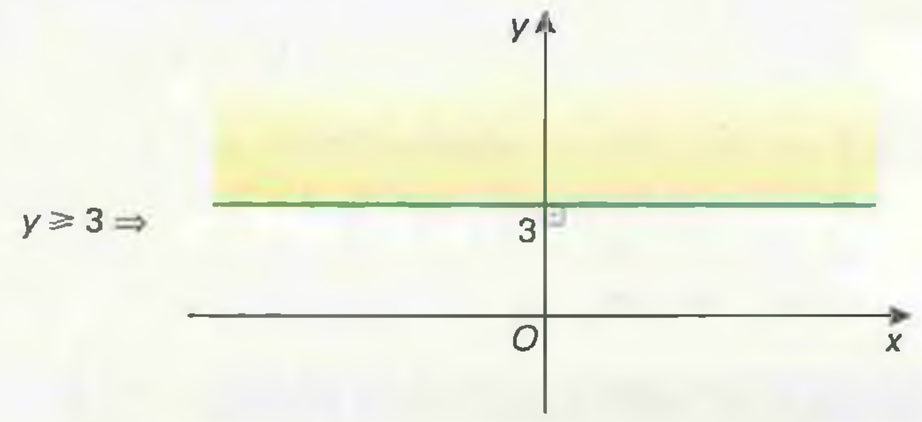
R.1 Representar no plano cartesiano o semiplano formado pelos pontos de ordenadas maiores ou iguais a 3, ou seja, $y \geq 3$.

Resolução

Inicialmente representamos a reta origem do semiplano, isto é, $y = 3$.



O semiplano formado pelos pontos de ordenadas maiores ou iguais a 3 é:

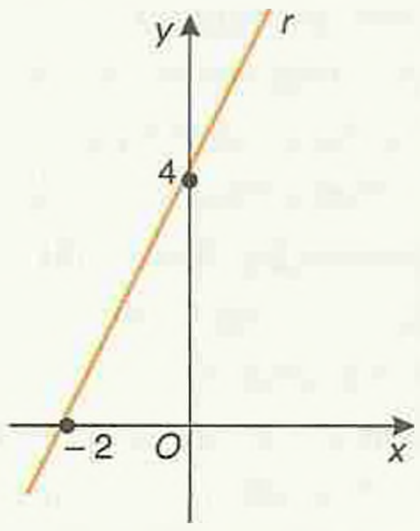


2. SEMIPLANO DE ORIGEM NÃO-PARALELA A NENHUM DOS EIXOS COORDENADOS

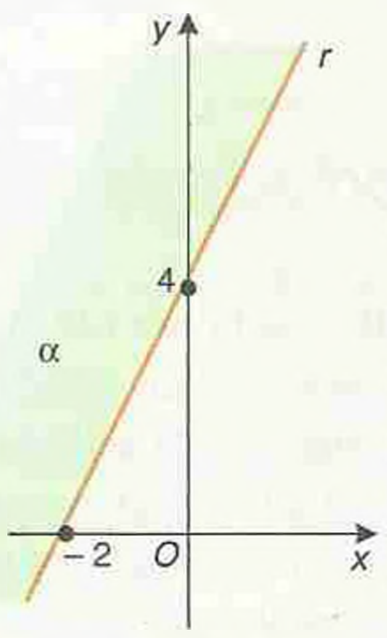
Consideremos a reta r de equação $y = 2x + 4$, cujo gráfico é:

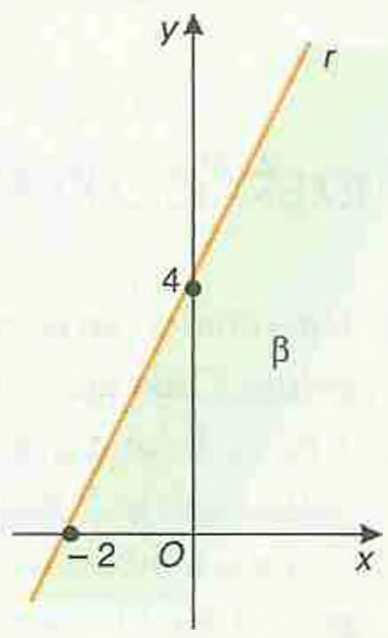
x	$2x + 4$
0	4
−2	0

$\Rightarrow$

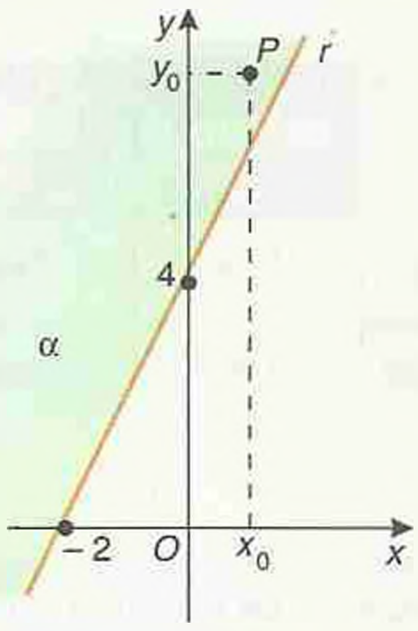


A reta r é origem de dois semiplanos contidos no plano cartesiano.

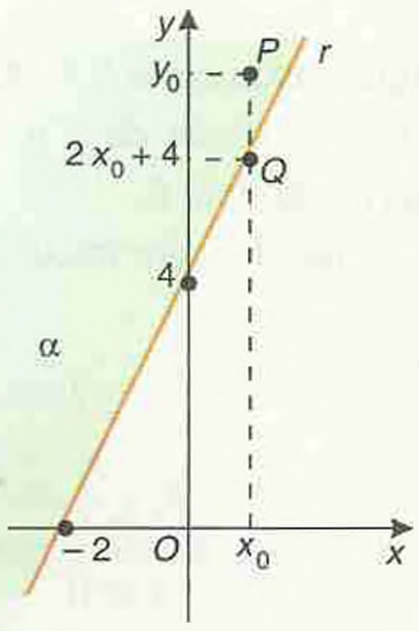




Consideremos um ponto $P(x_0, y_0)$ do semiplano α, não pertencente à reta r:



O ponto Q da reta r que possui abscissa x_0 é $Q(x_0, 2x_0 + 4)$:



Note que $y_0 > 2x_0 + 4$.

Temos então que:

I. para que um ponto $P(x_0, y_0)$ pertença ao semiplano α e não pertença à origem r, deve-se ter:

$$y_0 > 2x_0 + 4$$

II. para que um ponto $P(x_0, y_0)$ pertença à reta r, deve-se ter:

$$y_0 = 2x_0 + 4$$

Por (I) e (II), podemos concluir que o semiplano α é determinado pela inequação:

$$y \geqslant 2x + 4, x \in \mathbb{R}$$

De modo análogo, concluímos que o semiplano β é determinado pela inequação:

$$y \leqslant 2x + 4, x \in \mathbb{R}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

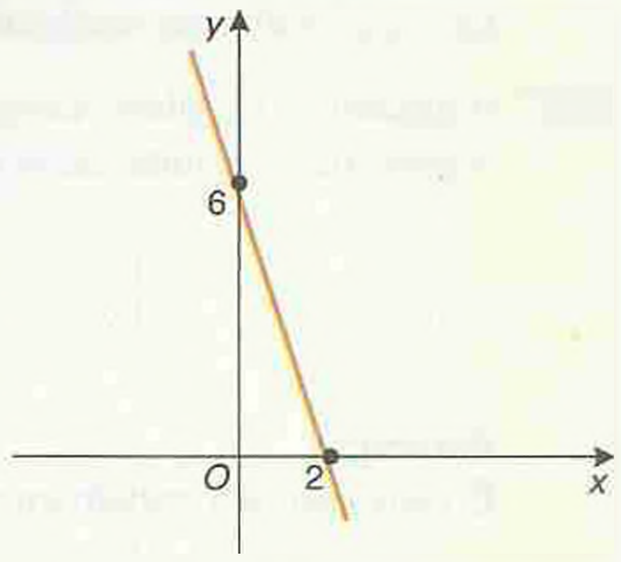
R.2 Representar no plano cartesiano o semiplano determinado pela inequação $y \geqslant -3x + 6$.

Resolução

Inicialmente representamos a reta origem do semiplano, isto é, $y = -3x + 6$.

x	$-3x + 6$
0	6
2	0

$\Rightarrow$



O semiplano determinado pela inequação $y \geqslant -3x + 6$ é a reunião da reta origem com o conjunto dos pontos "acima" ($>$) dessa reta:

R.3 Representar no plano cartesiano o semiplano determinado pela inequação $2x - y - 5 > 0$.

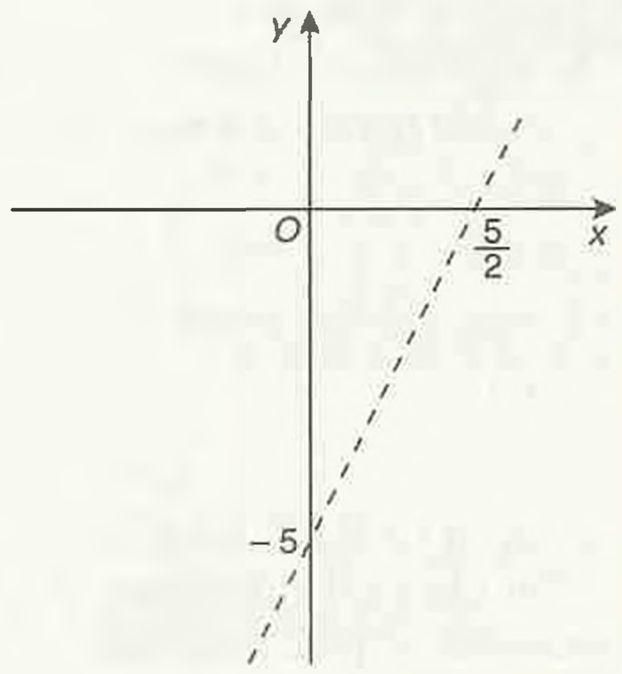
Resolução

É conveniente isolarmos a variável y na inequação, pois assim é mais fácil visualizar o semiplano.

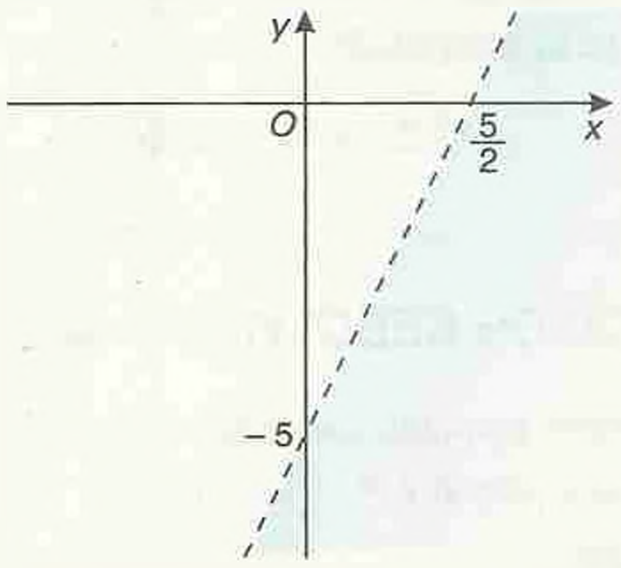
$$2x - y - 5 > 0 \Rightarrow -y > -2x + 5 \therefore y < 2x - 5$$

A reta origem desse semiplano tem equação $y = 2x - 5$:

x	$2x - 5$ (y)
0	-5
$\frac{5}{2}$	0



O semiplano determinado pela inequação $y < 2x - 5$ é o conjunto dos pontos "abaixo" ($<$) da reta origem:



Representamos a reta origem tracejada (seccionada) para indicar que o semiplano é aberto, isto é, a reta origem não está contida no semiplano.

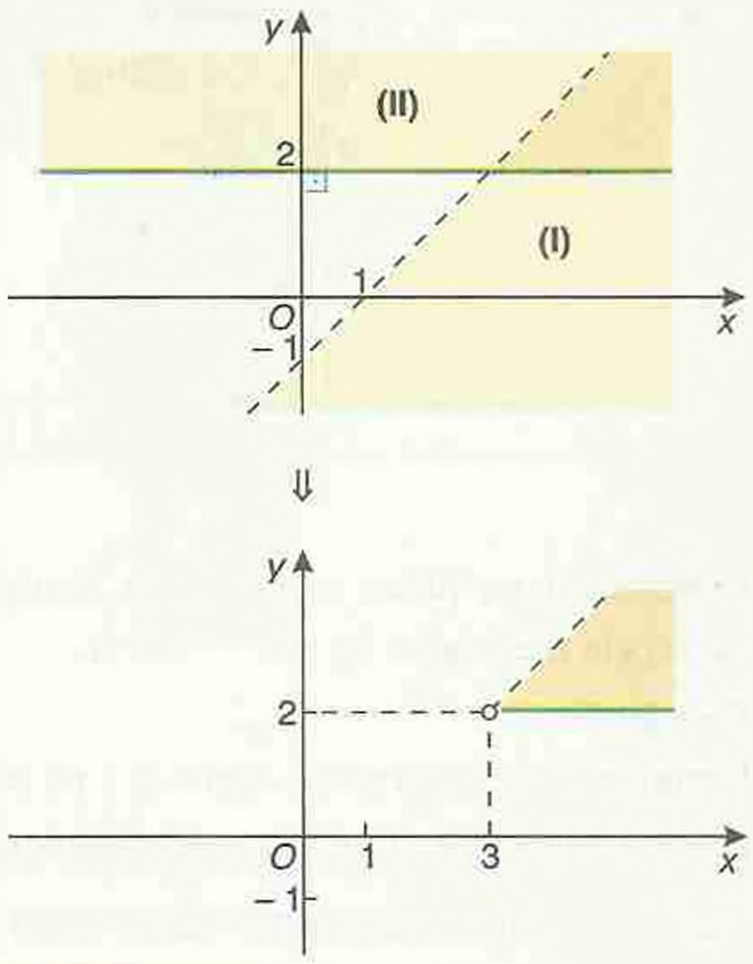
R.4 Representar no plano cartesiano os pontos (x, y) que satisfaçam o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} x - y - 1 > 0 \\ y - 2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Resolução

É mais cômodo trabalharmos com a variável y isolada em cada inequação $\begin{cases} y < x - 1 \ \text{(I)} \\ y \geqslant 2 \ \text{(II)} \end{cases}$

Os pontos (x, y) que satisfazem (I) e (II) simultaneamente são obtidos pela intersecção dos semiplanos (I) e (II):



A matemática ajudando a tomar decisões

Como obter o maior rendimento de uma máquina com o menor custo possível? Com uma certa quantidade de matéria-prima, que quantidade de cada produto deve ser fabricado por uma empresa para obter o máximo lucro? Qual deve ser o formato de uma lata de refrigerante para que seja gasto o mínimo de material possível na embalagem?

Perguntas como essas são respondidas pela **programação matemática**, um ramo da matemática aplicado na tomada de decisões em que se procura o mínimo custo com o máximo aproveitamento. Quando as equações ou inequações que envolvem o modelo são do 1º grau, aplica-se a **programação linear**, uma subdivisão da programação matemática. Um exemplo concreto é mostrado no exercício R.5.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Uma confecção dispõe de 80 m² de brim e 120 m² de popeline. Cada unidade de um modelo *A* de vestido requer 1 m² de brim e 3 m² de popeline, e cada unidade de um outro modelo *B* requer 2 m² de brim e 2 m² de popeline. Se cada unidade de qualquer um dos modelos é vendida por R$ 80,00, quantas unidades de cada modelo devem ser confeccionadas para se obter a renda bruta máxima?

Resolução

Resumindo os dados em uma tabela, temos:

	Modelo *A*	Modelo *B*	Tecido em estoque
Brim	1 m²	2 m²	80 m²
Popeline	3 m²	2 m²	120 m²

Sejam:

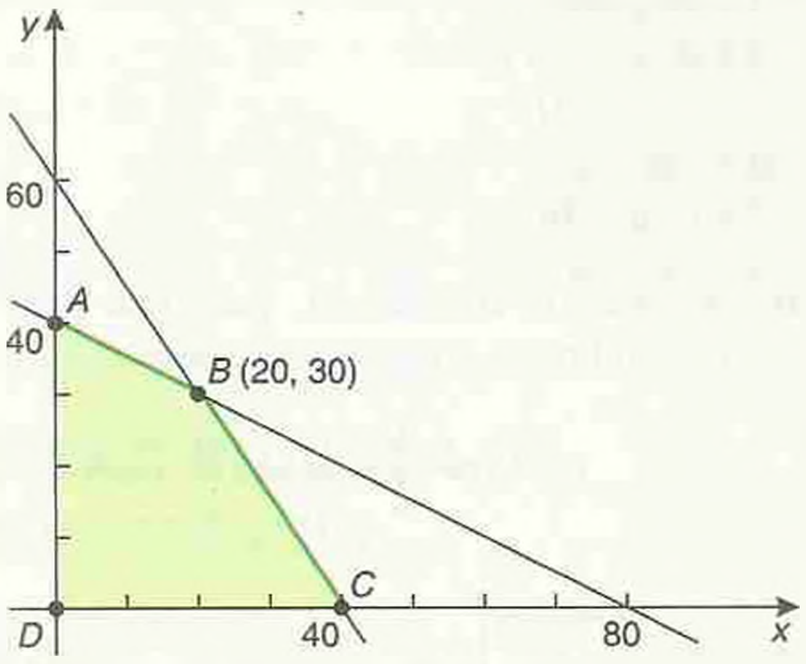
- x o número de unidades do modelo *A* a serem fabricadas;
- y o número de unidades do modelo *B* a serem fabricadas.

Temos que a expressão $E = 80x + 80y$ dá a renda bruta obtida com a venda de x unidades do modelo *A* e y unidades do modelo *B*.

Para o cálculo do valor máximo de *E*, observemos que:

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 80 \\ 3x + 2y \leqslant 120 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Representando as soluções desse sistema no plano cartesiano, obtemos:



Demonstra-se que o máximo valor de E é obtido ao atribuirmos às variáveis x e y de E as coordenadas de um determinado vértice do polígono $ABCD$. Para descobrir qual é esse vértice, basta testarmos cada um deles:

$A(0, 40) \Rightarrow E = 80 \cdot 0 + 80 \cdot 40 = 3.200;$
$B(20, 30) \Rightarrow E = 80 \cdot 20 + 80 \cdot 30 = 4.000;$
$C(40, 0) \Rightarrow E = 80 \cdot 40 + 80 \cdot 0 = 3.200;$
$D(0, 0) \Rightarrow E = 80 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0.$

Assim, o máximo valor de E é obtido no ponto $B(20, 30)$. Portanto, para obter a renda máxima, devem ser confeccionados vinte vestidos do modelo A e trinta vestidos do modelo B.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Construa o gráfico, no plano cartesiano, de cada uma das inequações a seguir:

a) $x \geqslant 1$

b) $y < 2$

c) $y > 3x - 6$

d) $2x + y - 4 \leqslant 0$

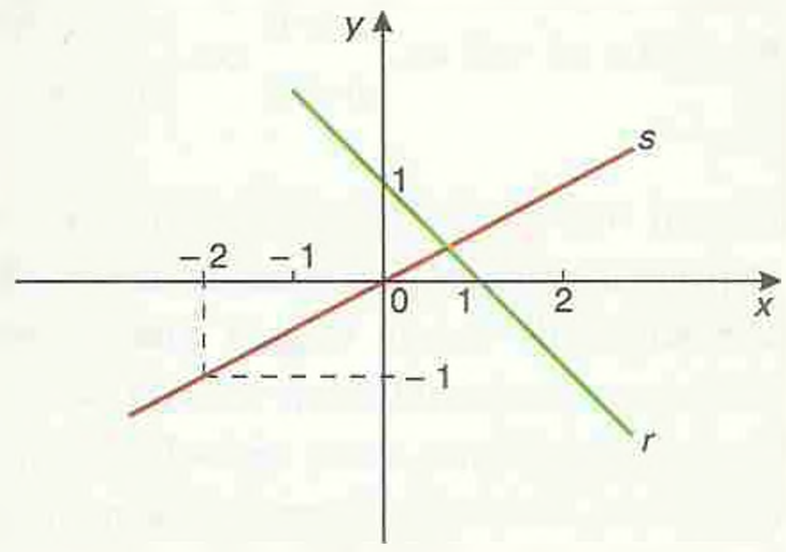
B.2 Represente no plano cartesiano o conjunto solução de cada um dos sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} x \geqslant 4 \\ 2x + y - 4 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y \leqslant x + 2 \\ y \geqslant 2x - 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \geqslant 3 \\ y \geqslant 4 \\ 5y - 4x > 0 \end{cases}$

B.3 (Fuvest-SP) Na figura a seguir, A é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x, y). Sabendo que A está localizado abaixo da reta r e acima da reta s, tem-se (ver imagem):



a) $y < \frac{x}{2}$ e $y < -x + 1$

b) $y < \frac{x}{2}$ ou $y > -x + 1$

c) $\frac{x}{2} < y$ e $y > -x + 1$

d) $-x + 1 < y < \frac{x}{2}$

e) $\frac{x}{2} < y < -x + 1$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Fuvest-SP) Sabe-se que os pontos $(-1, 3)$ e $(-3, a)$ estão em semiplanos opostos em relação à reta $x - 2y + 2 = 0$. Um possível valor de a é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $-\frac{2}{5}$

e) $-\frac{4}{7}$

Sugestão. A reta $r: x - 2y + 2 = 0$ separa o plano cartesiano em dois semiplanos opostos em relação a r.

C.2 Represente no plano cartesiano o conjunto de pontos (x, y) tais que:

a) $|x| + y - 5 > 0$

b) $x + 2|y| \geqslant 3$

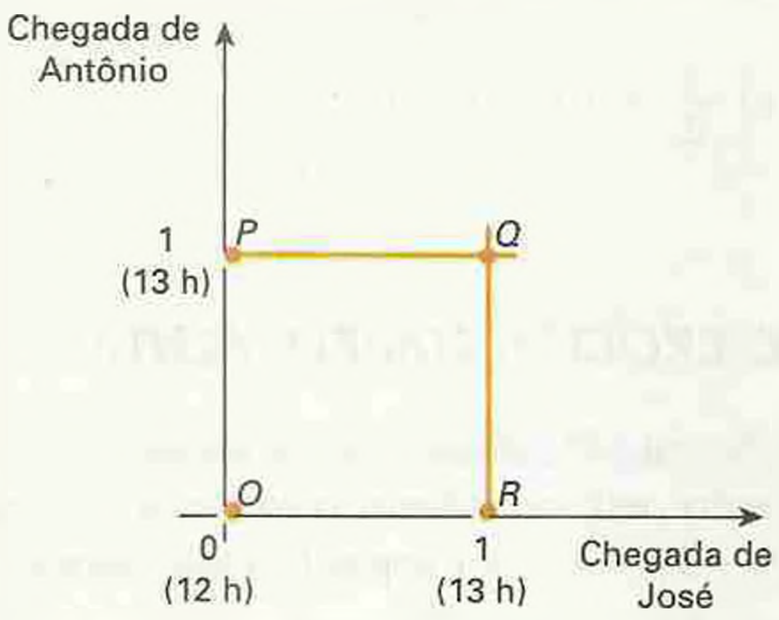
Sugestão. Lembrando que $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$, temos que a inequação do item (a) equivale a $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ -x + y - 5 > 0 \end{cases}$

Isto é, se S_1 e S_2 são os conjuntos solução desses sistemas, respectivamente, então o conjunto solução da inequação $|x| + y - 5 > 0$ é $S_1 \cup S_2$. **Lembrete.** O conectivo "ou" indica a união de S_1 com S_2.

C.3 Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos (x, y) tais que $(x + y - 3)(x + 4) < 0$.

Sugestão. $ab < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

C.4 (Enem) José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho. Chamando de x o horário de chegada de José e de y o horário de chegada de Antônio, e representando os pares (x, y) em um sistema de eixos cartesianos, a região $OPQR$ indicada abaixo corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x, y):

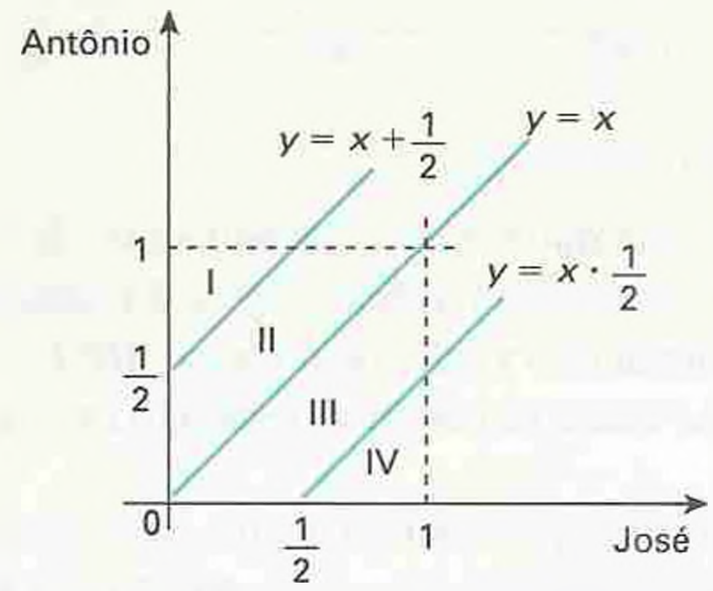


I) Na região indicada, o conjunto de pontos que representa o evento "José e Antônio chegam ao marco inicial exatamente no mesmo horário" corresponde:

a) à diagonal OQ.
b) à diagonal PR.
c) ao lado PQ.
d) ao lado QR.
e) ao lado OR.

II) Segundo o combinado, para que José e Antônio viajem juntos, é necessário que:

$$y - x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou que } x - y \leqslant \frac{1}{2}$$



De acordo com o gráfico e nas condições combinadas, as chances de José e Antônio viajarem juntos são de:

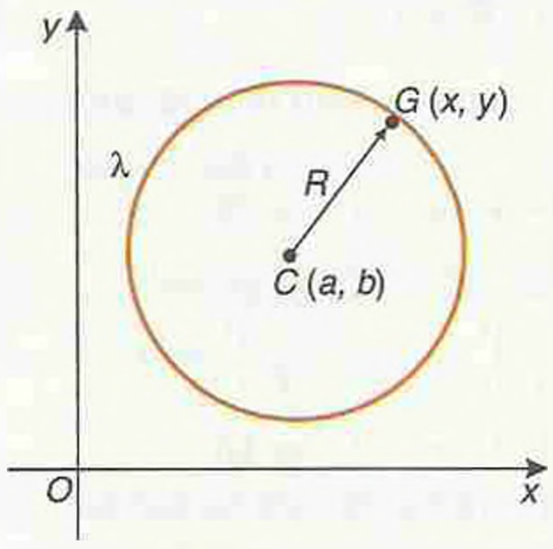
a) 0%
b) 25%
c) 50%
d) 75%
e) 100%

Capítulo 58

EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

1. EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Seja, no plano cartesiano, uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio R.



Para obter uma equação dessa circunferência, consideramos um ponto genérico $G(x, y)$ e impomos que:

$$CG = R \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos a equação equivalente:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

denominada **equação reduzida** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Obter a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R, nos seguintes casos:

a) $C(4, 6)$ e $R = 3$

b) $C(0, 2)$ e $R = \sqrt{5}$

c) $C(-3, 1)$ e $R = \frac{3}{2}$

Resolução

a) Na equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, substituindo a, b e R por 4, 6 e 3, respectivamente, obtemos:

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 9$$

b) Fazendo $a = 0$, $b = 2$ e $R = \sqrt{5}$ na equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, obtemos $x^2 + (y-2)^2 = 5$.

c) $$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ a = -3 \\ b = 1 \\ R = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\therefore (x+3)^2 + (y-1)^2 = \frac{9}{4}$$

R.2 Determinar o centro e o raio da circunferência que tem por equação:

a) $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$

b) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 3$

c) $(x+2)^2 + y^2 = \frac{16}{25}$

Resolução

a) Comparando a equação $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$ com $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, temos que:

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \\ R^2 = 16 \Rightarrow R = 4 \end{cases}$$

Assim, o centro da circunferência é o ponto $C(6, 2)$ e o raio é $R = 4$.

b) A equação $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 3$ pode ser escrita na forma $[x-(-4)]^2 + [y-1]^2 = 3$. Comparando essa equação com $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, temos:

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \\ R^2 = 3 \Rightarrow R = \sqrt{3} \end{cases}$$

Portanto o centro da circunferência é o ponto $C(-4, 1)$ e o raio é $R = \sqrt{3}$.

c) Podemos escrever a equação:

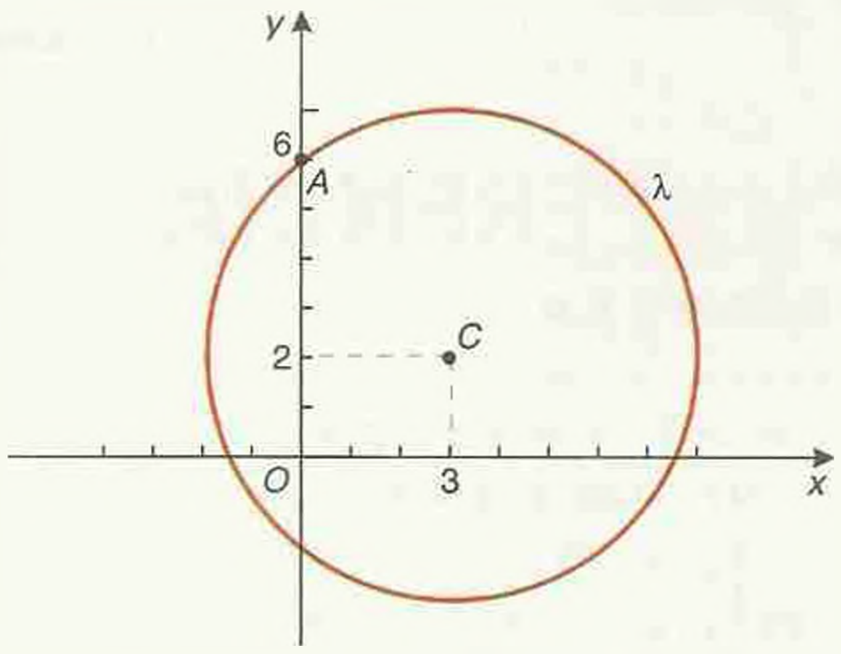
$$(x+2)^2 + y^2 = \frac{16}{25}$$

sob a forma $[x-(-2)]^2 + [y-0]^2 = \frac{16}{25}$. Comparando essa equação com $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, concluímos que:

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ R^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow R = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Logo, o centro e o raio dessa circunferência são, respectivamente, $C(-2, 0)$ e $R = \frac{4}{5}$.

R.3 Obter a equação reduzida da circunferência λ de centro C cujo gráfico é:



Resolução

A circunferência λ passa pelo ponto $A(0, 6)$ e tem centro $C(3, 2)$. Logo, seu raio R é a distância entre A e C:

$$R = \sqrt{(0-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Portanto, temos que:

$$\lambda \begin{cases} C(3, 2) \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$$

R.4 Para que valores reais de k a equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = k$ representa uma circunferência?

Resolução

Comparando a equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = k$ com $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ R^2 = k \end{cases}$$

Como $R^2 > 0$, temos que a equação representa uma circunferência de centro $C(2, 3)$ e raio $R = \sqrt{k}$ se, e somente se, $k > 0$.

R.5 Qual é o conjunto de pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$?

Resolução

Como $(x-2)^2 \geqslant 0$ e $(y-3)^2 \geqslant 0$, temos que:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \text{ e } (y-3)^2 = 0 \therefore x = 2 \text{ e } y = 3$$

Assim, a equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$ representa um único ponto $C(2, 3)$.

R.6 Qual é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x-2)^2 + (y-3)^2 = -16$?

Resolução

Como $(x-2)^2 \geqslant 0$ e $(y-3)^2 \geqslant 0$, $\forall x, y, \{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos que a igualdade $(x-2)^2 + (y-3)^2 = -16$ é impossível. Portanto essa equação representa o conjunto vazio.

Conclusão

Através dos exercícios R.4, R.5 e R.6, percebemos o seguinte:

A equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = k$ nas variáveis x e y com $\{a, b, k\} \subset \mathbb{R}$ representa:

- uma circunferência se, e somente se, $k > 0$;
- um único ponto se, e somente se, $k = 0$;
- o conjunto vazio se, e somente se, $k < 0$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Determine a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R, nos seguintes casos:

a) $C(4, 7)$ e $R = 8$

b) $C(0, 2)$ e $R = \sqrt{7}$

c) $C(-4, 1)$ e $R = \frac{1}{3}$

d) $C\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e $R = 1$

e) $C(1, 8)$ e $R = 3$

f) $C(-2, 0)$ e $R = \frac{2}{5}$

g) $C\left(-\frac{3}{4}, 1\right)$ e $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$

h) $C(0, 0)$ e $R = 1$

B.2 Obtenha o centro e raio da circunferência cuja equação reduzida é:

a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

b) $(x+5)^2 + y^2 = 3$

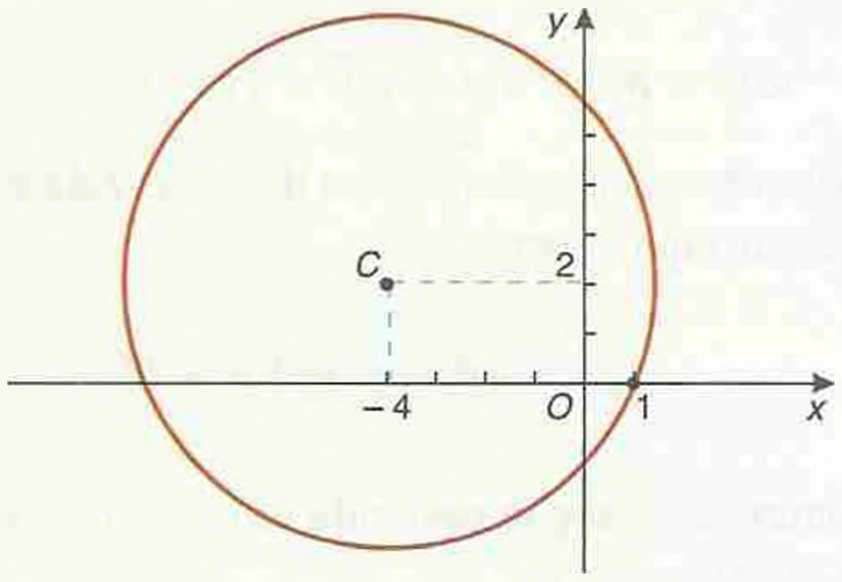
c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 9$

d) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$

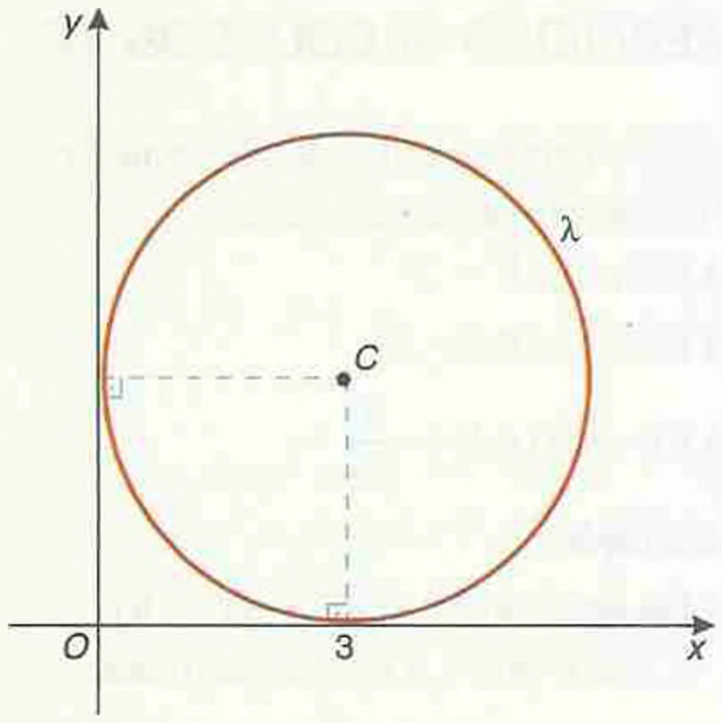
e) $x^2 + (y+1)^2 = 2$

f) $x^2 + y^2 = 4$

B.3 Encontre a equação reduzida da circunferência de centro C cujo gráfico é:



B.4 A circunferência λ representada no gráfico é tangente aos eixos coordenados. Determine sua equação reduzida.



B.5 Para que valores reais de k a equação:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3k - 4$$

representa uma circunferência?

B.6 Obtenha os valores reais de k para que a equação $(x + 3)^2 + y^2 = 1 - 2k$:
a) represente uma circunferência;
b) represente um ponto;
c) represente o conjunto vazio.

Exercícios complementares de C.1 a C.3

2. EQUAÇÃO NORMAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Vimos que a **equação reduzida** da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio R é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Eliminando os parênteses dessa equação, obtemos $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2$, ou ainda:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Essa equação é denominada **equação normal** da circunferência.

Nota

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por uma constante real k, $k \neq 0$, obtemos uma outra equação da mesma circunferência:

$$kx^2 + ky^2 - 2kax - 2kby + ka^2 + kb^2 - kR^2 = 0$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 Qual a equação normal da circunferência de centro $C(4, 1)$ e raio 5?

Resolução

A equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$$

Eliminando os parênteses dessa equação, obtemos:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

Assim, a equação normal dessa circunferência é:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$$

Obtenção do centro e do raio de uma circunferência a partir de sua equação normal

Dada a equação normal de uma circunferência λ, por exemplo, $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$, podemos determinar o centro e o raio de λ de duas maneiras: por comparação e por redução.

Por comparação

Comparando a equação $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$ com a equação:

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = 6 \Rightarrow a = -3 & \text{(I)} \\ -2b = -10 \Rightarrow b = 5 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 18 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), obtemos:

$$(-3)^2 + 5^2 - R^2 = 18 \Rightarrow R^2 = 16 \therefore R = 4$$

Logo, o centro e o raio da circunferência λ são, respectivamente, $C(-3, 5)$ e $R = 4$.

Por redução

Esse método consiste em obter a **forma reduzida** a partir da equação normal.

- Agrupamos os termos em x e os termos em y, isolando num dos membros da equação o termo independente $(x^2 + 6x) + (y^2 - 10y) = -18$.
- Somamos a ambos os membros da igualdade um mesmo termo, de modo que o agrupamento em x se transforme num **quadrado perfeito**:

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y) = -18 + 9$$

Note que, se o coeficiente de x^2 é 1, o termo que deve ser somado a ambos os membros é o **quadrado da metade do coeficiente** de x.

- Somamos a ambos os membros da igualdade anterior um mesmo termo, de modo que o agrupamento em y se transforme num **quadrado perfeito**:

$$\underbrace{(x^2 + 6x + 9)}_{\downarrow} + \underbrace{(y^2 - 10y + 25)}_{\downarrow} = \underbrace{-18 + 9 + 25}_{\downarrow}$$

$$\therefore \overbrace{(x + 3)^2} + \overbrace{(y - 5)^2} = \overbrace{16}$$

Obtivemos assim a equação reduzida da circunferência λ. Portanto seu centro e seu raio são, respectivamente, $C(-3, 5)$ e $R = 4$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Aplicando o método da comparação, obter o centro e o raio da circunferência de equação:
a) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$
c) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$

Resolução

Devemos comparar cada uma das equações com

$$\lambda: x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

a) Comparando com λ a equação

$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = -2 \Rightarrow a = 1 & \text{(I)} \\ -2b = 8 \Rightarrow b = -4 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = 14 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$1^2 + (-4)^2 - R^2 = 14 \Rightarrow R^2 = 3$$

$$\therefore R = \sqrt{3}$$

Logo, o centro C e o raio R da circunferência são $C(1, -4)$ e $R = \sqrt{3}$.

b) Comparando com λ a equação

$x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$, temos:

$$\begin{cases} -2a = 0 \Rightarrow a = 0 & \text{(I)} \\ -2b = 6 \Rightarrow b = -3 & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = -16 & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$$0^2 + (-3)^2 - R^2 = -16 \Rightarrow R^2 = 25 \therefore R = 5$$

Portanto o centro C e o raio R da circunferência são $C(0, -3)$ e $R = 5$.

c) Para poder comparar com λ a equação $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$, devemos dividir por 16 ambos os membros dessa igualdade:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{2} - \frac{31}{16} = 0$$

Assim temos:

$$\begin{cases} -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} & \text{(I)} \\ -2b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4} & \text{(II)} \\ a^2 + b^2 - R^2 = -\frac{31}{16} & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) e (II) em (III):

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - R^2 = -\frac{31}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{31}{16}$$

$$\therefore R^2 = \frac{36}{16} \Rightarrow R = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Portanto o centro C e o raio R dessa circunferência são $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $R = \frac{3}{2}$.

R.9 Aplicando o método da redução, determinar o centro e o raio da circunferência de equação:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 14 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0$

c) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 31 = 0$

Resolução

a) Agrupando os termos em x, os termos em y e isolando o termo independente, temos:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 8y) = -14$$

Completando os quadrados perfeitos, obtemos:

$$(x^2 - 2x + \underbrace{1}) + (y^2 + 8y + \underbrace{16}) = -14 + 1 + 16$$

Quadrado da metade do coeficiente de x — **Quadrado da metade do coeficiente de y**

Essa equação pode ser escrita na forma reduzida:

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 3$$

Temos que o centro C e o raio R dessa circunferência são $C(1, -4)$ e $R = \sqrt{3}$.

b) Agrupamos os termos em x, os termos em y e isolamos o termo independente $(x^2) + (y^2 + 6y) = 16$.
Completando o quadrado perfeito no agrupamento em y, temos:

$$(x^2) + (y^2 + 6y + \underbrace{9}) = 16 + 9$$

Quadrado da metade do coeficiente de y

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$$x^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Logo, o centro C e o raio R da circunferência são $C(0, -3)$ e $R = 5$.

c) Para obter a equação reduzida, convém dividirmos por 16 ambos os membros da equação:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{2} - \frac{31}{16} = 0$$

Agrupamos os termos em x, os termos em y e isolamos o termo independente:

$$(x^2 + x) + \left(y^2 - \frac{y}{2}\right) = \frac{31}{16}$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$\left(x^2 + x + \underbrace{\frac{1}{4}}\right) + \left(y^2 - \frac{y}{2} + \underbrace{\frac{1}{16}}\right) = \frac{31}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

Quadrado da metade do coeficiente de x — **Quadrado da metade do coeficiente de y**

Assim, a equação reduzida da circunferência é:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{36}{16}$$

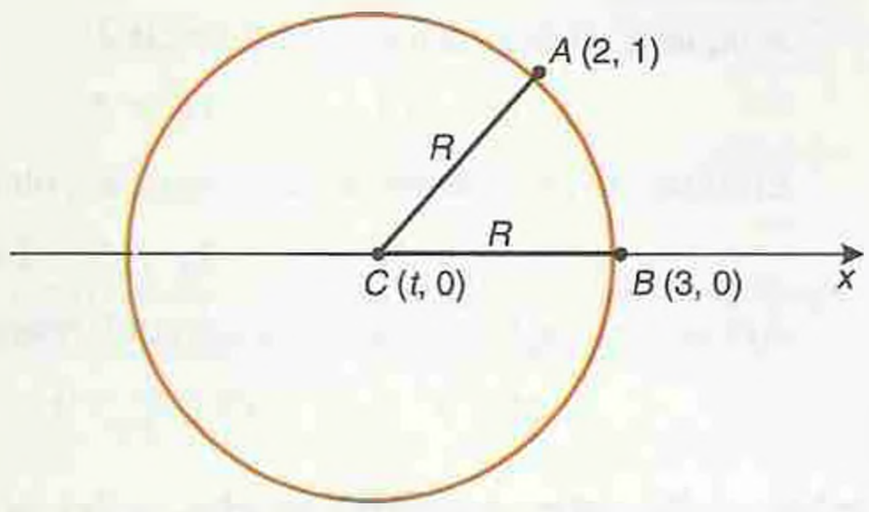
Portanto o centro C e o raio R da circunferência são:

$$C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ e } R = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

R.10 Obter uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(2, 1)$ e $B(3, 0)$, cujo centro C pertence ao eixo das abscissas.

Resolução

Como o centro C pertence ao eixo das abscissas, temos que sua ordenada é zero, ou seja, o centro é da forma $C(t, 0)$, conforme a figura abaixo.



Devemos ter $d_{CA} = d_{CB}$:

$$\sqrt{(t - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{(t - 3)^2 + (0 - 0)^2}$$

Quadramos ambos os membros dessa igualdade:

$$(t - 2)^2 + 1 = (t - 3)^2$$

$$\therefore t^2 - 4t + 4 + 1 = t^2 - 6t + 9$$

$$\therefore 2t = 4 \therefore t = 2$$

Assim, o centro de λ é $C(2, 0)$ e o raio é a distância entre C e A (ou entre C e B):

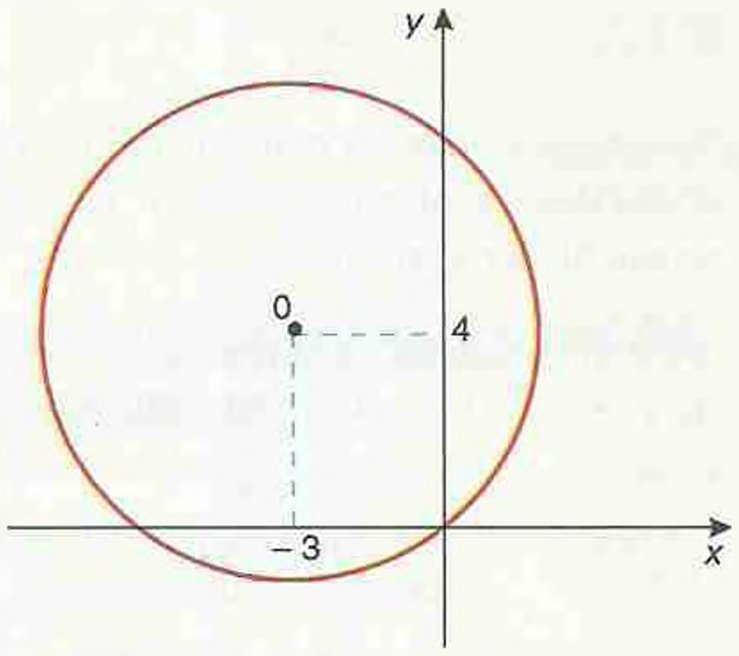
$$R = d_{CA} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = 1$$

Logo, temos:

$$\lambda \begin{cases} C(2, 0) \\ R = 1 \end{cases} \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 (Cesgranrio) A equação da circunferência cuja representação cartesiana está indicada pela figura abaixo é:



a) $x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$
c) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
d) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$
e) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

B.8 (U. E. Londrina-PR) Seja P um ponto do eixo das ordenadas pertencente à reta de equação $2x - 3y - 6 = 0$. A equação da circunferência de centro em P e tangente ao eixo das abcissas é:
a) $x^2 + y^2 = 4$
b) $x^2 + y^2 + 4x = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4y = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
e) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

B.9 Aplicando o método da comparação, obtenha o centro e o raio da circunferência de equação:
a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 6x + 6 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$
d) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 2y - 5 = 0$
g) $3x^2 + 3y^2 - 3x + 6y + 3 = 0$

B.10 Através do método da redução, determine o centro e o raio da circunferência de equação:
a) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$
c) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 1 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 10x - 20y + 121 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 12x = 0$
f) $25x^2 + 25y^2 - 10x - 50y + 1 = 0$

B.11 Obtenha uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(3, 6)$ e $B(4, -1)$, cujo centro pertence ao eixo das ordenadas.

B.12 Determine uma equação da circunferência λ que passa pelos pontos $A(0, 5)$ e $B(1, 0)$, cujo centro pertence à reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

B.13 Uma circunferência λ passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(3, 2)$ e tem como centro um ponto da reta r: $y = 2x - 1$. Obtenha a equação reduzida de λ. **Sugestão.** Um ponto genérico da reta r é obtido atribuindo-se um valor genérico para x. Por exemplo, fazendo $x = a$, obtém-se $y = 2a - 1$. Logo, o centro da circunferência é um ponto da forma $(a, 2a - 1)$.

B.14 (UDESC) Determine a equação normal da circunferência que passa pelos pontos $A(4, 4)$, $B(6, 0)$ e $C(0, 0)$. **Sugestão.** O centro da circunferência é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Obtenha as equações de duas dessas mediatrizes e resolva o sistema formado por essas equações, determinando, assim, o centro da circunferência.

Exercícios complementares de C.4 a C.9

3. RECONHECIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Chama-se **equação do 2º grau em duas variáveis** x e y toda equação que pode ser apresentada sob a seguinte forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{(I)}$$

com $\{A, B, C, D, E, F\} \subset \mathbb{R}$, sendo que A, B e C não são simultaneamente nulos. Para que essa equação represente uma circunferência é necessário e suficiente que sejam obedecidas as condições: $A = B \neq 0$, $C = 0$ e a forma reduzida da equação, isto é, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, apresente um número positivo como valor de k.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.11 Qual das equações a seguir representa uma circunferência?
a) $2x^2 + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
b) $x^2 - y^2 + 3x - 6y + 8 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 1 = 0$
d) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 24y + 24 = 0$

Resolução

a) Não é equação de uma circunferência, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes.
b) Não é equação de uma circunferência, pois os coeficientes x^2 e y^2 são diferentes.
c) Não é equação de uma circunferência, pois o coeficiente do produto xy é diferente de zero.
d) É equação de uma circunferência, pois são obedecidas as três condições:

- $A = B \neq 0$, ou seja, os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais e não-nulos.
- $C = 0$, ou seja, o coeficiente do produto xy é zero.
- A forma reduzida da equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ apresenta o número k positivo. Observe:

$3x^2 + 3y^2 - 6x + 24y + 24 = 0$
$\therefore\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$
$\therefore\ (x^2 - 2x) + (y^2 + 8y) = -8$
$\therefore\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = -8 + 1 + 16$
$\therefore\ (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$

Como $9 > 0$, temos que a equação representa uma circunferência.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.15 Qual das equações representa uma circunferência?

a) $x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 9 = 0$
b) $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 4xy - 2 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$
e) $-x^2 - y^2 + 8x - 7 = 0$

B.16 (UFRS) A equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$ representa uma circunferência se, e somente se:

a) $m > 0$ c) $m > 13$ e) $m < 13$
b) $m < 0$ d) $m > -13$

Exercícios complementares C.10 e C.11

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Fesp-SP) A reta r passa pelo centro da circunferência $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ e é paralela à reta $3x - y + 7 = 0$. A equação da reta r é:

a) $y = 3x + 1$ d) $y = -3x + 2$
b) $y = 3x + 2$ e) $y = -3x - 1$
c) $y = 3x - 1$

C.2 Para que valor real de k a equação $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = k - 1$ representa uma circunferência que passa pela origem do sistema cartesiano?

C.3 (Covest) Determine o maior valor de r de forma que as circunferências $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ e $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = r^2$ tenham um único ponto de intersecção. Indique o inteiro mais próximo de $10r$.

C.4 (Unisinos-RS) A equação da circunferência com diâmetro $\overline{AB}$, sendo $A(-1, 3)$ e $B(5, 1)$ é:

a) $x^2 + y^2 - x + 3y - 6 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 5x + y - 3 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$

C.5 (UFSE) Considere as circunferências λ_1, dada por $x^2 + y^2 = 1$, e λ_2, dada por $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. A distância entre seus centros é:

a) 3 c) $\sqrt{5}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
b) $2\sqrt{2}$ d) 2

C.6 Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo centro da circunferência λ: $x^2 + y^2 - 2y - 7 = 0$ e é perpendicular à reta s: $x - 2y + 5 = 0$.

C.7 (UEPA) O lado do quadrado circunscrito à circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 10 = 0$ mede:

a) 46 c) $\sqrt{46}$ e) 23
b) $\sqrt{23}$ d) $2\sqrt{23}$

C.8 (Fuvest-SP) O segmento $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10y$. Se A é o ponto (3, 1), então B é o ponto:

a) $(-3, 9)$ c) (0, 10) e) (1, 3)
b) (3, 9) d) $(-3, 1)$

C.9 (Mackenzie-SP) Se $P(x, y)$ é o ponto de maior ordenada do plano tal que $x^2 + y^2 = x$, então $x + y$ vale:

a) -1 c) 0 e) 1
b) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

C.10 (Ulbra-RS) Das equações seguintes, indique aquela que é equação de circunferência.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 3y - 4 = 0$
b) $2x^2 + y^2 - x - y + 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 3xy - 2x - 1 = 0$
d) Todas são equações de circunferência.
e) Nenhuma é equação de circunferência.

C.11 (UDESC) Para que a equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0$ represente um ponto, devemos ter:

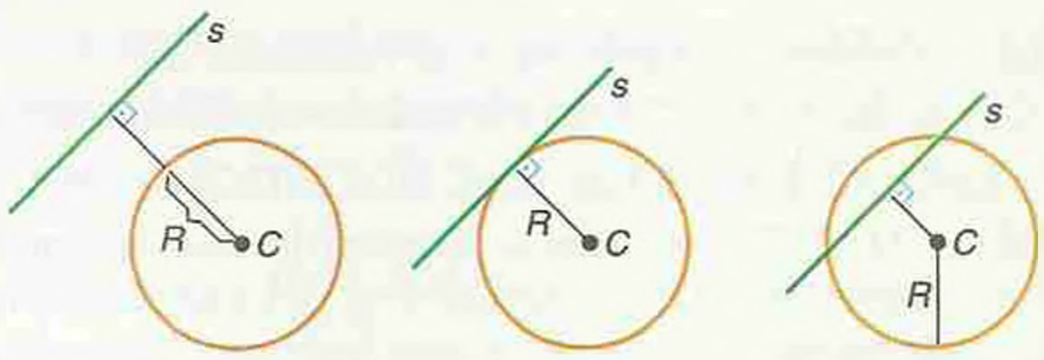
a) $k = 20$ c) $k = 12$ e) $k = 10$
b) $k = 13$ d) $k = 12$

Capítulo 59

RETA E CIRCUNFERÊNCIA

1. POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

No plano, temos três posições relativas possíveis entre uma reta r e uma circunferência λ:



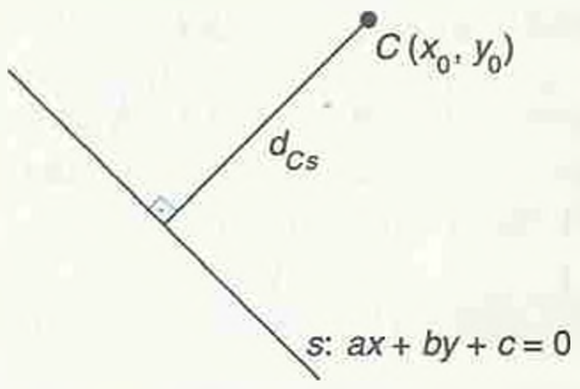
s é exterior a λ, se e somente se, $d_{Cs} > R$

s é tangente a λ, se e somente se, $d_{Cs} = R$

s é secante a λ, se e somente se, $d_{Cs} < R$

Sendo $C(x_0, y_0)$ e R o centro e o raio da circunferência λ, respectivamente, e $ax + by + c = 0$ a equação geral da reta s, vimos no capítulo 56 que a distância d_{Cs} é calculada por:

$$d_{Cs} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Qual é a posição da reta s em relação à circunferência λ, em cada um dos casos a seguir?

a) s: $3x + 4y + 4 = 0$ e λ: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

b) s: $12x - 5y - 5 = 0$ e λ: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$

c) s: $y = \frac{4x}{3} + \frac{10}{3}$ e

λ: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

Resolução

a) O centro C e o raio R de λ são $C(1, 2)$ e $R = 1$. A distância entre C e s é:

$$d_{Cs} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

Temos que $d_{Cs} > R$, pois $3 > 1$; logo, a reta s é exterior à circunferência.

b) O centro C e o raio R de λ são $C(3, 1)$ e $R = 2$. A distância entre C e s é:

$$d_{Cs} = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

Temos que $d_{Cs} = R$, pois $2 = 2$; logo, a reta s é tangente a λ.

c) Para obter o centro C e o raio R de λ, vamos aplicar o método da redução:

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) = 20$

$\therefore (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 20 + 1 + 4$

$\therefore (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25 \quad \therefore \quad C(1, -2)$ e $R = 5$

Passamos para a **forma geral** a equação da reta

$$s: 4x - 3y + 10 = 0$$

A distância entre C e s é:

$$d_{Cs} = \frac{|4 \cdot 1 - 3(-2) + 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

Temos que $d_{Cs} < R$, pois $4 < 5$; logo, a reta é secante à circunferência λ.

R.2 Obter as equações das retas paralelas à reta t: $4x + 3y - 1 = 0$ e tangentes à circunferência λ de equação $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Resolução

O centro C e o raio R de λ são $C(-2, 1)$ e $R = 2$.

No plano cartesiano, as equações de todas as retas paralelas a t podem ser colocadas sob a forma

s: $4x + 3y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$. Note que para qualquer valor real de k a reta s tem o mesmo coeficiente angular de t, e, portanto, $s \parallel t$. A reta s é tangente a λ se, e somente se, $d_{Cs} = R$:

$$\frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \therefore \frac{|k - 5|}{\sqrt{25}} = 2$$

$\therefore |k - 5| = 10$

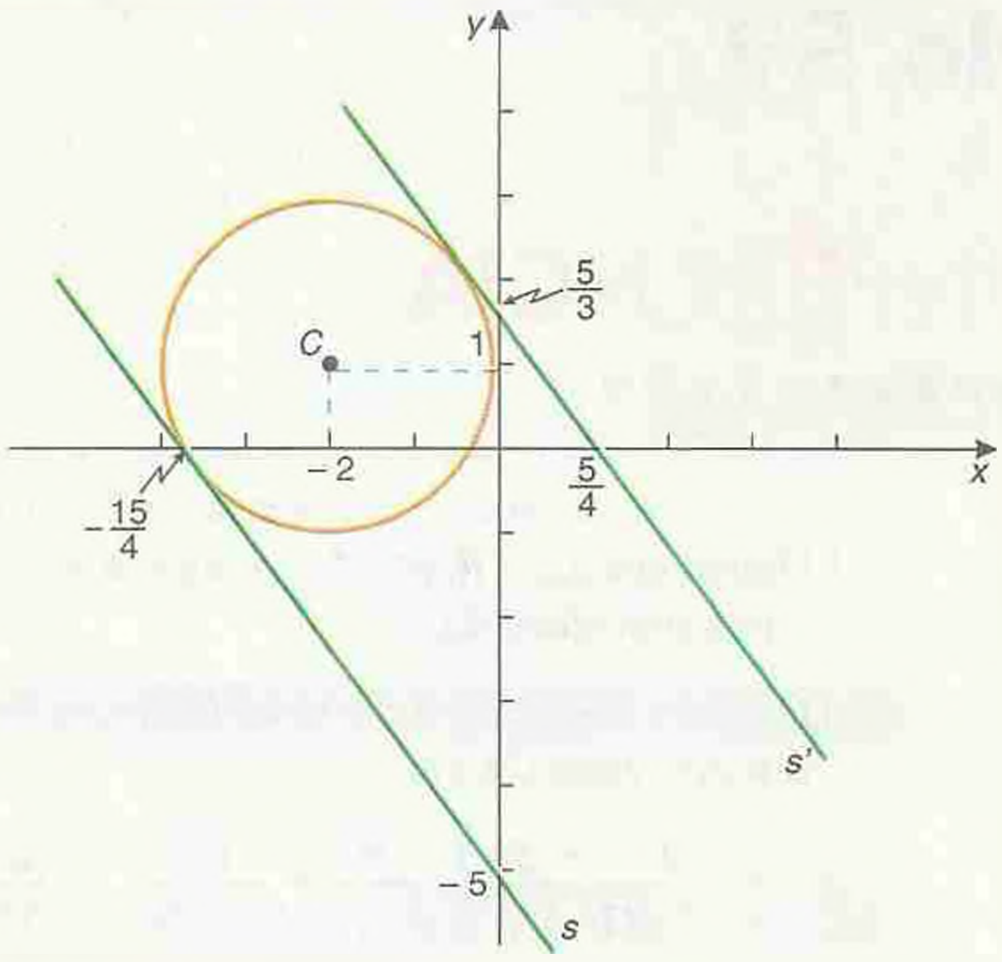
Temos que:

$k - 5 = 10 \Rightarrow k = 15$ ou $k - 5 = -10 \Rightarrow k = -5$

Assim, obtivemos duas retas s e s' paralelas a t e tangentes a λ. São elas:

s: $4x + 3y + 15 = 0$ e s': $4x + 3y - 5 = 0$

Graficamente, temos:



R.3 Determinar uma equação da reta s que passa pelo ponto $P(5, 4)$ e tangencia a circunferência

$$\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

Resolução

O ponto P pertence à circunferência λ, pois:

$$5^2 + 4^2 - 4 \cdot 5 - 6 \cdot 4 + 3 = 0$$

Logo, existe uma única reta s que passa por P e é tangente a λ.

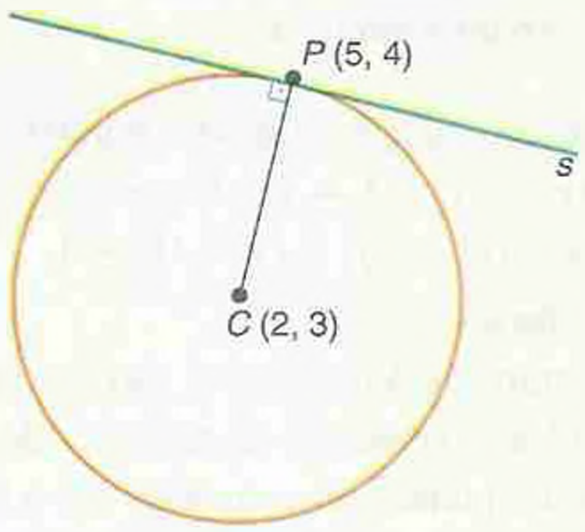
Vamos obter o centro C e o raio R de λ pelo método da redução:

$(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) = -3$

$\therefore\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -3 + 4 + 9$

$\therefore\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10 \quad \therefore\ C(2, 3)$ e $R = \sqrt{10}$

A reta s tangente à circunferência λ em P é perpendicular ao raio no ponto de tangência:



Assim, o coeficiente angular da reta s é o oposto do inverso do coeficiente angular da reta $\overline{CP}$, ou seja:

$$m_s = -\frac{1}{m_{CP}}$$

Como $m_{CP} = \dfrac{4 - 3}{5 - 2} = \dfrac{1}{3}$, concluímos que $m_s = -3$.

Logo, pela equação fundamental da reta:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$$s \begin{cases} P(5, 4) \\ m_s = -3 \end{cases} \Rightarrow y - 4 = -3(x - 5)$$

$\therefore\ s: 3x + y - 19 = 0$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Dê a posição da reta s em relação à circunferência λ, em cada um dos casos a seguir.

a) $s: x + y - 4 = 0$ e $\lambda: (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 2$

b) $s: 2x + y - 4 = 0$ e $\lambda: (x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 20$

c) $s: x - 3y + 8 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$

d) $s: 3x - 4y + 15 = 0$ e $\lambda: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

e) $s: 2x - y + 1 = 0$ e $\lambda: (x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

f) $s: 4x + 3y + 8 = 0$ e $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$

B.2 (PUC/Campinas-SP) Considere a circunferência dada por $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ e as retas de equação $y - x + k = 0$. Uma dessas retas é tangente à circunferência se o valor de k for:

a) $3\sqrt{2}$ c) -3 e) $-4\sqrt{3}$

b) 3 d) $-2\sqrt{3}$

B.3 Obtenha as equações das retas paralelas à reta $t: 3x + 4y + 1 = 0$ e tangentes à circunferência $\lambda: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$.

B.4 (COVEST) Determine as equações das retas tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e paralelas à reta de equação $x - y = 0$.

B.5 (FEI-SP) Qual deve ser o raio da circunferência com centro no ponto $O = (0, 0)$ para que a reta $x - 2y - 10 = 0$ seja tangente a essa circunferência?

a) $4\sqrt{2}$ c) 20 e) $4\sqrt{5}$

b) $2\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{2}$

B.6 (Unifor-CE) Uma circunferência λ é tal que seu centro pertence à bissetriz dos quadrantes pares e à reta de equação $2x - y - 6 = 0$. Se λ é tangente aos eixos coordenados, a sua equação é:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$

B.7 (U. Católica de Salvador-BA) A circunferência λ tem equação $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$. A reta t é tangente a λ no ponto $(1, 0)$. A equação de t é:

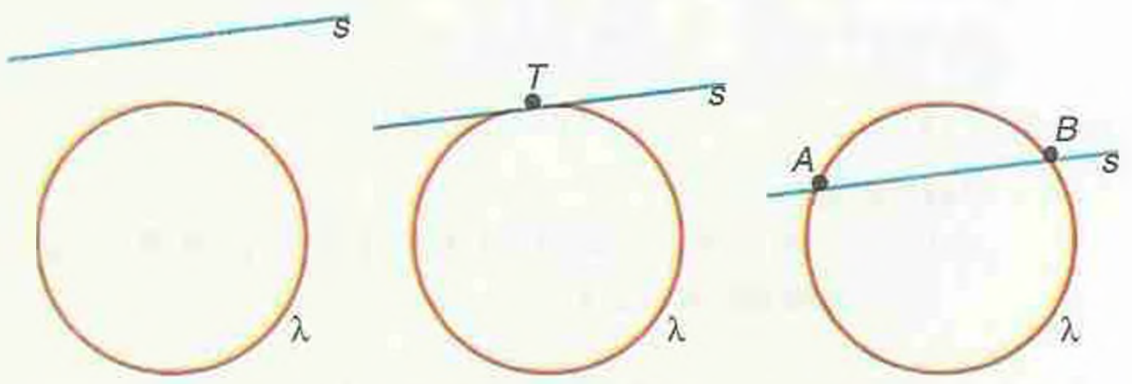
a) $x = 1$ c) $x + y = 1$ e) $-x - y = 1$

b) $y = 1$ d) $3x - y = 2$

Exercícios complementares de C.1 a C.4

2. INTERSECÇÃO DE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

O conjunto intersecção de uma reta s com uma circunferência λ, contidas em um mesmo plano, pode ser vazio, unitário ou binário.



$s \cap \lambda = \varnothing$ (**s é exterior a λ**)

$s \cap \lambda = \{T\}$ (**s é tangente a λ**)

$s \cap \lambda = \{A, B\}$ (**s é secante a λ**)

Em qualquer um dos três casos, sendo conhecidas as equações de

$s: ax + by + c = 0$ e $\lambda: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

o conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Esse sistema:

- é impossível se, e somente se, s é **exterior** a λ;
- tem uma única solução se, e somente se, s é **tangente** a λ;
- tem exatamente duas soluções se, e somente se, s é **secante** a λ.

Conclusão sobre a posição relativa entre reta e circunferência a partir do sistema formado por suas equações

Sejam $ax + by + c = 0$ e $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ as equações de uma reta s e de uma circunferência λ, respectivamente. Para resolver o sistema:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

isolamos uma das variáveis na equação da reta s e a substituímos na equação da circunferência λ. Se com essa substituição obtivermos:

- uma equação do 2º grau com **discriminante positivo**, então a reta s é **secante** à circunferência λ;
- uma equação do 2º grau com **discriminante negativo**, então a reta s é **exterior** à circunferência λ;
- uma equação do 2º grau com **discriminante nulo**, então a reta s é **tangente** à circunferência λ.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Obter a intersecção da reta s: $x - y + 1 = 0$ com a circunferência λ: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Resolução

O conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema:

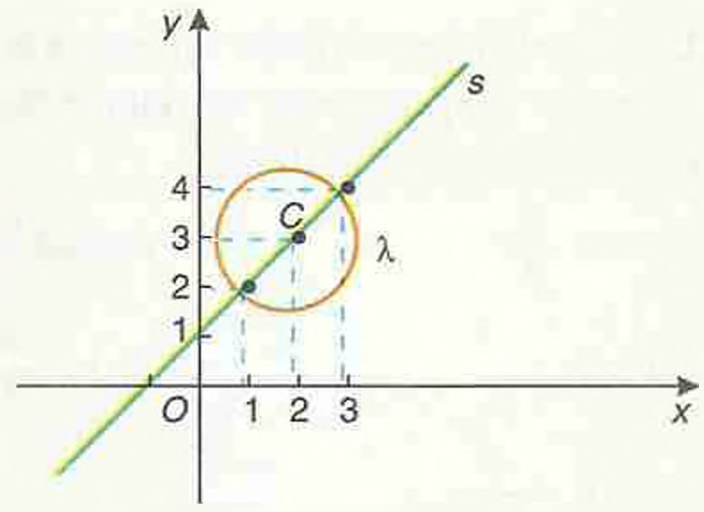
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1 \quad \text{(I)} \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(y - 1 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$
$\therefore (y - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2$
$\therefore 2(y - 3)^2 = 2 \quad \therefore (y - 3)^2 = 1$
$\therefore y - 3 = 1$ ou $y - 3 = -1 \quad \therefore y = 4$ ou $y = 2$

Substituindo $y = 4$ em (I), temos $x = 4 - 1 \quad \therefore x = 3$.
Substituindo $y = 2$ em (I), temos $x = 2 - 1 \quad \therefore x = 1$.
Logo, $s \cap \lambda = \{(3, 4), (1, 2)\}$.

Graficamente, temos:



EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.8 Determine a intersecção da reta s com a circunferência λ, nos seguintes casos:

a) s: $x - y - 3 = 0$ e λ: $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 20$

b) s: $x - 2y + 1 = 0$ e λ: $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$

c) s: $y = 2x + 1$ e λ: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$

d) s: $3x - y = 0$ e λ: $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$

B.9 Obtenha a intersecção da circunferência λ: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$ com o eixo das abscissas.
Sugestão. A equação do eixo das abscissas é $y = 0$.

B.10 Determine a intersecção da circunferência λ: $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 22 = 0$ com o eixo das ordenadas.

B.11 (Fuvest-SP) Existem dois valores de m para os quais tem solução única o sistema $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$. A soma desses dois valores de m é:

a) -2 c) 0 e) $2\sqrt{2}$

b) $-2\sqrt{2}$ d) 2

B.12 (UFPA) A reta de equação $x + 2y = 0$ intercepta a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ de centro C, nos pontos A e B. Determine:
a) os pontos A, B e C;
b) a área do triângulo ABC.

B.13 Calcule o comprimento da corda que a reta s: $x + y - 4 = 0$ determina na circunferência λ: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **Sugestão**. Inicialmente, determine os pontos A e B de intersecção da reta s com a circunferência λ. A distância entre os pontos A e B é o comprimento da corda $\overline{AB}$.

B.14 (UFRS) O eixo das abscissas determina na circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ uma corda de comprimento:

a) $2\sqrt{5}$ c) 6 e) 8

b) 5 d) 7

Exercícios complementares de C.5 a C.7

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (U. F. Santa Maria-RS) Os valores de m, para que a reta $y = mx + 1$ seja tangente à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$, são:

a) -2 e $\frac{1}{2}$

b) 1 e 2

c) -1 e $-\frac{4}{3}$

d) 0 e $\frac{4}{3}$

e) 1 e $\frac{4}{3}$

C.2 (FEI-SP) Uma das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 9$ traçada a partir do ponto (0, 5) tem equação:

a) $4x + 3y - 15 = 0$

b) $3x + 4y - 20 = 0$

c) $x + y - 1 = 0$

d) $3x - y = 0$

e) $x = 0$

Sugestão. Como o centro C e o raio R da circunferência são $C(0, 0)$ e $R = 3$, conclui-se que a reta que passa por (0, 5) e tangencia a circunferência não é vertical, e, portanto, tem coeficiente angular m. Sendo assim, a equação dessa reta é da forma $y - 5 = m(x - 0)$, isto é, $mx - y + 5 = 0$.

C.3 (Fuvest-SP) Uma reta de coeficiente angular $m > 0$ passa pelo ponto (2, 0) e é tangente à circunferência inscrita no quadrado de vértices (1, 1), (5, 1), (5, 5) e (1, 5). Então:

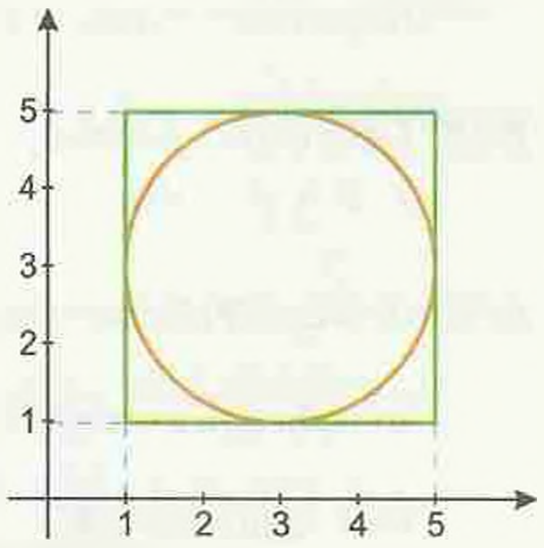
a) $0 < m < \frac{1}{3}$

b) $m = \frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3} < m < 1$

d) $m = 1$

e) $1 < m < \frac{5}{3}$



C.4 (Fuvest-SP) Uma circunferência de raio 2, localizada no primeiro quadrante, tangencia o eixo x e a reta de equação $4x - 3y = 0$. Então a abscissa do centro dessa circunferência é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

C.5 (UFRS) O comprimento da corda que a reta r definida pela equação $2x - y = 0$ determina na circunferência de centro no ponto $C(2, 0)$ e raio $r = 2$ é:

a) 0

b) 2

c) 5

d) $\frac{\sqrt{10}}{5}$

e) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

C.6 (Cefet-RJ) Em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, considera-se a circunferência de centro sobre a reta $x - y + 3 = 0$ e que passa pelos pontos $A(-2, 4)$ e $B(1, 7)$. O comprimento da corda que a bissetriz dos quadrantes ímpares determina sobre a circunferência é, em u.c., igual a:

a) 2

b) $2\sqrt{2}$

c) 3

d) $3\sqrt{2}$

e) $5\sqrt{2}$

C.7 (ITA-SP) Sabendo que o ponto (2, 1) é o ponto médio de uma corda $\overline{AB}$ da circunferência $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, então a equação da reta que passa por A e B é dada por:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = x - 1$

c) $y = -x + 3$

d) $y = \frac{3x}{2} - 2$

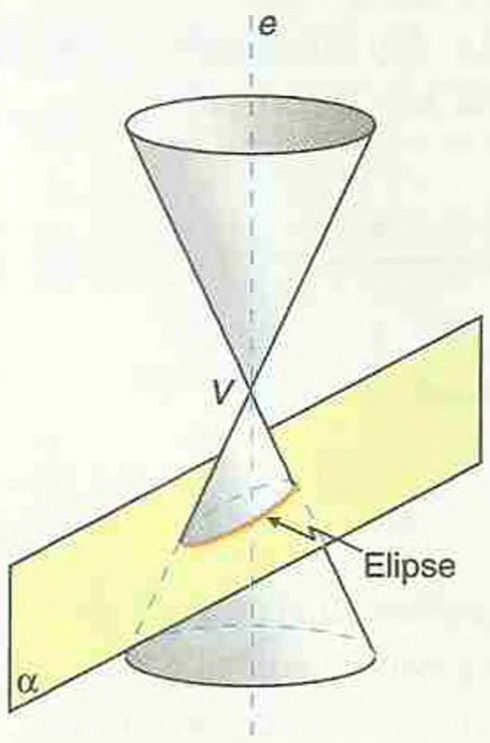
e) $y = -\frac{x}{2} + 2$

Capítulo 60

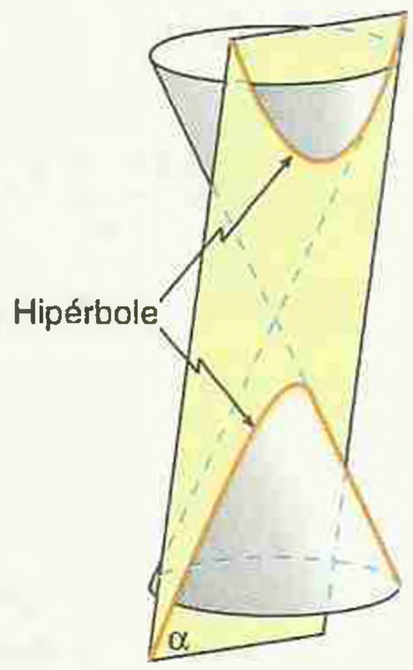
AS CÔNICAS: ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA

1. O QUE É UMA CÔNICA?

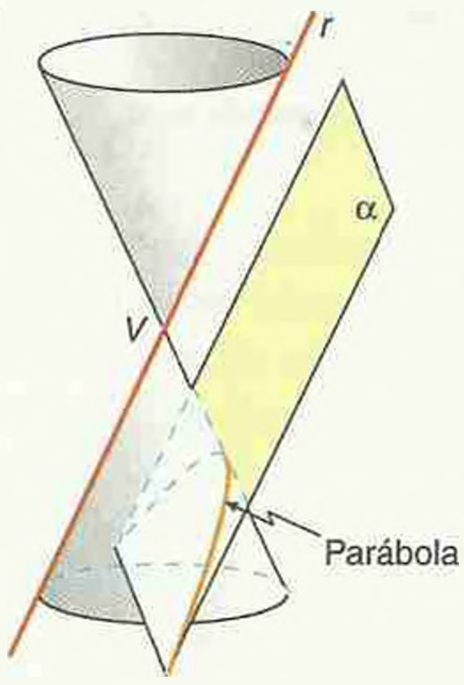
Qualquer figura geométrica obtida pela intersecção de um plano α com uma superfície cônica $\mathcal{C}$ de duas folhas infinitas é chamada de **cônica**. Neste capítulo estudaremos as seguintes cônicas:



Elipse: α não passa pelo vértice V e intercepta todas as geratrizes de $\mathcal{C}$ obliquamente ao eixo de rotação e.



Hipérbole: α não passa pelo vértice V e intercepta as duas folhas de $\mathcal{C}$.

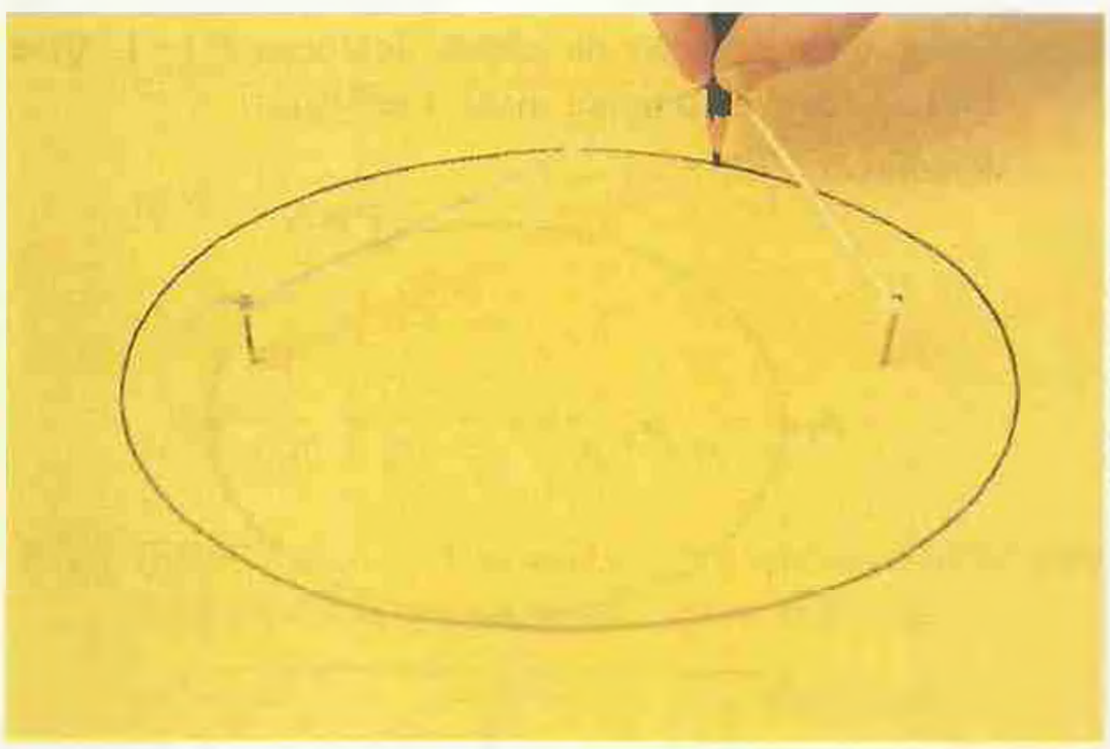


Parábola: α não passa pelo vértice V e é paralelo a uma geratriz de $\mathcal{C}$.

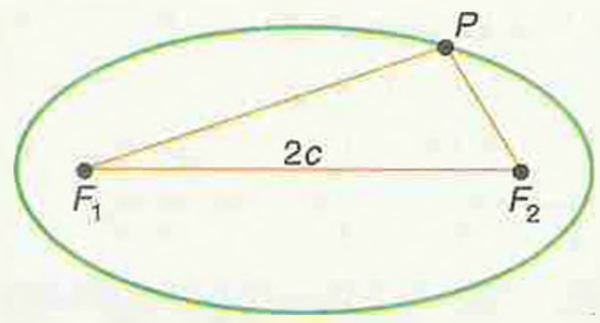
2. ELIPSE

Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α, tal que $F_1F_2 = 2c$, $c > 0$, chama-se **elipse** o conjunto dos pontos P de α cuja soma das distâncias PF_1 e PF_2 é uma constante $2a$, $2a > 2c$:

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

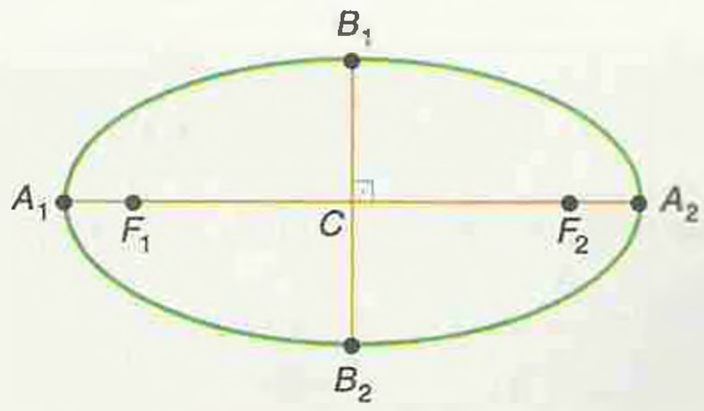


LUIZ ANTONIO & SÉRGIO SCAZUFCA



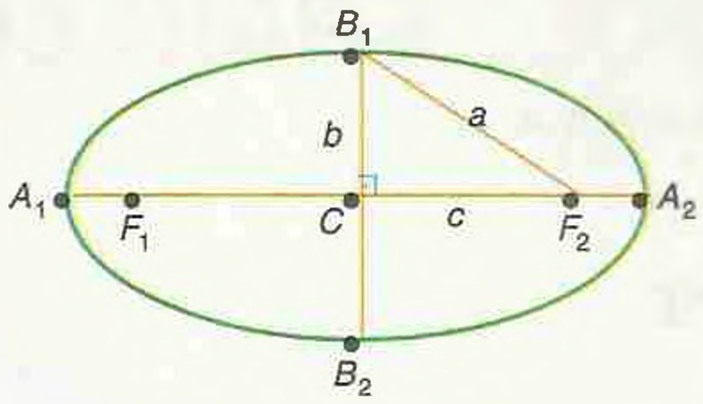
$PF_1 + PF_2 = 2a,\ 2a > 2c > 0$

- Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse; a medida $2c$ é a **distância focal**; e a medida c é a **semidistância focal**.
- Qualquer segmento de reta cujos extremos são pontos da elipse é chamado de **corda da elipse**.
- A corda $\overline{A_1A_2}$ que passa pelos focos é chamada de **eixo maior** da elipse e sua medida é $2a$.



- O ponto médio C do eixo maior (e também do segmento $\overline{F_1F_2}$) é chamado de **centro** da elipse, sendo $\overline{A_1C}$ e $\overline{A_2C}$ os **semi-eixos maiores**.

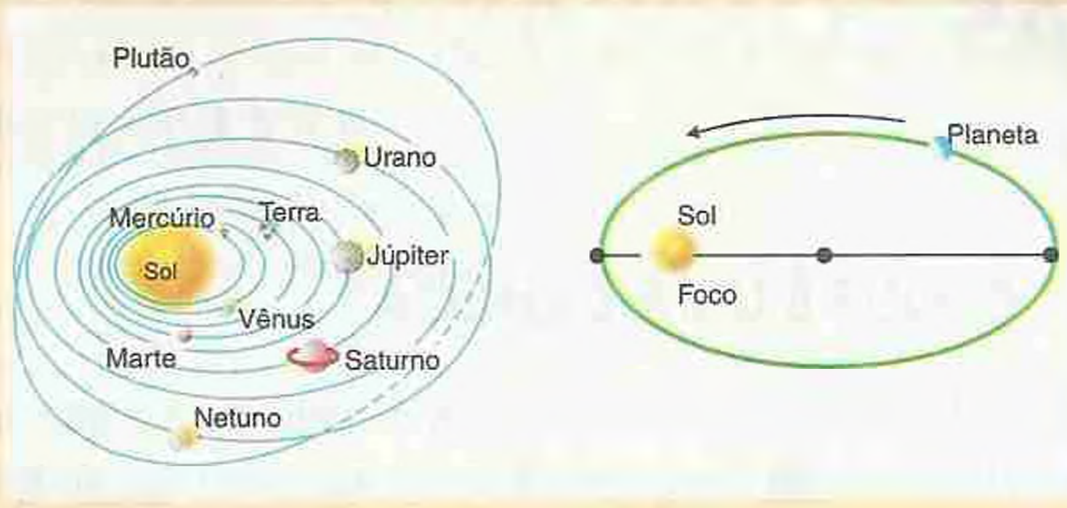
- A corda $\overline{B_1B_2}$, que passa por C e é perpendicular ao eixo maior, é o **eixo menor** da elipse. Os segmentos $\overline{B_1C}$ e $\overline{B_2C}$ são os **semi-eixos menores**. Esses semi-eixos têm medidas iguais que serão indicadas por b.
- $B_1F_1 = B_1F_2 = a$
- $a^2 = b^2 + c^2$



- O número $e = \frac{c}{a}$, chamado de **excentricidade** da elipse, é tal que $0 < e < 1$.

As trajetórias dos planetas

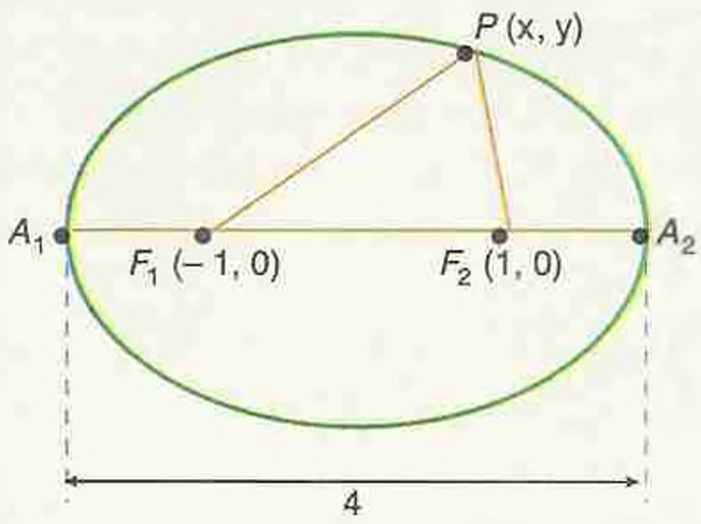
O astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) provou que cada um dos planetas descreve uma órbita elíptica em torno do Sol e que este é um dos focos da elipse descrita.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Obter uma equação da elipse de focos $F_1(-1, 0)$ e $F_2(1, 0)$, cujo eixo maior mede 4 unidades.

Resolução



Obtém-se uma equação da elipse considerando um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $PF_1 + PF_2 = 4$, ou seja:

$$\sqrt{(x-(-1))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = 4$$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$$

$$\therefore \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$(\sqrt{(x+1)^2 + y^2})^2 = (4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2})^2$$

$$\therefore (x+1)^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + (x-1)^2 + y^2$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 16 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + x^2 - 2x + 1$$

$$\therefore 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 16 - 4x$$

$$\therefore 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 - x$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$(2\sqrt{(x-1)^2 + y^2})^2 = (4-x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4[(x-1)^2 + y^2] = (4-x)^2$$

$$\therefore 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = 16 - 8x + x^2$$

$$\therefore 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 16 + 8x - x^2 = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$$

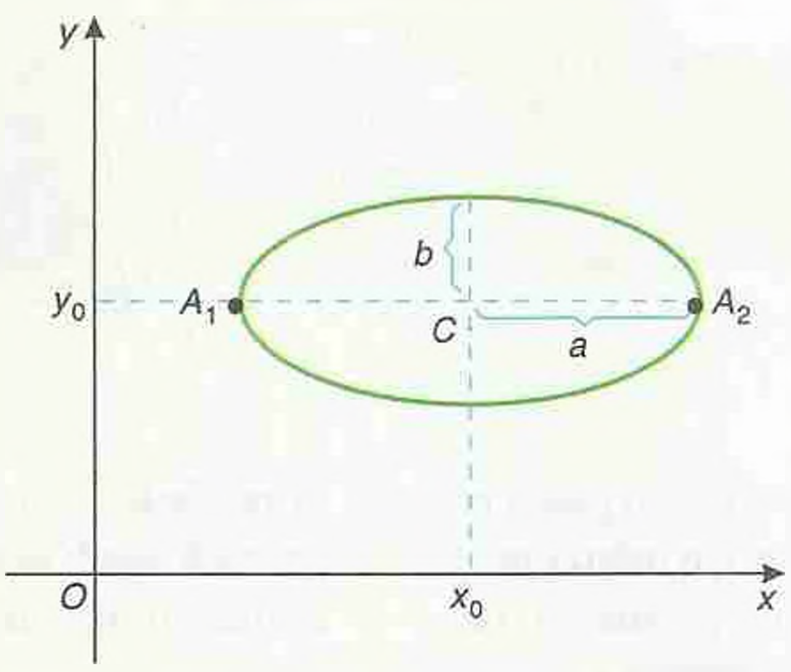
Equação reduzida de uma elipse

Se uma elipse de centro $C(x_0, y_0)$, com eixo maior de medida $2a$ e eixo menor de medida $2b$, tem:

- o eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

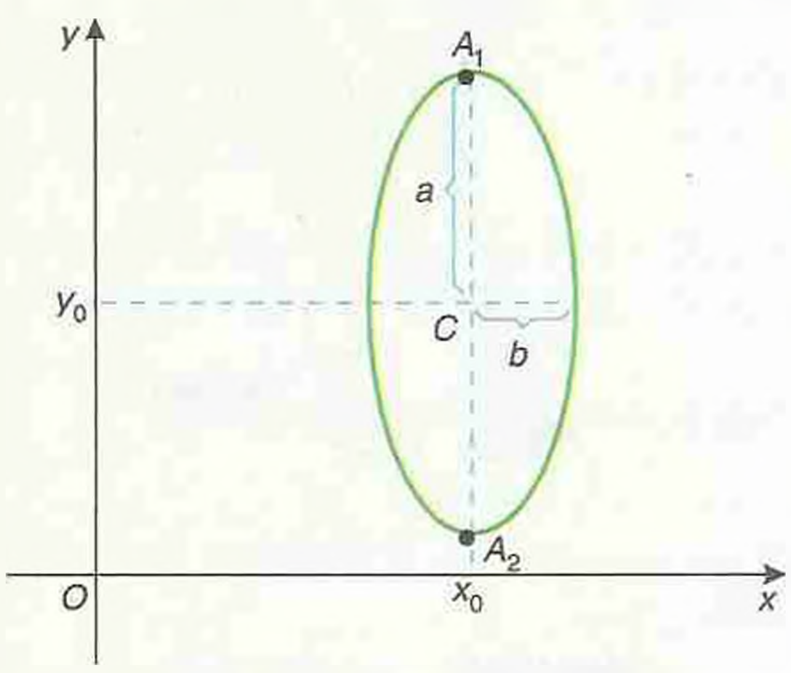
Primeiro caso



- o eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

Segundo caso

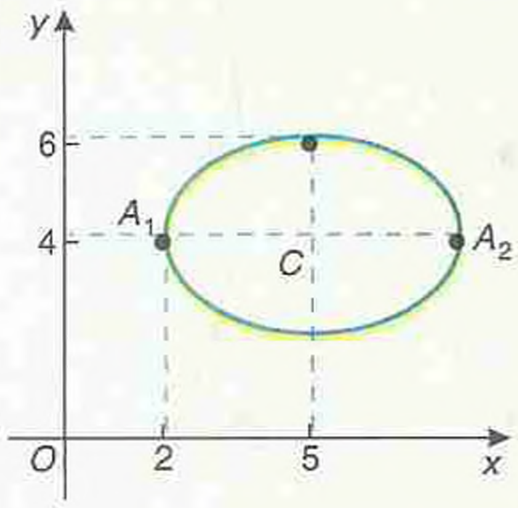


Essas duas equações são denominadas **equações reduzidas** das elipses.

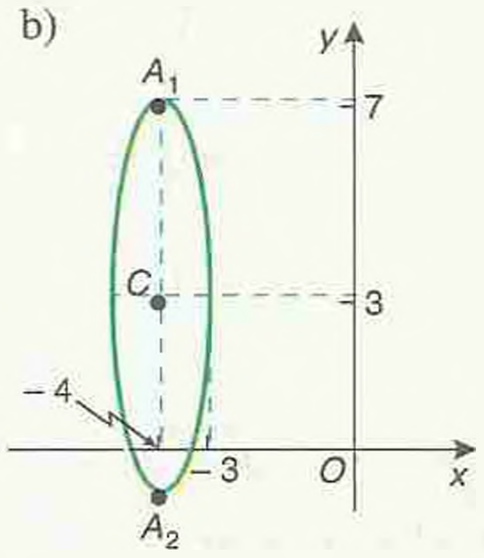
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.2 Obter a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a)



b)



Resolução

a) Temos, pelo gráfico, que:
- o centro da elipse é o ponto $C(5, 4)$;
- a medida do semi-eixo maior (metade do eixo maior) é $a = 5 - 2 = 3$;
- a medida do semi-eixo menor é $b = 6 - 4 = 2$;
- o eixo maior é paralelo ao eixo das abscissas.

Logo, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

em que $x_0 = 5$, $y_0 = 4$, $a = 3$ e $b = 2$, ou seja:

$$\frac{(x - 5)^2}{9} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1$$

b) Temos, pelo gráfico, que:
- o centro da elipse é o ponto $C(-4, 3)$;
- a medida do semi-eixo maior é $a = 7 - 3 = 4$;
- a medida do semi-eixo menor é $b = -3 - (-4) = 1$;
- o eixo maior é paralelo ao eixo das ordenadas.

Logo, a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

em que $x_0 = -4$, $y_0 = 3$, $b = 1$ e $a = 4$, ou seja:

$$\frac{(x + 4)^2}{1} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$$

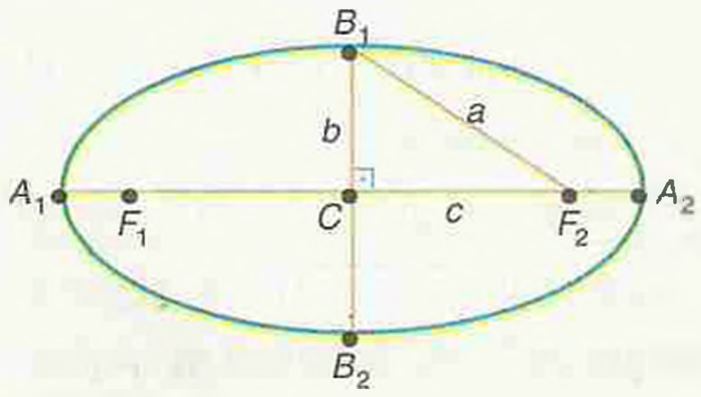
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule a distância focal, a excentricidade e a medida do eixo menor da elipse de focos F_1 e F_2, cujo eixo maior mede $2a$, em cada um dos seguintes casos:

a) $F_1(7, 2)$, $F_2(13, 2)$ e $2a = 10$

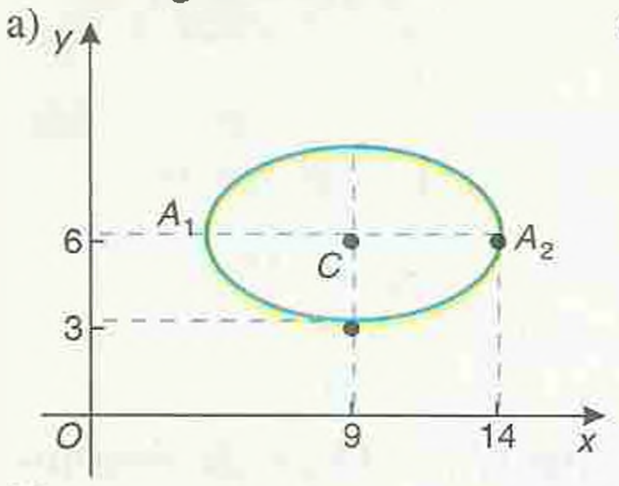
b) $F_1(3, 4)$, $F_2(3, 14)$ e $2a = 26$

Sugestão. $a^2 = b^2 + c^2$.

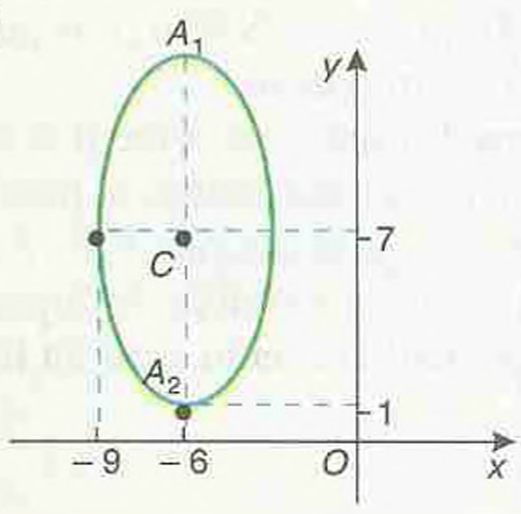


B.2 Obtenha a equação reduzida da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

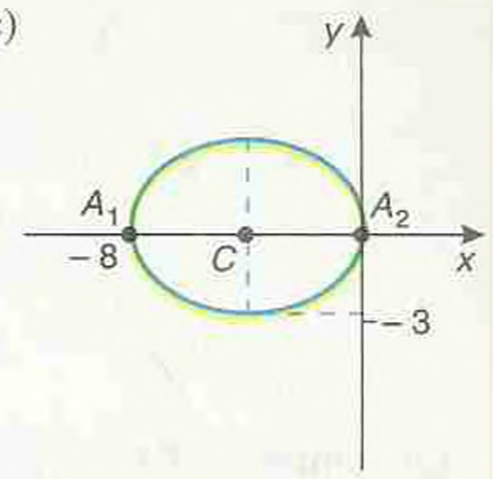
a)



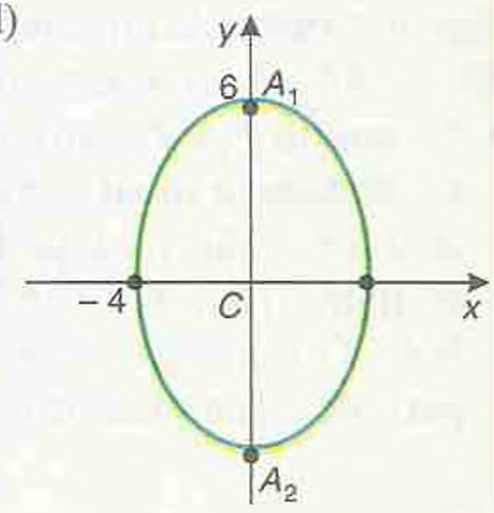
b)



c)



d)



B.3 Esboce o gráfico da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathscr{E}$: $\frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1$

b) $\mathscr{E}$: $\frac{(x - 6)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1$

c) $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

d) $\mathscr{E}$: $\frac{x^2}{25} + \frac{(y - 5)^2}{16} = 1$

B.4 (EESCUSP-SP) O centro (x_0, y_0), a medida do eixo maior $2a$ e a medida do eixo menor $2b$ da elipse $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$ são dados por:

a) $x_0 = 4$, $y_0 = 16$, $2a = 6$ e $2b = 4$

b) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $2a = 4$ e $2b = 2$

c) $x_0 = -2$, $y_0 = -3$, $2a = 16$ e $2b = 4$

d) $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $2a = 20$ e $2b = 10$

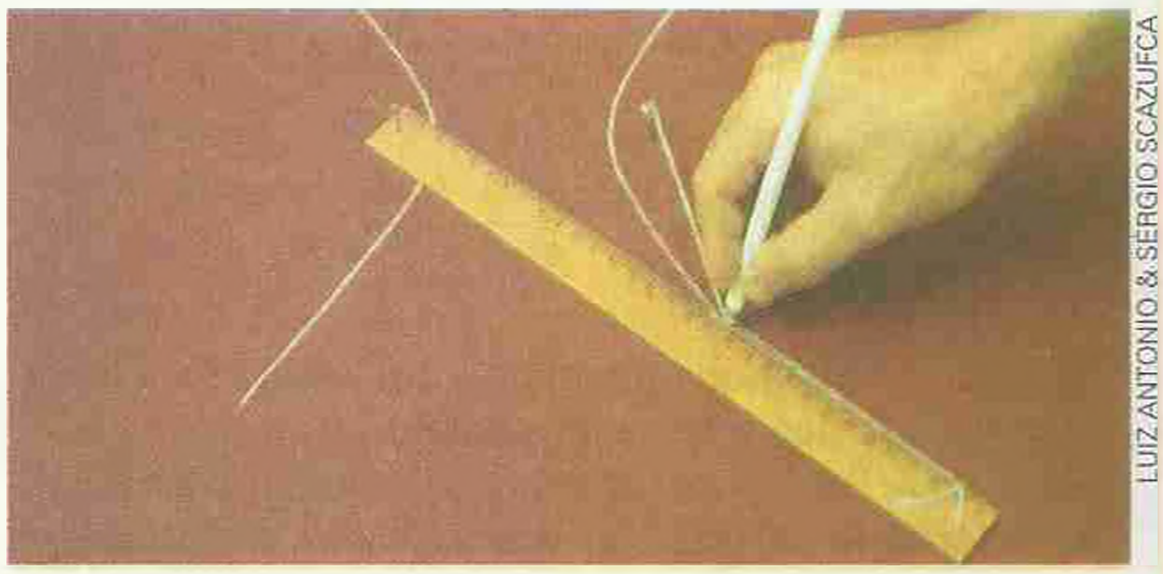
e) $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $2a = 8$ e $2b = 4$

Exercícios complementares de C.1 a C.4

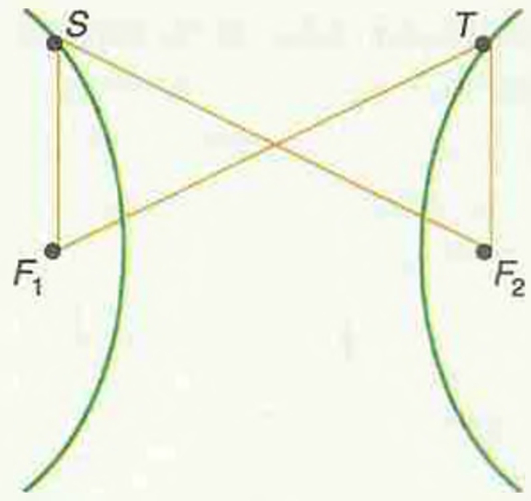
3. HIPÉRBOLE

Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano α tais que $F_1F_2 = 2c$, $c > 0$, chama-se **hipérbole** o conjunto dos pontos P de α cujas diferenças, em módulo, das distâncias PF_1 e PF_2 são uma constante $2a$, $0 < 2a < 2c$, ou seja:

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

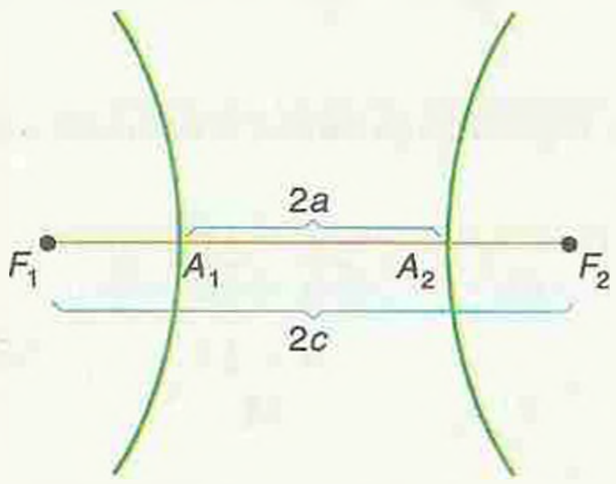


LUIZ ANTONIO & SÉRGIO SCAZUFCA

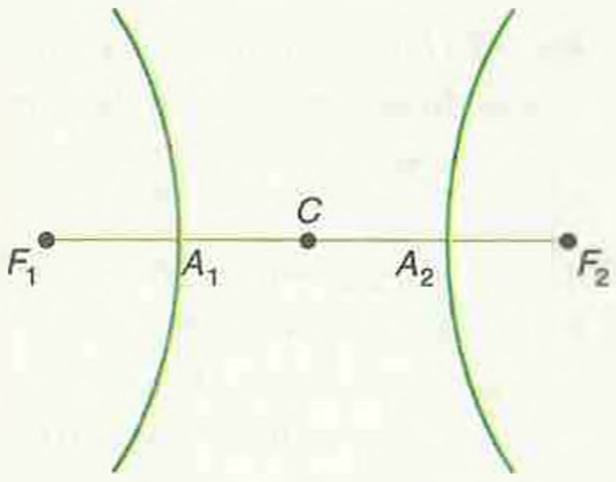


Os pontos T, $T \in \alpha$, tais que $TF_1 - TF_2 = 2a$ determinam um **ramo** da hipérbole, e os pontos S, $S \in \alpha$, tais que $SF_2 - SF_1 = 2a$ determinam o outro **ramo**.

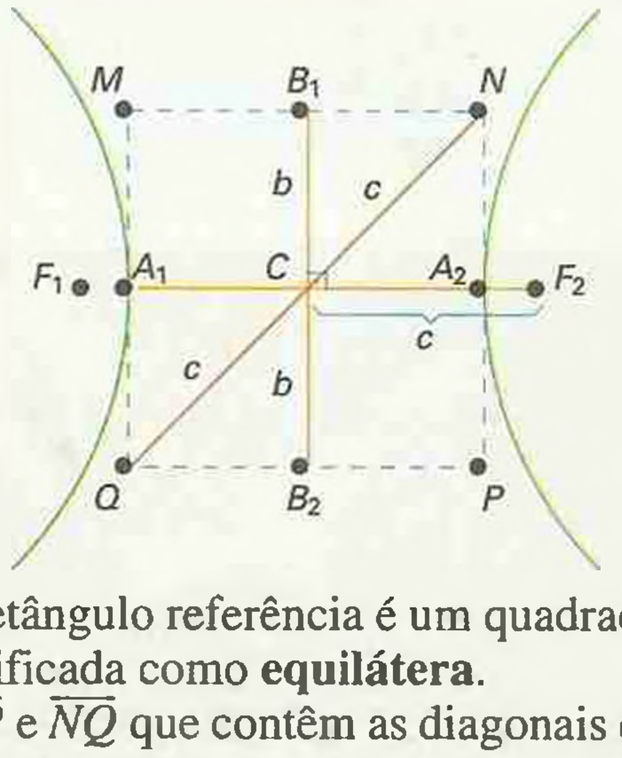
- Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da hipérbole; a medida $2c$ é a **distância focal**; a medida c é a **semidistância focal**.
- A intersecção da hipérbole com o segmento $\overline{F_1F_2}$ é o conjunto $\{A_1, A_2\}$, sendo A_1 e A_2 os **vértices** da hipérbole. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de **eixo real** da hipérbole e sua medida é $2a$.



- O ponto médio C do eixo real (e também do segmento $\overline{F_1F_2}$) é chamado de **centro** da hipérbole, sendo $\overline{A_1C}$ e $\overline{A_2C}$ os **semi-eixos reais**.

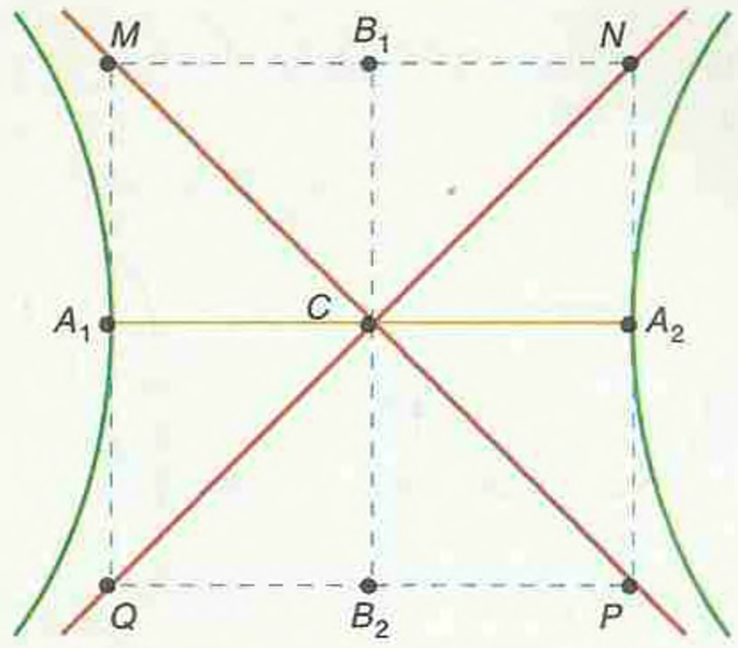


- Chama-se **retângulo referência da hipérbole** o retângulo $MNPQ$ de centro C, com $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ perpendiculares ao eixo real em A_1 e A_2, respectivamente, e $CN = CQ = c$. O segmento $\overline{B_1B_2}$ perpendicular a $\overline{A_1A_2}$ em C, com $B_1 \in \overline{MN}$ e $B_2 \in \overline{PQ}$, é o **eixo imaginário** da hipérbole. Os segmentos $\overline{B_1C}$ e $\overline{B_2C}$ são chamados de **semi-eixos imaginários**. Esses semi-eixos têm medidas iguais que serão indicadas por b.

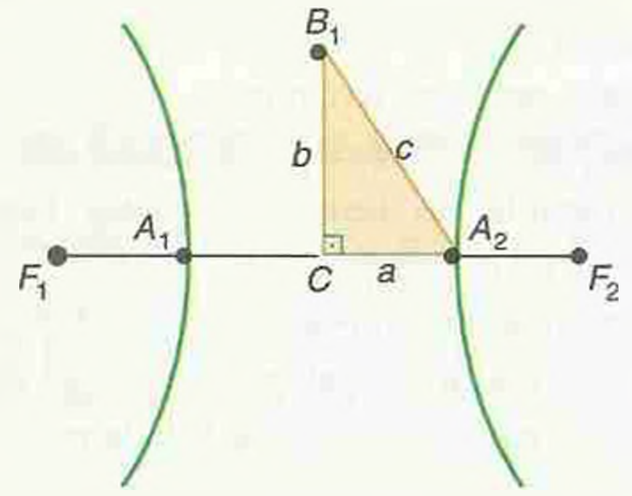


Quando o retângulo referência é um quadrado, a hipérbole é classificada como **equilátera**.

- As retas $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$ que contêm as diagonais do retângulo referência $MNPQ$ são denominadas **assíntotas** da hipérbole. A hipérbole aproxima-se indefinidamente de cada assíntota, sem jamais tocá-la.



- $c^2 = a^2 + b^2$

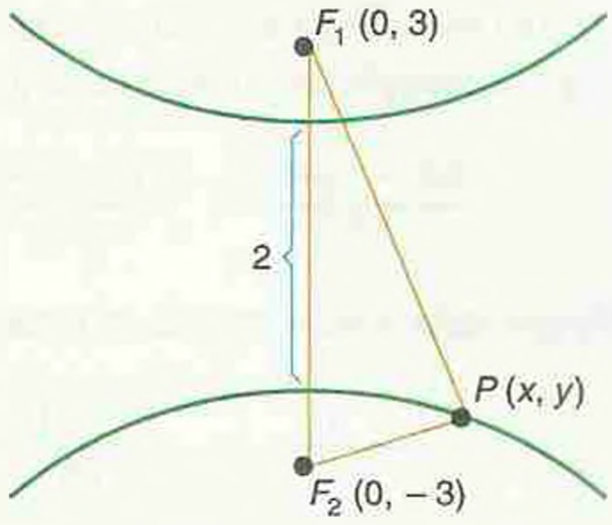


- O número $e = \frac{c}{a}$, denominado **excentricidade** da hipérbole, é tal que $e > 1$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Obter uma equação da hipérbole de focos $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$, cujo eixo real mede 2 unidades.

Resolução



Uma equação da hipérbole é obtida considerando-se um ponto genérico $P(x, y)$ e impondo que $|PF_1 - PF_2| = 2$, ou seja:

$$\left|\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + [y-(-3)]^2}\right| = 2$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y-3)^2} - \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = \pm 2$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \pm 2 + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

Quadrando ambos os membros, temos:

$$\left(\sqrt{(x^2 + (y-3)^2)}\right)^2 = \left(\pm 2 + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}\right)^2$$

$$\therefore x^2 + (y-3)^2 =$$

$$= 4 \pm 4\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + x^2 + (y+3)^2$$

$$\therefore y^2 - 6y + 9 =$$

$$= 4 \pm 4\sqrt{x^2 + (y+3)^2} + y^2 + 6y + 9$$

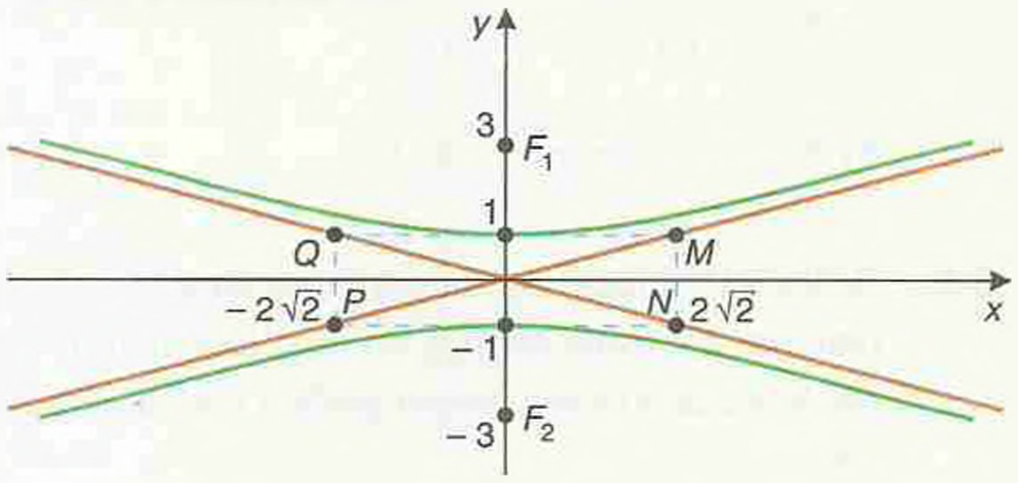
$$\therefore \pm 4\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 12y + 4$$

$$\therefore \pm\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 3y + 1$$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$$(\pm\sqrt{x^2 + (y+3)^2})^2 = (3y+1)^2$$
$$\therefore\ x^2 + (y+3)^2 = (3y+1)^2$$
$$\therefore\ x^2 + y^2 + 6y + 9 = 9y^2 + 6y + 1$$
$$\therefore\ 8y^2 - x^2 - 8 = 0$$

Graficamente, temos:



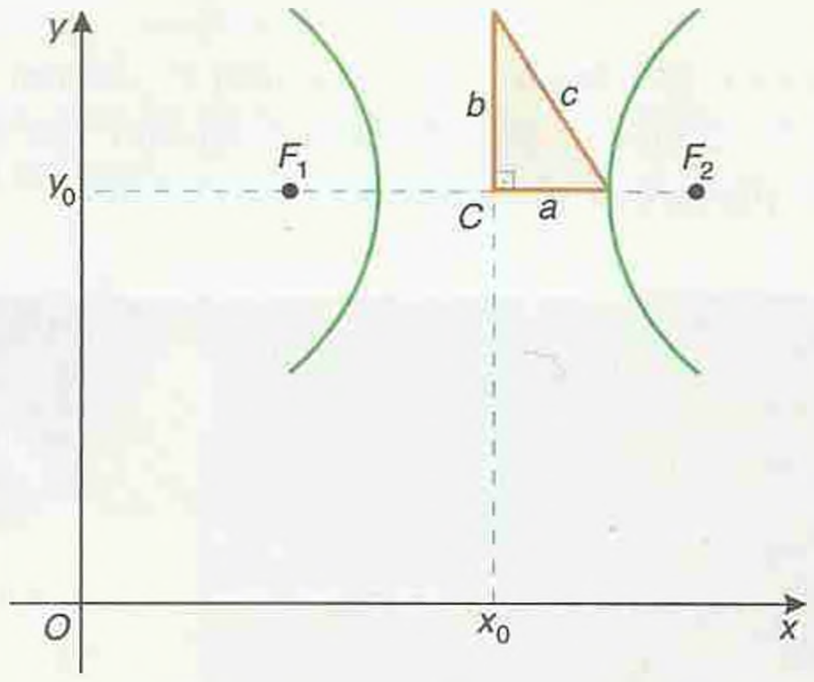
Equação reduzida de uma hipérbole

Se uma hipérbole de centro $C(x_0, y_0)$, com eixo real de medida $2a$ e eixo imaginário de medida $2b$, tem:

- o eixo real paralelo ao eixo das abscissas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

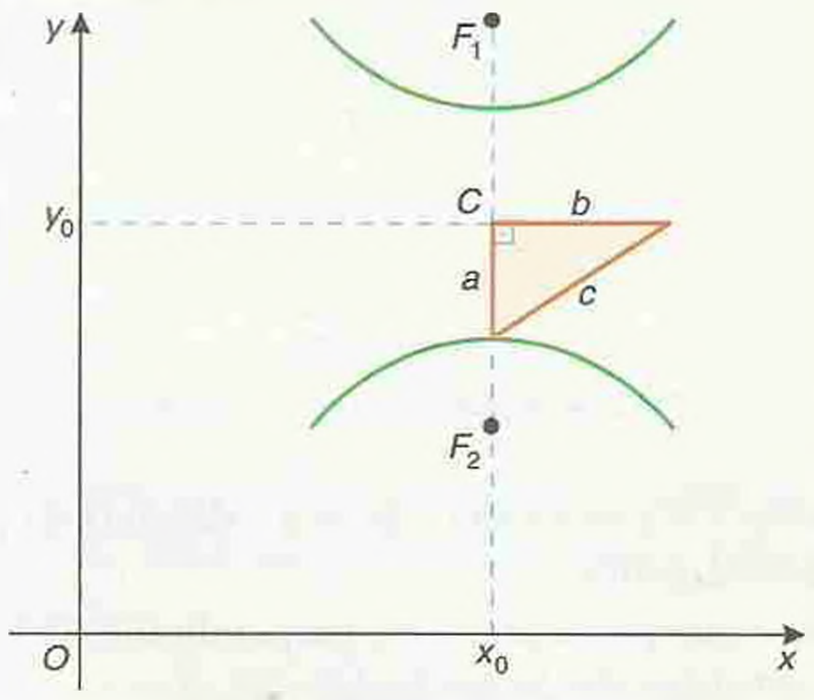
Primeiro caso



- o eixo real paralelo ao eixo das ordenadas, então sua equação pode ser apresentada sob a forma:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

Segundo caso

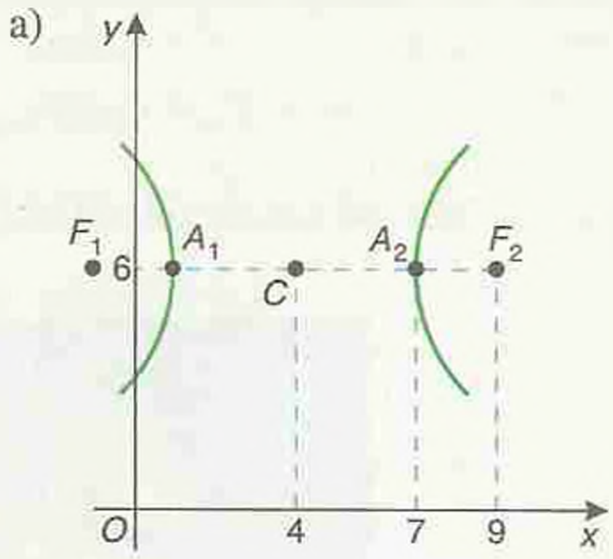


Essas duas equações são denominadas "**equações reduzidas** das hipérboles".

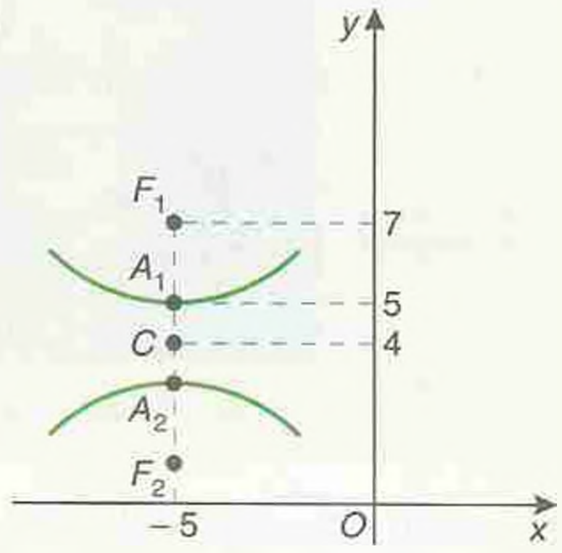
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Obter a equação reduzida da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a)



b)



Resolução

a) Temos, pelo gráfico, que:

- o centro da hipérbole é o ponto $C(4, 6)$;
- a medida do semi-eixo real é $a = 7 - 4 = 3$;
- a semidistância focal é $c = 9 - 4 = 5$;
- a medida b do semi-eixo imaginário é obtida por:

$$c^2 = a^2 + b^2\ \therefore\ 5^2 = 3^2 + b^2$$
$$\therefore\ b^2 = 16\ \therefore\ b = 4$$

- o eixo real é paralelo ao eixo das abscissas.

Logo, a equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

em que $x_0 = 4$, $y_0 = 6$, $a = 3$ e $b = 4$, ou seja:

$$\frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y-6)^2}{16} = 1$$

b) Temos, pelo gráfico, que:

- o centro da hipérbole é o ponto $C(-5, 4)$;
- a medida do semi-eixo real é $a = 5 - 4 = 1$;
- a semidistância focal é $c = 7 - 4 = 3$;
- a medida b do semi-eixo imaginário é obtida por:

$$c^2 = a^2 + b^2\ \therefore\ 3^2 = 1^2 + b^2$$
$$\therefore\ b^2 = 8\ \therefore\ b = 2\sqrt{2}$$

- o eixo real é paralelo ao eixo das ordenadas.

Logo, a equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

em que $x_0 = -5$, $y_0 = 4$, $a = 1$ e $b = 2\sqrt{2}$, ou seja:

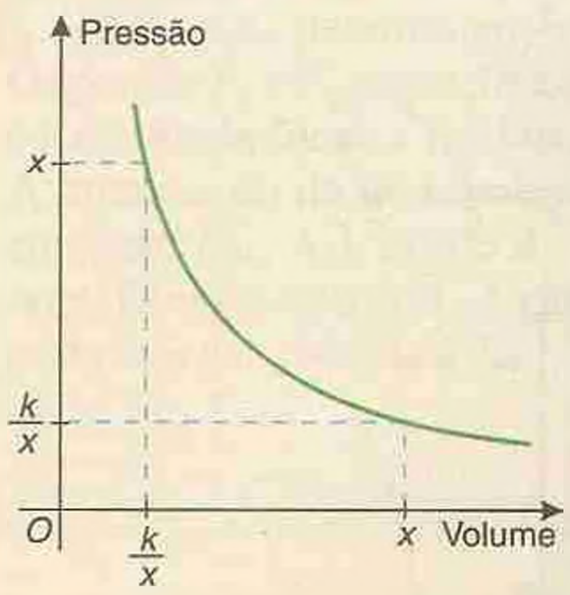
$$\frac{(y-4)^2}{1} - \frac{(x+5)^2}{8} = 1$$

A hipérbole e a lei de Boyle

No estudo dos gases, o cientista britânico Robert Boyle constatou que, mantendo-se constante a temperatura de uma certa quantidade de gás, a pressão y e o volume x desse gás variam de modo inversamente proporcionais, isto é:

$yx = k$ ou $y = \frac{k}{x}$ (k representa um valor numérico constante)

O gráfico de y em função de x é um ramo de uma hipérbole equilátera.



Robert Boyle (1627-1691).

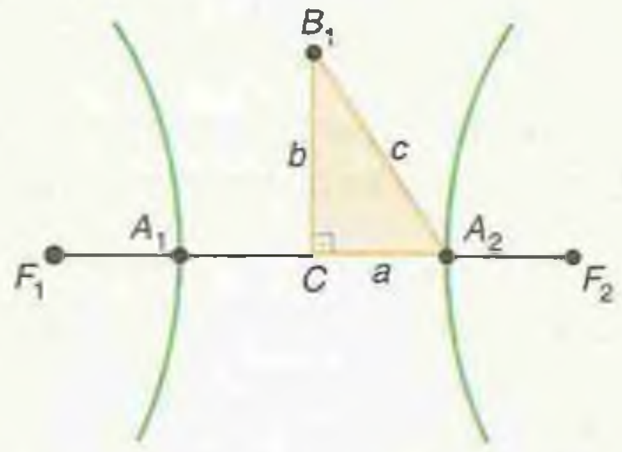
EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.5 Calcule a distância focal, a excentricidade e a medida do eixo imaginário da hipérbole de focos F_1 e F_2, cujo eixo real mede $2a$, em cada um dos seguintes casos:

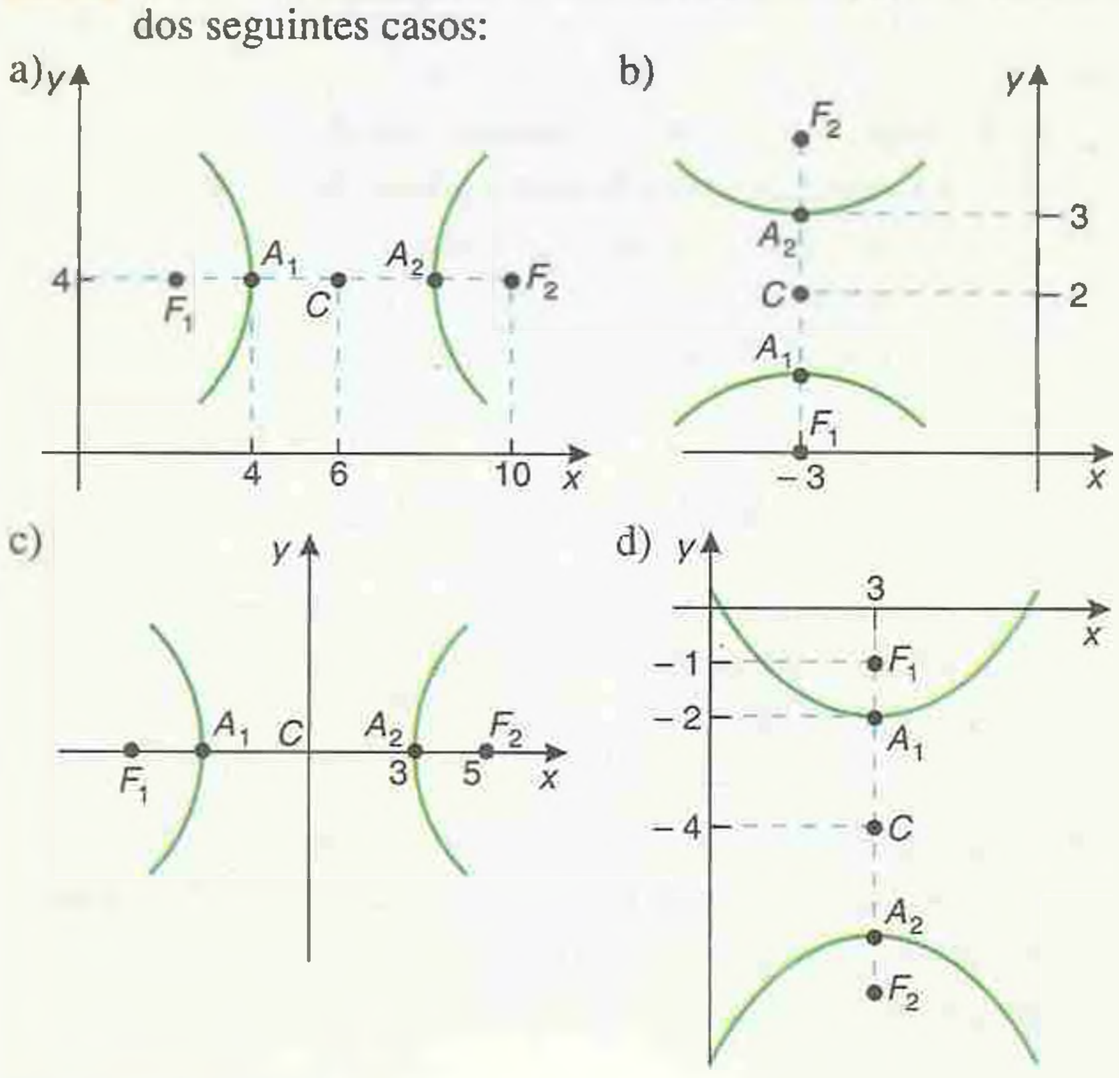
a) $F_1(5, 0)$, $F_2(15, 0)$ e $2a = 6$

b) $F_1(1, 1)$, $F_2(1, 13)$ e $2a = 2$

Sugestão. $c^2 = a^2 + b^2$.



B.6 Obtenha a equação reduzida da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:



B.7 Esboce o gráfico da hipérbole $\mathcal{H}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathcal{H}$: $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

b) $\mathcal{H}$: $(y+1)^2 - \frac{x^2}{8} = 1$

c) $\mathcal{H}$: $\frac{(x-2)^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

d) $\mathcal{H}$: $y^2 - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$

B.8 (UNIR) Hipérbole equilátera é toda aquela em que o eixo real tem a mesma medida do eixo imaginário. Qual das equações abaixo tem como gráfico uma hipérbole equilátera?

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

c) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1$

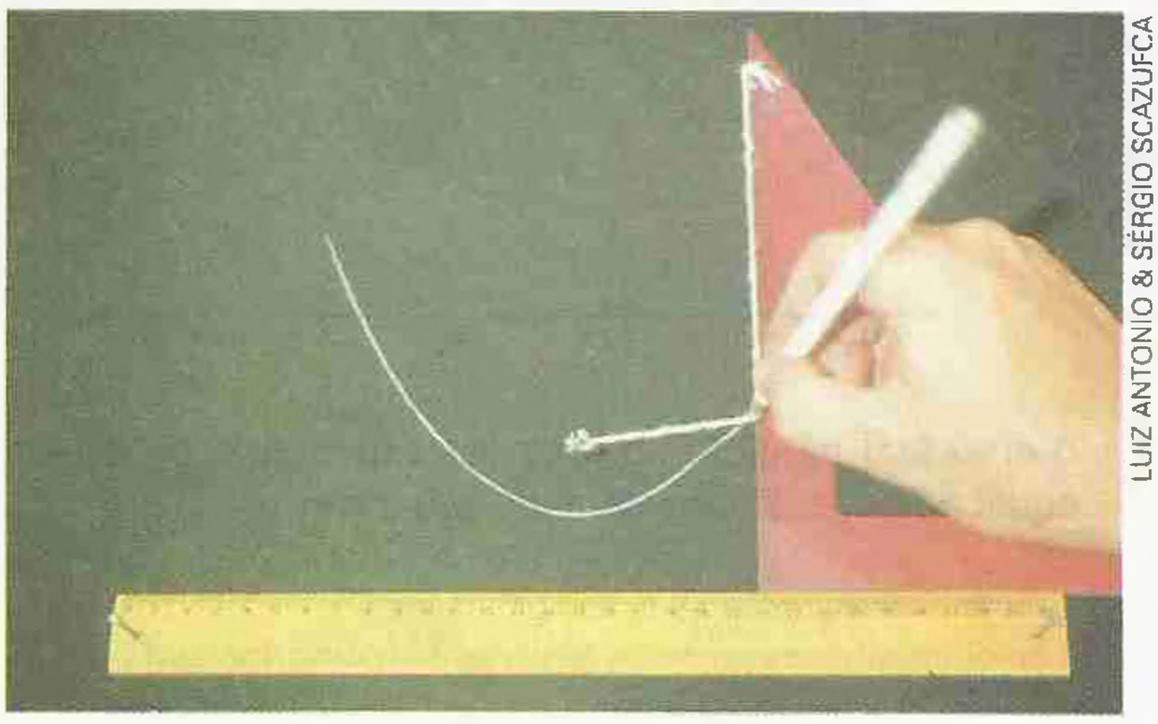
d) $\frac{x}{9} - \frac{y}{9} = 1$

e) $x^2 - y^2 = 1$

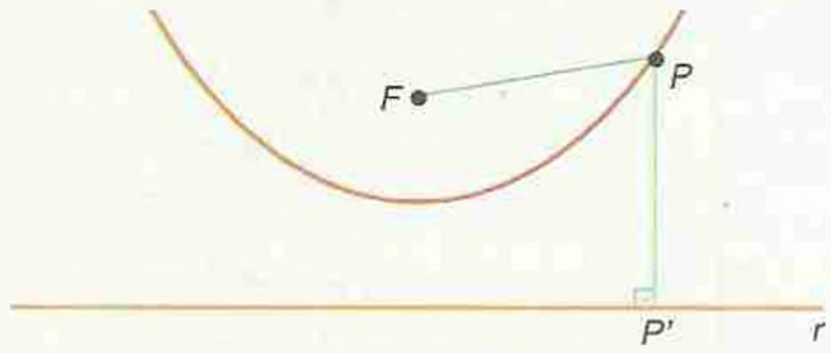
Exercícios complementares de C.5 a C.8

4. PARÁBOLA

Dados um ponto F e uma reta r de um plano, $F \notin r$, chama-se **parábola** o conjunto dos pontos desse plano eqüidistantes de r e F.



LUIZ ANTONIO & SÉRGIO SCAZUFCA

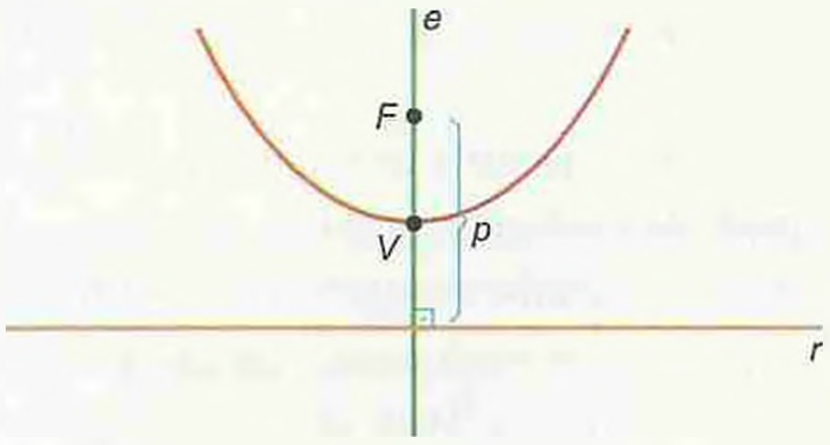


$PF = PP'$

(P' é a projeção ortogonal de P sobre r.)

- O ponto F e a reta r são o **foco** e a **diretriz** da parábola, respectivamente.
- A reta e que passa por F e é perpendicular à diretriz é o **eixo de simetria** da parábola.
- O ponto V, intersecção da parábola com o eixo e, é o **vértice** da parábola.

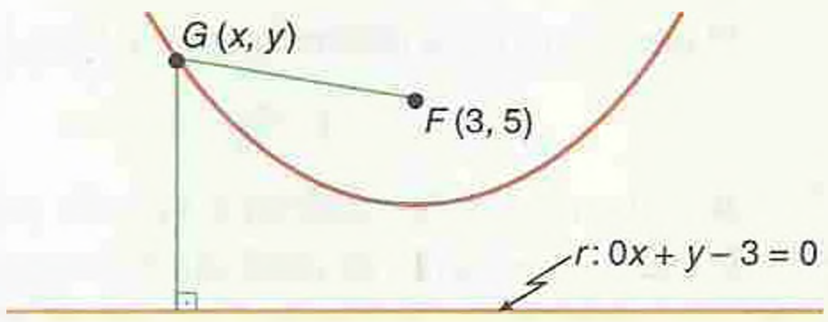
- A distância p do foco à diretriz é chamada de **parâmetro** da parábola.
- A distância entre o vértice V e o foco F é metade do parâmetro p, pois V pertence à parábola e, portanto, V eqüidista de F e r.



EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.5 Obter uma equação da parábola de foco $F(3, 5)$, cuja diretriz é $r: y - 3 = 0$.

Resolução



Uma equação da parábola é obtida considerando-se um ponto genérico $G(x, y)$ e impondo que $GF = Gr$, ou seja:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \frac{|0x + y - 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\therefore \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = |y - 3|$$

Quadramos ambos os membros dessa igualdade:

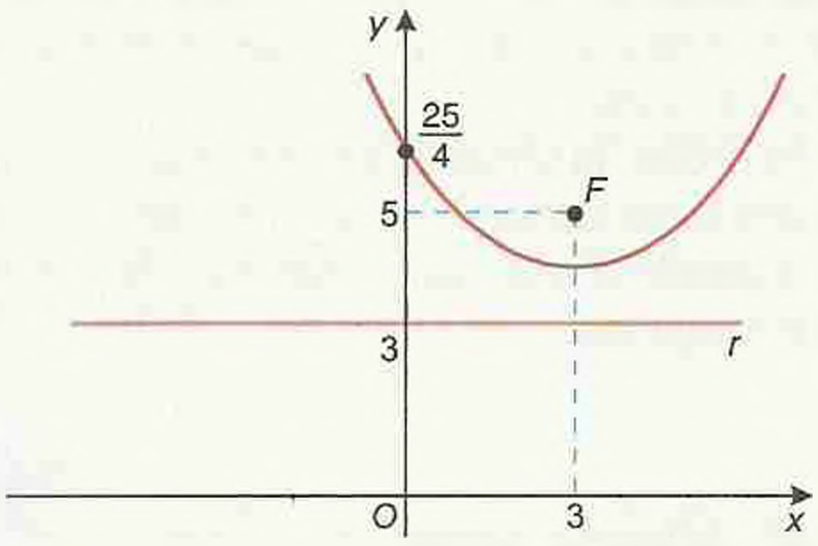
$$\left(\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}\right)^2 = (|y-3|)^2$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-5)^2 = (y-3)^2$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = y^2 - 6y + 9$$

$$\therefore x^2 - 6x - 4y + 25 = 0$$

Graficamente, temos:



- Para obter o ponto de intersecção da parábola com o eixo Oy, basta substituirmos por **zero** a variável x da equação:

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 - 6 \cdot 0 - 4y + 25 = 0$$

$$\therefore y = \frac{25}{4}$$

- Note que, se atribuirmos o valor zero à variável y da equação da parábola:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 4 \cdot 0 + 25 = 0$$

$$\therefore x^2 - 6x + 25 = 0$$

obtemos uma equação do 2º grau com discriminante negativo ($\Delta = -64$). Isso significa que a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.

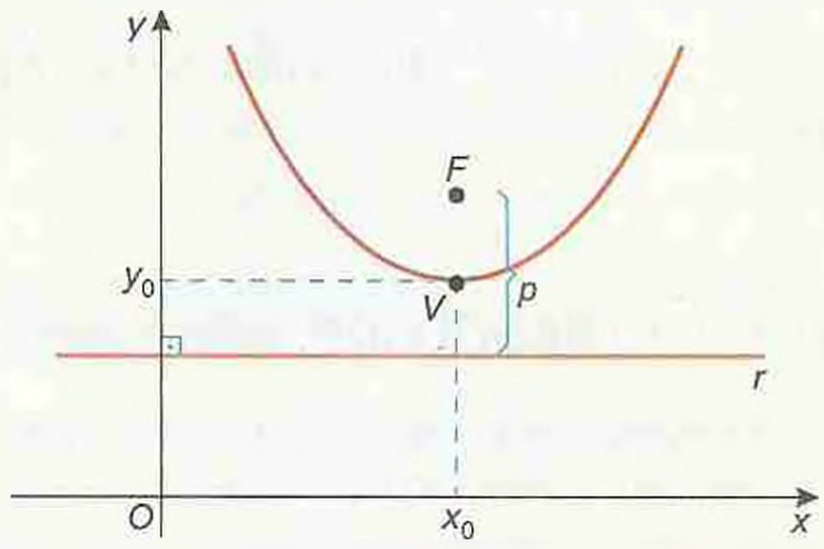
Equação reduzida da parábola

Se uma parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e parâmetro p tem:

- a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy (concavidade voltada para cima), então sua equação é:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

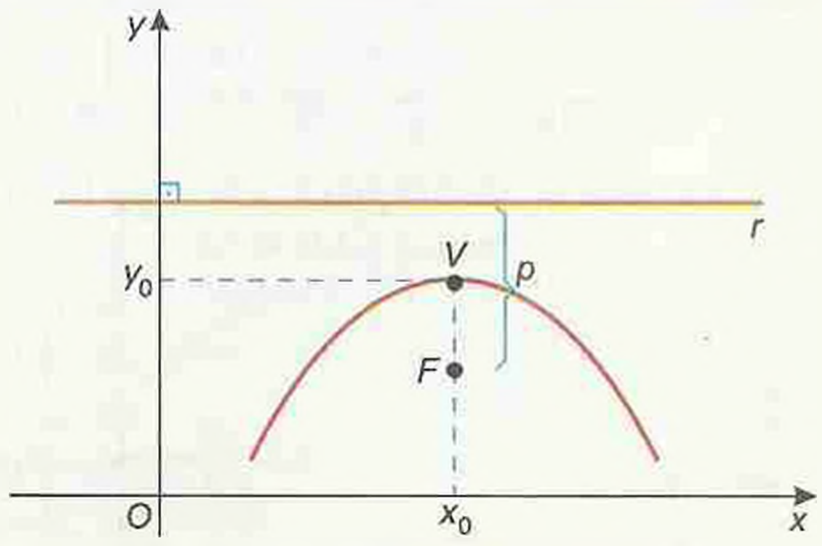
Primeiro caso



- a diretriz paralela ao eixo Ox e a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Oy (concavidade voltada para baixo), então sua equação é:

$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

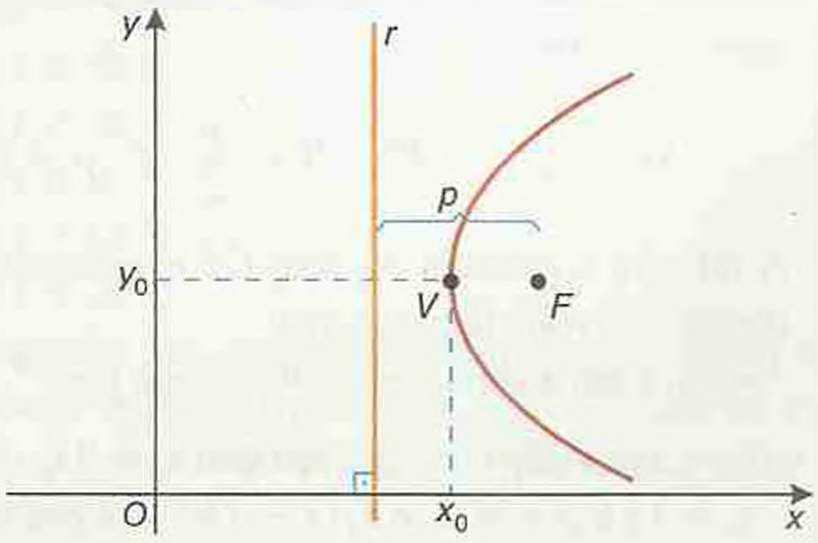
Segundo caso



- a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Ox (concavidade voltada para a direita), então sua equação é:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

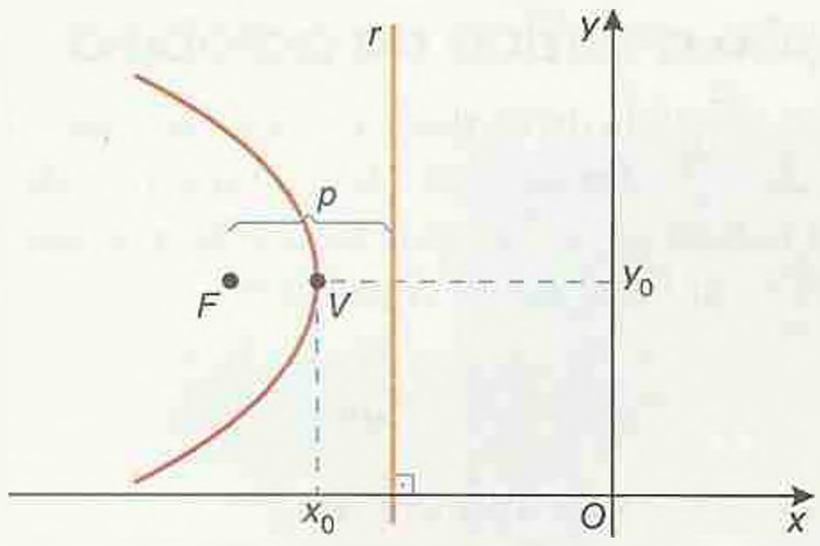
Terceiro caso



- a diretriz paralela ao eixo Oy e a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo Ox (concavidade voltada para a esquerda), então sua equação é:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

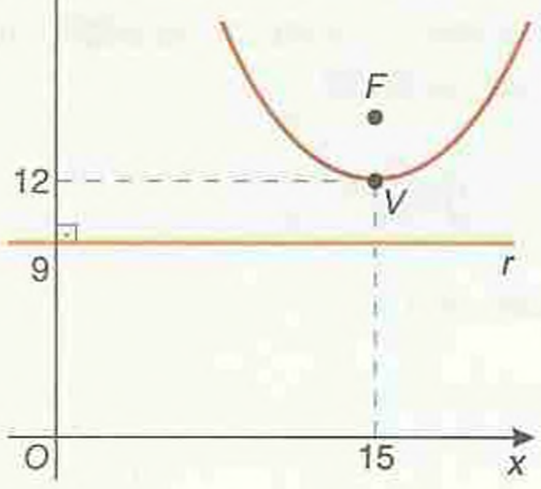
Quarto caso

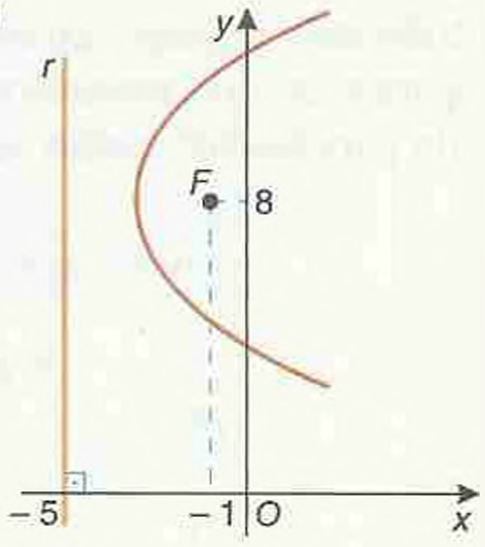


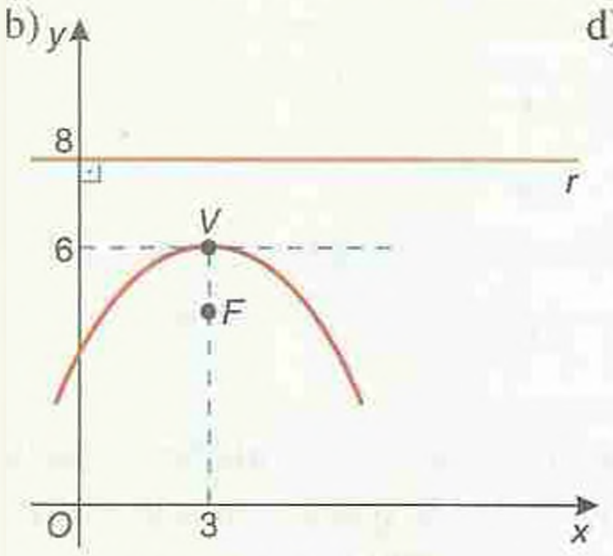
Essas quatro equações são denominadas **equações reduzidas** das parábolas.

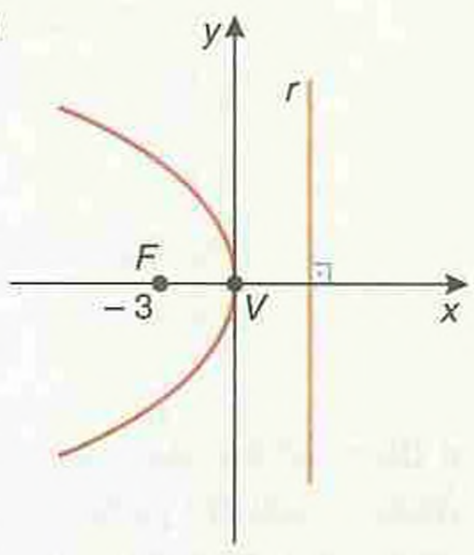
EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Obter a equação reduzida da parábola $\mathscr{P}$ em cada um dos casos seguintes, sendo F, V e r o foco, o vértice e a diretriz de cada uma, respectivamente.

a)


c)


b)


d)


Resolução

a) O vértice da parábola é o ponto $V(15, 12)$.
A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p, ou seja, $Fr = p$.
Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos:

$$Vr = \frac{p}{2} \;\therefore\; 12 - 9 = \frac{p}{2} \;\therefore\; p = 6$$

A diretriz é paralela ao eixo Ox e a concavidade da parábola é voltada para cima.
Assim, a equação da parábola é dada por:

$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, em que $x_0 = 15$, $y_0 = 12$ e $p = 6$, isto é, $(x - 15)^2 = 12(y - 12)$

b) O vértice V da parábola é o ponto $V(3, 6)$.
A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p, ou seja, $Fr = p$.
Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos:

$$Vr = \frac{p}{2} \;\therefore\; 8 - 6 = \frac{p}{2} \;\therefore\; p = 4$$

A diretriz é paralela ao eixo Ox e a concavidade da parábola é voltada para baixo.
Assim, a equação da parábola é dada por:

$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$, em que $x_0 = 3$, $y_0 = 6$ e $p = 4$, isto é, $(x - 3)^2 = -8(y - 6)$

c) Como a diretriz é paralela ao eixo Oy, temos que a ordenada y_V do vértice V é a mesma do foco F, ou seja, $y_V = 8$, e a abscissa x_V de V é a mesma do ponto médio do segmento de extremos $(-5, 0)$ e $(-1, 0)$, ou seja, $x_V = \dfrac{-5 + (-1)}{2} = -3$. Assim, o vértice é o ponto $V(-3, 8)$.
O parâmetro p é a distância entre o foco e a diretriz:

$$p = -1 - (-5) \;\therefore\; p = 4$$

A concavidade da parábola é voltada para a direita.
Portanto, a equação da parábola é dada por:

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, sendo $x_0 = -3$, $y_0 = 8$ e $p = 4$, ou seja, $(y - 8)^2 = 8(x + 3)$

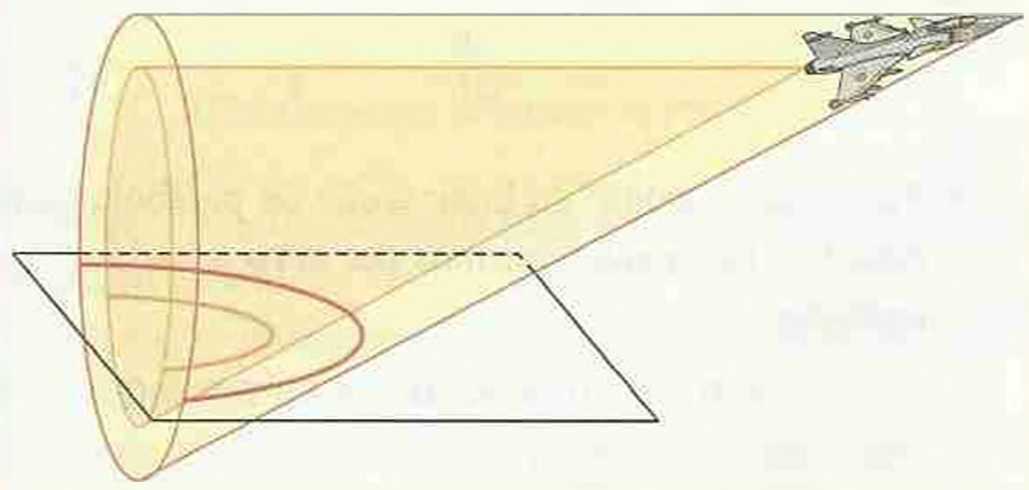
d) O vértice V é o ponto $V(0, 0)$.
A distância do vértice ao foco é metade do parâmetro p, ou seja, $VF = \dfrac{p}{2} \;\therefore\; 3 = \dfrac{p}{2} \;\therefore\; p = 6$.
A diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade da parábola é voltada para a esquerda.
Logo, a equação da parábola é dada por:

$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$ tal que $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ e $p = 6$, ou seja, $y^2 = -12x$

Aviões supersônicos

As ondas sonoras de choque provocadas por um avião supersônico formam as superfícies de dois cones que se estendem da extremidade dianteira e da cauda do avião.

As ondas de choque, ao interceptar o solo, determinam duas curvas cônicas (no exemplo da figura, duas parábolas), ao longo das quais é possível ouvir os estampidos.



EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Calcule o valor do parâmetro p da parábola de foco F e diretriz r em cada um dos seguintes casos:

a) $F(1, 3)$ e $r: 3x + 4y + 10 = 0$

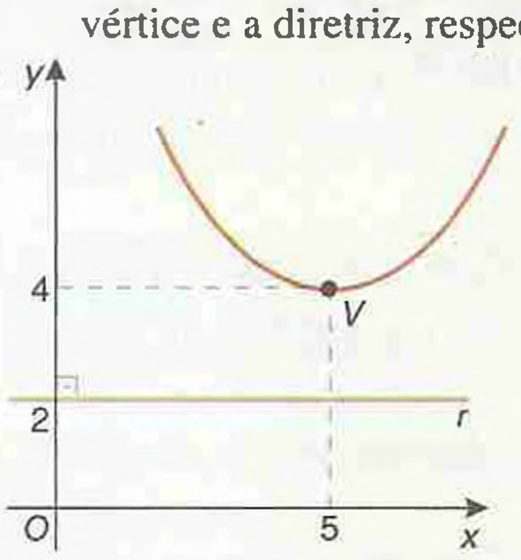
b) $F(6, 4)$ e $r: y - 2 = 0$

c) $F(-2, 3)$ e $r: 5x + 12y = 0$

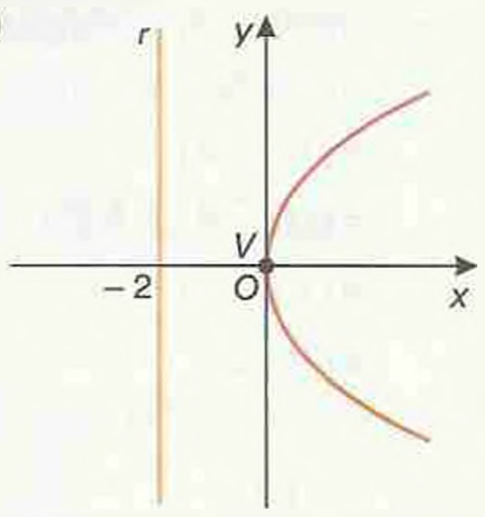
d) $F(2, 5)$ e $r: x + 4 = 0$

B.10 Obtenha a equação reduzida da parábola em cada um dos seguintes casos, em que F, V e r representam o foco, o vértice e a diretriz, respectivamente:

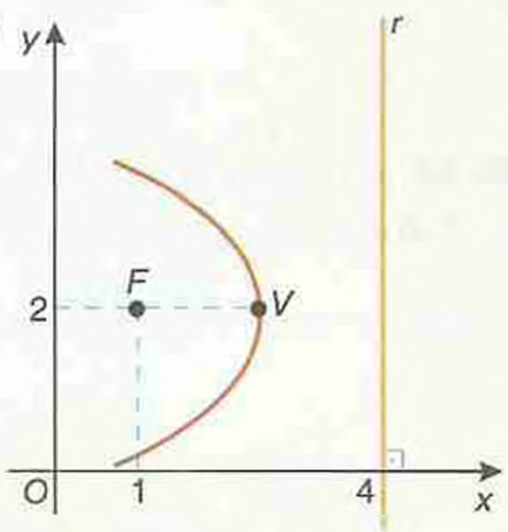
a)



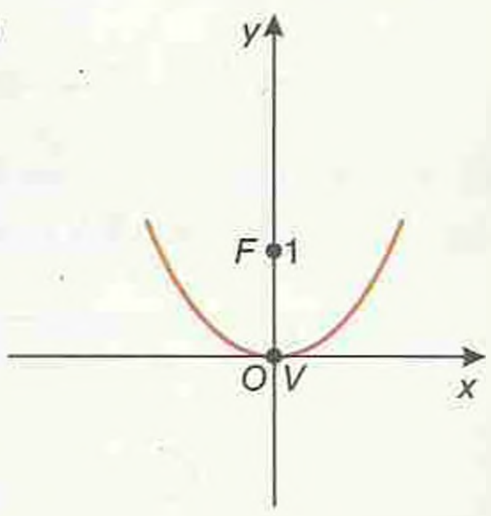
d)



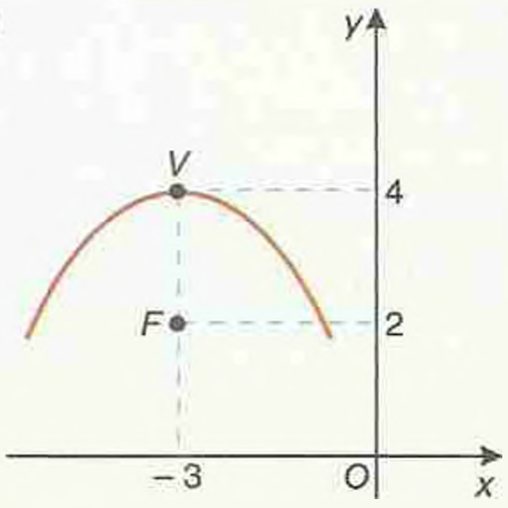
b)



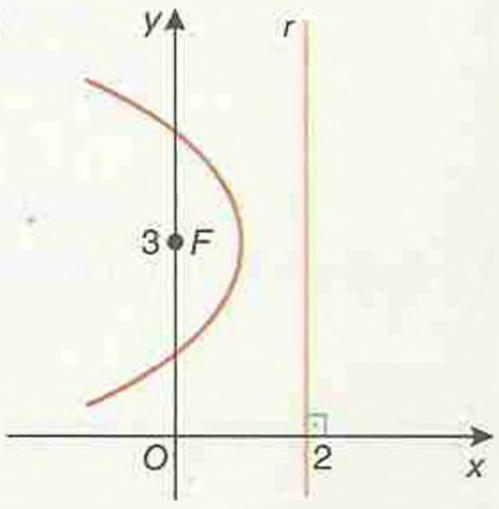
e)



c)



f)



B.11 Esboce o gráfico da parábola $\mathscr{P}$ em cada um dos seguintes casos:

a) $\mathscr{P}: (x - 3)^2 = 4(y - 1)$

b) $\mathscr{P}: (y - 2)^2 = -6(x + 1)$

c) $\mathscr{P}: (x + 5)^2 = -2(y - 4)$

d) $\mathscr{P}: (y - 5)^2 = 8x$

B.12 Obtenha o vértice V, o parâmetro p, o foco F, e a equação da diretriz r da parábola $\mathscr{P}$ em cada um dos casos:

a) $\mathscr{P}$: $(y - 2)^2 = 12(x - 1)$

b) $\mathscr{P}$: $(x + 1)^2 = 4(y - 2)$

c) $\mathscr{P}$: $(x - 2)^2 = -8y$

d) $\mathscr{P}$: $(y - 3)^2 = -x - 4$

Exercícios complementares de C.9 a C.12

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Obtenha o centro C, a medida do eixo maior $2a$, a medida do eixo menor $2b$, a distância focal $2c$, os focos F_1 e F_2 e a excentricidade e da elipse $\mathscr{E}$ em cada um dos casos:

a) $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+5)^2}{9} = 1$

b) $\mathscr{E}: 9(x - 3)^2 + 4(y + 1)^2 = 36$ **Sugestão**. Divida por 36 ambos os membros.

c) $\mathscr{E}: 3x^2 + 2y^2 = 6$

C.2 (UEB) Determine a excentricidade da elipse cuja equação é $4x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$.

Sugestão. Obtenha a equação reduzida dessa elipse. Para isso, agrupe os termos em y e adicione uma mesma constante a esse agrupamento e ao segundo membro da igualdade, de modo a transformar o agrupamento em y num trinômio quadrado perfeito.

C.3 A equação de uma elipse $\mathscr{E}$ é:

$$x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

Escreva essa equação sob a forma reduzida e calcule a excentricidade de $\mathscr{E}$.

C.4 Encontre uma equação da elipse que passa pelo ponto $Q(6, 5)$, cujo eixo maior $\overline{A_1A_2}$ é tal que $A_1(1, 2)$ e $A_2(11, 2)$.

C.5 Obtenha o centro C, a medida do eixo real $2a$. a medida do eixo imaginário $2b$, a distância focal $2c$, os focos F_1 e F_2 e a excentricidade e da hipérbole $\mathscr{H}$ em cada um dos casos:

a) $\mathscr{H}$: $\dfrac{(x-5)^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

b) $\mathscr{H}: 4(y - 5)^2 - 5(x - 2)^2 = 20$ **Sugestão**. Divida por 20 ambos os membros.

c) $\mathscr{H}: 5x^2 - y^2 = 5$

C.6 (UFPI) O centro da hipérbole de equação $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$ é o ponto:

a) (1, 0)

b) (0, 0)

c) (2, 0)

d) (−2, 4)

e) (4, 4)

Sugestão. Obtenha a equação reduzida da hipérbole. Para isso, agrupe os termos em x e adicione uma mesma constante a esse agrupamento e ao segundo membro da igualdade, de modo a transformar o agrupamento em x num trinômio quadrado perfeito.

C.7 (PUC-SP) A equação de uma das assíntotas da hipérbole $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ é:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = 4x$

c) $y = x$

d) $y = 2x + 1$

e) $y = 2x$

Sugestão. As assíntotas da hipérbole contêm as diagonais do retângulo referência. Esboce o gráfico e obtenha dois pontos, ou um ponto e o coeficiente angular, de cada assíntota.

C.8 (UMC-SP) Determine a equação reduzida da hipérbole que passa pelo ponto $P(6, 4\sqrt{3})$ e tem focos $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$.

C.9 (UFRO) O foco da parábola de equação $y = x^2 + 2x - 8$ é o ponto:

a) $F(-1, -9)$

b) $F\left(-1, -\frac{35}{4}\right)$

c) $F(1, 3)$

d) $F(0, 0)$

e) $F\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

Sugestão. Obtenha a equação reduzida da parábola. Para isso, agrupe os termos em x e adicione uma mesma constante a esse agrupamento e ao primeiro membro da igualdade, de modo a transformar o agrupamento em x num trinômio quadrado perfeito.

C.10 (Faap-SP) Obtenha os pontos de intersecção da reta $r: y = x + 4$ com a parábola $\mathcal{P}: y = x^2 - 2x$.

Sugestão. O conjunto $r \cap \mathcal{P}$ é o conjunto solução do sistema $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

C.11 (UFMG) A reta de equação $y = 3x + a$ tem um único ponto em comum com a parábola de equação $y = x^2 + x + 2$. O valor de a é:

a) -2 c) 0 e) 2

b) -1 d) 1

C.12 (Fuvest-SP) Para que a parábola $y = 2x^2 + mx + 5$ não intercepte a reta $y = 3$, devemos ter:

a) $-4 < m < 4$

b) $m < -3$ ou $m > 4$

c) $m > 5$ ou $m < -5$

d) $m = -5$ ou $m = 5$

e) $m \neq 0$

C.13 (FGV-SP) Dadas a parábola cuja equação é $y = x^2 - 4x + 8$, a reta t tangente à parábola e a reta $r: y = 2x - 12$, paralela a t, podemos dizer que a reta t intercepta o eixo Oy no ponto:

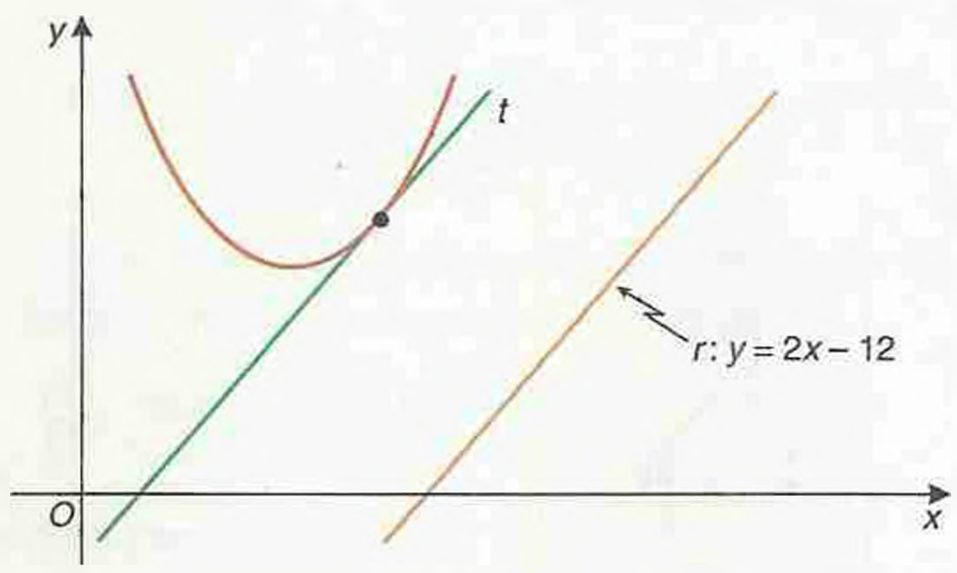
a) (0, 3)

b) (0, −4)

c) (0, −1)

d) (0, −2)

e) (0, 2)



Capítulo 61

LUGAR GEOMÉTRICO (L.G.)

1. CONCEITUAÇÃO

Lugar geométrico (L.G.) é qualquer conjunto de pontos, podendo até mesmo ser o conjunto vazio.

2. DETERMINAÇÃO DE UM LUGAR GEOMÉTRICO

Um L.G. é determinado por uma propriedade p se, e somente se:

I. todos os pontos do L.G. satisfazem a propriedade p;

II. somente os pontos do L.G. satisfazem a propriedade p.

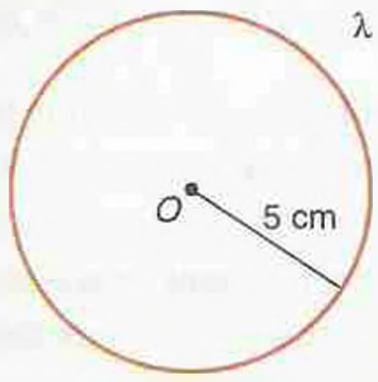
Exemplos

a) O L.G. dos pontos de um plano α que equidistam de dois pontos distintos A e B de α é a mediatriz r do segmento $\overline{AB}$.

M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

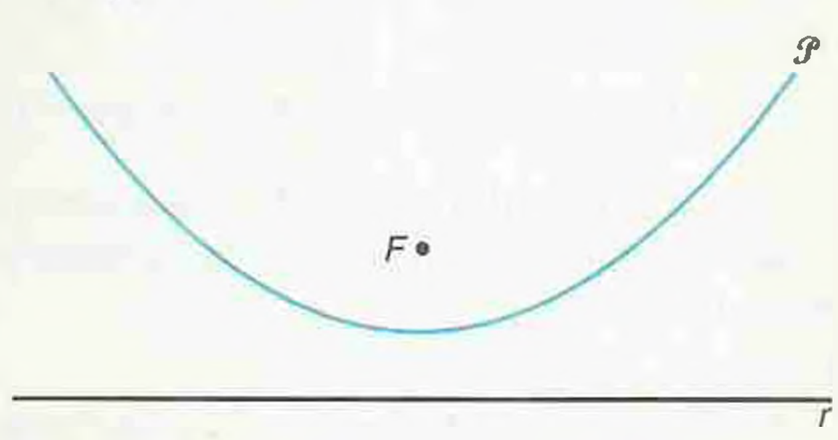
Note que:
- todos os pontos de r equidistam de A e B;
- nenhum outro ponto do plano α equidista de A e B.

b) O L.G. dos pontos de um plano α que distam 5 cm de um ponto O, $O \in \alpha$, é uma circunferência λ de centro O e raio $R = 5$ cm.



Note que:
- todos os pontos de λ distam 5 cm do ponto O;
- nenhum outro ponto do plano α dista 5 cm do ponto O.

c) O L.G. dos pontos de um plano α equidistantes de uma reta r de α e de um ponto F de α, $F \notin r$, é uma parábola $\mathcal{P}$.

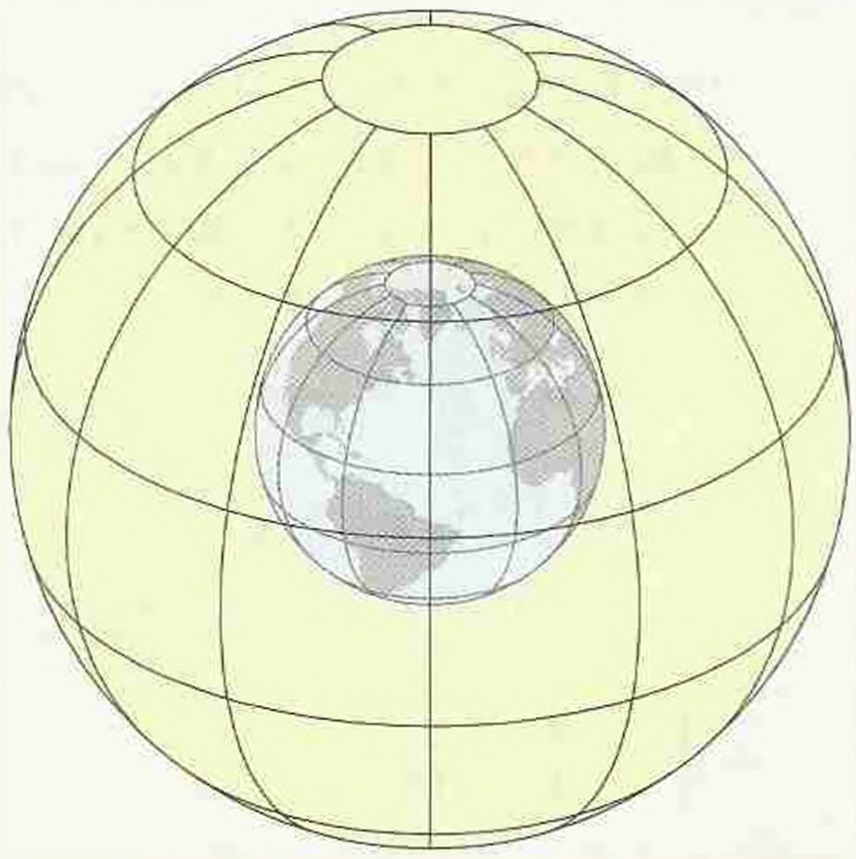


Note que:
- todos os pontos de $\mathcal{P}$ distam igualmente de F e r;
- nenhum outro ponto do plano α equidista de F e r.

Lugares geométricos: assim na Terra como no céu

Os **meridianos** e os **paralelos** são linhas imaginárias que demarcam a superfície da Terra. Os paralelos estão em planos perpendiculares ao eixo de rotação do nosso planeta e os meridianos estão em planos que contêm esse eixo. Em geometria, essas linhas são estudadas como **lugares geométricos**.

Os astrônomos estabelecem lugares geométricos também no céu. Imagine que a Terra seja uma pequena esfera cujo centro coincide com o centro de uma imensa esfera, chamada pelos astrônomos de **esfera celeste**. A superfície da esfera celeste também é dividida por linhas imaginárias: os **paralelos celestes**, que estão em planos perpendiculares ao eixo de rotação da Terra; e os **meridianos celestes**, que estão em planos que contêm esse eixo. Essas linhas são usadas para dar a localização de estrelas: o que é latitude na Terra, na esfera celeste recebe o nome de **declinação**; e o que é longitude na Terra, na esfera celeste é **ascensão reta**.



3. EQUAÇÃO DE UM LUGAR GEOMÉTRICO NO PLANO CARTESIANO

Se um lugar geométrico do plano cartesiano é determinado por uma propriedade p que indica uma igualdade, então a equação desse L.G. é obtida do seguinte modo:

- considera-se um ponto genérico $Q(x, y)$ de coordenadas variáveis x e y;
- impõe-se ao ponto $Q(x, y)$ a condição p, obtendo assim a equação do L.G.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Obter uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano que equidistam dos pontos $A(2, 4)$ e $B(0, 1)$.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor:

$$QA = QB$$

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$\therefore 4x + 6y - 19 = 0$$

Assim, o L.G. é a reta de equação $4x + 6y - 19 = 0$.

R.2 Descrever o L.G. dos pontos do plano cartesiano que distam do ponto $A(3, 2)$ o triplo da distância ao ponto $B(-1, 0)$.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor:

$$QA = 3QB$$

$$\therefore \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-0)^2}$$

Quadrando ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9\,[(x+1)^2 + (y-0)^2]$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$\therefore x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2$$

$$\therefore 8x^2 + 8y^2 + 24x + 4y - 4 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 3x + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore (x^2 + 3x) + \left(y^2 + \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\therefore \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$$

Assim, o L.G. é a circunferência de centro $C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ e raio $R = \frac{3\sqrt{5}}{4}$.

R.3 Obter uma equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas $r: 2x + y - 1 = 0$ e $s: x + 2y + 3 = 0$.

Resolução

- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Para que o ponto $Q(x, y)$ pertença ao L.G., devemos impor:

$$Qr = Qs \therefore \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x + 2y + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

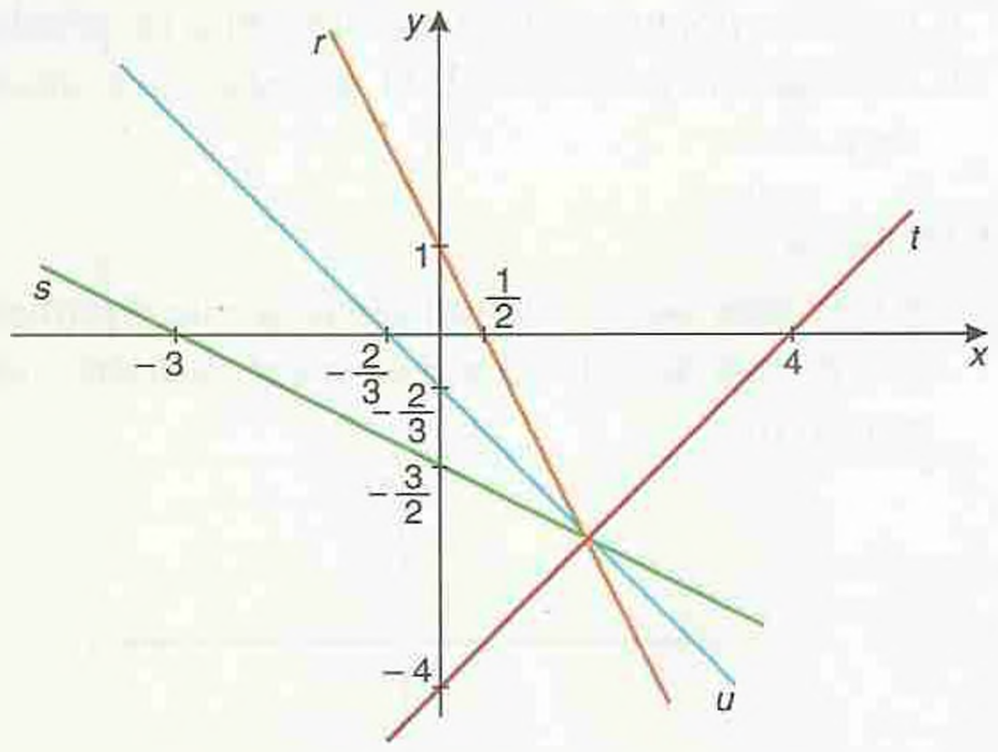
$$\therefore |2x + y - 1| = |x + 2y + 3|$$

Então, temos que:

$$2x + y - 1 = x + 2y + 3 \therefore x - y - 4 = 0 \text{ ou}$$
$$2x + y - 1 = -x - 2y - 3 \therefore 3x + 3y + 2 = 0$$

Logo, o L.G. é constituído pelo par de retas $t: x - y - 4 = 0$ e $u: 3x + 3y + 2 = 0$.

Graficamente, temos:



As retas t e u contêm as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas r e s.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Obtenha uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano, equidistantes dos pontos $A(1, 4)$ e $B(-1, 2)$.

B.2 Dados os pontos $A(2, 0)$ e $B(1, 0)$, obtenha uma equação do L.G. dos pontos Q do plano cartesiano tal que $(QA)^2 - (QB)^2 = 2$.

B.3 (U.F.Uberlândia-MG/Paies) Em um plano cartesiano α, $Q = (x, y)$ é um ponto arbitrário e $P = (1, 0)$ é um ponto fixo. Denotamos por $d(A, B)$ a distância entre quaisquer dois pontos A e B pertencentes a α. Considere o conjunto $C = \{Q \in \alpha \text{ tal que } \sqrt{2} \cdot d(G, Q) = d(Q, P)\}$, em que $G = (0, 0)$ é a origem de α. Então:

a) C é a parábola de equação $y = -x^2 - \frac{1}{2}x$.

b) C é a parábola de equação $y = x^2 + 2$.

c) C é a reta de equação $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

d) C é a circunferência de centro em $(1, 0)$ e raio 1.

e) C é a circunferência de centro em $(-1, 0)$ e raio $\sqrt{2}$.

B.4 (Fuvest-SP) Num plano são dados os pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (1, 0)$. Qual o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ desse plano tais que $(AP)^2 - (BP)^2 = 4$?

B.5 (Fuvest-SP) Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cuja distância à origem é o dobro da distância ao ponto (1, 1).

B.6 Represente no plano cartesiano o L.G. dos pontos que distam 6 unidades da reta r: $4x + 3y - 12 = 0$.

B.7 Encontre uma equação do L.G. dos pontos equidistantes das retas r: $3x - y + 2 = 0$ e s: $3x + y - 1 = 0$.

B.8 Dados a reta r: $x - 3 = 0$ e o ponto $A(0, 1)$, obtenha uma equação do L.G. dos pontos do plano cartesiano que distam da reta r o dobro da distância ao ponto A.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFF-RJ) Identifique, justificando, o lugar geométrico dos pontos do plano definido pela equação
$x^2 - y^2 - 4x + 8y = 12$.
Sugestão. Agrupando os termos em x e os termos em y, obtém-se $(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 12$. Adicionando ou subtraindo constantes a ambos os membros da equação, transforme cada um dos agrupamentos em trinômios quadrados perfeitos.

C.2 Sendo $A(1, 0)$ e $B(0, 2)$, represente graficamente no plano cartesiano o L.G. dos pontos $Q(x, y)$ tal que o triângulo ABQ tenha área igual a 3 unidades.

C.3 Qual é o L.G. dos pontos médios de todas as cordas de comprimento 8 na circunferência λ: $x^2 + (y - 1)^2 = 25$? Dê uma equação desse L.G.

C.4 O L.G. dos pontos do plano cartesiano cuja soma das distâncias aos pontos $A(1, 2)$ e $B(1, -2)$ é sempre igual a 6 intercepta o eixo das abscissas nos pontos:
a) $(-2, 0)$ e $(2, 0)$
b) $(-4, 0)$ e $(4, 0)$
c) $(1 + \sqrt{3}, 0)$ e $(1 - \sqrt{3}, 0)$
d) $(1 + \sqrt{5}, 0)$ e $(1 - \sqrt{5}, 0)$
e) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$

C.5 (Mackenzie-SP) Um segmento de reta de comprimento 8 movimenta-se no plano mantendo suas extremidades P e Q apoiadas nos eixos Ox e Oy, respectivamente. Entre os pontos do lugar geométrico descrito pelo ponto médio de $\overline{PQ}$, o de maior ordenada possui abscissa:
a) -2 c) 0 e) 2
b) -1 d) 1

C.6 (Fuvest-SP) Qual a equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes da reta $y = 0$ e da circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 1$?

Capítulo 62

CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

1. O QUE EXISTE ALÉM DOS NÚMEROS REAIS? — UMA INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Gerônimo Cardano, médico e matemático italiano, publicou em 1545, em sua obra *Ars magna*, a resolução de equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Essa resolução, relata Cardano, foi apresentada a ele por Nicolo Tartáglia.

Gerônimo Cardano
(1501-1576).

DAVID SMITH COLLECTION

Nicolo Tartáglia
(cerca de 1500-1557).

O método proposto por Tartáglia consiste em substituir a variável x por $u - v$ tal que o produto uv seja um terço do coeficiente de x da equação. Cardano, resolvendo equações cúbicas através desse método, deparou-se com raízes quadradas de números negativos, que até então não eram aceitas pelos matemáticos. Vamos percorrer o mesmo caminho feito por Cardano para perceber algo surpreendente. Resolvamos a seguinte equação:

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

Substituindo x por $u - v$ de modo que o produto uv seja igual a um terço do coeficiente de x, que é -2, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} (u - v)^3 - 6(u - v) + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases} \text{ ou seja,}$$

$$\begin{cases} u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 - 6u + 6v + 4 = 0 \\ uv = -2 \end{cases}$$

Fazendo $uv = -2$ na primeira equação e isolando v na segunda, obtém-se:

$$\begin{cases} u^3 - v^3 + 4 = 0 & \text{(I)} \\ v = -\dfrac{2}{u} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I) chega-se à equação $u^6 + 4u^3 + 8 = 0$, cuja resolução é feita através da mudança de variável $u^3 = t$, ou seja:

$$t^2 + 4t + 8 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$\therefore u^3 = \frac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Nesse momento, Cardano concluiu: como não existe raiz quadrada de número negativo, temos que não existem u nem v e, conseqüentemente, não existe x, pois $x = u - v$. Porém, espantosamente ele verificou que o número real 2 é raiz da equação $x^3 - 6x + 4 = 0$, pois $2^3 - 6 \cdot 2 + 4 = 0$.

Essa constatação levou Cardano a considerar a existência de novos números, como, por exemplo, $\sqrt{-16}$.

Nessa mesma época, outro grande matemático italiano, Rafael Bombelli (cerca de 1526-1573), teve o que chamou de "idéia louca", operando com expressões que envolviam raízes quadradas de números negativos. Bombelli admitiu, por exemplo, a identidade:

$$2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

dando assim subsídios para o início da construção de um novo conjunto: o **conjunto dos números complexos**.

2. A UNIDADE IMAGINÁRIA (i)

Para ampliar o conceito de número de modo que a radiciação seja sempre possível, definimos o número i, não-real, denominado **unidade imaginária**, que satisfaz a seguinte condição:

$$i^2 = i \cdot i = -1$$

3. NÚMERO COMPLEXO

Definição

Número complexo é todo número da forma $a + bi$ tal que a e b são números reais quaisquer e i é a unidade imaginária.

A expressão $a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é denominada **forma algébrica** do número complexo, em que a e b são,

respectivamente, a **parte real** e a **parte imaginária** do complexo.

Exemplos

a) $6 - 3i$ é um número complexo com

$$\begin{cases}\text{parte real } 6\\ \text{e}\\ \text{parte imaginária } -3\end{cases}$$

Todo número complexo cuja parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário**. O número $6 - 3i$ é imaginário.

b) $5i$ é um número complexo com

$$\begin{cases}\text{parte real } 0\\ \text{e}\\ \text{parte imaginária } 5\end{cases}$$

Todo número complexo cuja parte real é zero e a parte imaginária é diferente de zero é chamado de **número imaginário puro**. O número $5i$ é imaginário puro.

c) 8 é um número complexo com $\begin{cases}\text{parte real } 8\\ \text{e}\\ \text{parte imaginária } 0\end{cases}$

Todo número complexo cuja parte imaginária é zero é chamado de **número real**. O número 8 é real. Observe, portanto, que todo número real a é também complexo, pois pode ser escrito como $a + 0i$.

Denotamos por $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, isto é:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid \{a, b\} \subset \mathbb{R}\}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Obter x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número complexo $5 + (x^2 - 9)i$ seja real.

Resolução

O número $5 + (x^2 - 9)i$ é real se, e somente se,
$x^2 - 9 = 0 \therefore x^2 = 9 \therefore x = \pm 3$.
Logo, o número é real se, e somente se, $x = 3$ ou $x = -3$.

R.2 Determinar x, $x \in \mathbb{R}$, para que o número complexo $(x^2 - 25) + (x - 5)i$ seja imaginário puro.

Resolução

O número $(x^2 - 25) + (x - 5)i$ é imaginário puro se, e somente se, $\begin{cases}x^2 - 25 = 0\\ x - 5 \neq 0\end{cases} \therefore \begin{cases}x = \pm 5\\ x \neq 5\end{cases}$
Logo, $x = -5$.
Assim, o número é imaginário puro se, e somente se, $x = -5$.

4. IGUALDADE ENTRE NÚMEROS COMPLEXOS

Sendo $a + bi$ e $c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases}a = c\\ b = d\end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.3 Obter os números reais x e y de modo que $x + 2y + 4i = 11 + (9x - y)i$.

Resolução

$$x + 2y + 4i = 11 + (9x - y)i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + 2y = 11\\ 9x - y = 4\end{cases} \therefore \begin{cases}x + 2y = 11 \quad \text{(I)}\\ 18x - 2y = 8 \quad \text{(II)}\end{cases}$$

Somamos membro a membro (I) e (II):
$19x = 19 \Rightarrow x = 1$.
Substituindo $x = 1$ em (I), temos $1 + 2y = 11 \therefore y = 5$.
Logo, os reais x e y são $x = 1$ e $y = 5$.

5. NÚMEROS COMPLEXOS CONJUGADOS

Definição

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é o número $\overline{z}$ (lê-se "conjugado de z") tal que $\overline{z} = a - bi$.

Exemplos

a) O conjugado de $z = 3 + 2i$ é $\overline{z} = 3 - 2i$.
b) O conjugado de $z = 6 - 3i$ é $\overline{z} = 6 + 3i$.
c) O conjugado de $z = 8i$ é $\overline{z} = -8i$.
d) O conjugado de $z = 6$ é $\overline{z} = 6$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Demonstrar que $\overline{\overline{z}} = z$, $\forall z, z \in \mathbb{C}$.

Resolução

Seja $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

$$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z$$

(c.q.d.)

6. ADIÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplos

a) Sendo $z_1 = 4 + 2i$ e $z_2 = 3 + 6i$, tem-se que $z_1 + z_2 = (4 + 3) + (2 + 6)i = 7 + 8i$.

b) Sendo $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = -9i$, tem-se que $z_1 + z_2 = (3 + 0) + (4 - 9)i = 3 - 5i$.

Propriedades da adição de números complexos

A.1 Associativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3),\ \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}$$

A.2 Comutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ \forall \{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$$

A.3 Elemento neutro

Existe e, $e \in \mathbb{C}$, tal que $z + e = e + z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

O número e é denominado **elemento neutro** da adição de números complexos e $e = 0 + 0i$.

A.4 Elemento oposto

Para cada número complexo z existe o número complexo w tal que $z + w = w + z = 0 + 0i$.

Os números $z = a + bi$ e $w = -a - bi$ são denominados **números opostos**. Indicamos esse fato por $w = -z$ ou por $z = -w$.

Exemplo

O oposto de $z = 6 - 3i$ é $-z = -6 + 3i$.

7. SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, ou seja:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di) = \\ = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo

Sendo $z_1 = -8 + i$ e $z_2 = 4 - 10i$, tem-se que:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (-8 + i) + (-4 + 10i) = \\ = (-8 - 4) + (1 + 10)i = -12 + 11i$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Determinar o número complexo $z = 2 + yi$, $y \in \mathbb{R}$, tal que $z = \overline{z} + 8i$.

Resolução

$$2 + yi = 2 - yi + 8i \ \therefore\ 2 + yi = 2 + (-y + 8)i$$
$$\therefore\ y = -y + 8 \Rightarrow 2y = 8 \ \therefore\ y = 4$$

Logo, o número z é $z = 2 + 4i$.

R.6 Determinar os números reais x e y tais que $(2x + 2i) + (3 + yi) = 5 + 7i$.

Resolução

$$(2x + 2i) + (3 + yi) = 5 + 7i$$
$$\therefore\ (2x + 3) + (2 + y)i = 5 + 7i$$
$$\therefore \begin{cases} 2x + 3 = 5 \\ 2 + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

Logo, os reais x e y são $x = 1$ e $y = 5$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 (U. Taubaté-SP) Determine o valor real de k, de modo que $z = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + i$ seja imaginário puro.

a) $-\frac{1}{2}$ c) 0 e) 1

b) -1 d) $\frac{1}{2}$

B.2 (UFRS) Sendo $m \in \mathbb{R}$, o número complexo $z = (m - 3) + (m^2 - 9)i$ será um número real não-nulo para:

a) $m = -3$ d) $m = 3$
b) $m < -3$ ou $m > 3$ e) $m > 0$
c) $-3 < m < 3$

B.3 Encontre os números reais x e y de modo que:

a) $2x - y + (x + y)i = 7 + 8i$
b) $x^2 - 8 + (y + 2x)i = 1 + 11i$
c) $\frac{x + 5}{y - 2} + (3x + y)i = 6 + 2yi$

B.4 Dados $z_1 = 8 + 6i$, $z_2 = -4 + 2i$, $z_3 = 9 + i$ e $z_4 = -3i$, calcule:

a) $z_1 + z_2$ e) $z_1 + \overline{z}_1$
b) $z_1 + z_2 + \overline{z}_3$ f) $z_1 - \overline{z}_1$
c) $z_1 - z_2$ g) $\overline{z}_2 + \overline{z}_4$
d) $\overline{z_1 - z_2} - (z_3 + z_4)$ h) $\overline{z_1 - z_2} + z_3$

B.5 Encontre os números reais x e y de modo que:

a) $(3x + 4yi) + (5 + 6i) = 11 + 18i$
b) $(2x + 3yi) + (y + xi) = 6 + 13i$

8. MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, define-se:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplos

a) Sendo $z_1 = 4 + 2i$ e $z_2 = 3 + 5i$, tem-se que:

$$z_1 z_2 = (4 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + (4 \cdot 5 + 2 \cdot 3)i = 2 + 26i$$

b) Sendo $z_1 = -3i$ e $z_2 = 6 + 2i$, tem-se que:

$$z_1 z_2 = [0 \cdot 6 - (-3) \cdot 2] + [0 \cdot 2 + (-3) \cdot 6]i = \\ = 6 - 18i$$

Você deve estar assustado com essa estranha definição de multiplicação. Porém, sua origem é extremamente simples.

Ao definir a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$, pretende-se que estas sejam extensões dos conceitos de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ e que as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro, elemento oposto, elemento inverso e distributiva sejam preservadas. Ora, para que isso ocorra deve-se ter:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$

$$= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Propriedades da multiplicação de números complexos

M.1 Associativa

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3),\ \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}$$

M.2 Comutativa

$$z_1z_2 = z_2z_1,\ \forall \{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$$

M.3 Elemento neutro

Existe u, $u \in \mathbb{C}$, tal que $zu = uz = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

O número u é denominado **elemento neutro** da multiplicação de números complexos e $u = 1 + 0i$.

M.4 Elemento inverso

Para cada número complexo z, $z \neq 0 + 0i$, existe o número complexo v tal que $zv = vz = 1 + 0i$.

Os números z e v são chamados de **números inversos**.

O inverso de z é indicado por z^{-1} ou por $\frac{1}{z}$.

Exemplo

O inverso de $z = 4 + 2i$ é indicado por $z^{-1} = \frac{1}{4 + 2i}$.

(No exercício R.11 vamos obter a forma algébrica desse inverso.)

M.5 Distributivas

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3,\ \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C} \text{ e}$$
$$(z_2 + z_3)z_1 = z_2z_1 + z_3z_1,\ \forall \{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}$$

Cálculo do produto de números complexos através de propriedades

Para efetuarmos a multiplicação de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, podemos simplesmente aplicar as propriedades operatórias, evitando assim a definição, que é confusa e de difícil memorização.

Exemplos

a) Para calcular o produto do complexo $z_1 = 3 + 2i$ por $z_2 = 5 + 4i$, aplicamos a propriedade distributiva e, a seguir, as comutativas da multiplicação e da adição:

$$(3 + 2i)(5 + 4i) = 15 + 12i + 10i + 8i^2 =$$

$$= 15 + 12i + 10i - 8 = 7 + 22i$$

b) Analogamente, efetuamos o produto de $z_1 = -4i$ por $z_2 = 2 - 6i$:

$$-4i(2 - 6i) = -8i + 24i^2 = -8i - 24$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 Sejam os números complexos $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4$, $z_3 = 5i$, $z_4 = 6 - 2i$. Calcular:

a) z_1z_2
b) z_1z_3
c) z_1z_4
d) $z_2z_3 + z_4$
e) $z_3z_4 - z_2z_1$

Resolução

a) $z_1z_2 = (3 + 2i)4 = 12 + 8i$
b) $z_1z_3 = (3 + 2i)5i = 15i + 10i^2 = -10 + 15i$
c) $z_1z_4 = (3 + 2i)(6 - 2i) = 18 - 6i + 12i - 4i^2 =$
$= 18 - 6i + 12i + 4 = 22 + 6i$
d) $z_2z_3 + z_4 = 4 \cdot 5i + 6 - 2i = 20i + 6 - 2i = 6 + 18i$
e) $z_3z_4 - z_2z_1 = 5i(6 - 2i) - 4(3 + 2i) =$
$= 30i - 10i^2 - 12 - 8i = 30i + 10 - 12 - 8i =$
$= -2 + 22i$

R.8 Determinar o número $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que $zi + 2\bar{z} = 4 - i$.

Resolução

$$(x + yi)i + 2(x - yi) = 4 - i$$
$$\therefore\ xi + yi^2 + 2x - 2yi = 4 - i$$
$$\therefore\ (-y + 2x) + (x - 2y)i = 4 - i$$
$$\therefore \begin{cases} -y + 2x = 4 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \therefore \begin{cases} y = 2x - 4 & \text{(I)} \\ x - 2y = -1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II):
$x - 2(2x - 4) = -1 \therefore x - 4x + 8 = -1$
$\therefore -3x = -9 \therefore x = 3$.
Fazendo $x = 3$ em (I), temos $y = 2 \cdot 3 - 4 \Rightarrow y = 2$.
Logo, $z = 3 + 2i$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.6 Sejam os números complexos $z_1 = 6$, $z_2 = 3i$, $z_3 = 5 - 7i$, $z_4 = 8 + 3i$. Calcule:

a) z_1z_2 c) z_2z_3 e) $z_3\overline{z}_4 + \overline{z}_3z_4$

b) z_1z_3 d) z_3z_4 f) $z_3\overline{z}_3$

B.7 (UFPA) Qual é o valor de m, $m \in \mathbb{R}$, para que o produto $(2 + mi)(3 + i)$ seja um número imaginário puro?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 10

B.8 (PUC-MG) O número complexo z tal que $5z + \overline{z} = 12 + 16i$ é igual a:

a) $-2 + 2i$ c) $1 + 2i$ e) $3 + i$

b) $2 - 3i$ d) $2 + 4i$

Sugestão. Substitua o número complexo z por $x + yi$, em que x e y são números reais.

B.9 Determine o número complexo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, tal que:

a) $3\overline{z} + 2z = 10 - 5i$ c) $\overline{z} + 2z = z(1 + 2i)$

b) $\overline{z}i + 5z = 2\overline{z}$

Exercícios complementares C.1 e C.2

9. DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Definição

O quociente de um complexo z por um complexo não-nulo w é o número complexo k se, e somente se, $kw = z$. Indica-se esse quociente por $\frac{z}{w}$ ou por $z : w$.

Assim, temos:

$$\frac{z}{w} = k \Leftrightarrow kw = z$$

Exemplo

Observando que $(3 + 2i)(1 + i) = 1 + 5i$, pode-se concluir que $\frac{1 + 5i}{1 + i} = 3 + 2i$.

Propriedade da divisão de números complexos

Para obter o quociente de dois números complexos, aplicaremos a propriedade a seguir.

Sendo z, w e c números complexos tais que $w \neq 0$ e $c \neq 0$, tem-se $\frac{z}{w} = \frac{zc}{wc}$.

Isto é, multiplicando o numerador e o denominador da fração $\frac{z}{w}$ por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma fração equivalente a $\frac{z}{w}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.9 Sejam $z_1 = 2$ e $z_2 = 3 + 5i$. Efetuar $z_1 : z_2$.

Resolução

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3 + 5i}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, temos que:

$$z_1 : z_2 = \frac{2}{3 + 5i} = \frac{2}{3 + 5i} \cdot \frac{3 - 5i}{3 - 5i} =$$

$$= \frac{2(3 - 5i)}{3^2 - (5i)^2} = \frac{2(3 - 5i)}{34} = \frac{3 - 5i}{17}$$

Logo, $z_1 : z_2 = \frac{3}{17} - \frac{5i}{17}$.

R.10 Sejam $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 1 - i$. Efetuar $z_1 : z_2$.

Resolução

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{1 - i}$$

Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, temos que:

$$z_1 : z_2 = \frac{1 + 2i}{1 - i} = \frac{1 + 2i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} =$$

$$= \frac{1 + i + 2i + 2i^2}{1^2 - i^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}$$

R.11 Determinar o inverso do número complexo $z = 4 + 2i$.

Resolução

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{4 + 2i}$$

Multiplicando por $4 - 2i$ o numerador e o denominador de $\frac{1}{4 + 2i}$, obtemos a forma algébrica de z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{1(4 - 2i)}{(4 + 2i)(4 - 2i)} = \frac{4 - 2i}{4^2 - 2^2i^2} = \frac{4 - 2i}{20}$$

Logo, $z^{-1} = \frac{4}{20} - \frac{2i}{20} = \frac{1}{5} - \frac{i}{10}$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.10 Dados $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - i$, $z_3 = i$ e $z_4 = 5$, efetue:

a) $z_1 : z_2$ e) $3z_1 : 2\overline{z}_2$

b) $z_1 : z_3$ f) $(z_1 + z_2) : (z_3 - z_4)$

c) $z_4 : \overline{z}_1$ g) $(3z_1 + \overline{z}_1) : (z_3 - z_1)$

d) $z_3 : z_2$

B.11 (FEI-SP) O resultado da expressão complexa $\frac{1}{2 + i} + \frac{3}{1 - 2i}$ é:

a) $1 - i$ c) $2 + i$ e) $3 + 3i$

b) $1 + i$ d) $2 - i$

B.12 Determine o inverso de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 2 + 3i$
b) $z_2 = 4 + i$
c) $z_3 = 6 - 2i$
d) $z_4 = 1 - i$
e) $z_5 = i$
f) $z_6 = -i$
g) $z_7 = 3i$

B.13 (Fuvest-SP) Sabendo que α é um número real e que a parte imaginária do número complexo $\frac{2 + i}{\alpha + 2i}$ é zero, então α é:

a) -4
b) -2
c) 1
d) 2
e) 4

Exercícios complementares de C.3 a C.8

10. POTÊNCIAS DE NÚMEROS COMPLEXOS COM EXPOENTES INTEIROS

Sendo w um número complexo qualquer, definem-se:

I. $w^0 = 1$

II. $w^1 = w$

III. $w^n = \underbrace{w \cdot w \cdot w \cdot \ldots \cdot w}_{n \text{ fatores}}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 2$

IV. $w^{-n} = \frac{1}{w^n}, \ w \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}$

Exemplos

a) $i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i \cdot i)(i \cdot i) = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

b) $(2i)^{-4} = \frac{1}{(2i)^4} = \frac{1}{2i \cdot 2i \cdot 2i \cdot 2i} = \frac{1}{16i^4} = \frac{1}{16 \cdot 1} = \frac{1}{16}$

Nota

Como já dissemos no capítulo 1, não há unanimidade entre os matemáticos quanto à adoção do valor 1 para a potência 0°.

Propriedades das potências de números complexos

Através da definição de potência e das propriedades da multiplicação, demonstra-se que:

P.1 $w^n \cdot w^m = w^{n+m}$

P.2 $w^n : w^m = w^{n-m}$

P.3 $(w^n)^m = w^{nm}$

P.4 $(wv)^n = w^n v^n$

P.5 $\left(\frac{w}{v}\right)^n = \frac{w^n}{v^n}$

para quaisquer complexos w e v e quaisquer inteiros m e n, **obedecidas as condições de existência**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.12 Calcular $(1 + i)^{10}$.

Resolução

$$(1 + i)^{10} = [(1 + i)^2]^5 = [1 + 2i + i^2]^5 =$$
$$= [1 + 2i - 1]^5 = (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 =$$
$$= 32i^4 \cdot i = 32(i^2)^2 \cdot i = 32(-1)^2 i = 32i$$

Potências de *i*

Teorema

Existem quatro e somente quatro valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$

Demonstração

Calculemos a potência i^n com n inteiro.

Primeira parte: $n \geqslant 4$

Dividindo n por 4, obtemos um quociente inteiro q e um resto r, r inteiro e $0 \leqslant r < 4$, isto é, $n = 4q + r$. Assim, temos que

$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$.

Como r é inteiro e $0 \leqslant r < 4$, temos que i^n é um dos quatro valores, i^0, i^1, i^2 ou i^3.

Segunda parte: $n < 0$

$$i^n = (i^{-1})^{-n}$$

Note que $i^{-1} = \frac{1}{i}$. Multiplicamos o numerador e o denominador dessa fração por $-i$:

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

Assim, temos que $i^n = (-i)^{-n} = (-1)^{-n} \cdot i^{-n}$. Como $n < 0$, temos que $-n > 0$; logo, i^{-n} é um dos quatro valores, $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e, portanto, $(-1)^{-n} \cdot i^{-n}$ também assume esses quatro valores.

(c.q.d.)

Conseqüência

Para o cálculo da potência i^n com n inteiro e $n \geqslant 4$, divide-se n por 4, obtendo-se resto inteiro r. Tem-se então $i^n = i^r$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.13 Calcular:

a) i^{10} b) i^{53} c) i^{72} d) i^{-37}

Resolução

a) $10 \mid 4$
$2 \quad 2$

$\therefore i^{10} = i^2 = -1$

b) $53 \mid 4$
$1 \quad 13$

$\therefore i^{53} = i^1 = i$

c) $72 \mid 4$
$0 \quad 18$

$\therefore i^{72} = i^0 = 1$

d) $i^{-37} = \frac{1}{i^{37}}$

$37 \mid 4$
$1 \quad 9$

$\therefore i^{-37} = \frac{1}{i^{37}} = \frac{1}{i^1} = \frac{1 \cdot (-i)}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.14 Calcule:

a) i^{42} c) $i^{1.024}$ e) i^{-97}
b) i^{743} d) i^{-181}

B.15 Calcule:

a) $(3 + i)^2$ b) $(2 - 5i)^2$

B.16 (UEMA) O número complexo $(1 - i)^{12}$ é igual a:

a) 64 c) -64 e) $-64 + i$
b) $64i$ d) $-64 - i$

Sugestão. Veja exercício R.12.

B.17 (FGV-SP) Sendo i a unidade imaginária, o valor de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$ é:

a) 1 c) -1 e) $2i$
b) i d) $-i$

Exercícios complementares de C.9 a C.11

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (UFSC) Determine o valor de x para que o produto $(12 - 2i)[18 + (x - 2)i]$ seja um número real.

C.2 (U. F. Viçosa-MG) Os números complexos z e w são tais que $w + iz = -2 - i$ e $z + iw = 5 + 2i$. Então z e w são, respectivamente:

a) $-2 + 2i$ e $3i$ d) $-2 - 2i$ e $-3i$
b) $2 + 2i$ e $-3i$ e) $-2 - 2i$ e $3i$
c) $2 + 2i$ e $3i$

C.3 Para que valor real de a os números complexos $z = 1 + 2i$ e $w = \frac{1}{5} + ai$ são inversos entre si?

C.4 Sendo $z = 1 + xi$, $x \in \mathbb{R}$, obtenha x tal que $z = 2z^{-1}$.

C.5 (FEI-SP) Se $\frac{2i}{z} = 1 + i$, então o número complexo z é:

a) $1 - 2i$ d) $1 + i$
b) $-1 + i$ e) $-1 + 2i$
c) $1 - i$

C.6 Determine x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número $z = \frac{1+i}{x-i}$ seja imaginário puro.

C.7 Obtenha x, $x \in \mathbb{R}$, de modo que o número $z = \frac{2+i}{x+i} - \frac{i}{x}$ seja real.

C.8 (Fuvest-SP) Ache os valores reais de x de modo que a parte real do número complexo $z = \frac{x-i}{x+i}$ seja negativa (i é a unidade imaginária).

C.9 (UFC) Se i representa o número complexo cujo quadrado é igual a -1, determine o valor numérico da soma $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{27}$.

C.10 (Fatec-SP) Determine a forma algébrica do número complexo $z = \frac{i^{3+4n}}{1-i}$, em que n é natural e i é a unidade imaginária.

C.11 (U. E. Londrina-PR) Seja o número complexo $z = x + yi$, no qual $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. Se $z \cdot (1 - i) = (1 + i)^2$, então:

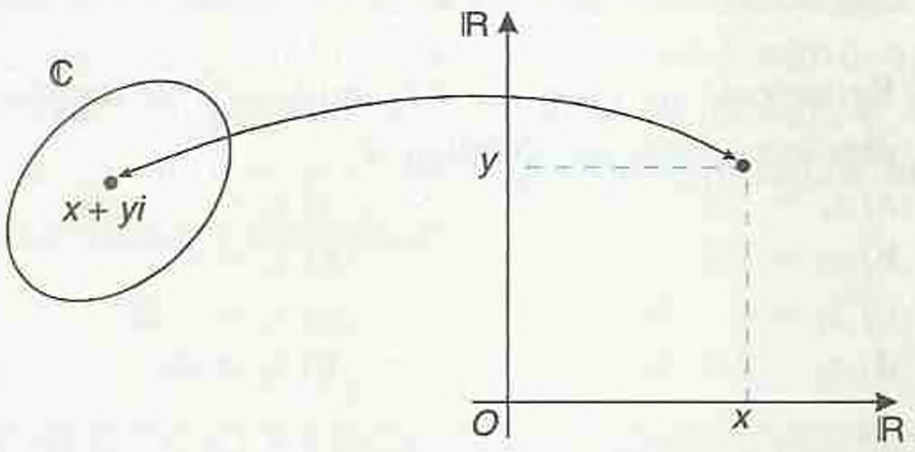
a) $x = y$ d) $x + y = 0$
b) $x - y = 2$ e) $y = 2x$
c) $x \cdot y = 1$

Capítulo 63

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

1. PLANO DE ARGAND-GAUSS

A cada número complexo $z = x + yi$ vamos associar o ponto do plano cartesiano determinado pelo par ordenado de números reais (x, y). Essa associação é biunívoca, isto é, cada número complexo está associado a um único ponto do plano cartesiano e cada ponto desse plano está associado a um único número complexo:



Através dessa associação, representa-se geometricamente o conjunto $\mathbb{C}$ pelo plano cartesiano, que é chamado de **plano de Argand-Gauss**, em homenagem aos matemáticos que o criaram. No plano de Argand-Gauss o eixo das abscissas é chamado de **eixo real** (Re) e o das ordenadas é denominado **eixo imaginário** (Im). Cada ponto $P(x, y)$ desse plano é a **imagem** ou **afixo** do número complexo $x + yi$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

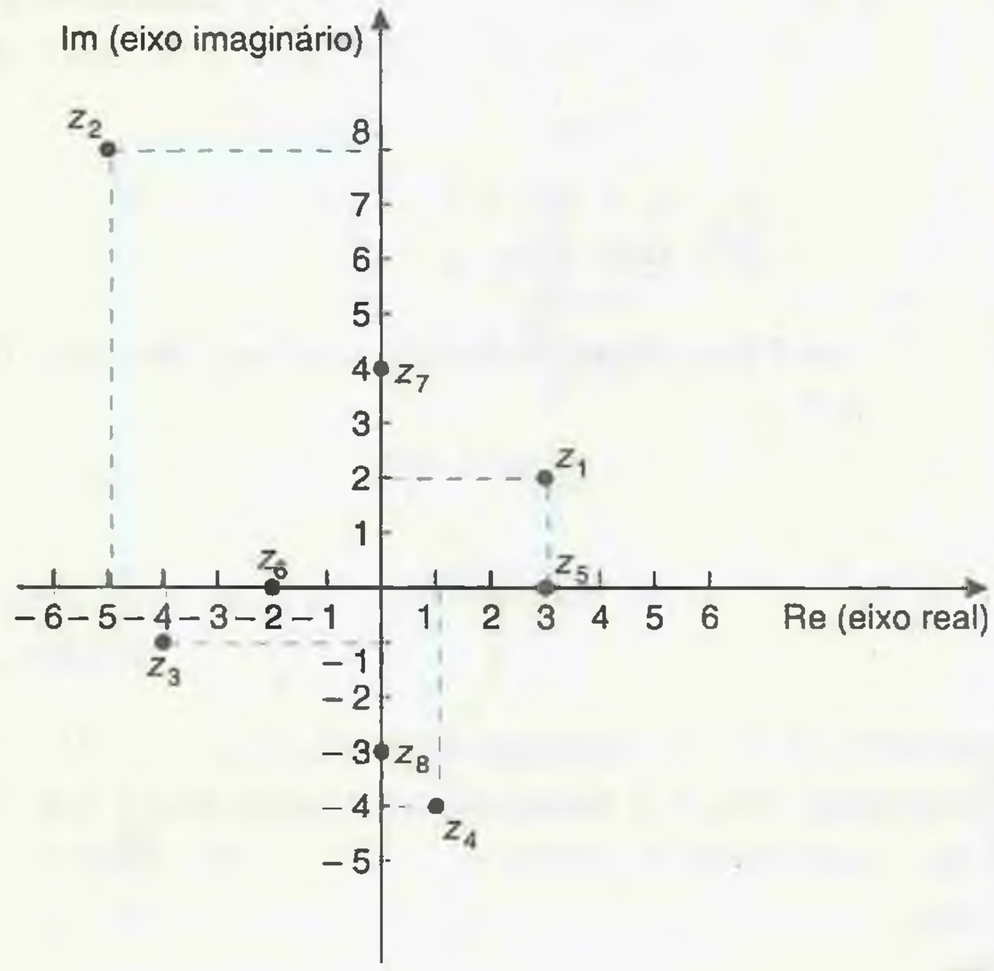
R.1 Representar no plano de Argand-Gauss as imagens dos seguintes números complexos:

$z_1 = 3 + 2i$
$z_2 = -5 + 8i$
$z_3 = -4 - i$
$z_4 = 1 - 4i$
$z_5 = 3$
$z_6 = -2$
$z_7 = 4i$
$z_8 = -3i$

Resolução

Aos números z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 e z_8 associamos os pontos determinados pelos pares ordenados de números reais (3, 2), (−5, 8), (−4, −1), (1, −4), (3, 0), (−2, 0), (0, 4) e (0, −3), respectivamente.

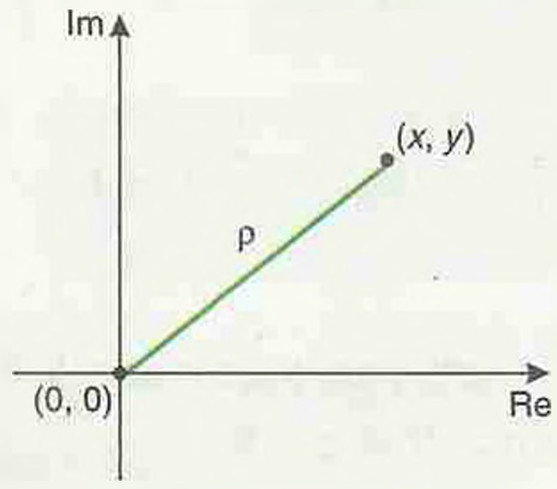
Assim, temos:



2. MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Definição

O módulo de um número complexo $z = x + yi$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, é a distância do ponto (x, y) ao ponto $(0, 0)$ do plano de Argand-Gauss.



$$z = x + yi \Rightarrow \quad \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Calcular o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 3 + 4i$
b) $z_2 = -5 + 12i$
c) $z_3 = 4i$
d) $z_4 = -5$

Resolução

a) $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $|z_2| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

c) $|z_3| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$

d) $|z_4| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$

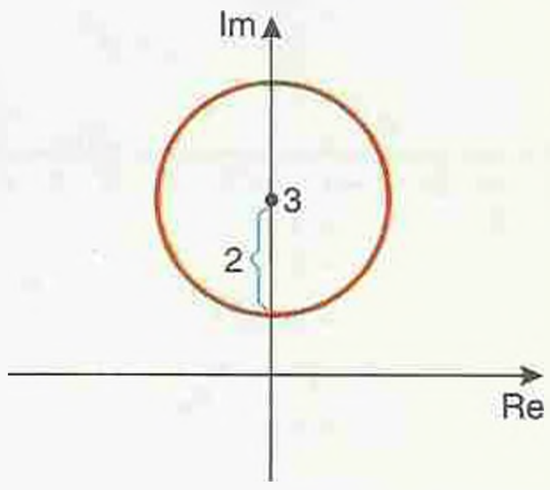
R.3 Representar no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $|z - 3i| = 2$.

Resolução

O **lugar geométrico** é o conjunto formado pelas imagens dos números complexos z que satisfazem a equação. Fazendo $z = x + yi$ com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$, temos que:

$$|z - 3i| = 2 \Rightarrow |x + yi - 3i| = 2$$
$$\therefore |x + (y - 3)i| = 2 \therefore \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 2$$
$$\therefore x^2 + (y - 3)^2 = 4$$

que é uma equação da circunferência de centro (0, 3) e raio 2.



Propriedades do módulo de um número complexo

Sendo z, z_1 e z_2 números complexos quaisquer, e n um número inteiro, tem-se que:

D.1 $|z| \geq 0$

D.2 $z\bar{z} = |z|^2$

D.3 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

D.4 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$

D.5 $|z|^n = |z^n|$, para todo n se $z \neq 0$ ou para $n > 0$ se $z = 0$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Demonstrar a propriedade D.2, isto é, $z\bar{z} = |z|^2$, para qualquer número complexo z.

Resolução

Seja $z = x + yi$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$.

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 =$$
$$= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = |z|^2$$

R.5 Calcular:

a) $|(3 + 4i)(5 - 12i)|$

b) $\left|\frac{1 + 2i}{3 - 4i}\right|$

c) $|(2 + i)^8|$

Resolução

a) Por D.3, temos que

$$|(3 + 4i)(5 - 12i)| = |3 + 4i| \cdot |5 - 12i| =$$
$$= \sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 5 \cdot 13 = 65$$

b) Por D.4, temos que $\left|\frac{1 + 2i}{3 - 4i}\right| = \frac{|1 + 2i|}{|3 - 4i|} =$

$$= \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

c) Por D.5, temos que $|(2 + i)^8| = |2 + i|^8 =$

$$= (\sqrt{2^2 + 1^2})^8 = (\sqrt{5})^8 = 5^4 = 625$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Represente no plano de Argand-Gauss as imagens dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = -3 + 4i$
b) $z_2 = -5 - i$
c) $z_3 = 4 - 4i$
d) $z_4 = 2 + 5i$
e) $z_5 = 6i$
f) $z_6 = 4$
g) $z_7 = -2i$
h) $z_8 = 4i$

B.2 Que figura é o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $z = \bar{z}i$?

Sugestão. Substitua o número complexo z por $x + yi$, em que x e y são números reais.

B.3 Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $z\bar{z} = 9$.

B.4 (Cesgranrio) O lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que z^2 é real é:

a) um par de retas paralelas.
b) um par de retas concorrentes.
c) uma reta.
d) uma circunferência.
e) uma parábola.

B.5 Calcule o módulo de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 6 - 8i$
b) $z_2 = 1 + 2i$
c) $z_3 = \sqrt{3} + i$
d) $z_4 = -3 + \sqrt{7}\,i$
e) $z_5 = 6i$
f) $z_6 = -3$
g) $z_7 = 1 - i$
h) $z_8 = i$
i) $z_9 = 1$
j) $z_{10} = -9i$

B.6 (U. F. Viçosa-MG) O lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $|z - 1 + 2i| = 5$ é:

a) uma reta que passa pela origem (0, 0).
b) uma reta que não passa pela origem (0, 0).
c) um ponto.
d) uma parábola.
e) uma circunferência.

B.7 Calcule:

a) $|(3 - i)(1 + i)|$

b) $\left|\frac{2 + i}{-4 + 3i}\right|$

c) $\left|\frac{2}{1 + i}\right|$

d) $|(\sqrt{2} + i)^4|$

e) $|(5 + 12i)^{-2}|$

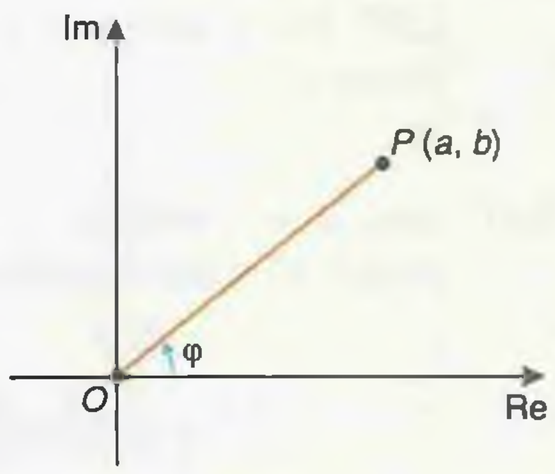
f) $\left|\left(\frac{3 + i}{2 + i}\right)^8\right|$

g) $\left|\left(\frac{2}{1 - i}\right)^5 \left(\frac{4 + 3i}{5 + 5i}\right)^4\right|$

Exercícios complementares de C.1 a C.5

3. ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dado um número complexo não-nulo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, consideremos no plano de Argand-Gauss os pontos $O(0, 0)$, $P(a, b)$ e o ângulo cujos lados são o semi-eixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$.



Medindo o ângulo $P\hat{O}x$, no sentido anti-horário, a partir do semi-eixo positivo Ox, obtém-se a medida φ, com $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ou $0° \leqslant \varphi < 360°$, que denominamos **argumento** do número complexo z.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.6 Determinar o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 3i$

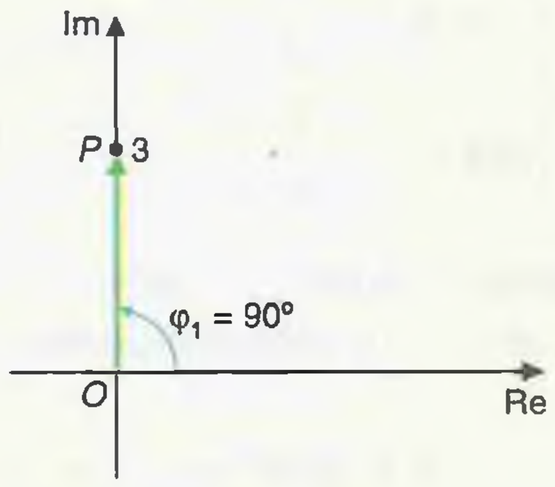
b) $z_2 = -3i$

c) $z_3 = 5$

d) $z_4 = -5$

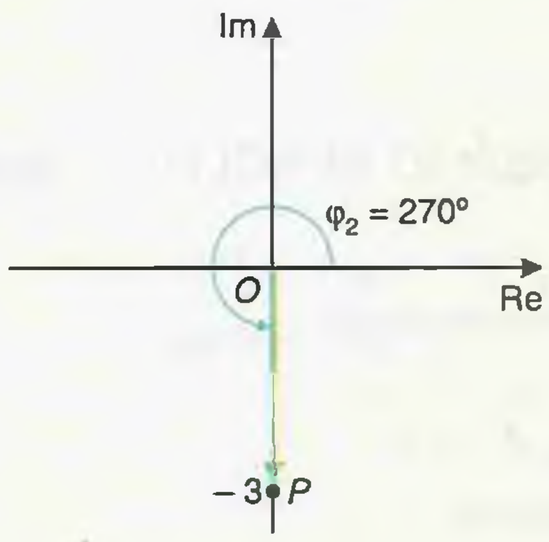
Resolução

a) $z_1 = 3i$



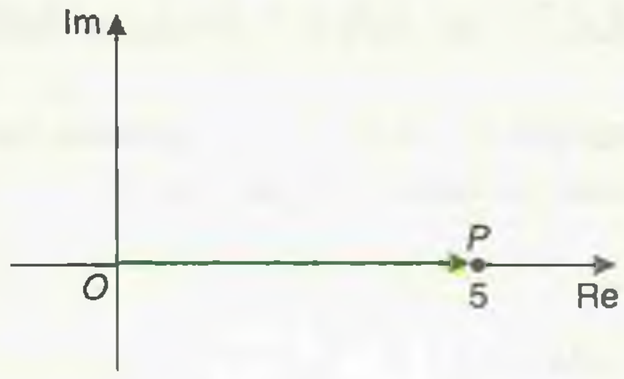
Logo, $\varphi_1 = 90°$ ou $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.

b) $z_2 = -3i$



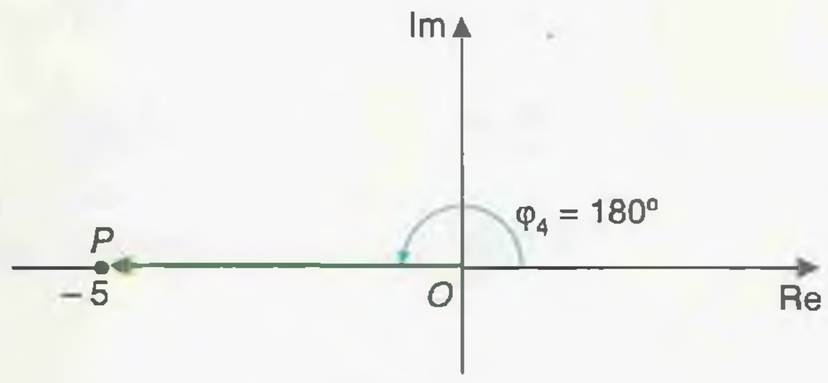
Logo, $\varphi_2 = 270°$ ou $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ rad.

c) $z_3 = 5$



Como a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ coincide com o semi-eixo positivo $\overrightarrow{Ox}$ e como $0° \leqslant \varphi < 360°$, devemos ter $\varphi_3 = 0°$. Logo, $\varphi_3 = 0°$ ou $\varphi_3 = 0$ rad.

d) $z_4 = -5$



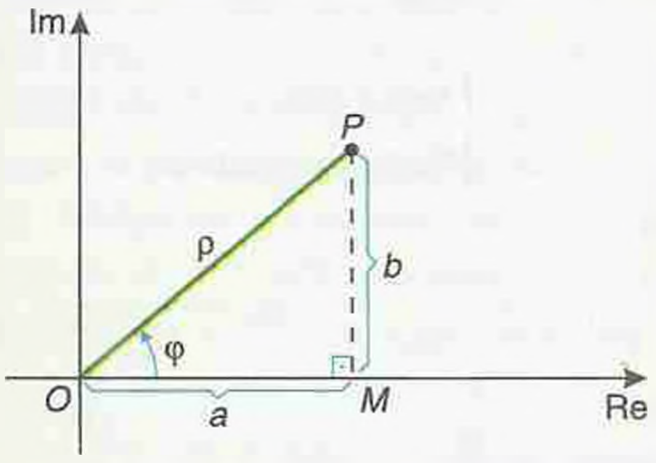
Logo, $\varphi_4 = 180°$ ou $\varphi_4 = \pi$ rad.

Cálculo do argumento de um número complexo

Vimos que, se a imagem do número complexo pertence a um dos eixos coordenados, então é muito simples o cálculo do argumento. Vejamos como se determina o argumento quando a imagem do número complexo não pertence a nenhum dos eixos coordenados.

Primeiro caso

Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$. A imagem $P(a, b)$ de z é um ponto do primeiro quadrante.



A distância $OP = \rho$ é o módulo do complexo, isto é:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(I)}$$

No triângulo OMP, temos $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\rho} & \text{(II)} \\ \text{sen } \varphi = \frac{b}{\rho} & \text{(III)} \end{cases}$

As igualdades (I), (II) e (III) determinam o argumento de z.

Para os demais casos, $a < 0$ e $b > 0$; $a < 0$ e $b < 0$; e $a > 0$ e $b < 0$, chega-se ao mesmo resultado. Verifique!

Nota

Essas igualdades também podem ser usadas quando a imagem do número complexo não nulo pertence a um dos eixos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.7 Determinar o módulo e o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = \sqrt{3} + i$ b) $z_2 = 2 - 2i$

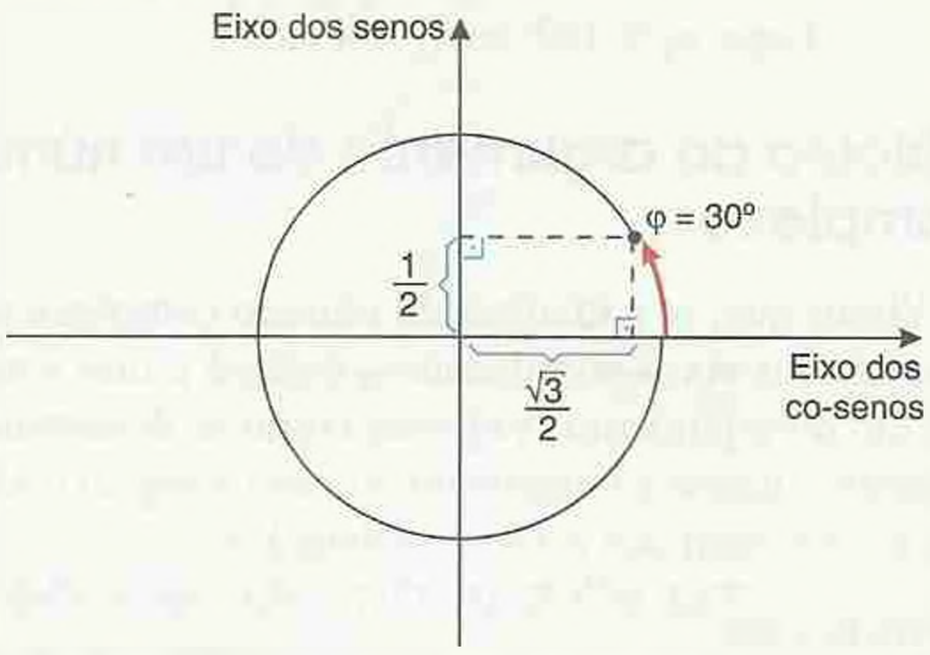
Resolução

a) $z_1 = \sqrt{3} + i \begin{cases} \text{Parte real: } a = \sqrt{3} \\ \text{Parte imaginária: } b = 1 \end{cases}$

Temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



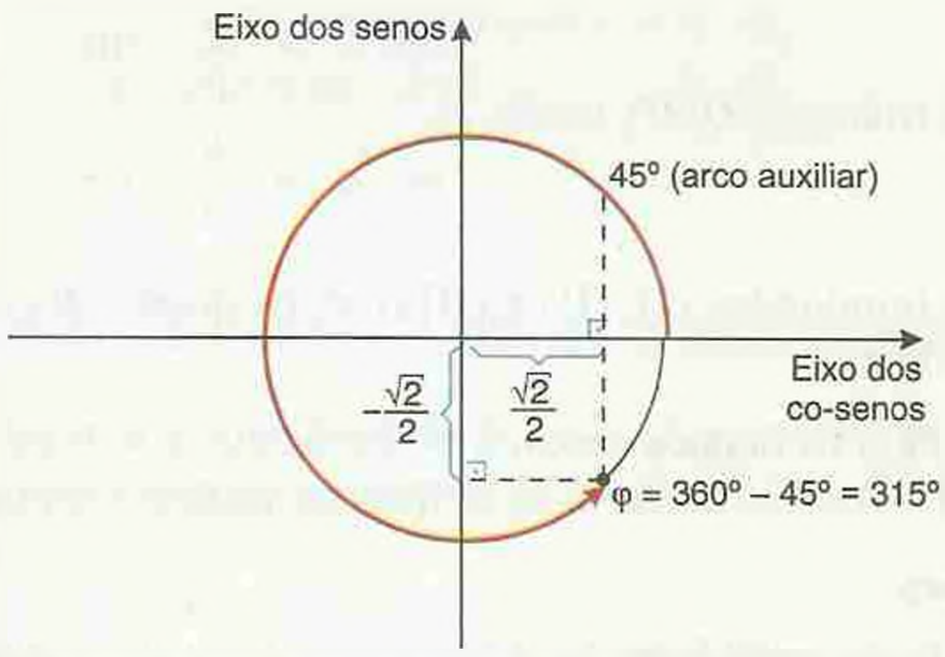
Logo, $\rho = 2$ e $\varphi = 30°$.

b) $z_2 = 2 - 2i \begin{cases} \text{Parte real: } a = 2 \\ \text{Parte imaginária: } b = -2 \end{cases}$

Temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



Logo, $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\varphi = 315°$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.8 Determine o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 8$ c) $z_3 = -7$

b) $z_2 = -i$ d) $z_4 = 5i$

B.9 Sabendo que o argumento de um número complexo z é $\dfrac{\pi}{6}$, determine o argumento de cada um dos seguintes números:

a) $\overline{z}$ b) $-z$ c) $-\overline{z}$

B.10 Dado que o argumento de um número complexo z é 220°, determine o argumento de cada um dos seguintes números:

a) $\overline{z}$ b) $-z$ c) $-\overline{z}$

B.11 Determine o módulo e o argumento de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i$

b) $z_2 = 1 + i$

c) $z_3 = -3 - 3i$

d) $z_4 = 2\sqrt{3} - 2i$

e) $z_5 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

f) $z_6 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

Exercício complementar C.6

4. FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Para todo número complexo não-nulo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, de módulo ρ e argumento φ, temos que:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

Assim, podemos escrever o número $z = a + bi$ sob a forma $z = \rho \cos \varphi + (\rho \operatorname{sen} \varphi)i$ ou, ainda:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

que é chamada de **forma trigonométrica** ou **forma polar do número complexo** z.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.8 Dar a forma trigonométrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = \sqrt{3} + i$ c) $z_3 = -3i$

b) $z_2 = -1 + i$

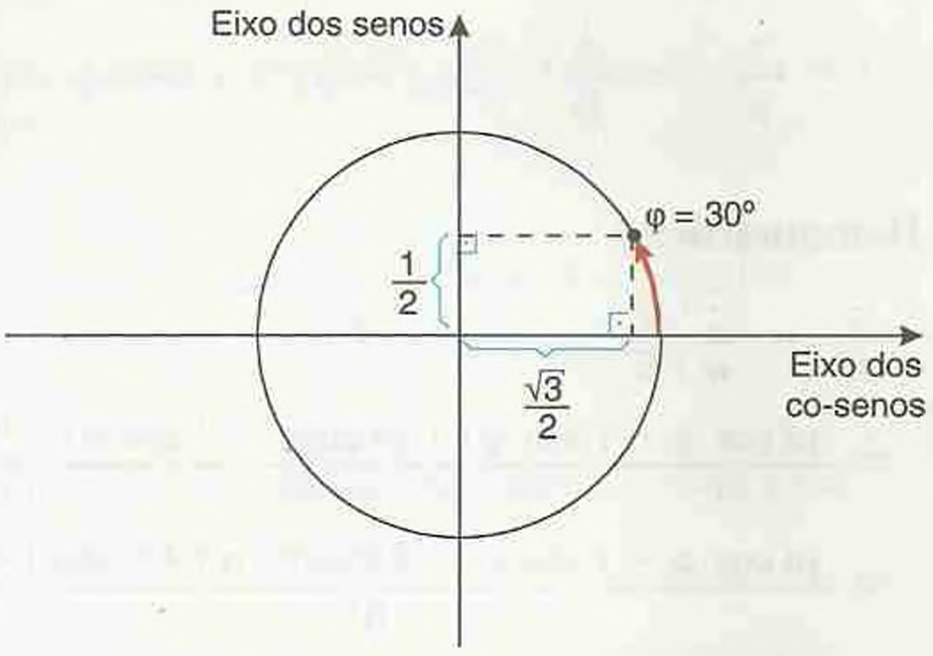
Resolução

a) $z_1 = \sqrt{3} + i \begin{cases} \text{Parte real: } a = \sqrt{3} \\ \text{Parte imaginária: } b = 1 \end{cases}$

Temos:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$



Logo, a forma trigonométrica de z_1 é:

$$z_1 = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$

ou

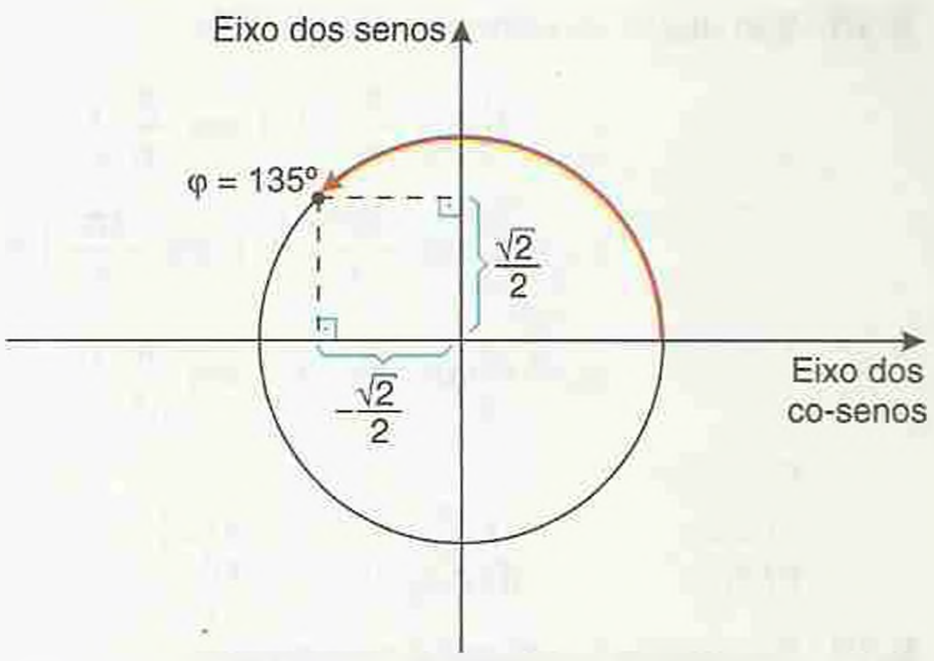
$$z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$$

b) $z_2 = -1 + i$ $\begin{cases} \text{Parte real: } a = -1 \\ \text{Parte imaginária: } b = 1 \end{cases}$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



Logo, a forma trigonométrica de z_2 é:

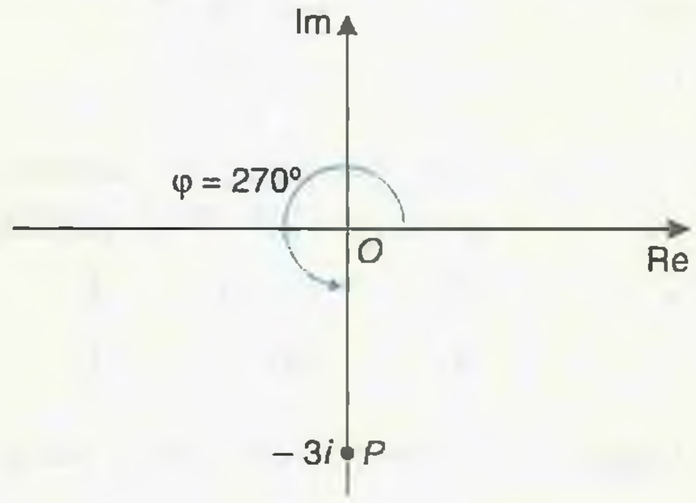
$$z_2 = \sqrt{2}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$$

ou

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$$

c) $z_3 = -3i$

Como z_3 é um imaginário puro, temos que sua imagem pertence ao eixo imaginário e, nesse caso, podemos obter facilmente o módulo e o argumento de z, graficamente, sendo desnecessárias as "fórmulas".



O módulo de $z_3 = -3i$ é a distância do ponto P à origem O do sistema, isto é, $\rho = 3$.

Logo, a forma trigonométrica de z_3 é:

$$z_3 = 3(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) \text{ ou}$$

$$z_3 = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$$

Nota

Pode-se representar um número complexo não-nulo z **também** sob a seguinte forma:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \text{ com } \varphi \notin [0, 2\pi[$$
$$\text{e } \varphi \notin [0°, 360°[$$

Por exemplo, $z = 8(\cos 390° + i \operatorname{sen} 390°)$.

Essa forma de apresentação é denominada **forma trigonométrica secundária**, e a medida φ é um **argumento secundário** de z.

Para que não haja confusão de linguagem, convencionamos que:

- ao usar a expressão "**argumento** de um número complexo", estamos nos referindo à medida φ no intervalo $[0°, 360°[$ ou no intervalo $[0, 2\pi[$;
- ao usar a expressão "**forma trigonométrica** de um número complexo", estamos nos referindo à forma $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, com $0° \leq \varphi < 360°$ ou $0 \leq \varphi < 2\pi$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.12 Dê a forma trigonométrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = -\sqrt{3} - i$
b) $z_2 = 1 - i$
c) $z_3 = 3i$
d) $z_4 = -2$
e) $z_5 = -3 + \sqrt{3}\,i$
f) $z_6 = -4i$
g) $z_7 = 2$
h) $z_8 = 5 + 5i$

B.13 Obtenha a forma algébrica de cada um dos seguintes números complexos:

a) $z_1 = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$
b) $z_2 = 1\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$
c) $z_3 = 8(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$
d) $z_4 = 10\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$
e) $z_5 = 5(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

B.14 (Cesgranrio) Um complexo z possui módulo igual a 2 e argumento $\frac{\pi}{3}$. Sendo $\bar{z}$ o conjugado de z, a forma algébrica do complexo $\bar{z}$ é:

a) $1 - i\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3} + i$ e) $2(\sqrt{3} - i)$
b) $\sqrt{3} - i$ d) $1 + \sqrt{3}\,i$

B.15 (U. E. Londrina-PR) Seja z um número complexo de módulo 2 e argumento 120°. O conjugado de z é:

a) $2 - 2i\sqrt{3}$ c) $-1 - i\sqrt{3}$ e) $1 + i\sqrt{3}$
b) $2 + 2i\sqrt{3}$ d) $-1 + i\sqrt{3}$

B.16 Determine o menor valor inteiro positivo de n, de modo que o número $z = 5\left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}\right)$ seja real.

B.17 Encontre o menor valor inteiro positivo de n, de modo que o número $z = 4\left(\cos \frac{n\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{8}\right)$ seja imaginário puro.

Exercícios complementares de C.7 a C.11

5. MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Teorema

Se $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ e $w = \beta(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então:

$$zw = \rho\beta[\cos(\varphi + \alpha) + i \operatorname{sen}(\varphi + \alpha)]$$

Demonstração

$zw = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \beta(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) =$
$= \rho\beta(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) =$
$= \rho\beta(\cos \varphi \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha +$
$+ i^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha) = \rho\beta[\cos \varphi \cos \alpha - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha +$
$+ (\operatorname{sen} \varphi \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi)\, i] =$
$= \rho\beta[\cos(\varphi + \alpha) + i \operatorname{sen}(\varphi + \alpha)]$

(c.q.d.)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.9 São dados os números complexos:

$$z_1 = 3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$$
$$\text{e } z_2 = 4(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$$

Calcular $z_1 z_2$.

Resolução

$z_1 z_2 = 3(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°) \cdot 4(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) =$
$= 12[\cos(15° + 45°) + i \operatorname{sen}(15° + 45°)] =$
$= 12(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 12\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= 6 + 6\sqrt{3}\,i$

6. DIVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

Teorema

Se $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ e $w = \beta(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ são as formas trigonométricas dos complexos z e w, então:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho}{\beta}[\cos(\varphi - \alpha) + i \operatorname{sen}(\varphi - \alpha)]$$

Demonstração

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} =$$
$$= \frac{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \beta(\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha)}{\beta^2} =$$
$$= \frac{\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \beta[\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)]}{\beta^2} =$$
$$= \frac{\rho\beta}{\beta^2}[\cos(\varphi - \alpha) + i \operatorname{sen}(\varphi - \alpha)] =$$
$$= \frac{\rho}{\beta}[\cos(\varphi - \alpha) + i \operatorname{sen}(\varphi - \alpha)]$$

(c.q.d.)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.10 São dados os complexos $z_1 = 12(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$ e $z_2 = 2(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$. Calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

Resolução

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{2}[\cos(40° - 10°) + i \operatorname{sen}(40° - 10°)]$$
$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = 6(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$
$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) \therefore \frac{z_1}{z_2} = 3\sqrt{3} + 3i$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.18 São dados os números complexos:

$$z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$$
$$z_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) \text{ e}$$
$$z_3 = 4\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right).$$

Calcule:

a) $z_1 z_2$ c) z_3^2 e) z_1^2 g) $z_1 z_2 z_3$
b) $z_1 z_3$ d) $z_2 z_3$ f) z_2^3

B.19 São dados os números complexos:

$$z_1 = 15(\cos 70° + i \operatorname{sen} 70°),$$
$$z_2 = 3(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$$
$$\text{e } z_3 = \cos 40° + i \operatorname{sen} 40°$$

Obtenha a forma algébrica dos seguintes números complexos:

a) $\frac{z_1}{z_2}$ b) $\frac{z_1}{z_3}$ c) $\frac{z_3}{z_2}$ d) $\frac{z_2}{z_3}$

B.20 Represente no plano de Argand-Gauss o número $\frac{1}{z}$ em que $z = \frac{2}{3}(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$.

Exercícios complementares C.12 e C.13

7. POTENCIAÇÃO EM $\mathbb{C}$

Dado o número complexo $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, temos que:

$$z^2 = z \cdot z =$$
$$= \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) =$$
$$= \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z =$$
$$= \rho^2(\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) =$$
$$= \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi)$$

$$z_4 = z^3 \cdot z =$$
$$= \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi) \cdot \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) =$$
$$= \rho^4(\cos 4\varphi + i \operatorname{sen} 4\varphi)$$
etc.

Observe que cada resultado apresenta o módulo ρ elevado ao expoente de z e o argumento φ multiplicado por esse expoente. Essas constatações podem ser generalizadas através do teorema a seguir, demonstrado pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754).

Teorema

Se $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ é a forma trigonométrica do número complexo z e n é um inteiro, então:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.11 Sendo $z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$, calcular z^{10}.

Resolução

Temos:

$$z^{10} = 2^{10}[\cos (10 \cdot 30°) + i \operatorname{sen} (10 \cdot 30°)]$$
$$\therefore z^{10} = 1.024(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$$
$$\therefore z^{10} = 1.024\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\therefore z^{10} = 512 - 512\sqrt{3}i$$

R.12 Calcular $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{20}$.

Resolução

Em primeiro lugar, vamos obter a forma trigonométrica do número complexo:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \begin{cases} \text{Parte real: } a = -\frac{1}{2} \\ \text{Parte imaginária: } b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Temos que:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

$$\therefore \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\rho} \\ \operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\rho} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} \varphi = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \therefore \varphi = 120°$$

Assim, $z = 1(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$
$\therefore z^{20} = 1^{20}(\cos 2.400° + i \operatorname{sen} 2.400°)$.
Reduzindo 2.400° à primeira volta positiva, obtemos 240°.
Logo, temos:

$$z^{20} = 1(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$$
$$\therefore z^{20} = 1\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\therefore z^{20} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.21 Sendo $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$, calcule z^4.

B.22 Calcule:

a) $(\sqrt{3} + i)^{10}$

b) $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}$

c) $(1 + i)^9$

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,i}{2}\right)^{10}$

B.23 (Fuvest-SP) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$, qual é o menor valor inteiro positivo n para o qual z^n é um número real?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

Sugestão. Represente o número z na forma trigonométrica.

B.24 Obtenha o menor valor de n, inteiro e positivo, de modo que o número $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i)^n$ seja imaginário puro.

Exercício complementar C.14

8. RADICIAÇÃO EM $\mathbb{C}$

Definição

Sejam z e w números complexos e n um número inteiro positivo, tal que:

$$w^n = z$$

Nessas condições, o número w é uma raiz n-ésima de z.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Mostrar que o número $w = 1 + i$ é uma raiz quarta de $z = -4$.

Resolução

Devemos mostrar que $w^4 = z$. Temos:

$$w^4 = (1 + i)^4 = [(1 + i)^2]^2 =$$
$$= [1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i + i^2]^2 = [1 + 2i - 1]^2 =$$
$$= 4i^2 = -4 = z$$

Logo, $1 + i$ é uma raiz quarta de -4.

R.14 Calcular as raízes cúbicas de 1.

Resolução

Seja $w = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ a forma trigonométrica de uma das raízes cúbicas de 1. Devemos ter:

$$w^3 = 1$$
$$\therefore \rho^3(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi) = 1\ (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$
$$\therefore \begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\varphi = 0 + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \dfrac{k \cdot 2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Como $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, atribuímos a k os valores inteiros 0, 1 e 2:

$$k = 0 \Rightarrow \varphi = 0;\ k = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3};$$
$$k = 2 \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

Assim, as raízes cúbicas de 1 são os números:

$w_0 = 1\ (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1$;

$$w_1 = 1\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$w_2 = 1\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.25 Determine os números complexos z tais que $z^4 = 1$. **Sugestão**. Faça $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ e $1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$.

B.26 Mostre que o número $w = 1 + i$ é uma das raízes quintas de $z = -4 - 4i$.

B.27 Calcule as raízes sextas de 1. **Sugestão**. Exercício R.14.

B.28 (Fesp-SP) As raízes imaginárias da esquação $8x^3 + 1 = 0$ são:

a) $\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$
b) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
c) $\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}i$
d) $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$
e) $\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}i$

Exercício complementar C.15

9. RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU EM $\mathbb{C}$

Quando estudamos as equações do 2º grau no conjunto universo $\mathbb{R}$, demos o conjunto vazio ($\varnothing$) como solução para equações com discriminantes negativos. Porém no conjunto universo $\mathbb{C}$ tais equações possuem conjunto solução **não-vazio**, pois em $\mathbb{C}$ é possível extrair raízes quadradas de números negativos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.15 Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Resolução

Temos que $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$.

As raízes quadradas de -16 são $4i$ e $-4i$. Logo, temos:

$$x = \frac{-2 \pm 4i}{2} \quad \therefore\ x = -1 + 2i \text{ ou } x = -1 - 2i$$

$$\therefore\ S = \{-1 + 2i, -1 - 2i\}$$

EXERCÍCIO BÁSICO

B.29 Resolva em $\mathbb{C}$ as equações:

a) $x^2 - 6x + 10 = 0$
b) $x^2 + 2x + 5 = 0$
c) $2x^2 + 2x + 5 = 0$
d) $x^2 - 8x + 17 = 0$

Exercícios complementares C.16 e C.17

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (U. E. Londrina-PR) Seja o número complexo $z = \dfrac{2i^{342}}{(1 - i)^2}$. A imagem de z no plano complexo é um ponto que pertence ao:

a) eixo imaginário.
b) eixo real.
c) 2º quadrante.
d) 3º quadrante.
e) 4º quadrante.

C.2 (U. E. Londrina-PR) Um número complexo z é tal que $2iz + z \cdot \bar{z} = 3 - 4i$. Nessas condições, a imagem de z no plano de Gauss é um ponto que pertence ao:

a) eixo real.
b) eixo imaginário.
c) quarto quadrante.
d) terceiro quadrante.
e) segundo quadrante.

C.3 (FEI-SP) O módulo do número complexo $(1 + i)^{-3}$ é:

a) $\sqrt{2}$
b) 1
c) -3
d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
e) 0

C.4 (Mackenzie-SP) A solução da equação $|z| + z - 18 + 6i = 0$ é um complexo z de módulo:

a) 6 b) 8 c) 18 d) 12 e) 10

C.5 Represente no plano de Argand-Gauss o lugar geométrico das imagens dos números complexos z tais que $z\bar{z} = |z|$.

C.6 Obtenha o módulo e o argumento do número complexo z, em que:

a) $z = (1 + i)^{10}$ **Sugestão.** $z = [(1 + i)^2]^5$.

b) $z = \dfrac{3 + 5i}{4 + i}$

C.7 (UFRS) Considere $z_1 = -3 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$. A representação trigonométrica de $z_1 + \overline{z_2}$ é:

a) $\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) $\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right)$

d) $\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{4}\right)$

e) $\left(\cos \dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{4}\right)$

C.8 (Unicamp-SP) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3} + i$.

a) Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.

b) Qual a medida do lado desse triângulo?

C.9 (UNIR) Considere o número complexo $z = 1 + yi$, em que y é um número real e i a unidade imaginária. Se $w = z - \overline{z}$, em que $\overline{z}$ é o conjugado de z, e a forma trigonométrica de w é $2\left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}\right)$, então y é igual a:

a) -1 c) 2 e) 4

b) 1 d) 3

C.10 (Vunesp) Seja L o afixo do número complexo $a = \sqrt{8} + i$ em um sistema de coordenadas cartesianas xOy. Determine o número complexo b, de módulo igual a 1, cujo afixo M pertence ao quarto quadrante e é tal que o ângulo $L\hat{O}M$ é reto.

C.11 (Fuvest-SP) Dentre os números complexos $z = a + bi$, não-nulos, que têm argumento igual a $\dfrac{\pi}{4}$, aquele cuja representação geométrica está sobre a parábola $y = x^2$ é:

a) $1 + i$ c) $-1 + i$ e) $-\sqrt{2} + 2i$

b) $1 - i$ d) $\sqrt{2} + 2i$

C.12 (U. E. Londrina-PR) Se $z = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)$, então o conjugado de z^2 é igual a:

a) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} + 2i$

b) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ e) $-4i$

c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Sugestão: $z^2 = z \cdot z$.

C.13 (Unifor-CE) Sendo $u = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, $v = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ e $w = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ tal que $\dfrac{u}{v} = w$, conclui-se que:

a) $u = 6$ c) $u = 6 - i$ e) $u = -6$

b) $u = 6 + i$ d) $u = 6i$

C.14 (Fuvest-SP) Mostre que o número complexo $z = \cos 48° + i \operatorname{sen} 48°$ é raiz da equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

C.15 (U. F. Santa Maria-RS) A soma das raízes cúbicas do número complexo $z = 8i$ é:

a) $-4i$ c) 0 e) $4i$

b) $-2\sqrt{3}\,i$ d) $2\sqrt{3}\,i$

C.16 (PUC-MG) Uma solução da equação $2z^2 - 3z + 2 = 0$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{4}i$ d) $\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{7}}{4}i$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}i$ e) $\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}i$

c) $\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2}i$

C.17 (PUC-MG) Em $\mathbb{C}$, o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} 1 - x & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ x - 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ é dado por:

a) $\left\{\dfrac{6}{5} + \dfrac{3}{5}i,\ \dfrac{6}{5} - \dfrac{3}{5}i\right\}$

b) $\left\{\dfrac{6}{5} + \dfrac{1}{5}i,\ \dfrac{6}{5} - \dfrac{1}{5}i\right\}$

c) $\left\{\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i,\ \dfrac{3}{5} - \dfrac{6}{5}i\right\}$

d) $\left\{\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}i,\ \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i\right\}$

e) $\left\{\dfrac{6}{5} + 6i,\ \dfrac{6}{5} - 6i\right\}$

Capítulo 64

POLINÔMIO EM UMA VARIÁVEL

1. CONCEITUAÇÃO

Polinômio na variável x é toda expressão $P(x)$ da forma:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$$

em que $\{a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0\} \subset \mathbb{C}$ e $\{n, n-1, n-2, ..., 1, 0\} \subset \mathbb{N}$.

- Para indicar que $P(x)$ representa a expressão $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ escreve-se $P(x) \equiv a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ (o símbolo $\equiv$ deve ser lido: "é idêntico a").
- Cada uma das parcelas

$$a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_{n-2}x^{n-2}, ..., a_1x, a_0$$

é um **termo** ou **monômio** do polinômio, sendo a_0 o **termo independente da variável x**.

- Os números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0$ são os **coeficientes** do polinômio. Se todos esses coeficientes forem iguais a zero, o polinômio é chamado de **identicamente nulo**. Indica-se que um polinômio $P(x)$ é identicamente nulo por $P(x) \equiv 0$.
- O **grau** de um polinômio não identicamente nulo é o maior expoente da variável dentre os termos de **coeficientes não-nulos**. Indica-se o grau de um polinômio $P(x)$ por ∂P (lê-se: del P).
- Atribuindo-se um valor complexo α à variável x, o resultado da expressão obtida é chamado de **valor numérico do polinômio para $x = \alpha$**. Indica-se esse valor numérico por $P(\alpha)$.

Exemplos

a) A expressão $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 7$ é um polinômio de grau 5 em que:

- 5, −3, 2, −4 e 7 são seus coeficientes;
- x é sua variável;
- $5x^4$, $-3x^3$, $2x^2$, $-4x$ e 7 são seus termos ou seus monômios;
- 7 é seu termo independente.

b) A expressão $2it^5 + t^3 + 3t + 6$, que pode ser escrita sob a forma $2it^5 + 0t^4 + t^3 + 0t^2 + 3t + 6$, é um polinômio de grau 5 em que:

- $2i$, 0, 1, 0, 3 e 6 são seus coeficientes;
- t é sua variável;
- $2it^5$, $0t^4$, t^3, $0t^2$, $3t$ e 6 são seus termos ou seus monômios;
- 6 é o seu termo independente.

c) O número 7 é um polinômio de grau zero, pois pode ser representado por $7x^0$. Todo número é chamado de **polinômio constante**.

d) As expressões $5x^{-2} + 2x^{-1} + 4x + 2$ e $3x^4 + 5x^{\frac{1}{2}}$ **não** são polinômios, pois em cada uma delas há pelo menos um expoente da variável que **não** é um número natural.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Para que valor complexo de a o polinômio $(a^2 - 1)x^2 + (a - 1)x + 0$ é identicamente nulo?

Resolução

Indicando esse polinômio por $P(x)$, temos que:

$$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ ou } a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Logo, $a = 1$.

R.2 Para que valores complexos de m o polinômio $P(x) \equiv (m^2 - 1)x^3 + 2x^2 - 5$ possui grau 3?

Resolução

$$\partial P = 3 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0$$
$$\therefore \partial P = 3 \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ e } m \neq -1$$

Assim, o polinômio $P(x)$ possui grau 3 para todo número complexo m, $m \neq 1$ e $m \neq -1$.

R.3 Indicando por $P(x)$ o polinômio $2x^3 + x^2 - 3x$, calcular $P(5)$.

Resolução

O símbolo $P(5)$ indica o valor numérico do polinômio para $x = 5$. Assim, temos:

$$P(5) = 2 \cdot 5^3 + 5^2 - 3 \cdot 5$$
$$\therefore P(5) = 2 \cdot 125 + 25 - 15 \therefore P(5) = 260$$

Os polinômios e os sistemas de numeração

O nosso sistema de numeração utiliza a base 10, isto é, 10 unidades formam 1 dezena, 10 dezenas formam 1 centena etc. Assim, por exemplo, o número 6.472 pode ser representado sob a forma de uma **decomposição polinomial**:

$$6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

Se quisermos escrever o número 6.472 em outra base, por exemplo, a base 5, devemos obter os números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ com $\{n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0\} \subset \mathbb{N}$, tais que:

$$6.472 = a_n \cdot 5^n + a_{n-1} \cdot 5^{n-1} + a_{n-2} \cdot 5^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot 5 + a_0 \cdot 5^0$$

Para a obtenção dos números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ e a_0, basta dividir 6.472 por 5, cujo quociente deve também ser dividido por 5 e o novo quociente ainda deve ser dividido por 5, e assim por diante até se obter um quociente menor que 5, isto é:

	6.472	5
resto →	2 1.294	5
resto →	4 258	5
resto →	3 51	5
resto →	1 10	5
resto →	0 2	← último quociente

Tomando-se o último quociente e os restos na ordem inversa em que foram obtidos, os valores 2, 0, 1, 3, 4 e 2 são, respectivamente, iguais aos números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ e a_0, e, portanto, podemos escrever:

$$6.472 = 2 \cdot 5^5 + 0 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

ou, ainda, $6.472 = 201342_5$.

O que fizemos acima foi representar na base 5 o número 6.472 dado na base 10. O número 201342_5 deve ser lido como: dois, zero, um, três, quatro, dois, na base 5.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Qual das expressões seguintes é polinômio na variável x?

a) $A(x) \equiv 3x^{-5} + 8x + 2$

b) $B(x) \equiv \sqrt[3]{x} + 2x^2 - 1$

c) $C(x) \equiv x + \frac{1}{x}$

d) $D(x) \equiv x^{\sqrt{2}}$

e) $E(x) \equiv 6x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{1}{3}$

B.2 Determine o grau de cada um dos polinômios:

a) $A(x) \equiv 5x^3 + 8x^2 + x - 1$

b) $B(x) \equiv 0x^5 + 3x^2 - 6$

c) $C(x) \equiv 4$

d) $D(x) \equiv 0$

B.3 Para que valores complexos de k o polinômio $P(x) \equiv (2k^2 - 18)x^4 + 3x - 2$ possui grau 4?

B.4 Obtenha os valores de m, $m \in \mathbb{C}$, para que o polinômio $P(x) \equiv (m^2 - 4)x^6 + 3x^5 + 2x^2 - 4$ tenha grau 5.

B.5 Para que valor de k o polinômio $P(x) \equiv (k^2 - 1)x^2 + (k + 1)x + 2k + 2$ é identicamente nulo?

B.6 Indicando o polinômio $x^5 + x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $P(x)$, calcule:

a) $P(2)$ b) $P(-1)$ c) $P(0)$ d) $P(i)$

Exercício complementar C.1

2. IDENTIDADE DE POLINÔMIOS

Definição

Os polinômios $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$ e $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0$, na variável x, são idênticos se, e somente se:

$$a_j = b_j, \forall j, j \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leqslant j \leqslant n$$

Indicamos que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos por $P(x) \equiv Q(x)$; caso não sejam idênticos, indicamos por $P(x) \not\equiv Q(x)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.4 Para que valores complexos de m e n os polinômios

$(m^2 - 1)x^3 + 2x + 5$ e

$8x^3 + (m - 3)x^2 + (m - n)x + 5$

na variável x são idênticos?

Resolução

Indicando esses polinômios por $P(x)$ e $Q(x)$, respectivamente, temos:

$$P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 8 \\ m - 3 = 0 \\ m - n = 2 \end{cases}$$

$$\therefore P(x) \equiv Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ ou } m = -3 \\ m = 3 \\ m - n = 2 \end{cases}$$

Temos, então, $m = 3$ e $n = 1$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 Dados os polinômios $P(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 - x$ e $Q(x) \equiv (m + n)x^4 + 2x^3 + (m - 2n)x^2 - x$, determine as constantes m e n, sabendo que $P(x) \equiv Q(x)$.

B.8 Para que valores de a, b e c os polinômios $P(x) \equiv (a + b + c)x^5 - 2x^3 + 5x + 1$ e $Q(x) \equiv (a + b)x^3 + (b + c)x + 1$ são idênticos?

Exercício complementar C.2

3. OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Vamos fazer agora uma revisão através de alguns exercícios resolvidos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Sendo $P(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 + x - 1$ e $Q(x) \equiv 5x^4 + 3x + 7$, calcular:

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Resolução

a) O polinômio soma é obtido adicionando-se os monômios semelhantes nas parcelas, isto é:

$$P(x) + Q(x) \equiv 3x^4 + 5x^4 + 2x^3 + x + \\ + 3x - 1 + 7 \equiv 8x^4 + 2x^3 + 4x + 6$$

b) O polinômio diferença é obtido subtraindo-se dos monômios de $P(x)$ os respectivos monômios semelhantes de $Q(x)$, isto é:

$$P(x) - Q(x) \equiv 3x^4 - 5x^4 + 2x^3 + \\ + x - 3x - 1 - 7 \equiv -2x^4 + 2x^3 - 2x - 8$$

R.6 Sendo $P(x) \equiv 5x^2 - 3x + 2$ e $Q(x) \equiv 4x - 6$, calcular:

a) $3P(x)$

b) $P(x) \cdot Q(x)$

Resolução

Aplicando a propriedade distribuitva, temos:

a) $3P(x) \equiv 3(5x^2 - 3x + 2) \equiv 15x^2 - 9x + 6$

b) $P(x) \cdot Q(x) \equiv (5x^2 - 3x + 2)(4x - 6) \equiv$
$\equiv 20x^3 - 30x^2 - 12x^2 + 18x + 8x - 12 \equiv$
$\equiv 20x^3 - 42x^2 + 26x - 12$

R.7 Através do método da chave, obter o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de:
$E(x) \equiv 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ por $D(x) \equiv x^2 + 2$

Resolução

1º) Dividimos o monômio de mais alto grau de $E(x)$ pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$:

$$2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \;\big|\; \frac{x^2 + 2}{2x^3}$$

2º) Subtraímos do dividendo o polinômio $2x^3(x^2 + 2) \equiv 2x^5 + 4x^3$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 2x^5 \qquad + 4x^3 \\ \hline 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \end{array} \;\Big|\; \frac{x^2 + 2}{2x^3}$$

Primeiro resto parcial

3º) Dividimos o monômio de mais alto grau do primeiro resto parcial pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 2x^5 \qquad + 4x^3 \\ \hline 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \end{array} \;\Big|\; \frac{x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2}$$

4º) Subtraímos do primeiro resto parcial o polinômio $4x^2(x^2 + 2) \equiv 4x^4 + 8x^2$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 2x^5 \qquad + 4x^3 \\ \hline 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 4x^4 \qquad + 8x^2 \\ \hline x^2 + 3x + 1 \end{array} \;\Big|\; \frac{x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2}$$

Segundo resto parcial

5º) Dividimos o monômio de mais alto grau do segundo resto parcial pelo monômio de mais alto grau de $D(x)$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 2x^5 \qquad + 4x^3 \\ \hline 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 4x^4 \qquad + 8x^2 \\ \hline x^2 + 3x + 1 \end{array} \;\Big|\; \frac{x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2 + 1}$$

6º) Subtraímos do segundo resto parcial o polinômio $1(x^2 + 2) \equiv x^2 + 2$:

$$\begin{array}{l} 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 2x^5 \qquad + 4x^3 \\ \hline 4x^4 + 0x^3 + 9x^2 + 3x + 1 \\ 4x^4 \qquad + 8x^2 \\ \hline x^2 + 3x + 1 \\ x^2 \qquad + 2 \\ \hline 3x - 1 \end{array} \;\Big|\; \frac{x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2 + 1}$$

Resto final

Temos, então, $Q(x) \equiv 2x^3 + 4x^2 + 1$ e $R(x) \equiv 3x - 1$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.9 Dados os polinômios $A(x) \equiv 6x^3 + 2x^2 - 3x$, $B(x) \equiv 4x^2 + 5x - 1$ e $C(x) \equiv 9x - 2$, calcule:

a) $A(x) + B(x)$

b) $A(x) - B(x)$

c) $4A(x)$

d) $B(x) \cdot C(x)$

e) $[C(x)]^2$

f) $2A(x) - 3B(x)$

g) $A(x) \cdot C(x) + B(x)$

B.10 Considere os polinômios $A(x) \equiv 2x^2 + ax + b$, $B(x) \equiv 4x + 2$, $C(x) \equiv x + b$ e $D(x) \equiv 8x^3 + (17 + b)x^2 + 3x - a$. Determine as constantes a e b sabendo que $A(x) \cdot B(x) + C(x) \equiv D(x)$.

B.11 Se dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ têm o mesmo grau n e $P(x) + Q(x)$ é não-nulo, então:

a) o polinômio $P(x) + Q(x)$ tem grau n.

b) o polinômio $P(x) + Q(x)$ tem grau menor que n.

c) o polinômio $P(x) + Q(x)$ tem grau menor ou igual a n.

d) o polinômio $P(x) - Q(x)$ é identicamente nulo.

e) o polinômio $P(x) - Q(x)$ tem grau 1.

B.12 Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são tais que $\partial P = 3$ e $\partial Q = 8$. Qual é o grau do polinômio $P(x) \cdot Q(x)$?
Lembrete. O símbolo ∂P deve ser lido "del P" e representa o grau do polinômio P.

B.13 Através do método da chave, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $E(x) \equiv 3x^6 - 13x^5 + 8x^4 + 13x^3 - 8x^2 + 23x - 12$;
$D(x) \equiv x^2 - 5x + 6$

b) $E(x) \equiv 2x^5 + 6x^4 + x^2 - 4x + 2$;
$D(x) \equiv x^3 + 3x^2 - 4x + 2$

c) $E(x) \equiv x^4 - 1$; $D(x) \equiv x - 1$

d) $E(x) \equiv 8x^5 + 26x^4 + 17x^3 + 10x^2 + 10x - 3$;
$D(x) \equiv 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 1$

e) $E(x) \equiv 9x^6 - 4x^4 - x^2 + 6x + 12$;
$D(x) \equiv 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

f) $E(x) \equiv x^5 + 1$; $D(x) \equiv x + 1$

Exercícios complementares de C.3 a C.5

Propriedade fundamental da divisão de polinômios

Sejam os polinômios $P(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, com $\partial P \geq \partial D$ e $\partial R < \partial Q$ (ou $R \equiv 0$). Os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ se, e somente se,
$P(x) \equiv Q(x) \cdot D(x) + R(x)$.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Leftrightarrow P(x) \equiv Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $2x^3 - 1$, obtém-se o quociente $4x + 2$ e o resto $x^2 + 3$. Determinar $P(x)$.

Resolução
Multiplicando-se o quociente pelo divisor e adicionando-se ao resultado o resto da divisão, obtém-se o dividendo. Assim, temos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & 2x^3 - 1 \\ \hline x^2 + 3 & 4x + 2 \end{array} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x) \equiv (4x + 2)(2x^3 - 1) + x^2 + 3$$
$$\therefore P(x) \equiv 8x^4 - 4x + 4x^3 - 2 + x^2 + 3 \equiv$$
$$\equiv 8x^4 + 4x^3 + x^2 - 4x + 1$$

R.9 Dividindo o polinômio $P(x) \equiv 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ pelo polinômio $D(x)$, obtém-se o quociente $Q(x) \equiv 3x + 2$ e o resto $R(x) \equiv 11x + 5$. Determinar $D(x)$.

Resolução
O grau do polinômio quociente, 1, é a diferença entre os graus dos polinômios dividendo, 3, e divisor, ∂D. Assim, temos $3 - \partial D = 1$; logo; $\partial D = 2$. Sabendo que o grau de $D(x)$ é 2, podemos escrever $D(x) \equiv ax^2 + bx + c$.

Multiplicando o quociente pelo divisor e adicionando ao resultado o resto da divisão, obtém-se o polinômio dividendo, isto é:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array} \Rightarrow P(x) \equiv Q(x) \cdot D(x) + R(x)$$

$$\therefore 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \equiv$$
$$\equiv (3x + 2)(ax^2 + bx + c) + 11x + 5$$
$$\therefore 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \equiv$$
$$\equiv 3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 2ax^2 + 2bx + 2c + 11x + 5$$
$$\therefore 6x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \equiv$$
$$\equiv 3ax^3 + (3b + 2a)x^2 + (3c + 2b + 11)x + 2c + 5$$

$$\therefore \begin{cases} 3a = 6 \\ 3b + 2a = 4 \\ 3c + 2b + 11 = 2 \\ 2c + 5 = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 0 \text{ e } c = -3$$

Finalmente, temos $D(x) \equiv 2x^2 + 0x - 3$, ou seja, $D(x) \equiv 2x^2 - 3$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.14 (UFF-RJ) Ao se dividir o polinômio $P(x)$ por $D(x) = x - 2$ obteve-se quociente $Q(x) = x^4 + 2x^2 + x + 1$ e resto 8. Determine $P(x)$.
Nota. Em exames vestibulares, alguns examinadores, com o objetivo de simplificar a notação, indicam que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são idênticos simplesmente por $P(x) = Q(x)$, em vez de $P(x) \equiv Q(x)$.

B.15 (UEB) Em uma divisão, o dividendo é um polinômio do 8º grau e o divisor é um polinômio do 5º grau. Pode-se afirmar que:
a) o quociente é um polinômio do 4º grau.
b) o quociente é um polinômio do 2º grau.
c) o resto pode ser um polinômio do 5º grau.
d) o maior grau possível para o resto é 4.
e) a divisão não pode ser exata.

B.16 (UEPA) Dividindo o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ pelo polinômio $D(x)$, obtemos o quociente $x - 1$ e o resto $2x - 1$. O valor de $D(2)$ é:
a) -4 c) 0 e) 2
b) -2 d) 1

Exercícios complementares C.6 e C.7

4. RAIZ OU ZERO DE UM POLINÔMIO

Definição

Uma constante complexa k é **raiz** ou **zero** de um polinômio $P(x)$ se, e somente se:

$$P(k) = 0$$

Exemplo
O número 2 é raiz do polinômio:

$$P(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 3x + 6$$

pois $P(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 6 = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.10 Determinar as raízes do polinômio $P(x) \equiv 2x^2 - x - 1$.

Resolução

Basta resolvermos a equação $P(x) = 0$, ou seja:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Temos:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$\therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\therefore x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Assim, as raízes de $P(x)$ são 1 e $-\frac{1}{2}$.

R.11 Provar que, se a soma dos coeficientes de um polinômio $P(x)$ é igual a zero, então o número 1 é raiz do polinômio.

Resolução

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$ tal que $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 = 0$.

Calculando $P(1)$, temos:

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \\ + a_{n-2} \cdot 1^{n-2} + \ldots + a_0$$

$$\therefore P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0$$

Por hipótese, temos que a soma dos coeficientes de $P(x)$ é zero. Logo, $P(1) = 0$, isto é, 1 é raiz de $P(x)$.

(c.q.d.)

R.12 Provar que, se o termo independente de um polinômio $P(x)$ é igual a zero, então zero é raiz de $P(x)$.

Resolução

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + 0$.

Temos que:

$$P(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + a_{n-2} \cdot 0^{n-2} + \ldots + \\ + a_1 \cdot 0 + 0 \ \therefore \ P(0) = 0$$

Ou seja, zero é raiz de $P(x)$. (c.q.d.)

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.17 Determine as raízes de cada um dos seguintes polinômios:

a) $P(x) \equiv 3x^2 - 2x - 1$
b) $P(x) \equiv x^2 + 1$
c) $P(x) \equiv (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
d) $P(x) \equiv x^3 - 5x^2 + 6x$
e) $P(x) \equiv x^2 + 2x + 2$
f) $P(x) \equiv (x^2 - 7x + 12)^{38}$

B.18 Se a soma dos coeficientes de um polinômio é igual a zero, então podemos afirmar que:

a) o polinômio é identicamente nulo.
b) o polinômio tem grau par.
c) o polinômio tem grau ímpar.
d) uma das raízes do polinômio é 1.
e) o termo independente do polinômio é zero.

5. FRAÇÃO POLINOMIAL

Definição

Chama-se **fração polinomial** toda expressão do tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios complexos de variável complexa, com $Q(x) \not\equiv 0$.

Exemplos

a) $\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

b) $\frac{4}{x^3 - 3x + 2}$

Frações polinomiais idênticas

Definição

Duas frações polinomiais $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e $\frac{S(x)}{T(x)}$ são idênticas se, e somente se:

$$\frac{P(k)}{Q(k)} = \frac{S(k)}{T(k)}, \ \forall k, k \in \mathbb{C},$$
$$\text{com } Q(k) \neq 0 \text{ e } T(k) \neq 0$$

Indicamos que as frações $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e $\frac{S(x)}{T(x)}$ são idênticas por $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{S(x)}{T(x)}$ e, caso contrário, por $\frac{P(x)}{Q(x)} \not\equiv \frac{S(x)}{T(x)}$.

Exemplos

a) $\frac{(x+1)^2}{x-3} \equiv \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 3}$, com $x \neq 3$

b) $\frac{ax + b}{x^2 - 2} \equiv \frac{3x + 5}{x^2 - 2} \Leftrightarrow ax + b \equiv 3x + 5$

$\therefore a = 3$ e $b = 5$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.13 Determinar as constantes a e b de modo que:

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \equiv \frac{5x + 1}{x^2 - 1}$$

Resolução

$$\frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)} \equiv \frac{5x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{ax + a + bx - b}{x^2 - 1} \equiv \frac{5x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1} \equiv \frac{5x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\therefore \begin{cases} a + b = 5 & \text{(I)} \\ a - b = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Somando membro a membro (I) e (II), obtemos:

$$2a = 6 \ \therefore \ a = 3$$

Substituindo $a = 3$ em (I), obtemos $3 + b = 5 \ \therefore \ b = 2$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.19 Determine as constantes a e b na identidade:

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3} \equiv \frac{3x}{x^2-9}$$

B.20 Obtenha as constantes a, b e c na identidade:

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} \equiv \frac{8x^2-x-1}{x^3-x}$$

Exercício complementar C.8

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Mackenzie-SP) Seja o polinômio $P(x) \equiv 2x^4 - x^3 + 1$. O valor de $P(i^5)$ é:

a) $i + 3$ c) $i - 2$ e) $2i$
b) $i - 3$ d) i

C.2 (Vunesp) Para que valores reais de a, b e c as funções polinomiais f e g, definidas por $f(x) = x^3 + x^2 + x$ e $g(x) = x^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + a - b - c$, são idênticas?

C.3 (Fuvest-SP) Um polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ satisfaz as seguintes condições: $P(1) = 0$; $P(-x) + P(x) = 0$, qualquer que seja x real. Qual o valor de $P(2)$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

C.4 (U. E. Londrina-PR) Sendo f, g e h polinômios de graus 4, 6 e 3, respectivamente, o grau de $(f + g) \cdot h$ será:

a) 9 b) 10 c) 12 d) 18 e) 30

C.5 (FEI-SP) A soma de dois polinômios $P(x) + Q(x)$ é um polinômio de grau 6, e a diferença $P(x) - Q(x)$ é um polinômio de grau 4. É válido afirmar-se que:

a) a diferença $Q(x) - P(x)$ tem grau 6.
b) $P(x)$ e $Q(x)$ têm o mesmo grau.
c) $P(x)$ tem grau 5.
d) $Q(x)$ tem grau 4.
e) $P(x)$ tem grau 4.

C.6 (U. F. Santa Maria-RS) Na divisão do polinômio $P(x) = 2x^5 + ax^4 + 4x^3 + 9x^2 + 3x + 1$ pelo polinômio $Q(x) = bx^3 + 4x^2 + 1$, obtiveram-se o quociente $H(x) = x^2 + 2$ e o resto $R(x) = 3x + c$, em que a, b e c são números reais. Então o valor de $\frac{1}{5}(a + b + c)$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

C.7 (ITA-SP) Dividindo o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ pelo polinômio $Q(x)$, obtemos o quociente $S(x) = 1 + x$ e o resto $R(x) = x + 1$. O polinômio $Q(x)$ satisfaz:

a) $Q(2) = 0$ c) $Q(0) \neq 0$ e) n.d.a.
b) $Q(3) = 0$ d) $Q(1) \neq 0$

C.8 (PUC-SP) Os valores de A e B tais que $\frac{1+x}{x-x^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x}$ são, respectivamente:

a) 2 e 1 c) 1 e 2 e) 1 e 3
b) 3 e 2 d) 2 e 3

Capítulo 65

GENERALIDADES SOBRE A DIVISÃO DE UM POLINÔMIO POR UM BINÔMIO DO 1º GRAU

1. TEOREMA DO RESTO

Seja a uma constante qualquer.

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

Demonstração

Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$, respectivamente, ou seja:

$$P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{(I)}$$

com $\partial R < 1$ ou $R(x) \equiv 0$.

Note, portanto, que $R(x)$ é um polinômio constante. Fazendo $R(x) \equiv R$, a sentença (I) pode ser escrita como $P(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R$.

Calculando $P(a)$, obtemos:

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R \therefore P(a) = R$$

Logo, o resto R da divisão é igual a $P(a)$.

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.1 Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 3x^4 - 5x^2 - 3$ por $x - 2$.

Resolução

O teorema do resto nos garante que o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ é igual a $P(2)$. Assim, temos:

$$R = P(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^2 - 3 \therefore R = 25$$

R.2 Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 2x^3 + 6x^2 + 3x - 1$ por $x + 1$.

Resolução

Observando que $x + 1 \equiv x - (-1)$, temos, pelo teorema do resto, que o resto R da divisão do polinômio $P(x)$ por $x + 1$ é $P(-1)$. Assim, temos:

$$R = P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1$$
$$\therefore R = 0$$

Note que, como o resto é zero, $P(x)$ é divisível por $x + 1$.

R.3 O resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 3x^2 - (3a + 1)x + a$ por $x - 3$ é igual a 8. Calcular o valor de a.

Resolução

O resto 8 da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é igual a $P(3)$, ou seja:

$$8 = P(3) \therefore 8 = 3 \cdot 3^2 - (3a + 1) \cdot 3 + a$$

Logo, $8 = 27 - 9a - 3 + a \therefore 8a = 16 \therefore a = 2$.

R.4 Determinar o polinômio $P(x)$ do 2º grau que dividido por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ apresenta restos iguais a 4, 7 e 14, respectivamente.

Resolução

Sendo $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$, pelo teorema do resto, temos:

$$P(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4$$
$$P(2) = 7 \Rightarrow 4a + 2b + c = 7$$
$$P(3) = 14 \Rightarrow 9a + 3b + c = 14$$

Escalonando o sistema $\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 14 \end{cases}$

temos:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 14 \end{cases} \xrightarrow{\text{x}\ -4;\ \text{x}\ -9;\ +;\ +} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 0a - 2b - 3c = -9 \\ 0a - 6b - 8c = -22 \end{cases} \xrightarrow{\text{x}\ -3;\ +} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c = 4 \text{ (I)} \\ 0a - 2b - 3c = -9 \text{ (II)} \\ 0a + 0b + c = 5 \text{ (III)} \end{cases}$$

Substituindo $c = 5$ em (II), temos:

$$-2b - 3 \cdot 5 = -9 \Rightarrow b = -3$$

Substituindo $b = -3$ e $c = 5$ em (I), temos:

$$a - 3 + 5 = 4 \Rightarrow a = 2$$

Logo, $P(x) \equiv 2x^2 - 3x + 5$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $P(x) \equiv 3x^4 - 2x^3 + 1$; $D(x) \equiv x - 2$

b) $P(x) \equiv x^3 + 6x^2 - 5x - 10$; $D(x) \equiv x + 1$

c) $P(x) \equiv 32x^4 - 8x^3 + x^2 - 1$; $D(x) \equiv x - \frac{1}{2}$

d) $P(x) \equiv 5x^8 - 3x^7 + 6x - 4$; $D(x) \equiv x + 1$

e) $P(x) \equiv 7x^5 + 6x^3 + 9x - 2$; $D(x) \equiv x$

B.2 (U. E. Londrina-PR) Se o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ é 10, o valor de k é:

a) -5 b) -4 c) 5 d) 6 e) 8

B.3 (Unicap-PE) Efetuando a divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - mx + 5$ pelo binômio $Q(x) = x + 2$, foi obtido um resto, $R(x) = 1$. Qual é o valor de m?

B.4 (Faap-SP) Dividindo-se $x^2 + kx + 2$ por $(x - 1)$ e por $(x + 1)$ são encontrados restos iguais entre si. O valor de k é:
a) 0
b) -1
c) $-1{,}5$
d) 1,5
e) impossível de determinar com os dados.

B.5 Qual é o polinômio do 2º grau que dividido por $x - 2$, $x - 3$ e $x - 4$ apresenta restos 3, 10 e 21, respectivamente?

B.6 Determine o polinômio do 2º grau que dividido por x, $x - 1$ e $x + 1$ apresenta restos iguais a -1, 0 e 4, respectivamente.

Exercícios complementares C.1 e C.2

2. TEOREMA DE D'ALEMBERT

Seja a uma constante qualquer.
Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, a é raiz de $P(x)$.

Demonstração

Por definição de raiz de um polinômio, temos que a é raiz de $P(x)$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Mas, pelo teorema do resto, $P(a)$ é o resto R da divisão de $P(x)$ por $x - a$. Concluímos assim que:

a é raiz de $P(x) \Leftrightarrow R = 0$
$\therefore$ a é raiz de $P(x) \Leftrightarrow P(x)$ é divisível por $x - a$

(c.q.d.)

GRAVURA DE AUTOR IGNORADO

Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), matemático francês. Cientista mais influente da França em sua época, D'Alembert foi um dos que abriram caminho para a Revolução Francesa.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.5 Mostrar que $P(x) \equiv x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ é divisível por $x - 2$.

Resolução

Basta mostrar que $P(2)$ é igual a zero. Temos:

$P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 - 12$
$\therefore$ $P(2) = 32 - 24 + 12 - 8 - 12$ $\therefore$ $P(2) = 0$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 2$.

R.6 Determinar a de modo que o polinômio $P(x) \equiv 3x^2 - 7x + 2$ seja divisível por $x - a$.

Resolução

Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Assim, temos:

$3a^2 - 7a + 2 = 0$ $\therefore \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$

$\therefore$ $a = \dfrac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3}$ $\therefore$ $a = 2$ ou $a = \dfrac{1}{3}$

R.7 Para que valores de n, $n \in \mathbb{N}$, o polinômio $P(x) \equiv x^n + 1$ é divisível por $x + 1$?

Resolução

Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se, e somente se, $P(-1) = 0$. Assim, devemos ter:

$$(-1)^n + 1 = 0 \ \therefore (-1)^n = -1$$

Sendo $n \in \mathbb{N}$, temos que essa igualdade ocorre se, e somente se, n é ímpar.
Logo, $P(x) \equiv x^n + 1$ é divisível por $x + 1$ se, e somente se, n é um número natural ímpar.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 (U. Taubaté-SP) O valor de b para o qual o polinômio $P(x) = 15x^{16} + bx^{15} + 1$ é divisível por $x - 1$ é:
a) -16 b) 16 c) 15 d) 32 e) 64

B.8 (Unaerp-SP) Se $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 6x + a$ é divisível por $x - 2$, então os valores de a e de $P(2)$, são, respectivamente:
a) -16 e -2 c) 16 e -2 e) -16 e zero
b) -16 e 2 d) 16 e 2

B.9 Para que valores de n, $n \in \mathbb{N}^*$, o polinômio $P(x) \equiv x^n - 1$ é divisível por $x - 1$?

Exercícios complementares de C.3 a C.5

3. DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI PARA A DIVISÃO DE UM POLINÔMIO $P(x)$ POR $x - a$

Para a obtenção do quociente e do resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$, em que a é uma constante qualquer, podemos usar o método da chave. Porém, com o objetivo de facilitar essa operação, vamos apresentar um dispositivo prático conhecido como "dispositivo de Briot-Ruffini".

O dispositivo que apresentaremos pode ser compreendido com o auxílio da propriedade fundamental da divisão. Sejam, respectivamente, $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $E(x) \equiv e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0$ por $x - a$.

$Q(x)$ deve ser um polinômio do 3º grau; e $R(x)$ deve ser um polinômio constante. Ou seja:

$$Q(x) \equiv q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0 \text{ e } R(x) \equiv R$$

Devemos ter:

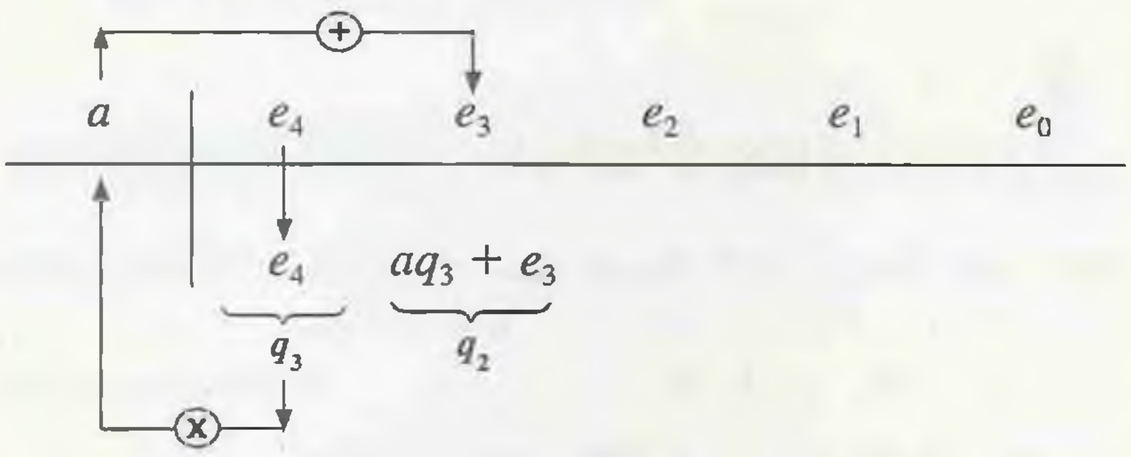
$E(x) \equiv (x - a) \cdot Q(x) + R$
$\therefore e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0 \equiv$
$\equiv (x - a)(q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0) + R$
$\therefore e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0 \equiv$
$\equiv q_3x^4 + q_2x^3 + q_1x^2 + q_0x - aq_3x^3 - aq_2x^2 - aq_1x - aq_0 + R$
$\therefore e_4x^4 + e_3x^3 + e_2x^2 + e_1x + e_0 \equiv$
$\equiv q_3x^4 + (q_2 - aq_3)x^3 + (q_1 - aq_2)x^2 + (q_0 - aq_1)x - aq_0 + R$

Logo, obtemos:

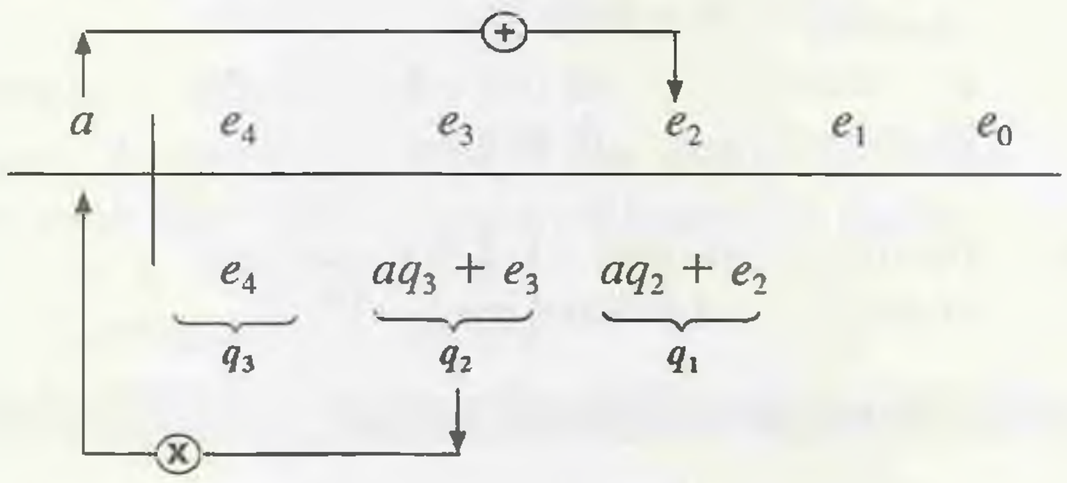
$$q_3 = e_4$$
$$q_2 - aq_3 = e_3 \Rightarrow q_2 = e_3 + aq_3$$
$$q_1 - aq_2 = e_2 \Rightarrow q_1 = e_2 + aq_2$$
$$q_0 - aq_1 = e_1 \Rightarrow q_0 = e_1 + aq_1$$
$$-aq_0 + R = e_0 \Rightarrow R = e_0 + aq_0$$

Os valores q_3, q_2, q_1, q_0 e R podem ser calculados rapidamente, executando-se os passos descritos a seguir.

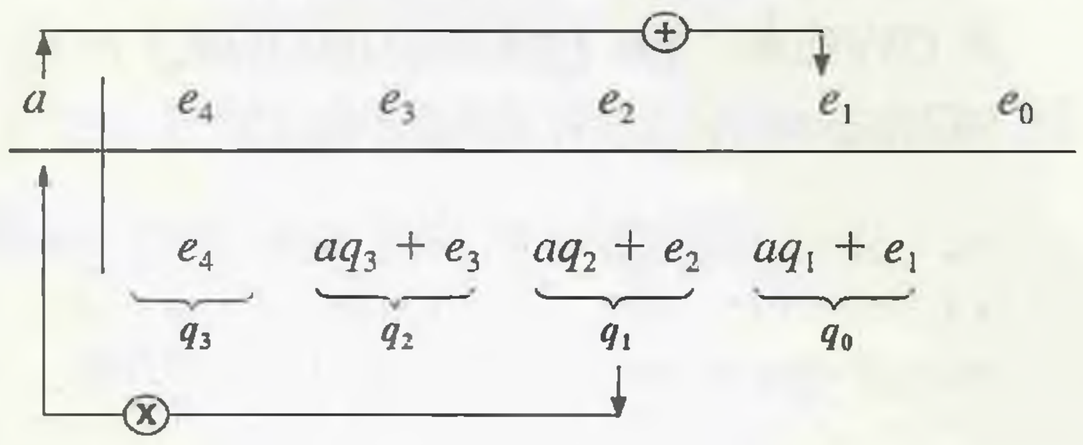
Primeiro passo



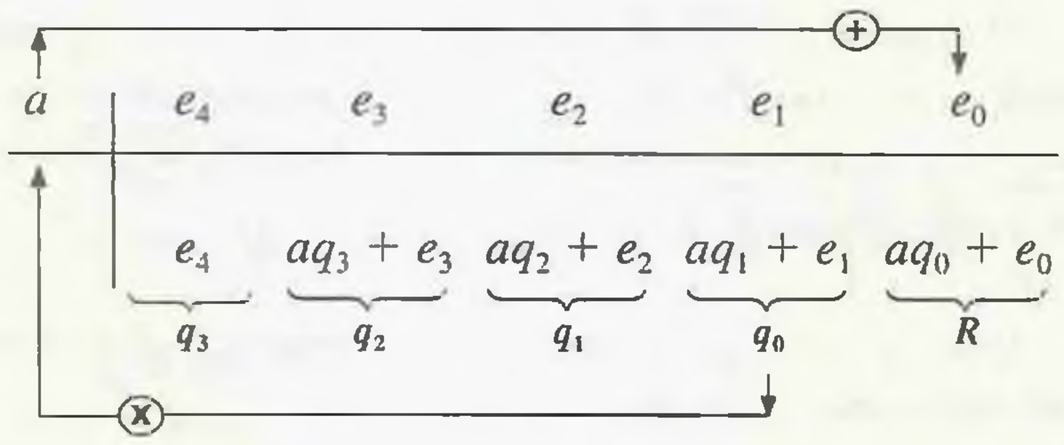
Segundo passo



Terceiro passo



Quarto passo



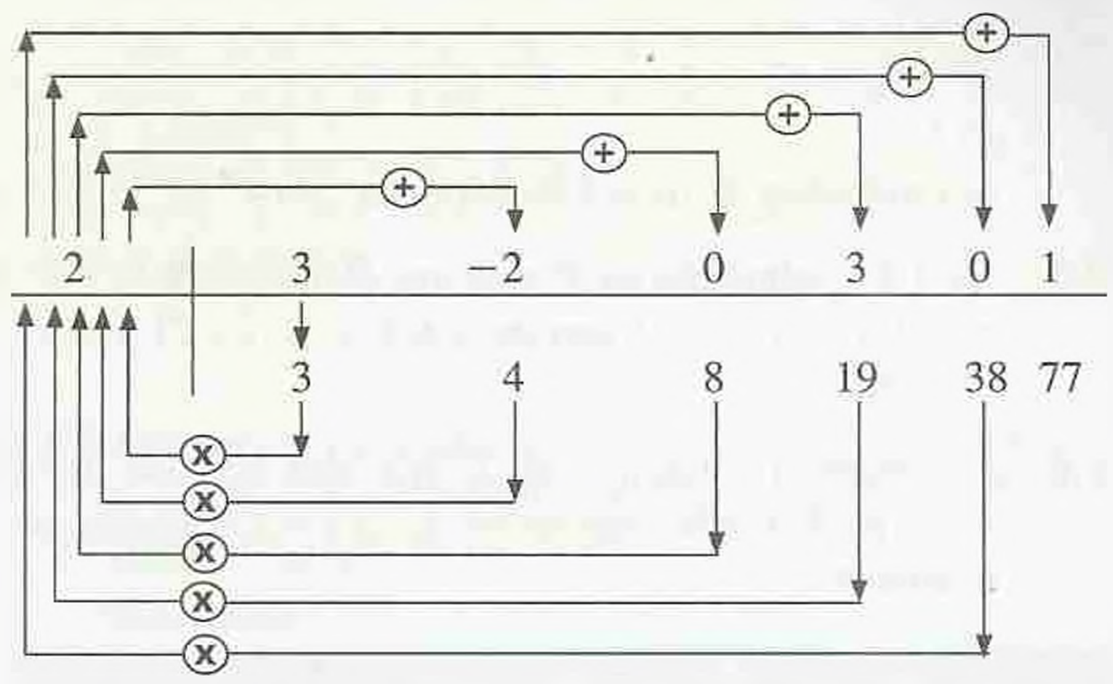
Pode-se generalizar esse método para qualquer polinômio $E(x)$ com grau maior ou igual a 1.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.8 Através do dispositivo prático de Briot-Ruffini, obter o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x) \equiv 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 + 1$ por $x - 2$.

Resolução

Podemos escrever $E(x) \equiv 3x^5 - 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 1$. Assim, pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:



Logo, $Q(x) \equiv 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 19x + 38$ e $R = 77$.

R.9 Obter o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x) \equiv 2x^6 + 3x^4 + x - 4$ por $x + 1$.

Resolução

Podemos escrever

$$P(x) \equiv 2x^6 + 0x^5 + 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x - 4$$

e $x + 1 \equiv x - (-1)$. Assim, pelo dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

−1	2	0	3	0	0	1	−4
	2	−2	5	−5	5	−4	0

Logo, $Q(x) \equiv 2x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 4$ e $R = 0$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.10 Através do dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $D(x)$, nos seguintes casos:

a) $E(x) \equiv 6x^4 - x^3 + 3x^2 + x - 2$; $D(x) \equiv x - 2$

b) $E(x) \equiv 2x^5 + x^3 - 3x + 1$; $D(x) \equiv x + 1$

c) $E(x) \equiv 5x^3 + 2x^2 - x + 3$; $D(x) \equiv x - 3$

d) $E(x) \equiv x^4 + x - 1$; $D(x) \equiv x + \frac{1}{2}$

e) $E(x) \equiv x^6 - 1$; $D(x) \equiv x - 1$

B.11 Transforme o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 1$ em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 1º grau.
Sugestão. Observe que $P(1) = 0$ e. portanto, $P(x)$ é divisível por $x - 1$.

B.12 Dado o polinômio $P(x) \equiv x^7 + 1$, transforme-o em um produto de dois polinômios, sendo um deles do 6º grau.

Exercício complementar C.6

4. DIVISÃO DE UM POLINÔMIO $P(x)$ POR $kx - a$

Ao dividir um polinômio $P(x)$ pelo binômio $kx - a$, onde k e a são constantes, com $k \neq 0$, obtemos o quociente $Q(x)$ e o resto R, ou seja:

$$P(x) \equiv (kx - a) \cdot Q(x) + R$$

Podemos escrever essa sentença sob a forma:

$$P(x) \equiv k\left(x - \frac{a}{k}\right) \cdot Q(x) + R$$

$$\therefore\ P(x) \equiv \left(x - \frac{a}{k}\right) k \cdot Q(x) + R$$

Assim, observamos que o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{a}{k}$ são, respectivamente, $k \cdot Q(x)$ e R.

Logo, podemos estabelecer o seguinte:

Para a obtenção do quociente $Q(x)$ e do resto R da divisão de $P(x)$ por $kx - a$, podemos:

1º) dividir $P(x)$ por $x - \frac{a}{k}$, obtendo o quociente $Q_1(x) = k \cdot Q(x)$ e o resto R;

2º) dividir $Q_1(x)$ por k, obtendo assim $\frac{Q_1(x)}{k} = Q(x)$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.10 Dividir o polinômio $P(x) \equiv 16x^4 - 8x^2 - 10x + 1$ por $2x - 3$.

Resolução

Temos que $2x - 3 \equiv 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Inicialmente, dividimos $P(x)$ por $x - \frac{3}{2}$, e o quociente obtido dividimos por 2.

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - \frac{3}{2}$, temos:

$\frac{3}{2}$	16	0	−8	−10	1
	16	24	28	32	49

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $x - \frac{3}{2}$ são:

$$Q_1(x) \equiv 16x^3 + 24x^2 + 28x + 32 \text{ e } R_1 = 49$$

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x)$ por $2x - 3$ são:

$$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{2} \equiv 8x^3 + 12x^2 + 14x + 16 \text{ e}$$

$$R = R_1 = 49$$

R.11 Dividir o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 2x^4 + x^3 - 6x - 2$ por $2 - x$.

Resolução

Temos que $2 - x \equiv -(x - 2)$.

Inicialmente, dividimos $P(x)$ por $x - 2$, e o quociente obtido dividimos por -1.

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - 2$, temos:

2	1	−2	1	0	−6	−2
	1	0	1	2	−2	−6

Assim, o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ são:

$$Q_1(x) \equiv x^4 + x^2 + 2x - 2 \text{ e } R_1 = -6$$

Logo, o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $P(x)$ por $2 - x$ são:

$$Q(x) \equiv \frac{Q_1(x)}{-1} \equiv -x^4 - x^2 - 2x + 2 \text{ e}$$

$$R = R_1 = -6$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.13 Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, obtenha o quociente $Q(x)$ e o resto R da divisão de $E(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $E(x) \equiv x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$; $D(x) \equiv 3x - 3$

b) $E(x) \equiv 6x^3 + 2x + 2$; $D(x) \equiv 2x - 1$

c) $E(x) \equiv x^6 - 1$; $D(x) \equiv 2 - x$

d) $E(x) \equiv 2x^4 + 3x^2 - x + 2$; $D(x) \equiv 2x - 4$

e) $E(x) \equiv 32x^5 + 2x^2 - x - 1$; $D(x) \equiv 2x + 1$

f) $E(x) \equiv 4x^3 - 2x^2 + x - 5$; $D(x) \equiv 1 - 2x$

B.14 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $x - 3$, obtêm-se o quociente $Q(x) \equiv 6x^2 + 8x - 1$ e o resto $R = 5$. Obtenha o quociente $Q_1(x)$ e o resto R_1 da divisão de $P(x)$ por $2x - 6$.

Exercício complementar C.7

Extensão do teorema do resto

Teorema

Sejam k e a constantes quaisquer, com $k \neq 0$.

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $kx - a$ é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$.

Demonstração

Sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $kx - a$, respectivamente, ou seja:

$$P(x) \equiv (kx - a) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{(I)}$$

com $\partial R < 1$ ou $R(x) \equiv 0$.

Note, portanto, que $R(x)$ é um polinômio constante. Fazendo $R(x) = R$, a sentença (I) pode ser escrita como:

$$P(x) \equiv (kx - a) \cdot Q(x) + R$$

Calculando $P\left(\frac{a}{k}\right)$, obtemos:

$$P\left(\frac{a}{k}\right) = \left(k\frac{a}{k} - a\right) \cdot Q\left(\frac{a}{k}\right) + R$$

$$\therefore\ P\left(\frac{a}{k}\right) = R$$

Logo, o resto da divisão é igual a $P\left(\frac{a}{k}\right)$.

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.12 Calcular o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 2x^4 - 3x + 1$ por $2x - 1$

Resolução

A raiz do binômio $2x - 1$ é $\frac{1}{2}$.

Pela extensão do teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $2x - 1$ é $P\left(\frac{1}{2}\right)$, ou seja:

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$\therefore R = P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$$

R.13 Obter o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 6x^7 + 8x^5 + 3x^4 - 2x + 9$ por $5x$.

Resolução

A raiz do polinômio $5x$ é 0.

Pela extensão do teorema do resto, temos que o resto R da divisão de $P(x)$ por $5x$ é $P(0)$, ou seja:

$$R = P(0) = 6 \cdot 0^7 + 8 \cdot 0^5 + 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0 + 9$$
$$\therefore R = P(0) = 9$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.15 Calcule o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ nos seguintes casos:

a) $P(x) \equiv 9x^3 - 3x^2 + 1$; $D(x) \equiv 3x - 1$
b) $P(x) \equiv 16x^4 - 2x - 3$; $D(x) \equiv 2x + 1$
c) $P(x) \equiv 4x^3 - x^2 - x + 1$; $D(x) \equiv 2x - 3$
d) $P(x) \equiv 16x^5 - x^3 + x$; $D(x) \equiv 1 - 2x$
e) $P(x) \equiv x^6 + 3x^4 + x^3 - 3$; $D(x) \equiv 6x$

B.16 Obtenha o polinômio do 2º grau que, dividido por $5x$, $3x - 1$ e $2 - x$, apresenta restos iguais a 1, 3 e 43, respectivamente.

Exercício complementar C.8

Extensão do teorema de D'Alembert

Teorema

Sejam k e a constantes quaisquer, com $k \neq 0$.
Um polinômio $P(x)$ é divisível por $kx - a$, se, e somente se, $P\left(\frac{a}{k}\right) = 0$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.14 Mostrar que $P(x) \equiv 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ é divisível por $3x - 1$.

Resolução

A raiz do binômio $3x - 1$ é $\frac{1}{3}$.

Para mostrar que $P(x)$ é divisível por $3x - 1$, basta verificarmos que $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Temos:

$$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right) - 1$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{27} - 4 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{3} - 1$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 1$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{12}{9} - \frac{9}{9}$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $3x - 1$.

R.15 Determinar a de modo que o polinômio $P(x) \equiv x^3 - ax^2 + (a + 1)x + 2$ seja divisível por $2x + 1$.

Resolução

A raiz do binômio $2x + 1$ é $-\frac{1}{2}$.

$P(x)$ é divisível por $2x + 1$ se, e somente se, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Assim, temos:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (a + 1)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 0$$

$$\therefore -\frac{1}{8} - \frac{a}{4} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 0$$

Multiplicando por 8 ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$-1 - 2a - 4a - 4 + 16 = 0$$

$$\therefore -6a = -11 \therefore a = \frac{11}{6}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.17 Determine a constante a de modo que o polinômio $P(x) = 9x^3 + (a + 1)x^2 - ax + 1$ seja divisível por $3x - 1$.

B.18 (UFSC) Sendo a e b dois números tais que o polinômio $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$ é divisível por $(x + 3)$ e por $(2x + 1)$, determine a e b.

Exercício complementar C.9

5. DIVISÃO DE UM POLINÔMIO $P(x)$ POR $(x - a)(x - b)$

Teorema

Sejam a e b constantes quaisquer, com $a \neq b$. Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Atenção! O polinômio $P(x) \equiv (x - 3)(x + 5)$ é divisível por $x - 3$, mas não é divisível por $(x - 3)(x - 3)$. Por causa de situações como essa é que esse teorema exige $a \neq b$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.16 Para que valores de m e n o polinômio $P(x) \equiv x^5 - mx^4 + nx^3 - 2x^2 + 10x - 12$ é divisível por $(x - 2)(x - 3)$?

Resolução

Pelo teorema anterior, temos que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)(x - 3)$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x - 3$. Assim, pelo teorema de D' Alembert, devemos ter:

$P(2) = 0 \Rightarrow 2^5 - m \cdot 2^4 + n \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 12 = 0$

e $P(3) = 0 \Rightarrow 3^5 - m \cdot 3^4 + n \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 - 12 = 0$

$$\therefore \begin{cases} 32 - 16m + 8n - 8 + 20 - 12 = 0 \\ 243 - 81m + 27n - 18 + 30 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 16m - 8n = 32 \\ 81m - 27n = 243 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2m - n = 4 \quad \text{(I)} \\ 3m - n = 9 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraímos membro a membro (I) e (II):

$$-m = -5 \Rightarrow m = 5$$

Substituindo $m = 5$ em (I), temos $2 \cdot 5 - n = 4 \Rightarrow n = 6$.
Logo, $m = 5$ e $n = 6$.

R.17 Obter os valores de a e b, sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx - 18$ é divisível por $D(x) \equiv x^2 - 9$.

Resolução

O polinômio $D(x)$ pode ser escrito sob a forma:

$$D(x) \equiv (x - 3)(x + 3)$$

Pelo teorema anterior, temos que $P(x)$ é divisível por $(x - 3)(x + 3)$ se, e somente se, $P(x)$ é divisível por $x - 3$ e por $x + 3$.
Assim, pelo teorema de D'Alembert, podemos afirmar que:

$P(3) = 0 \Rightarrow 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 18 = 0$ e

$P(-3) = 0 \Rightarrow (-3)^3 + a \cdot (-3)^2 + b \cdot (-3) - 18 = 0$

$$\therefore \begin{cases} 27 + 9a + 3b - 18 = 0 \\ -27 + 9a - 3b - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 9a + 3b = -9 \quad \text{(I)} \\ 9a - 3b = 45 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Somamos membro a membro (I) e (II), $18a = 36 \Rightarrow a = 2$.
Substituindo $a = 2$ em (I), obtemos:

$$9 \cdot 2 + 3b = -9 \Rightarrow b = -9$$

Logo, $a = 2$ e $b = -9$.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.19 (Acafe-SP) Determine $p + q$ para que o polinômio $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + px^2 + qx - 3$ seja divisível por $(x + 1) \cdot (x - 3)$.

a) -23 c) -42 e) -19
b) 4 d) -4

B.20 Determine os valores das constantes a e b, sabendo que o polinômio $P(x) \equiv x^5 + ax^3 + x^2 + bx + b$ é divisível por $x^2 - 4$.

B.21 O polinômio $P(x) \equiv x^4 + x^3 + (a + 2)x^2 + bx + 6$ é divisível por $x^2 + x - 6$. Encontre os valores das constantes a e b. **Sugestão**. Fatore o polinômio $x^2 + x - 6$.

Exercício complementar C.10

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 Sabendo que o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv x^2 - 5x + 7$ por $x - a$ é igual a 1, obtenha o valor da constante a.

C.2 (F. M. Santa Casa-SP) Dividindo um polinômio f por $g = (x - 1)(x + 2)$, obtém-se resto $2x - 1$. O resto da divisão de f por $x + 2$ é:

a) 3 c) -3 e) $x - 1$
b) 1 d) -5

Sugestão. Indique o quociente da divisão por $Q(x)$ e aplique a propriedade fundamental da divisão de polinômios.

C.3 (U. F. Uberlândia-MG) O resto da divisão de $x + 5x^5 + 9x^9 + 13x^{13} + ... + 797x^{797}$ por $x - 1$ é:

a) 39.500 c) 95.200 e) 108.200
b) 79.800 d) 102.300

C.4 (UFMG) Considere o polinômio $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais. Se $f(x) + 1$ é divisível por $x + 1$ e $f(x) - 1$ é divisível por $x - 1$, pode-se afirmar que os valores de a e b são, respectivamente:

a) 0 e 3 c) -1 e -4 e) 0 e -3
b) -2 e -3 d) -1 e -2

Sugestão. Se $E(x) = f(x) + 1$ e $H(x) = f(x) - 1$, tem-se que $E(-1) = 0$ e $H(1) = 0$.

C.5 (Fuvest-SP) Seja $p(x)$ um polinômio divisível por $x - 3$. Dividindo $p(x)$ por $x - 1$ obtemos quociente $q(x)$ e resto $r = 10$. O resto da divisão de $q(x)$ por $x - 3$ é:

a) -5 c) 0 e) 5
b) -3 d) 3

C.6 Usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, mostre que o polinômio na variável x:

a) $x^3 - a^3$ pode ser fatorado sob a forma $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

b) $x^3 + a^3$ pode ser fatorado sob a forma $(x + a)(x^2 - ax + a^2)$.

C.7 Dividindo o polinômio $4x^3 + 6x^2 + ax - b$ por $2x - 1$, obtém-se resto 2 e um quociente com termo independente igual a 5. Determine as constantes a e b.

C.8 O polinômio $x^3 - x^2 - x + 1$ é a soma do quociente com o resto da divisão do polinômio $P(x) \equiv 3x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 1$ por $3x - 1$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $2x + 1$.

C.9 (Faap-SP) Um estudante fatorou a expressão $27x^3 - 9x^2 + ax - 2$ como o produto de dois polinômios em que um deles era $2x - 3$. Calcule o valor da constante a.

C.10 Dividindo um polinômio $P(x)$ por $x - 2$, obtém-se resto 7: dividindo $P(x)$ por $x + 2$, obtém-se resto -33. Qual é o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 4$? **Sugestão**. $P(2) = 7$, $P(-2) = -33$ e $P(x) \equiv (x^2 - 4) \cdot Q(x) + \underbrace{ax + b}_{\text{Resto}}$.

Capítulo 66

EQUAÇÕES POLINOMIAIS

1. DEFINIÇÃO

Equação polinomial é toda equação que pode ser apresentada sob a forma:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$, em que
$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$

é um polinômio de grau n, $n \geqslant 1$.

- Uma equação polinomial pode ser também denominada **equação algébrica**.
- O grau do polinômio $P(x)$ é também o **grau da equação polinomial** $P(x) = 0$.
- As raízes do polinômio $P(x)$ são também as **raízes da equação polinomial** $P(x) = 0$.
- No universo dos números complexos, o conjunto formado pelas raízes da equação polinomial $P(x) = 0$ é o **conjunto solução** (S) ou **conjunto verdade** (V) da equação.
- a_n é chamado de coeficiente dominante de $P(x)$.

Exemplos

a) $2x - 6 = 0$ é uma equação polinomial do 1º grau na variável x, cuja raiz é 3. O conjunto solução dessa equação é $S = \{3\}$.

b) A equação $x^2 - 3x + 8 = 2x + 2$ pode ser apresentada sob a forma $x^2 - 5x + 6 = 0$ e, portanto, é uma equação polinomial do 2º grau na variável x. Suas raízes são 2 e 3 e, por isso, seu conjunto solução é $S = \{2, 3\}$.

c) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ é uma equação polinomial do 3º grau na variável x. Para determinarmos suas raízes complexas podemos fatorar o primeiro membro, ou seja, $x^2(x - 2) + (x - 2) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x^2 + 1) = 0$.

Pela propriedade do **produto nulo**, concluímos que:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou
$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \therefore x = i$ ou $x = -i$

Assim, as raízes da equação são 2, i e $-i$. Temos, então, como conjunto solução $S = \{2, i, -i\}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.1 Uma das raízes da equação polinomial $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ é o número 1. Obter as outras raízes em $\mathbb{C}$.

Resolução

Temos que 1 é raiz do polinômio

$P(x) \equiv x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, ou seja, $P(1) = 0$

Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - 1$. Portanto $P(x)$ pode ser escrito como:

$$P(x) \equiv (x - 1) \cdot Q(x)$$

Para obter $Q(x)$. basta dividirmos $P(x)$ por $x - 1$. Por Briot-Ruffini, temos:

1	1	−6	11	−6
	1	−5	6	0

Logo, $Q(x) \equiv x^2 - 5x + 6$ e, portanto,
$P(x) \equiv (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$.
Assim, a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ é equivalente a $(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$.
Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou
$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \therefore x = 3 \text{ ou } x = 2$$

Concluímos assim que, além da raiz 1, a equação tem como raízes os números 3 e 2.

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.1 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $P(x) = 0$, dada uma de suas raízes r, em cada um dos seguintes casos:
a) $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ e $r = 5$
b) $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ e $r = \frac{1}{2}$

B.2 (E. E. Mauá-SP) Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 2x^2 + 2x + a = 0$, na variável x, sabendo que o número 1 é uma de suas raízes.

B.3 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $P(x) = 0$, dadas duas de suas raízes r_1 e r_2, em cada um dos seguintes casos:
a) $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 15x - 18 = 0$, com $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$
b) $3x^5 - 16x^4 + 11x^3 + 22x^2 - 8x = 0$, com $r_1 = -1$ e $r_2 = 4$

Exercício complementar C.1

2. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

O estudo das equações polinomiais é alicerçado no **teorema fundamental da álgebra**, cujo enunciado é:

Toda equação polinomial admite pelo menos uma raiz complexa.

A demonstração desse teorema foi a tese de doutoramento de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) no ano de 1798. Embora outros matemáticos já tivessem tentado essa demonstração, Gauss foi o primeiro a realizá-la com perfeição.

Admitiremos o teorema fundamental da álgebra sem demonstração.

3. TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Uma conseqüência imediata do teorema fundamental da álgebra é o **teorema da decomposição**, que nos garante:

Todo polinômio de grau n, $n \geq 1$:
$P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$
pode ser fatorado sob a forma:

$$P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$$

em que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

Demonstração

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ um polinômio de grau n, $n \geq 1$.

Pelo teorema fundamental da álgebra, $P(x)$ admite uma raiz complexa r_1. Logo, podemos escrever:

$$P(x) \equiv (x - r_1) \cdot Q_1(x) \quad \text{(I)}$$

em que $Q_1(x)$ tem grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geq 1$, então, pelo teorema fundamental da álgebra, $Q_1(x)$ admite uma raiz complexa r_2 e podemos escrever $Q_1(x) \equiv (x - r_2) \cdot Q_2(x)$. (II)
Substituindo (II) em (I), tem-se:

$$P(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2) \cdot Q_2(x)$$

Repetindo esse procedimento n vezes, obtém-se:

$$P(x) \equiv (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n) \cdot Q_n(x)$$

Por definição de identidade de polinômios, temos que o coeficiente dominante a_n de $P(x)$ deve ser igual a $Q_n(x)$.
Logo $P(x) \equiv a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot \ldots \cdot (x - r_n)$.

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.2 Fatorar o polinômio $P(x) \equiv 2x^2 - 7x + 3$ como o produto de uma constante por polinômios do 1º grau.

Resolução
As raízes de $P(x)$ são dadas por $2x^2 - 7x + 3 = 0$.
Temos:

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 \quad \therefore \; x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2}$$

$$\therefore \; x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Pelo teorema da decomposição, obtemos:

$$P(x) \equiv 2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

R.3 Duas das raízes do polinômio
$P(x) \equiv x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$ são 2 e 3. Fatorar o polinômio $P(x)$ como produto de uma constante por polinômios do 1º grau.

Resolução
Temos que 2 e 3 são raízes do polinômio
$P(x) \equiv x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$, ou seja, $P(2) = 0$ e $P(3) = 0$.
Pelo teorema de D'Alembert, $P(x)$ é divisível por $x - 2$ e por $x - 3$. Portanto $P(x)$ é divisível por $(x - 2)(x - 3)$.
Assim, $P(x)$ pode ser escrito sob a forma

$$P(x) = (x - 2)\underbrace{(x - 3) \cdot Q_2(x)}_{Q_1(x)}.$$

Para obtermos $Q_1(x)$, dividimos $P(x)$ por $x - 2$:

2	1	−4	−1	16	−12
	1	−2	−5	6	0

Logo, $Q_1(x) \equiv x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
Para obter $Q_2(x)$, dividimos $Q_1(x)$ por $x - 3$:

3	1	−2	−5	6
	1	1	−2	0

Logo, $Q_2(x) \equiv x^2 + x - 2$.
Concluímos, então, que o polinômio $P(x)$ pode ser escrito como $P(x) \equiv (x - 2)(x - 3)(x^2 + x - 2)$.
Portanto, as raízes do polinômio são as mesmas da equação $(x - 2)(x - 3)(x^2 + x - 2) = 0$.
Pela propriedade do produto nulo, temos que:

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$; ou $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$; ou
$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1(-2) = 9$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \quad \therefore x = 1 \text{ ou } x = -2$$

Pelo teorema da decomposição, obtemos:

$$P(x) \equiv (x - 2)(x - 3)(x - 1)(x + 2)$$

Matemática ajuda a controlar epidemias

O departamento de informática médica da USP usa modelos de equações para prever os casos de doença infecciosa e as estratégias de contra-ataque; assim foi possível diminuir os números da rubéola no estado.

O Estado de S.Paulo, 1º out. 1994.

Para ler o texto na íntegra consulte o site **Estadão na escola** (www.estadao-escola.com.br), clicando em "Pesquisa", "Temas transversais" e "Saúde e sexualidade" com as palavras-chave "matemática" e "epidemias".

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.4 Fatore o polinômio $P(x)$ como o produto de uma constante por polinômios do 1º grau, em cada um dos seguintes casos:
a) $P(x) \equiv 3x^2 - 5x + 2$
b) $P(x) \equiv x^3 - 4x^2 + 3x$
c) $P(x) \equiv x^3 - 4x^2 - x + 4$, sabendo que $P(1) = 0$

B.5 (UFSE) Se -2 é raiz do polinômio
$f = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$, então a forma fatorada de f é:
a) $(x - 2)(2x + 1)(x - 4)$
b) $(x - 2)(2x - 1)(x + 4)$
c) $(x + 2)(x + 1)(2x - 1)$
d) $(x + 2)(x + 1)(2x - 1)$
e) $(x + 2)(x - 2)(2x + 1)$

B.6 Dado que o polinômio $P(x) \equiv 3x^4 - 25x^3 + 59x^2 - 47x + 10$ satisfaz a condição $P(1) = P(2) = 0$, represente $P(x)$ como o produto de uma constante por polinômios do primeiro grau.

Exercício complementar C.2

Conseqüência do teorema da decomposição

Consideremos a equação polinomial de grau n, na variável x:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0$$

Pelo teorema da decomposição, essa equação pode ser apresentada sob a forma:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot ... \cdot (x - r_n) = 0$$

Temos, então, que $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ são todas as raízes dessa equação.

Assim sendo, podemos concluir o seguinte:

> Uma equação polinomial de grau n admite exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.

Multiplicidade de uma raiz

Seja a equação polinomial de grau n, variável x e raízes $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot ... \cdot (x - r_n) = 0$$

- Se uma raiz r_j comparece uma única vez dentre os fatores do primeiro membro, então r_j é chamada de **raiz simples** da equação.
- Se uma raiz r_j comparece k vezes, $k > 1$, dentre os fatores do primeiro membro, então r_j é chamada de **raiz de multiplicidade k** da equação.

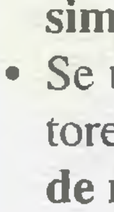
Exemplo

A equação $(x - 2)^3(x - 5)(x - 4)^2 = 0$ pode ser escrita como:

$$(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x - 5)(x - 4)(x - 4) = 0$$

Assim, temos que:

- a raiz 2 tem multiplicidade 3, ou podemos dizer ainda que 2 é **raiz tripla** da equação;
- o número 5 é **raiz simples** da equação;
- a raiz 4 tem multiplicidade 2, ou podemos dizer ainda que 4 é **raiz dupla** da equação.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.4 Construir a equação polinomial $P(x) = 0$ com conjunto solução $S = \{-1, 6, 7\}$ tal que -1 é raiz simples, 6 é raiz dupla, 7 é raiz tripla e o coeficiente dominante de $P(x)$ é 9.

Resolução

Toda equação polinomial $P(x) = 0$ de grau n pode ser escrita sob a forma:

$$a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \cdot ... \cdot (x - r_n) = 0$$

em que a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$ e $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ são todas as raízes de $P(x)$.

Esse problema exige que:

- o coeficiente dominante de $P(x)$ seja 9;
- -1 seja raiz simples, ou seja, $x + 1$ deve comparecer uma única vez na decomposição de $P(x)$;
- 6 seja raiz dupla, ou seja, $x - 6$ deve comparecer exatamente duas vezes na decomposição de $P(x)$;
- 7 seja raiz tripla, ou seja, $x - 7$ deve comparecer exatamente três vezes na decomposição de $P(x)$.

Nessas condições, temos que:

$$P(x) \equiv 9(x + 1)(x - 6)(x - 6)(x - 7)(x - 7)(x - 7)$$

Logo, a equação polinomial pedida é:

$$9(x + 1)(x - 6)^2(x - 7)^3 = 0$$

R.5 Sabendo que 3 é uma raiz dupla da equação $x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 102x + 72 = 0$, obter as outras raízes em $\mathbb{C}$.

Resolução

Pelo teorema da decomposição, a equação proposta pode ser escrita como:

$$(x - 3)\underbrace{(x - 3)\overbrace{(x - r_1)(x - r_2)}^{Q_2(x)}}_{Q_1(x)} = 0$$

em que r_1 e r_2 são as outras raízes, além da raiz 3.

Dividindo $P(x) \equiv x^4 - 12x^3 + 53x^2 - 102x + 72$ por $x - 3$, obtemos $Q_1(x)$. E, dividindo $Q_1(x)$ por $x - 3$, obtemos $Q_2(x)$.

Por Briot-Ruffini, temos:

3	1	−12	53	−102	72
	1	−9	26	−24	0

$\therefore Q_1(x) \equiv x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ e

3	1	−9	26	−24
	1	−6	8	0

$\therefore Q_2(x) \equiv x^2 - 6x + 8$

Assim, a equação proposta pode ser escrita como $(x - 3)(x - 3)(x^2 - 6x + 8) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3; \text{ ou } x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \quad \therefore \quad x = 4 \text{ ou } x = 2$$

Logo, além da raiz dupla 3, a equação admite as raízes simples 4 e 2.

R.6 Mostrar que o número 1 é raiz tripla da equação $x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 9x - 3 = 0$.

Resolução

Para que 1 seja raiz tripla da equação proposta, temos, pelo teorema da decomposição, que essa equação deve ser equivalente a:

$$(x - 1)\underbrace{(x - 1)\overbrace{(x - 1)\overbrace{(x - r_1)(x - r_2)}^{Q_3(x)}}^{Q_2(x)}}_{Q_1(x)} = 0$$

em que r_1 e r_2 são raízes da equação, distintas de 1.
Assim, devemos ter que:

I. o polinômio
$P(x) \equiv x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 10x^2 + 9x - 3$ é divisível por $x - 1$;

II. o quociente $Q_1(x)$, de $P(x)$ por $x - 1$, também é divisível por $x - 1$;

III. o quociente $Q_2(x)$, de $Q_1(x)$ por $x - 1$, também é divisível por $x - 1$;

IV. o quociente $Q_3(x)$, de $Q_2(x)$ por $x - 1$, **não** é divisível por $x - 1$.

Vamos às constatações:

I. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	−3	6	−10	9	−3
	1	−2	4	−6	3	0

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 1$; portanto temos:

$$P(x) \equiv (x - 1)\underbrace{(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3)}_{Q_1(x)}$$

II. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	−2	4	−6	3
	1	−1	3	−3	0

Logo, $Q_1(x)$ é divisível por $x - 1$; portanto temos:

$$Q_1(x) \equiv (x - 1)\underbrace{(x^3 - x^2 + 3x - 3)}_{Q_2(x)}$$

III. Aplicando Briot-Ruffini:

1	1	−1	3	−3
	1	0	3	0

Logo, $Q_2(x)$ é divisível por $x - 1$; portanto temos:

$$Q_2(x) \equiv (x - 1)\underbrace{(x^2 + 3)}_{Q_3(x)}$$

IV. Pelo teorema de D'Alembert, temos que
$Q_3(x) \equiv x^2 + 3$ não é divisível por $x - 1$, pois $Q_3(1) \neq 0$.
Assim, o polinômio $P(x)$ é tal que:

$$P(x) \equiv (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + 3)$$
$$\therefore P(x) \equiv (x - 1)^3(x^2 + 3)$$

com $x^2 + 3$ **não divisível** por $x - 1$.
Logo, 1 é raiz tripla de $P(x)$.

(c.q.d.)

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.7 Construa a equação polinomial $P(x) = 0$ cujo conjunto solução é $S = \{-1, 1, 2, -2\}$, sendo -1 e 1 raízes simples, 2 uma raiz dupla, -2 uma raiz tripla e sendo $P(x)$ um polinômio de coeficiente dominante igual a 7.

B.8 (Fesp-PE) Se $f(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ é uma função polinomial, cujas raízes são 2, 3, 5 e 6, podemos afirmar que $f(8)$ é igual a:

a) 120 c) 360 e) 1
b) 0 d) 240

Sugestão. Conhecendo as raízes e o coeficiente dominante do polinômio, podemos representá-lo na forma fatorada.

B.9 Sabendo que -1 é raiz dupla da equação $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$, obtenha as outras raízes em $\mathbb{C}$.

B.10 (U. E. Londrina-PR) Se o polinômio $x^3 + (k - 4)x^2 - 8x + 4k$, $k \in \mathbb{R}$, admite a raiz 2 com multiplicidade 2, então a outra raiz é:

a) 1 c) -1 e) -3
b) 0 d) -2

B.11 Mostre que:

a) 5 é raiz dupla da equação
$x^6 - 10x^5 + 25x^4 + x^2 - 10x + 25 = 0$;

b) 2 é raiz tripla da equação
$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$

Exercícios complementares C.3 e C.4

4. RAÍZES IMAGINÁRIAS

Vamos estudar agora um teorema que diz respeito às raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais. Lembre-se de que **número imaginário** é todo número complexo z não real, isto é, $z = a + bi$ com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$.

Teorema

Se o número imaginário $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, é raiz de uma equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, então o conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.

Demonstração

Seja $P(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0$ um polinômio com coeficientes reais tal que o número imaginário $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, seja raiz da equação $P(x) = 0$.

Temos que $P(z) = 0$, ou seja:

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0 = 0 \quad \text{(I)}$$

Se dois complexos são iguais, então seus conjugados são iguais. Por isso, podemos concluir da sentença (I) que:

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0} = \overline{0}$$

Pelas propriedades do conjugado de um complexo, podemos escrever:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0}$$
$$\therefore \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_0} = \overline{0}$$
$$\therefore a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \ldots + a_0 = 0$$
$$\therefore a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$$
$$\therefore P(\overline{z}) = 0$$

ou seja, $\overline{z}$ é raiz da equação $P(x) = 0$. (c.q.d.)

Conseqüências

- Se um número imaginário z é raiz de multiplicidade k de uma equação polinomial de coeficientes reais, então o conjugado de z também é raiz de multiplicidade k dessa equação.

- O número de raízes imaginárias de uma equação polinomial de coeficientes reais é necessariamente par.
- Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então essa equação admite pelo menos uma raiz real.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.7 Qual é o menor grau possível de uma equação polinomial $P(x) = 0$ de coeficientes reais que possui como raízes simples os números 8, $2 + i$ e $-3i$?

Resolução

Pelo teorema anterior, se $P(x) = 0$ é uma equação polinomial de coeficientes reais e os números imaginários $2 + i$ e $-3i$ são raízes simples dessa equação, então os conjugados $2 - i$ e $3i$ também são raízes simples dessa equação. Assim, a equação $P(x) = 0$ tem pelo menos cinco raízes e, portanto, o menor grau possível dessa equação é 5.

R.8 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação polinomial $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$ sabendo que $2i$ é uma de suas raízes.

Resolução

A equação polinomial $P(x) = 0$ possui coeficientes reais. Portanto temos que, se $2i$ é raiz da equação, então $-2i$ também o é. Assim, $P(x)$ é divisível por $(x - 2i)(x + 2i) = x^2 + 4$. Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x^2 + 4$ temos:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12 & x^2 + 4 \\ \cline{2-2} -x^4 \quad\quad - 4x^2 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1} -2x^3 - 3x^2 - 8x - 12 & \\ \quad +2x^3 \quad\quad + 8x & \\ \cline{1-1} -3x^2 + 0x - 12 & \\ \quad +3x^2 \quad\quad + 12 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Assim, a equação $P(x) = 0$ é equivalente a $(x^2 + 4)(x^2 - 2x - 3) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \therefore x = \pm 2i$ ou

$x^2 - 2x - 3 = 0 \therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$\therefore x = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \therefore x = 3$ ou $x = -1$

Logo, o conjunto solução da equação é:

$$S = \{2i, -2i, 3, -1\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.12 Determine o menor grau possível de uma equação polinomial $P(x) = 0$ de coeficientes reais que possui:
a) 6, $4 - 3i$ e $-2i$ como raízes simples;
b) 3 como raiz simples e $3 - 4i$ como raiz tripla;
c) $5 - i$ como raiz tripla e $2 + i$ como raiz dupla;
d) 2 como raiz tripla, $6i$ como raiz de multiplicidade 4 e $1 + i$ como raiz simples.

B.13 Construa a equação polinomial $P(x) = 0$ com coeficientes reais, de menor grau possível, que admita como raízes os números:
a) 3, $2 + i$ e $-2i$, e que $P(x)$ tenha coeficiente dominante igual a 4;
b) $-6i$, $3i$ e $1 + i$, e que $P(x)$ tenha coeficiente dominante igual a 1;
c) 4, -2, i e $1 - i$, e que $P(x)$ tenha coeficiente dominante igual a 6;
d) 4, 3 e $-i$, e que $P(x)$ tenha coeficiente dominante igual a 1.

B.14 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação polinomial $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$, sabendo que $3i$ é uma de suas raízes.

B.15 (Mackenzie) Um polinômio $P(x)$, de coeficientes reais e menor grau possível, admite as raízes 1 e i.
Se $P(0) = -1$, então $P(-1)$ vale:
a) -4 c) -2 e) -1
b) 4 d) 2

Exercícios complementares de C.5 a C.7

5. RAÍZES RACIONAIS

Teorema

Seja $\dfrac{p}{q}$ com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$.

Se $\dfrac{p}{q}$ é raiz da equação polinomial

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$, na variável x e com **coeficientes inteiros**, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Demonstração

Sendo $\dfrac{p}{q}$ uma raiz da equação, devemos ter:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$$

$$\therefore a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_0 = 0.$$

Multiplicando por q^n ambos os membros, obtemos:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\therefore a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n$$

$$\therefore p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + a_{n-2} p^{n-3} q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Como o produto de inteiros é inteiro e a soma de inteiros também é inteiro, concluímos que o primeiro membro da igualdade anterior é um número inteiro. Portanto o segundo membro, $-a_0 q^n$, é inteiro e múltiplo de p, pois é igual ao produto de p por um inteiro k_1, ou seja, $pk_1 = -a_0 q^n$, $k_1 \in \mathbb{Z}$.

Como p e q são primos entre si, temos que p e q^n também o são. Logo, p é **divisor** de a_0.

Temos, ainda, que a igualdade (I) é equivalente a:

$$a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \ldots + a_0q^n = -a_np^n$$
$$\therefore q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_0q^{n-1}) = -a_np^n$$

Como a expressão entre parênteses é um número inteiro k_2, podemos escrever:

$$qk_2 = -a_np^n,\ k_2 \in \mathbb{Z}$$

Como q e p são primos entre si, temos que q e p^n também o são.
Logo, q é **divisor** de a_n.

(c.q.d.)

Notas

1. Nem toda equação polinomial de coeficientes inteiros admite raiz racional. Por exemplo, a equação $x^2 - 2 = 0$ não admite raiz racional.

2. Se a equação polinomial de coeficientes inteiros $P(x) = 0$ tem o polinômio $P(x)$ com coeficiente dominante igual a 1, e admite raízes racionais, então essas raízes são inteiras. Por exemplo, se $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, é raiz da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, então p é divisor de 6, $p \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$, e q é divisor de 1, $q \in \{\pm1\}$. Logo, $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.9 Determinar, se existirem, todas as raízes racionais da equação $3x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$.

Resolução

Se essa equação admite raiz do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, então p é divisor de 2 e q é divisor de 3, ou seja, $p \in \{\pm1, \pm2\}$ e $q \in \{\pm1, \pm3\}$.

Logo, $\frac{p}{q} \in \left\{\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm2, \pm\frac{2}{3}\right\}$.

Testando cada uma das "candidatas" a raiz racional da equação $P(x) = 0$, temos:

$P(1) = 3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 1 + 2 = -2$

$P(-1) = 3(-1)^3 - 6(-1)^2 - (-1) + 2 = -6$

$P\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{9}$

$P\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{14}{9}$

$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0 \Rightarrow 2$ é raiz

$P(-2) = 3(-2)^3 - 6(-2)^2 - (-2) + 2 = -44$

$P\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + 2 = -\frac{4}{9}$

$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 6\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -\frac{8}{9}$

Logo, a equação admite apenas uma raiz racional, o número 2.

Nota

O teorema do resto nos garante que o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$. Assim, nesse exercício, poderíamos ter abreviado os cálculos através do dispositivo prático de Briot-Ruffini. Observe o exercício seguinte, em que utilizamos esse recurso.

R.10 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - 5x^3 + x^2 + 5x - 2 = 0$.

Resolução

A equação possui todos os coeficientes inteiros. Logo, se $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros primos entre si e $q \neq 0$, é raiz da equação, então $p \in \{\pm1, \pm2\}$ e $q \in \{\pm1\}$.

Assim, temos que $\frac{p}{q} \in \{\pm1, \pm2\}$.

Testando essas "candidatas" a raiz da equação $P(x) = 0$. obtemos:

1	1	−5	1	5	−2
	1	−4	−3	2	(0)
	$x^3 - 4x^2 - 3x + 2$			P(1)	∴ 1 é raiz

Como $P(x)$ é divisível por $x - 1$, temos:

$$P(x) \equiv (x - 1)\underbrace{(x^3 - 4x^2 - 3x + 2)}_{Q_1(x)}$$

Logo, se existem outras raízes racionais, estas devem ser raízes de $Q_1(x)$.
Testando as demais "candidatas" em $Q_1(x)$, obtemos:

−1	1	−4	−3	2	
	1	−5	2	(0)	
	$x^2 - 5x + 2$			$Q_1(-1)$	∴ −1 é raiz

Assim, podemos escrever:

$$P(x) \equiv (x - 1)(x + 1)\underbrace{(x^2 - 5x + 2)}_{Q_2(x)} \quad \text{(I)}$$

Logo, se a equação admite outras raízes racionais, estas são raízes de $Q_2(x)$.
Testando 2 e −2 em $Q_2(x)$, temos:

−2	2	1	−5	2	
		1	−3	(−4)	→ $Q_2(2)$
		1	−7	(16)	→ $Q_2(-2)$

Concluímos então que as únicas raízes racionais de $P(x) = 0$ são 1 e −1.
De (I), temos que a equação $P(x) = 0$ pode ser escrita como $(x - 1)(x + 1)(x^2 - 5x + 2) = 0$.

Pela propriedade do produto nulo, obtemos:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; ou $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$; ou
$x^2 - 5x + 2 = 0 \therefore \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 17$

$$\therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Temos, então, como conjunto solução:

$$S = \left\{1, -1, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}, \frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right\}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.16 Determine, se existirem, as raízes racionais de cada uma das seguintes equações:
a) $2x^4 + x^3 + x^2 + x - 1 = 0$
b) $x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 7x - 2 = 0$
c) $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 2 = 0$

B.17 Resolva, em $\mathbb{C}$, cada uma das seguintes equações:
a) $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$
b) $6x^4 - x^3 + 11x^2 - 2x - 2 = 0$
c) $2x^4 - 4x^3 + x^2 + x = 0$

Exercícios complementares C.8 e C.9

6. RELAÇÕES DE GIRARD

Albert Girard (1590-1633), flamengo, em sua obra *Invention nouvelle en l'algèbre*, apresentou um importante teorema que relaciona as raízes com os coeficientes de uma equação polinomial. Antes de estudar esse teorema em sua forma geral, vamos abordá-lo particularmente para equações do 2º e do 3º grau.

As relações de Girard em uma equação do 2º grau

Consideremos o polinômio do 2º grau $P(x) \equiv ax^2 + bx + c$ cujas raízes são r_1 e r_2. Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv (x - r_1)(x - r_2)$$

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \equiv x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$$

$$\therefore \begin{cases} -(r_1 + r_2) = \dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Temos, então, o seguinte:

As raízes r_1 e r_2 da equação polinomial do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são tais que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.11 Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação do 2º grau $3x^2 + \sqrt{5}\,x + \sqrt{2} = 0$, calcular:
a) $r_1 + r_2$
b) $r_1 r_2$
c) $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$
d) $r_1^2 + r_2^2$
e) $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2}$

Resolução

Os coeficientes da equação $3x^2 + \sqrt{5}\,x + \sqrt{2} = 0$ são $a = 3$, $b = \sqrt{5}$ e $c = \sqrt{2}$.

Assim, temos:

a) $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow r_1 + r_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

b) $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow r_1 r_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{r_2 + r_1}{r_1 r_2} = \dfrac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} =$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

d) Observando a identidade $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2$, podemos escrever:

$$r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1 r_2$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore r_1^2 + r_2^2 = \frac{5}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{5 - 6\sqrt{2}}{9}$$

e) $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2} = \dfrac{r_2^2 + r_1^2}{r_1^2 r_2^2} = \dfrac{r_1^2 + r_2^2}{(r_1 r_2)^2} =$

$$= \frac{\frac{5 - 6\sqrt{2}}{9}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{5 - 6\sqrt{2}}{2}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.18 Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação $2x^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{6} = 0$, calcule:
a) $r_1 + r_2$
b) $r_1 r_2$
c) $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$
d) $r_1^2 + r_2^2$
e) $\dfrac{1}{r_1^2} + \dfrac{1}{r_2^2}$

B.19 O conjunto solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$, é $S = \{r_1, r_2\}$. Calcule em função de a, b e c os seguintes valores:

a) $r_1 + r_2$

b) $r_1 r_2$

c) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

d) $r_1^2 + r_2^2$

e) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$

Exercício complementar C. 10

As relações de Girard em uma equação do 3º grau

Consideremos, agora, o polinômio do 3º grau $P(x) \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujas raízes são r_1, r_2 e r_3. Pelo teorema da decomposição de um polinômio, podemos escrever:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

$$\therefore x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv$$

$$\equiv (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

$$\therefore x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} \equiv$$

$$\equiv x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 +$$

$$+ (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)x - r_1 r_2 r_3$$

$$\therefore \begin{cases} -(r_1 + r_2 + r_3) = \frac{b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a} \\ -r_1 r_2 r_3 = \frac{d}{a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Temos, então, o seguinte:

As raízes r_1, r_2 e r_3 da equação polinomial do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ são tais que:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a} \\ r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R.12 Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$, calcular:

a) $r_1 + r_2 + r_3$

b) $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3$

c) $r_1 r_2 r_3$

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

e) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$

f) $(r_1 r_2)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_2 r_3)^2$

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$

Resolução

Os coeficientes da equação $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$ são $a = 2$, $b = -4$, $c = 3$ e $d = 1$.

Assim, temos:

a) $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-4)}{2} = 2$

b) $r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{c}{a} \Rightarrow r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = \frac{3}{2}$

c) $r_1 r_2 r_3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow r_1 r_2 r_3 = -\frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{r_2 r_3 + r_1 r_3 + r_1 r_2}{r_1 r_2 r_3} =$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

e) Observando a identidade:
$(r_1 + r_2 + r_3)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + 2r_1 r_2 + 2r_1 r_3 + 2r_2 r_3$,
podemos escrever:

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 =$$
$$= (r_1 + r_2 + r_3)^2 - 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)$$
$$\therefore r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 2^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1$$

f) Observando a identidade $(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)^2 =$
$= (r_1 r_2)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_2 r_3)^2 + 2r_1^2 r_2 r_3 + 2r_1 r_2^2 r_3 +$
$+ 2r_1 r_2 r_3^2$, podemos escrever:

$$(r_1 r_2)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_2 r_3)^2 =$$
$$= (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3)^2 - 2r_1 r_2 r_3(r_1 + r_2 + r_3)$$
$$\therefore (r_1 r_2)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_2 r_3)^2 =$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(2) = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2}{r_1^2 r_2^2 r_3^2}$

$$\therefore \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{(r_1 r_2)^2 + (r_1 r_3)^2 + (r_2 r_3)^2}{(r_1 r_2 r_3)^2} =$$

$$= \frac{\frac{17}{4}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 17$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.20 Sendo r_1, r_2 e r_3 as raízes da equação $3x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$, calcule:

a) $r_1 + r_2 + r_3$

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$

c) $r_1r_2r_3$

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

e) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$

f) $(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2$

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$

B.21 O conjunto solução da equação $x^3 + x - 1 = 0$ é $S = \{r_1, r_2, r_3\}$. Calcule:

a) $r_1 + r_2 + r_3$

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$

c) $r_1r_2r_3$

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

e) $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$

f) $(r_1r_2)^2 + (r_1r_3)^2 + (r_2r_3)^2$

g) $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$

B.22 (ITA-SP) Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$, então o valor de $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{3}{2}$

e) n.d.a.

B.23 (UFMG) Os números -1 e 1 são raízes do polinômio $P(x) = cx^3 + ax^2 + bx + 2c$. A terceira raiz de $P(x)$ é:

a) -3

b) -2

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

e) 2

Sugestão. Indique por r a terceira raiz e aplique as relações de Girard.

B.24 (UFRN) A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, em que m e n são números reais, admite $1 + i$ como raiz. Então, m e n valem, respectivamente:

a) 2 e -2

b) 2 e 0

c) 0 e 2

d) -2 e 0

e) 2 e 2

Sugestão. Lembrando que o conjugado de $1 + i$ também é raiz da equação, indique a terceira raiz por r e aplique as relações de Girard.

Exercícios complementares C.11 e C.12

As relações de Girard em uma equação de grau *n*

Finalmente, vamos apresentar as relações de Girard em sua forma geral:

Teorema

Em toda equação polinomial de grau n, $n > 1$, $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, tem-se que:

- a soma das raízes é igual a $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, ou seja,

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

- a soma dos produtos das raízes, tomadas duas a duas, é igual a $\frac{a_{n-2}}{a_n}$, ou seja:

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + \ldots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

- a soma dos produtos das raízes, tomadas três a três, é igual a $-\frac{a_{n-3}}{a_n}$, ou seja:

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_5 + \ldots + r_{n-2}r_{n-1}r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$\vdots$

- o produto de todas as raízes é igual a $\frac{(-1)^n(a_0)}{a_n}$, ou seja:

$$r_1r_2r_3 \ldots r_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

R.13 Sendo r_1, r_2, r_3 e r_4 as raízes da equação $2x^4 - 8x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, calcular:

a) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4$

c) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4$

d) $r_1r_2r_3r_4$

Resolução

Os coeficientes da equação $2x^4 - 8x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ são $a = 2$, $b = -8$, $c = -3$, $d = -2$ e $e = 1$. Pelo teorema de Girard, temos:

a) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{2} = 4$

b) $r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$

c) $r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 =$

$= -\frac{d}{a} = -\frac{(-2)}{2} = 1$

d) $r_1r_2r_3r_4 = \frac{e}{a} = \frac{1}{2}$

R.14 Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^3 - \sqrt{2}\,x^2 - 3x + 3\sqrt{2} = 0$, sabendo que duas de suas raízes são simétricas entre si.

Resolução

Indicando por r e $-r$ as raízes simétricas e por s a terceira raiz da equação, temos, pelas relações de Girard, que:

$$\begin{cases} r + (-r) + s = \sqrt{2} & \textbf{(I)} \\ r(-r) + rs + (-rs) = -3 & \textbf{(II)} \\ r(-r)s = -3\sqrt{2} & \textbf{(III)} \end{cases}$$

De (I), temos que $s = \sqrt{2}$.

De (II), temos que $r = \pm\sqrt{3}$.

Para verificar se esses valores formam uma solução do sistema, basta substituí-los na equação (III).

- Substituindo $r = \sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$ na equação (III), obtemos:

$$\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = -3\sqrt{2} \quad \textbf{(verdadeira!)}$$

- Substituindo $r = -\sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$ na equação (III), obtemos:

$$-\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = -3\sqrt{2} \quad \textbf{(verdadeira!)}$$

Como $r = \pm\sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$ satisfazem (I), (II) e (III), concluímos que o conjunto solução da equação proposta é $S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}\}$.

R.15 Determinar o valor da constante k, $k \in \mathbb{R}$, sabendo que as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ formam uma progressão aritmética.

Resolução

Indicando as raízes da equação por $p - r$, p e $p + r$, temos, pelas relações de Girard:

$$\begin{cases} p - r + p + p + r = 3 \Rightarrow p = 1 & \textbf{(I)} \\ (p - r)p + (p - r)(p + r) + p(p + r) = -6 & \textbf{(II)} \\ (p - r)p(p + r) = -k & \textbf{(III)} \end{cases}$$

Substituímos (I) em (II):

$$(1 - r) \cdot 1 + (1 - r)(1 + r) + 1 \cdot (1 + r) = -6$$
$$\therefore 1 - r + 1 - r^2 + 1 + r = -6$$
$$\therefore r^2 = 9 \Rightarrow r = 3 \text{ ou } r = -3$$

- Para $p = 1$ e $r = 3$, temos, da equação (III):

$$(1 - 3) \cdot 1 \cdot (1 + 3) = -k \Rightarrow k = 8$$

- Para $p = 1$ e $r = -3$, temos, da equação (III):

$$(1 + 3) \cdot 1 \cdot (1 - 3) = -k \Rightarrow k = 8$$

Assim, obtemos como resposta $k = 8$.

R.16 Calcular a soma dos inversos das raízes da equação $5x^4 + 3x^2 - x + 4 = 0$.

Resolução

A equação pode ser escrita sob a forma:

$$5x^4 + 0x^3 + 3x^2 - x + 4 = 0$$

Assim, seus coeficientes são $a = 5$, $b = 0$, $c = 3$, $d = -1$ e $e = 4$.

Indicando as raízes por r_1, r_2, r_3 e r_4, temos que:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} =$$

$$= \frac{r_2r_3r_4 + r_1r_3r_4 + r_1r_2r_4 + r_1r_2r_3}{r_1r_2r_3r_4} =$$

$$= \frac{-\frac{d}{a}}{\frac{e}{a}} = \frac{-\frac{(-1)}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

EXERCÍCIOS BÁSICOS

B.25 As raízes da equação $x^4 + 3x^2 - x = 0$ são r_1, r_2, r_3 e r_4. Escreva todas as relações de Girard para essa equação.

B.26 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - \sqrt{3}\,x^2 - 2x + 2\sqrt{3} = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a zero.

B.27 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 60x^2 + 1.100x - 6.000 = 0$, sabendo que suas raízes estão em progressão aritmética.

Exercícios complementares de C.13 a C.19

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

C.1 (Fatec-SP) Se o polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ pode ser fatorado na forma $(2x - 1) \cdot (x + 3) \cdot (x - k)$, então o valor de k é:

a) 5 c) 10 e) −15
b) −5 d) 15

C.2 (U. Taubaté-SP) Sabe-se que 1, 2 e 3 são raízes de um polinômio do terceiro grau $P(x)$ e que $P(0) = 1$. Logo, $P(10)$ vale:

a) 48 c) −84 e) 34
b) 24 d) 104

C.3 (Fuvest-SP) O número 2 é raiz dupla da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$. Determine a e b.

C.4 O número 3 é raiz tripla da equação $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0$. Resolva essa equação no conjunto universo $U = \mathbb{C}$.

C.5 (UNIR) Considere o polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + kx$, sendo k um número real. O maior valor de k, de modo que $P(x)$ admita três raízes reais, é:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

C.6 (Vunesp) Sabe-se que a unidade imaginária i é raiz do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + 2$, com $a \in \mathbb{R}$. Nessas condições:

a) determine o valor de a.
b) encontre o conjunto solução da equação $P(x) = 0$.

C.7 Uma equação polinomial do 3º grau, com coeficientes reais, admite uma raiz igual a $1 + ki$, $k \in \mathbb{R}^*$, e a soma das outras raízes é $4 - 3i$. Determine o conjunto solução dessa equação no universo $U = \mathbb{C}$.

C.8 Sabendo que a equação $x^3 + bx^2 - cx + 1 = 0$, $\{b, c\} \subset \mathbb{Z}$, admite duas raízes inteiras distintas entre si, obtenha as constantes b e c.

C.9 Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - ax^3 - bx^2 - ax + 2 = 0$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$, sabendo que duas de suas raízes são números inteiros positivos e consecutivos.

C.10 As dimensões, em cm, de um retângulo são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Determine o perímetro e a área desse retângulo.

C.11 As dimensões, em cm, de um paralelepípedo reto-retângulo são as raízes da equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Calcule a área total e o volume desse paralelepípedo.

C.12 (Fuvest-SP) As equações $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e $x^2 + x - 2 = 0$ têm o mesmo conjunto solução. Quais os possíveis valores de b, c e d?

C.13 Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $2x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1 = 0$.

C.14 Duas raízes da equação $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$ são opostas (simétricas). Resolva em $\mathbb{C}$ essa equação.

C.15 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 14x^2 + 288 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o dobro de outra.

C.16 Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $3x^4 - 19x^3 + 42x^2 - 36x + 8 = 0$, sabendo que uma de suas raízes tem multiplicidade 3.

C.17 (Mackenzie-SP) Se a soma de duas raízes de $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$ é 3, então o número real k é igual a:

a) -6 c) -2 e) 6
b) -3 d) 3

C.18 (Cesgranrio) O produto de duas raízes da equação $2x^3 - 19x^2 + 37x - 14 = 0$ é 1. A soma das duas maiores raízes da equação é:

a) 7 c) 9 e) 19
b) 8 d) $\frac{19}{2}$

C.19 (Fuvest-SP) Seja $P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de $P(x)$ são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio $P(x)$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

RESPOSTAS

RESPOSTAS

Capítulo 1

Exercícios básicos

B.1 $A = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $A \cup B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, ...\}$; $A \cap B = \{0, 2, 4\}$.

B.2 a) V; b) F; c) V; d) V; e) V; f) F; g) V. **B.3** a) $2{,}5 = \frac{\cancel{25}}{\cancel{10}} = \frac{5}{2}$; b) $3{,}81 = \frac{381}{100}$; c) $0{,}03 = \frac{3}{100}$; d) $g = \frac{38}{9}$; e) $\frac{311}{90}$. **B.4** a) 36; b) 36; c) -36; d) -8; e) -8; f) 1; g) 1; h) $\frac{81}{16}$; i) $\frac{81}{16}$; j) $-\frac{27}{8}$; k) 0; ℓ) 1; m) 1; n) -1; o) $\frac{1}{16}$; p) $\frac{25}{9}$; q) $\frac{25}{9}$; r) $\frac{27}{8}$; s) $-\frac{27}{8}$; t) $-\frac{1}{125}$. **B.5** a) $81x^4$; b) x^{15}; c) $8x^6$; d) $125a^6b^9$; e) $\frac{81a^4}{b^8}$; f) $\frac{25x^8}{4a^2b^6}$; g) $81a^8$. **B.6** a) a^{10}; b) a^5; c) $\frac{4a^8b}{c^3}$; d) $\frac{8x}{3y^4}$. **B.7** $\frac{2^{22}}{2} = 2^{21}$. **B.8** a) 5; b) 3; c) 6; d) 1; e) 0; f) 7; g) -5; h) -2; i) -1. **B.9** a) $2\sqrt[3]{5}$; b) $4\sqrt{5}$; c) $2\sqrt{6}$; d) $2\sqrt[5]{4}$; e) $2\sqrt{10}$; f) $2\sqrt{3}$; g) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$; h) $\frac{3}{2}$; i) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$. **B.10** a) $8\sqrt{7}$; b) $14\sqrt{2}$; c) $13\sqrt[3]{3}$; d) $12\sqrt{10}$; e) $3\sqrt[5]{4}$; f) 24; g) $4\sqrt{2}$; h) $5\sqrt[3]{3}$. **B.11** e. **B.12** $\frac{13}{3}$. **B.13** $\frac{15}{4}$.

Exercícios complementares

C.1 É um número irracional, pois é uma dízima **não-periódica**. **C.2** 22,1602. **C.3** $\frac{65}{4}$. **C.4** $E = 3^n$. **C.5** b. **C.6** e. **C.7** b. **C.8** I) e; II) d; III) b. **C.9** c.

Capítulo 2

Exercícios básicos

B.1 a) 2; b) -3; c) $t = -\frac{7}{5}$. **B.2** a) $S = \left\{\frac{16}{11}\right\}$; b) $S = \{6\}$; c) $S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$; **B.3** 7 m. **B.4** 20. **B.5** Priscilla, Emerson e Ewerton receberam R$ 45,00, R$ 40,00 e R$ 120,00, respectivamente. **B.6** R$ 1.987,50. **B.7** a) $S = \{3, 4, 5, 6, ...\}$; b) $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$; c) $S = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. **B.8** a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{40}{3}\right\}$; b) $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid k < \frac{16}{37}\right\}$; c) $S = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{7}{10}\right\}$; d) $S = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq -\frac{2}{3}\right\}$. **B.9** a) $S = \{(8, -1)\}$; b) $S = \{(1, 2)\}$; c) $S = \left\{\left(\frac{20}{31}, \frac{8}{31}\right)\right\}$; d) $S = \{(-17, -13)\}$. **B.10** a) $S = \left\{\left(2, -\frac{2}{3}\right)\right\}$; b) $S = \left\{\left(-\frac{4}{3}, -1\right)\right\}$; c) $S = \left\{\left(\frac{9}{23}, \frac{2}{23}\right)\right\}$; d) $S = \{(0, -1)\}$. **B.11** a.

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** a. **C.3** b. **C.4** b. **C.5** a) $S = \mathbb{R}$; b) $S = \varnothing$. **C.6** e. **C.7** d.

Capítulo 3

Exercícios básicos

B.1 a) $x^2 - 16$; b) $y^2 - 1$; c) $9t^2 - 25$; d) $x^6 - 4$; e) 1; f) 11.
B.2 a) $x^2 + 12x + 36$; b) $9k^2 + 12k + 4$; c) $y^2 - 6y + 9$; d) $25t^2 - 40t + 16$; e) $4x^2 + 12xy + 9y^2$; f) $k^6 - 14k + 49$. **B.3** a) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$; b) $5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{3} - 2$. **B.4** a) $2ab(4b + 5a)$; b) $5x(x - 3y)$; c) $3t^2(t - 2)$; d) $3ab(2a^2 + 4b^2 - a^2b^2)$; e) $2^x(2 + 2^2 + 1) = 7 \cdot 2^x$. **B.5** a) $(c + d)(a + b)$; b) $(x + y)(a - b)$; c) $(x - y)(z + w)$; d) $(a + 3b)(6c + 10d)$ ou $2(a + 3b)(3c + 5d)$; e) $(2x + 3)(6x^2 + 2)$ ou $2(2x + 3)(3x^2 + 1)$; f) $(4y - 1)(2y^2 + 3)$. **B.6** a) $(a + b)(a - b)$; b) $(x + 3)(x - 3)$; c) $(y + 1)(y - 1)$; d) $(2 + 3z)(2 - 3z)$; e) $(5p + 4q)(5p - 4q)$; f) $(a^2 + b)(a^2 - b)$; g) $(x^3 + y)(x^3 - y)$; h) $(2c^4 + d)(2c^4 - d)$. **B.7** a) $(a + b)^2$; b) $(x - y)^2$; c) $(3a + 5)^2$; d) $(2x - 3y)^2$; e) $(t + 1)^2$; f) $(5y - 1)^2$; g) $(x^2 + 3y)^2$.
B.8 $(x + y + z)(x + y - z)$. **B.9** a) $S = \{0, 1\}$; b) $S = \{-3, -2, 2\}$. **B.10** c.

Exercícios complementares

C.1 b. **C.2** c. **C.3** a. **C.4** b. **C.5** $\frac{c + 1}{a - b}$. **C.6** e. **C.7** c.

Capítulo 4

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \{5, -5\}$; b) $S = \{4, -4\}$; c) $S = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$; d) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; e) $S = \varnothing$; f) $S = \{0, 7\}$; g) $S = \left\{0, \frac{2}{3}\right\}$; h) $S = \left\{0, -\frac{2}{5}\right\}$. **B.2** a) $S = \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \varnothing$; d) $S = \{-3, 2\}$. **B.3** $\forall m, m \in \mathbb{R}$ e $m > \frac{9}{4}$. **B.4** $k = 2$ ou $k = -2$. **B.5** $\forall m, m \in \mathbb{R}$ e $m < 1$. **B.6** $\forall k, k \in \mathbb{R}$ e $k \geqslant -\frac{25}{32}$. **B.7** a) soma 5, produto 6 e raízes 2 e 3; b) soma 9, produto 20 e raízes 4 e 5; c) soma -5, produto 6 e raízes -2 e -3; d) soma -2, produto -8 e raízes -4 e 2. **B.8** a) $S = \left\{(3, 1), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)\right\}$; b) $S = \{(-5, 14), (2, 0)\}$; c) $S = \{(1, 1), (6, 16)\}$. **B.9** a) $3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$; b) $4(y + 2)\left(y - \frac{1}{2}\right)$; c) $(p - 1)(p - 3)$; d) $(x + 2)(x - 1)$; e) $(k - 1)^2$; f) $9\left(z + \frac{1}{3}\right)^2$. **B.10** b. **B.11** a) $S = \{1, 4\}$; b) $S = \left\{\frac{3}{2}, -2\right\}$; c) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$; d) $S = \{1\}$; e) $S = \{-1, 2\}$; f) $S = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$.
B.12 a) $S = \{3\}$; b) $S = \{5\}$; c) $S = \{-2\}$; d) $S = \{1\}$.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** 10 pacotes. **C.3** $\forall k, k \in \mathbb{R}$ e $k < 4$. **C.4** $k = -1$ ou $k = \frac{1}{3}$. **C.5** c. **C.6** 12.031. **C.7** a. **C.8** d. **C.9** $S = \varnothing$.

Capítulo 5

Exercícios básicos

B.1 a) $\frac{17}{50}$; b) $\frac{3}{100}$; c) $\frac{63}{20}$; d) $\frac{1}{125}$. **B.2** a) 0,46; b) 1,49; c) 0,0023; d) 0,5683. **B.3** a) 65%; b) 132%; c) 40%; d) 9%; e) 0,3%. **B.4** a) 75%; b) 34%; c) 240%; d) 66,666...%. **B.5** a. **B.6** 48 mulheres. **B.7** 8.388.400 habitantes. **B.8** a) aproximadamente 36%; b) 178%; c) 63%; d) aproximadamente 86%. **B.9** 1,2%. **B.10** R$ 432,00. **B.11** R$ 910,00.

Exercícios complementares

C.1 R$ 1,82. **C.2** a) R$ 2.160,00; b) 28%. **C.3** 69,5%. **C.4** c. **C.5** e. **C.6** b. **C.7** d. **C.8** d. **C.9** b. **C.10** c. **C.11** b. **C.12** e.

Capítulo 6

Exercícios básicos

B.1 a. **B.2** 130°. **B.3** 144°. **B.4** c. **B.5** 30°. **B.6** 30°. **B.7** 18°. **B.8** d. **B.9** 130°. **B.10** a) 360°; b) 540°; c) 1.080°. **B.11** a) 360°; b) 540°; c) 720°; d) 1.440°. **B.12** 120°. **B.13** Em um polígono convexo de n lados (n vértices) a soma S_i dos ângulos internos é $S_i = 180°(n-2)$. Indicando por S_e a soma de seus ângulos externos, temos que $S_i + S_e = n \cdot 180°$, pois em cada vértice a soma do ângulo interno com o ângulo externo é 180°. Logo, $180°(n-2) + S_e = n \cdot 180° \therefore S_e = 360°$. **B.14** 36°.

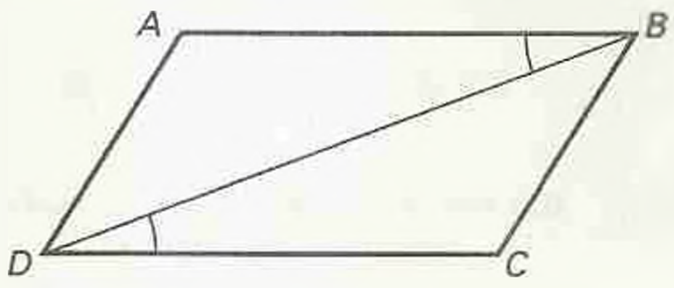
Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** b. **C.3** $x = 50°$. **C.4** b. **C.5** a) $\alpha = 30°$; b) 90°. **C.6** $x = 5°$. **C.7** 90°. **C.8** 140°. **C.9** $x = 100°$ e $y = 30°$. **C.10** $m(B\hat{A}C) = 100°$. **C.11** b.

Capítulo 7

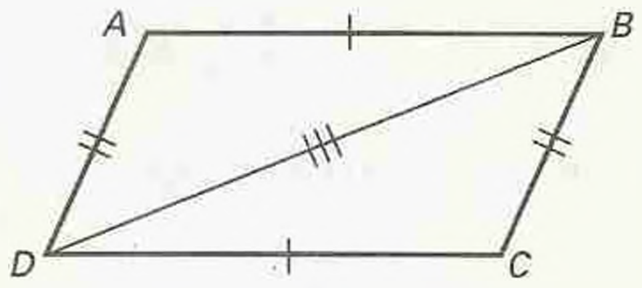
Exercícios básicos

B.1



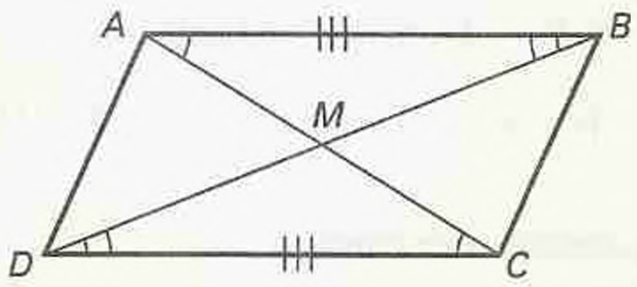
$B\hat{D}C \cong D\hat{B}A$ (alternos), $D\hat{B}C \cong B\hat{D}A$ (alternos) e $\overline{DB}$ é lado comum aos triângulos ABD e CDB; logo, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (caso ALA).

B.2



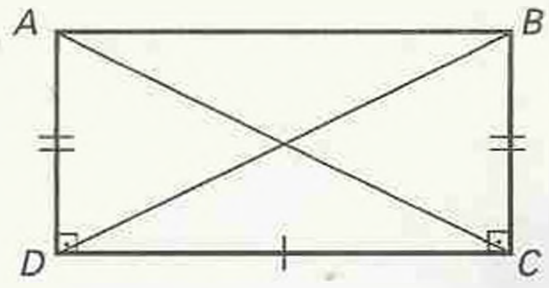
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ e $\overline{DB}$ é lado comum aos triângulos ABD e CDB; logo, $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (caso LLL).

B.3



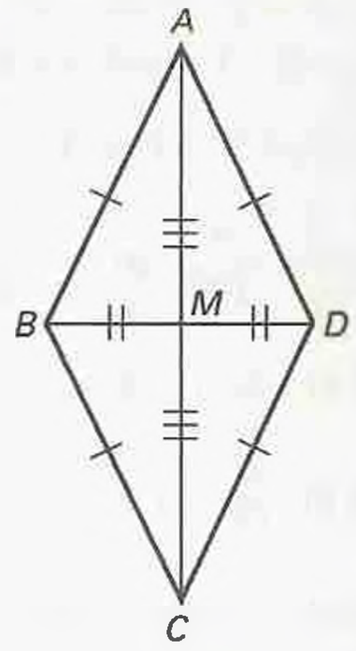
$M\hat{A}B \cong M\hat{C}D$ (alternos), $M\hat{B}A \cong M\hat{D}C$ (alternos) e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (lados opostos de um paralelogramo); logo, $\Delta AMB \cong \Delta CMD$ (caso ALA).

B.4



$\overline{DC}$ é lado comum aos triângulos ADC e BCD, $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ são retos e $\overline{AD} \cong \overline{BC}$; logo, $\Delta ADC \cong \Delta BCD$ (caso LAL).

B.5

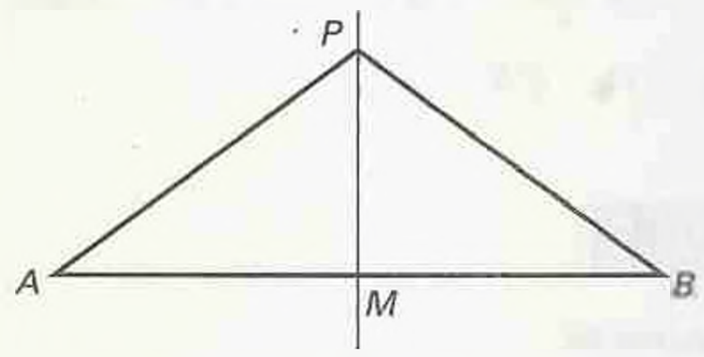


Se os quatro lados são congruentes entre si, então $ABCD$ é um paralelogramo, portanto suas diagonais se cruzam no ponto médio de cada uma; assim, pelo caso LLL, temos que $\Delta AMD \cong \Delta AMB \cong \Delta CMD \cong \Delta CMB$. **B.6** a) 2; b) como $\Delta ACB \cong \Delta ECD$ (caso LAL), temos $C\hat{A}B \cong C\hat{E}D$. Os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{E}D$ são alternos congruentes; logo, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$. **B.7** 40°. **B.8** 60°. **B.9** 45°. **B.10** 35°. **B.11** 80°. **B.12** 60°. **B.13** a) 120°; b) 90°. **B.14** 1.260 m. **B.15** 55°. **B.16** 5 cm. **B.17** $y = 40°$ e $x = 80°$. **B.18** 50°, 40° e 90°.

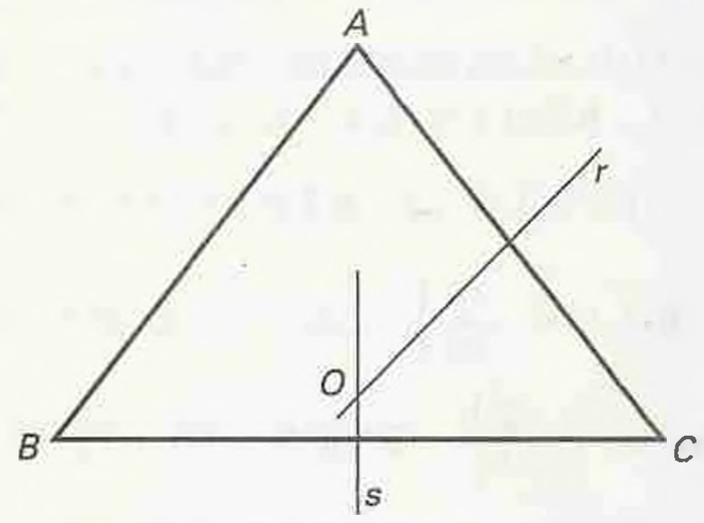
Exercícios complementares

C.1 $CA = 400$ m e $CB = 600$ m.

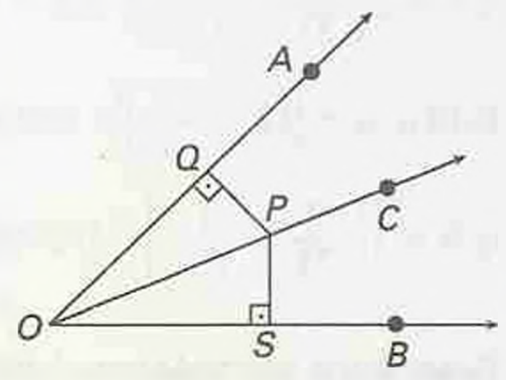
C.2 • M é ponto médio de $\overline{AB}$, portanto M equidista de A e B.
• Seja P, $P \neq M$, um ponto qualquer da mediatriz
$\Delta AMP \cong \Delta BMP$ (caso LAL) $\Rightarrow \overline{PA} \cong \overline{PB}$.
• Portanto, qualquer ponto da mediatriz equidista de A e B.



C.3 I) O pertence à mediatriz r de $\overline{AC}$, logo, O equidista de A e C.
II) O pertence à mediatriz s de $\overline{BC}$, logo, O equidista de B e C.
Por (I) e (II), O equidista dos três vértices do ΔABC.



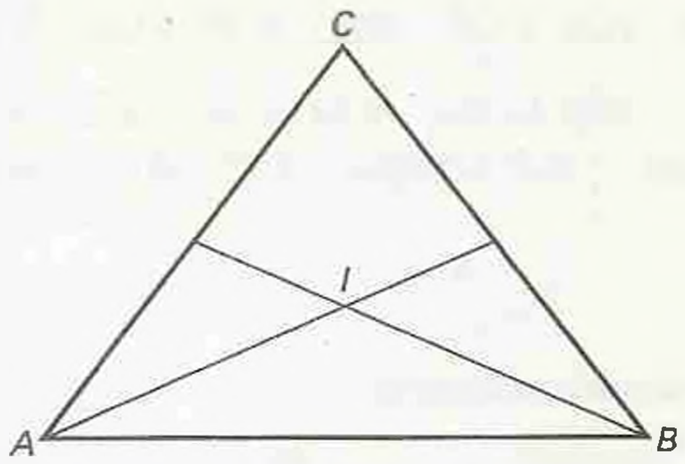
C.4 I) O equidista de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, pois pertence a ambos.
II) Sendo P, $P \neq O$, um ponto da bissetriz $\overrightarrow{OC}$, temos que:
$\Delta OPQ \cong \Delta OPS$ (caso LAA_o) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{PQ} \cong \overline{PS}$
Por (I) e (II), qualquer ponto da bissetriz $\overrightarrow{OC}$ equidista dos lados do ângulo $A\hat{O}B$.



C.5 I) O ponto I pertence à bissetriz de $A\hat{B}C$, logo, I equidista de $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$.

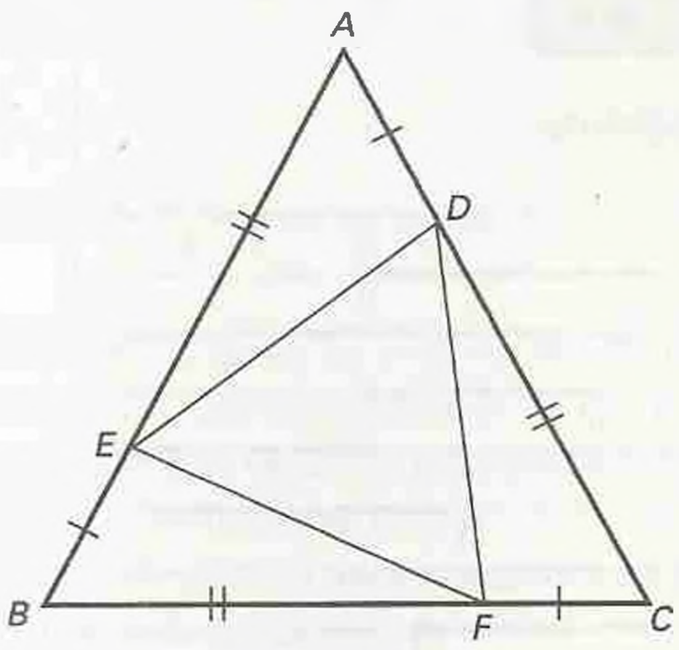
II) O ponto I pertence à bissetriz de $B\hat{A}C$, logo. I equidista de $\overline{BA}$ e $\overline{CA}$.

Por (I) e (II), o ponto I equidista dos três lados do triângulo.



C.6 • $\overline{AC} \cong \overline{CB} \cong \overline{BA} \Rightarrow \Delta ABC$ é equilátero, logo, cada um dos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ mede 60°.

• $\Delta ADE \cong \Delta CFD \cong \Delta BEF$ (caso LAL) $\Rightarrow \overline{DE} \cong \overline{FD} \cong \overline{EF}$, logo, ΔDEF é equilátero.



C.7 a. **C.8** 15°. **C.9** 50°. **C.10** 40°.

Capítulo 8

Exercícios básicos

B.1 a) 6; b) 9; c) 3; d) 6; e) 7. **B.2** $x = 4$, $y = \frac{16}{3}$ e $z = \frac{8}{3}$.

B.3 $AE = 12$ e $AD = 8$. **B.4** $x = 14$ e $y = 24$. **B.5** b. **B.6** d.

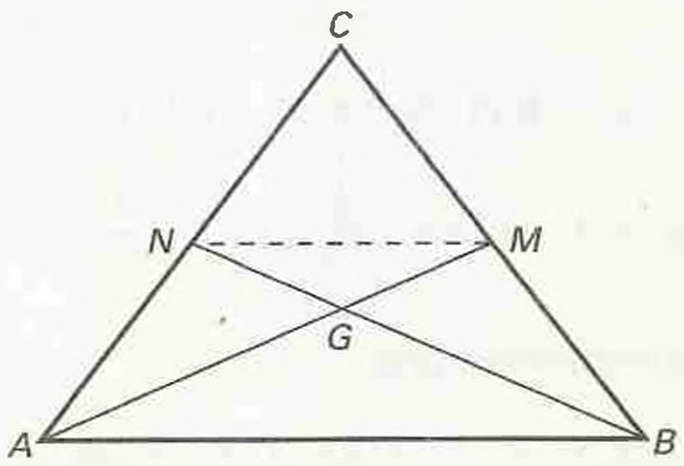
B.7 a) $B\hat{A}C$ é ângulo comum aos triângulos ABC e AMN, e $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$; assim, pelo caso LAL, temos que $\Delta ABC \sim \Delta AMN$; b) paralelas, porque os ângulos alternos formados por $\overline{MN}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BM}$ são congruentes; c) a razão de semelhança do ΔAMN para o ΔABC é $\frac{1}{2}$; logo, a medida do segmento $\overline{AM}$ equivale à metade de BC.

B.8 I) $\overline{NM}$ é base média do ΔABC, logo $\overline{NM} /\!/ \overline{AB}$ e $AB = 2 \cdot MN$.

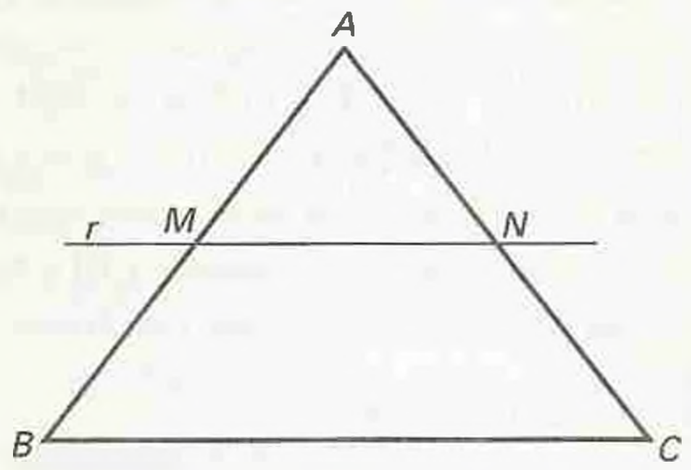
II) $\Delta GNM \sim \Delta GBA \Rightarrow \frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{AB}{MN}$.

Por (I) e (II), temos $\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{1}{2}$.

Traçando a terceira mediana $\overline{CP}$ e repetindo o raciocínio, temos $\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = \frac{1}{2}$.

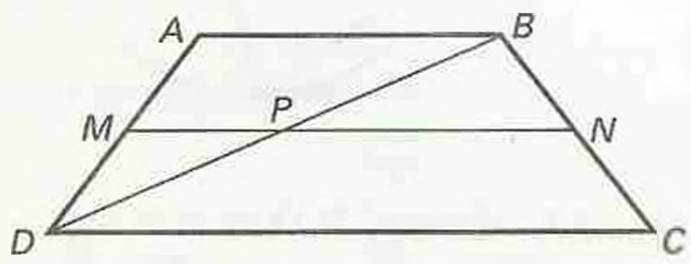


B.9 e. **B.10** $\Delta ABC \sim \Delta AMN$ (caso AA) $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$, logo, $AN = \frac{AC}{2}$, ou seja, N é ponto médio de $\overline{AC}$.



B.11 Como M é ponto médio de $\overline{AD}$ e $\overline{MN} /\!/ \overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, temos que $\overline{MP}$ é base média do ΔABD e do ΔCBD. Logo, $MP = \frac{AB}{2}$ e $PN = \frac{DC}{2}$.

Adicionando membro a membro essas igualdades, obtemos $MP + PN = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2}$. Portanto, $MN = \frac{AB + DC}{2}$.



B.12 $MN = 8$ cm e $PQ = 7$ cm. **B.13** 4. **B.14** 9 cm. **B.15** $a = 5$, $h = 2{,}4$, $m = 1{,}8$ e $n = 3{,}2$. **B.16** 3 cm. **B.17.** 2,4 cm. **B.18** 1,4.

B.19 $HC = 28{,}8$. **B.20** a) $3\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $a\sqrt{2}$. **B.21** a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Exercícios complementares

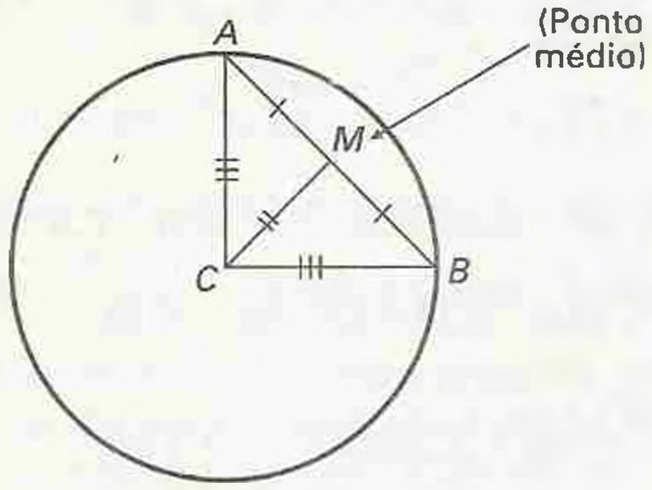
C.1 $y = 12$. **C.2** 80 m, 60 m e 40 m. **C.3** 9 cm. **C.4** a. **C.5** $\frac{1}{2}$. **C.6** 800 m. **C.7** d. **C.8** b. **C.9** a. **C.10** 24 cm. **C.11** 30 cm.

C.12 e. **C.13** 1,75 cm. **C.14** 5 cm. **C.15** 6 cm. **C.16** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.

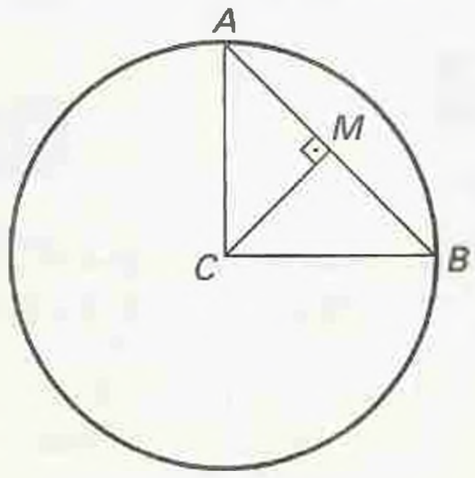
Capítulo 9

Exercícios básicos

B.1 a) $\Delta AMC \cong \Delta BCM$ (caso LLL) $\Rightarrow A\hat{M}C \cong B\hat{M}C$ (I).
$A\hat{M}C$ e $B\hat{M}C$ são suplementares (II).
Por (I) e (II), temos que $A\hat{M}C$ é reto.

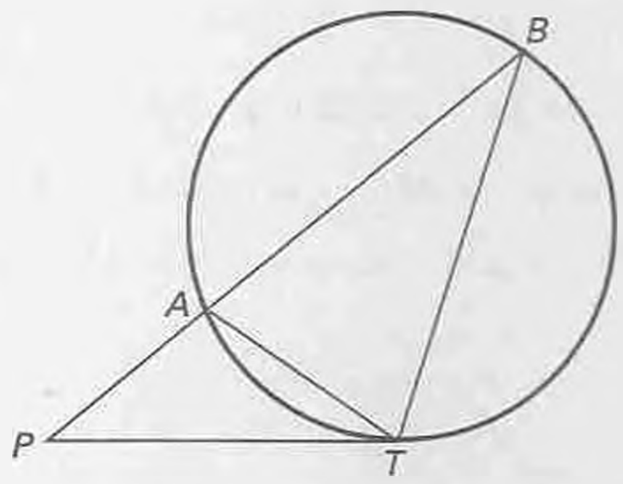


b) $\Delta AMC \cong \Delta BCM$ (caso RHC) $\Rightarrow \overline{AM} \cong \overline{BM}$, ou seja, M é ponto médio de $\overline{AB}$.



B.2 5 cm. **B.3** $6\sqrt{3}$ cm. **B.4** a) $x = 50°$; b) $x = 46°$; c) $x = 40°$.
B.5 a) 90°; b) retângulo; c) num ΔABC, retângulo em A, a mediana $\overline{AM}$ mede a metade da hipotenusa $\overline{BC}$, logo, M equidista de A, B e C. Assim, M é o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo e, como $\overline{BC}$ é diâmetro, conclui-se que o ΔABC está inscrito na metade dessa circunferência.
B.6 a) $x = 80°$; b) $x = 40°$. **B.7** a) $P\hat{A}B \cong P\hat{B}A$; b) isósceles.
B.8 a) $x = 12$ cm; b) $y = 7$. **B.9** a) $x = 3$; b) $x = 5$; c) $x = 3$.
B.10 $A\hat{B}T \cong A\hat{T}B$ (ângulos inscrito e de segmento que determinam o mesmo arco), $\hat{P}$ é ângulo comum aos triângulos PTB e PAT; logo, pelo caso AA, temos que $\Delta PTB \sim \Delta PAT$. Assim, concluímos que

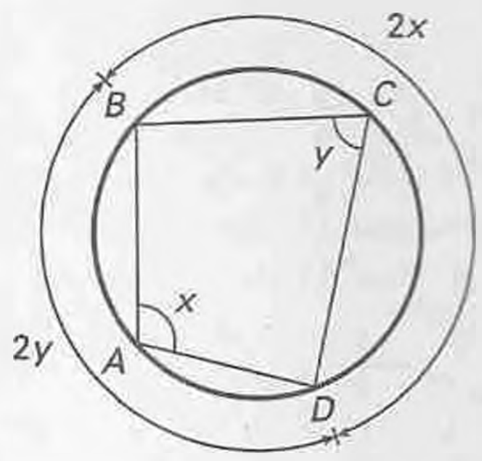
$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT}$, ou seja, $(PT)^2 = PA \cdot PB$.



B.11 $x = 3\sqrt{5}$. **B.12** 10π cm. **B.13** 4π m $\simeq$ 12,56 m.
B.14 1.000 voltas. **B.15** $R = 2\sqrt{2}$ cm e $r = 2$ cm. **B.16** $R = 12$ cm e $r = 6$ cm. **B.17** $R = 18$ dm e $r = 9\sqrt{3}$ dm. **B.18** Do menor lado para o maior, a razão é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** b.
C.3 O arco $\overset{\frown}{BAD}$ mede $2y$ por ser determinado pelo ângulo inscrito de medida y. O arco $\overset{\frown}{BCD}$ mede $2x$ por ser determinado pelo ângulo inscrito de medida x. Assim, tem-se que $2x + 2y = 360° \Rightarrow x + y = 180°$, ou seja, $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$ são ângulos suplementares. Analogamente, $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são ângulos suplementares.



C.4 c. **C.5** $x = 40°$. **C.6** 10 cm. **C.7** 2 cm. **C.8** 3.630 km.
C.9 3.000 m. **C.10** a. **C.11** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. **C.12** c.
C.13 $\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}$ cm. **C.14** $24(3+\sqrt{3})$ cm.
C.15 $(1+\sqrt{2})$ m. **C.16** $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ m.

Capítulo 10

Exercícios básicos

B.1 40 cm². **B.2** 16 cm. **B.3** 16 cm². **B.4** 64 cm². **B.5** 24 cm².
B.6 4,5 dm. **B.7** 12 cm². **B.8** 9 dm². **B.9** 8 cm². **B.10** 12 cm.
B.11 a) $h = 12$ cm; b) $A = 84$ cm²;
c) $A = \sqrt{21(21-15)(21-13)(21-14)}$ cm² $= 84$ cm².

B.12 $9(4-\sqrt{3})$ cm². **B.13** $24\sqrt{3}$ cm². **B.14** $54\sqrt{3}$ cm².
B.15 $150(4+\sqrt{3})$ cm². **B.16** 150 cm². **B.17** 600 cm².
B.18 216 cm². **B.19** $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm². **B.20** 9π cm². **B.21** 18π cm².
B.22 16π cm². **B.23** 4π dm². **B.24** 8π cm². **B.25** $4(\pi - 2)$ cm².
B.26 $(2+\pi)$ cm². **B.27** d. **B.28** b. **B.29** 4 cm. **B.30** 15 cm.
B.31 $\frac{81}{16}$.

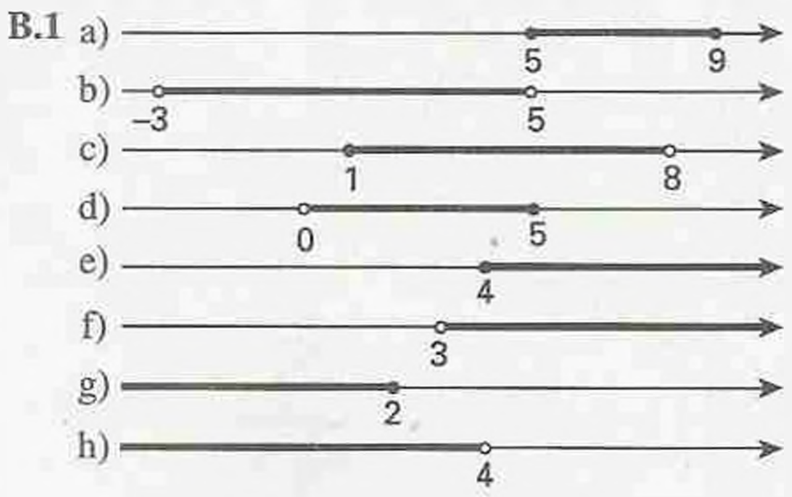
Exercícios complementares

C.1 b. **C.2** d. **C.3** d. **C.4** c. **C.5** $\frac{88}{3}$. **C.6** a. **C.7** c. **C.8** $\frac{16}{65}$.
C.9 750.000 m². **C.10** a) V; b) F; c) F.

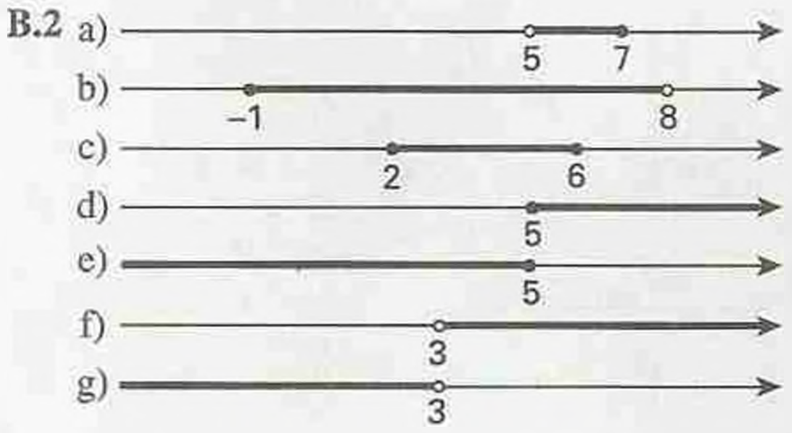
Capítulo 11

Exercícios básicos

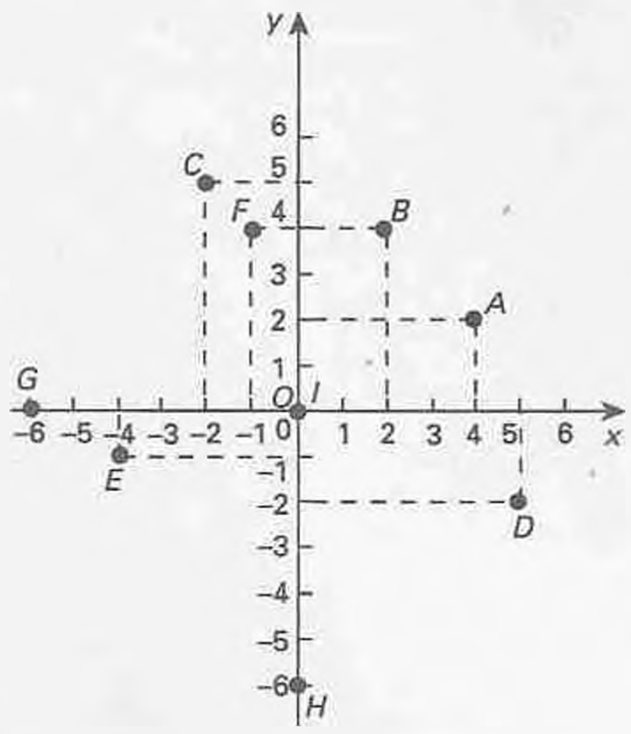
B.1



B.2



B.3 a) $]-3, 13]$; b) $[5, 10]$. **B.4** a) $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$; b) $[2, 5[$.
B.5 a) $]0, 7[$; b) $[-1, +\infty[$. **B.6** a) $]1, 10]$; b) $\{4\}$. **B.7** $S = [-3, 11[$.
B.8



B.9 $-2 < x < \frac{8}{5}$. **B.10** $-2 < x < 2$. **B.11** $x = 3$ ou $x = -3$.
B.12 $x = 1$ ou $x = 4$. **B.13** $a = \frac{32}{5}$ e $b = \frac{23}{5}$.

Exercícios complementares

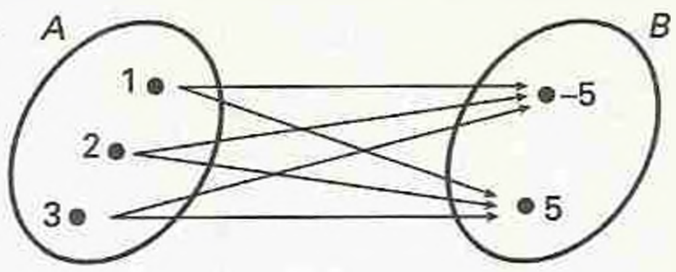
C.1 b. **C.2** b. **C.3** $x = -3$. **C.4** b **C.5** primeiro quadrante. **C.6** a.

Capítulo 12

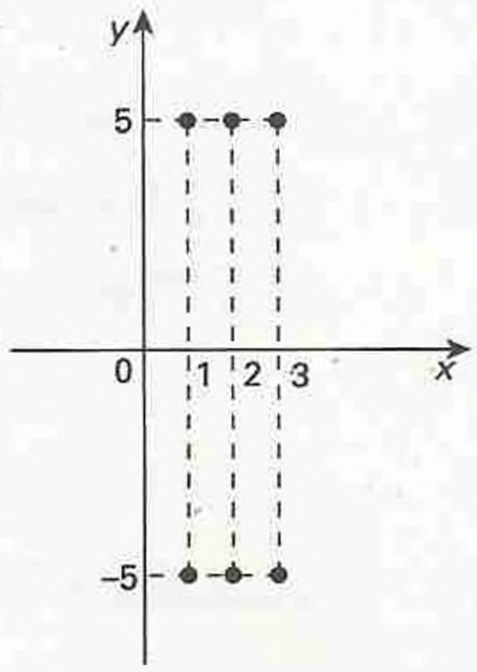
Exercícios básicos

B.1 a) I. $A \times B = \{(1, -5), (1, 5), (2, -5), (2, 5), (3, -5), (3, 5)\}$

II.



III.

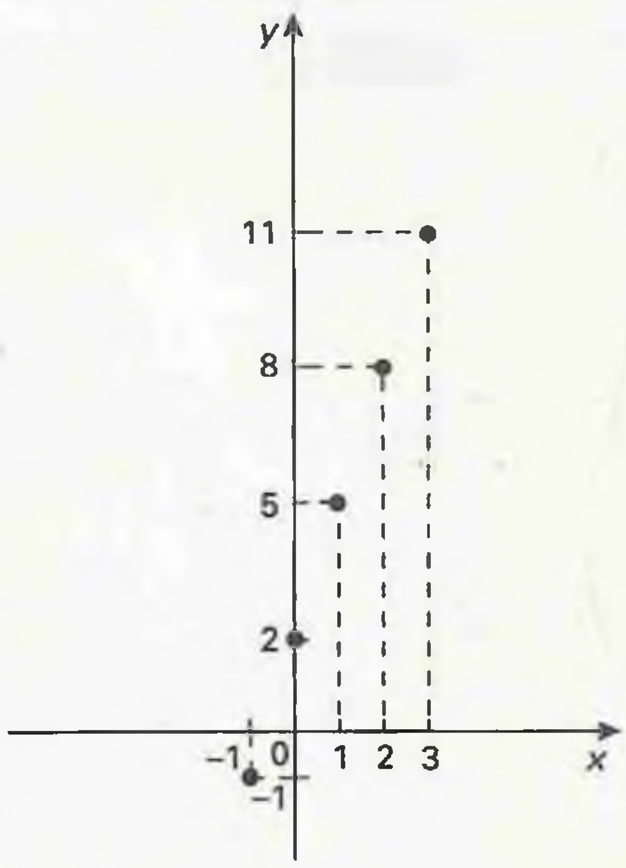


b) $B \times A = \{(-5, 1), (-5, 2), (-5, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$;
c) $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

B.2 a) R não é função de A em B; b) f é função de A em B; c) g não é função de A em B; d) h é função de A em B.

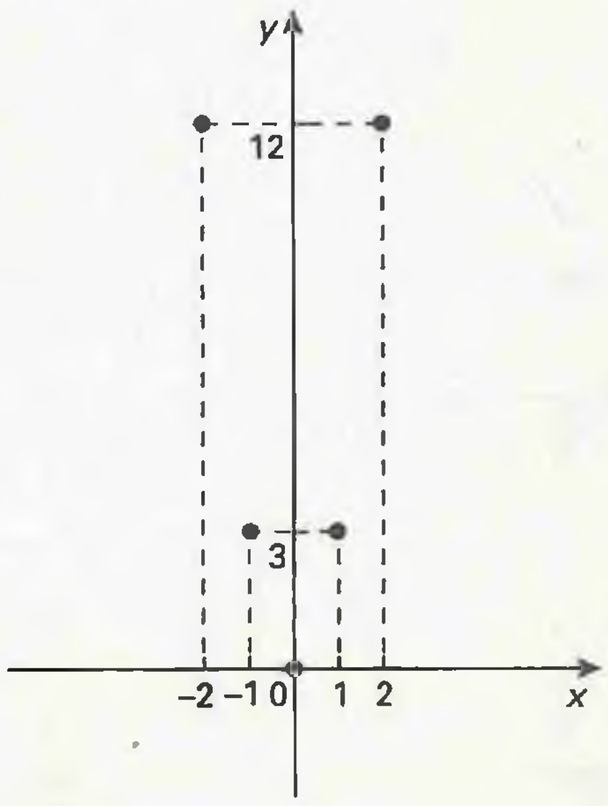
B.3 a) R é função de A em B; b) f não é função de A em B; c) g é função de A em B; d) h não é função de A em B.

B.4



$D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$;
$\text{Im}(f) = \{-1, 2, 5, 8, 11\}$.

B.5



$D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
$\text{Im}(f) = \{0, 3, 12\}$.

B.6 $D(f) = \{1, 4, 6, 3\}$; $\text{Im}(f) = \{2, 5, 8, 9\}$. **B.7** $x = 2$ ou $x = 5$.

B.8 a) $f(-10) = 10$; b) $f(2) = 46$; c) $f(0) = 40$; d) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 41$.

B.9 a) $f(-1) = 0$; b) $f(2) = 6$; c) $f(-4) = 12$; d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$; e) $f(0) = 0$. **B.10** a) 20.000 m³; b) 72.000.000 m³; c) 24 s. **B.11** a) 1; b) 0; c) −3; d) 0; e) −9. **B.12** a) 32 bactérias; b) 85 bactérias; c) 98 bactérias. **B.13** a) V; b) V; c) V; d) F; e) F; f) V; g) V; h) F. **B.14** a) V; b) F; c) V; d) F; e) V; f) F; g) V; h) V; i) F; j) V; k) F.

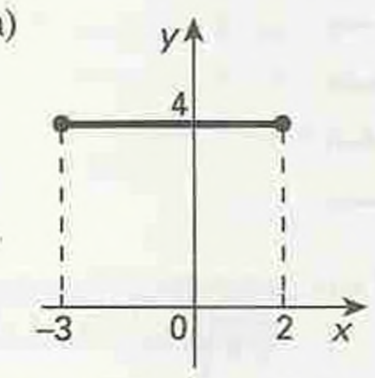
B.15 a) $f(36) = 6$; b) $f(81) = 9$; c) $f(2) = \sqrt{2}$; d) $f(1) = 1$.

B.16 $x = \frac{1}{3}$. **B.17** $\text{Im}(f) = \{15, 3, -1\}$. **B.18** R é função de A em B, pois toda reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto do eixo Ox de abscissa x, $x \in A$, intercepta o gráfico num único ponto. **B.19** R não é função de A em B, pois a reta paralela ao eixo Oy, passando pelo ponto do eixo Ox de abscissa 6, $6 \in A$, intercepta o gráfico em mais de um ponto. **B.20** Representa função o gráfico b, pois toda reta paralela ao eixo Oy, passando por qualquer ponto de abscissa x, $x \in A$, intercepta o gráfico em um único ponto.

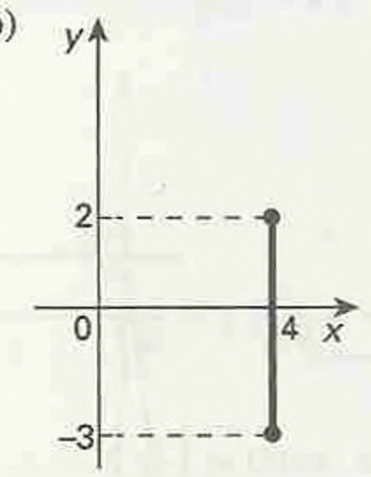
B.21 $D(f) = [-3, 5[$; $\text{Im}(f) = [-4, 4[$. **22.** $D(f) = [-6, -2] \cup]4, 9]$; $\text{Im}(f) = [1, 11]$.

Exercícios complementares

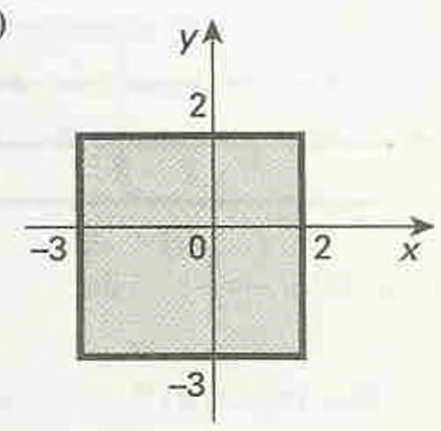
C.1 a)



b)



c)



C.2 A relação f é função de A em B, pois *todo* elemento de A está associado, através de f, a um *único* elemento de B. **C.3** $x = 9$. **C.4** A relação f é função de A em B, pois *todo* elemento A está associado, através de f, a um único elemento de B. **C.5** I) b; II) c. **C.6** a) V; b) V; c) V; d) F; e) F; f) F; g) F. **C.7** a) 52 dólares; b) 51 dólares; c) 50 sacas.

C.8 a) $f(-4) = \frac{1}{2}$; b) $f(-1) = 5$; c) $f(2) = 4$; d) $f(0) = \frac{17}{3}$.

C.9 a) $f(4) = 2$; b) $f(8) = 3$; c) $f(1) = 0$; d) $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$.

C.10 a) 30 cm; b) 5 cm; c) primeira semana. **C.11** d. **C.12** d. **C.13** b.

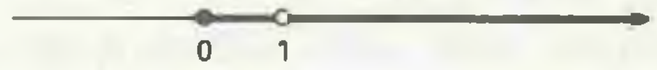
C.14 b. **C.15** $\frac{\sqrt{7} - 1}{6}$. **C.16** a. **C.17** d. **C.18** d. **C.19** R não é função de $\{3\}$ em $\mathbb{R}$, pois a reta paralela ao eixo Oy, passando pelo ponto do eixo Ox de abscissa 3, coincide com o próprio gráfico e, portanto, intercepta-o em mais de um ponto. **C.20** Não, pois sempre existirá reta paralela ao eixo Oy interceptando o gráfico em mais de um ponto. **C.21** $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \{4\}$. **C.22** $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. **C.23** $D(f) = [0,8]$; $\text{Im}(f) = [0,4]$. **C.24** c.

Capítulo 13

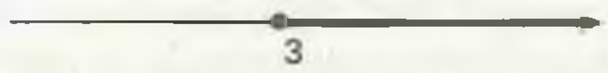
Exercícios básicos

B.1 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$; b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$; c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$; d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$; e) $D(f) = \mathbb{R}$; f) $D(f) = \mathbb{R}$; g) $D(f) = \mathbb{R}$; h) $D(f) = \mathbb{R}^*$; i) $D(f) = \mathbb{R}$; j) $D(f) = \mathbb{R}$; k) $D(f) = \mathbb{R}$.

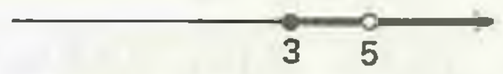
B.2 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ e } x \neq 1\}$



b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$



c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ e } x \neq 5\}$



d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

e) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

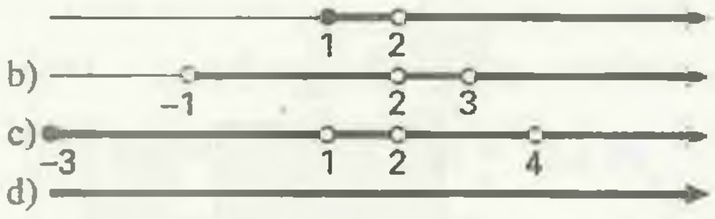
B.3 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$; b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{4}\right\}$;

c) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$; d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \text{ e } x \neq 3$ e $x \neq -3\}$; e) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ e } x \neq \frac{1}{2} \text{ e } x \neq \frac{5}{4}\right\}$;

f) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 2\right\}$; g) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3} \text{ e } x \neq 1\right\}$; h) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$; i) $D(f) = \mathbb{R}$;

j) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$; k) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\}$.

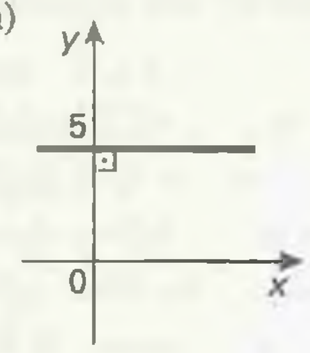
B.4 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 2\}$; b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\}$; c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \neq 2 \text{ e } x \neq 4\}$; d) $D(f) = \mathbb{R}$.



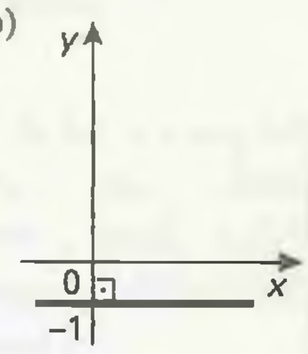
B.5 a) 1 e 3; b) $-\frac{3}{5}$; c) 3 e -3; d) -2, 2 e 0; e) 1, -1, $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$;

f) não possui raízes; g) 0, 2 e 4; h) $-\frac{1}{3}$; i) 2 e $-\frac{3}{2}$. **B.6** -5 e 4.

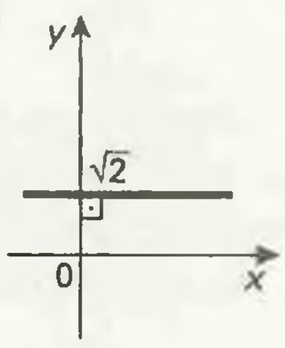
B.7 a)



b)



c)

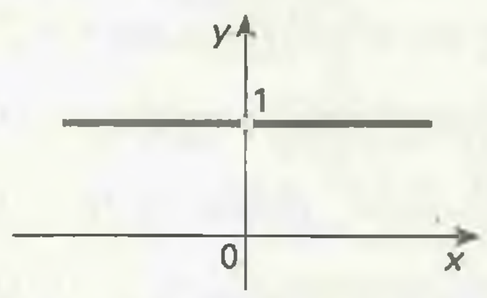


B.8 a) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{5\}$; b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

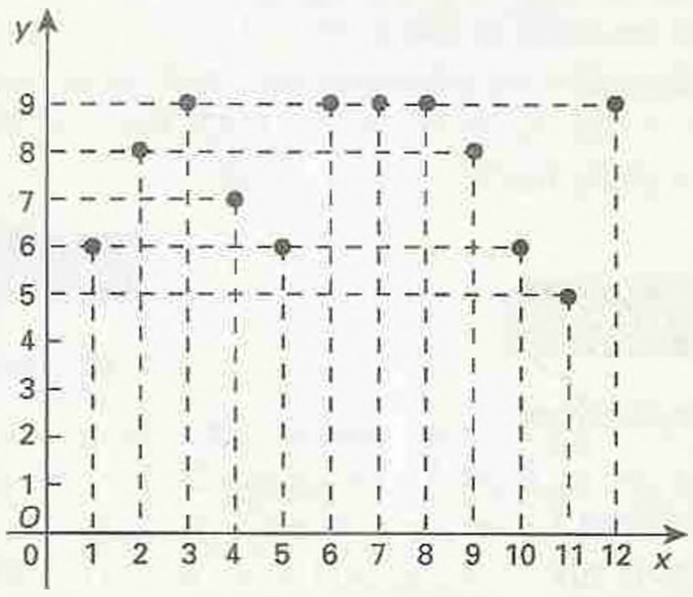
B.9 a) $[-3, 2]$; b) $[2, 5]$; c) $[-7, -3]$ e $[5, 8]$. **B.10** a) V; b) V; c) V; d) F; e) V; f) F; g) V; h) F.

Exercícios complementares

C.1 a) $D(f) = \mathbb{R}$; b) $D(f) = \{0\}$; c) $D(f) = \{1\}$; d) $D(f) = \mathbb{R}_+$; e) $D(f) = \mathbb{R}_-$.
C.2 $D(f) = \{1\}$ e $Im(f) = \{0\}$. **C.3** c. **C.4** d. **C.5** a) 3; b) -1; c) não possui raízes: d) 4. **C.6** $a = 2$ e $b = -6$.
C.7



C.8 a) $0 \leq t \leq 2$; b) $7 \leq t \leq 10$; c) $2 \leq t \leq 7$. **C.9** c.
C.10

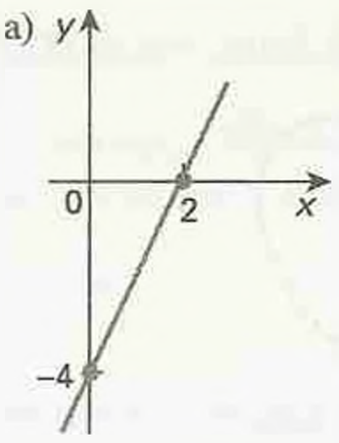


a) crescente; b) constante; c) decrescente; d) 0%. **C.11** c. **C.12** d.

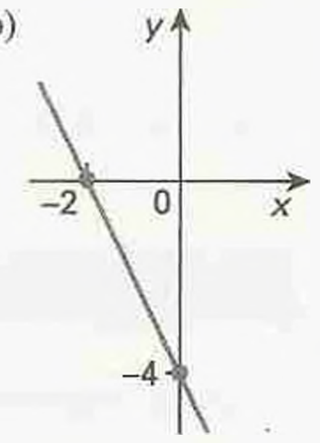
Capítulo 14

Exercícios básicos

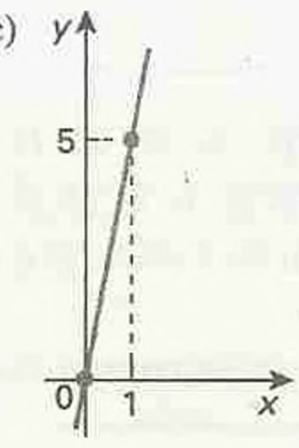
B.1 a)



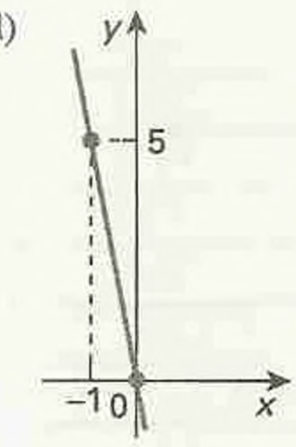
b)



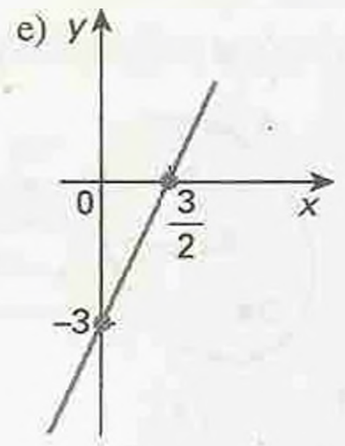
c)



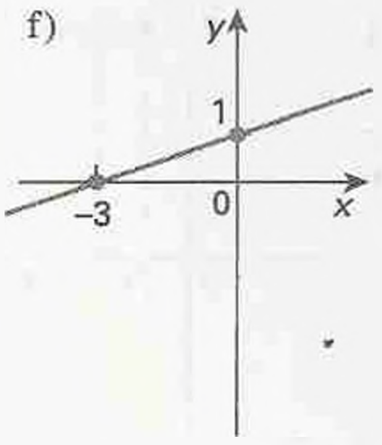
d)



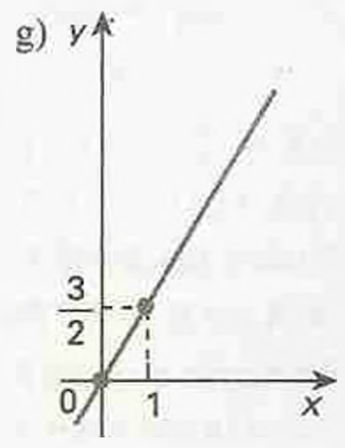
e)



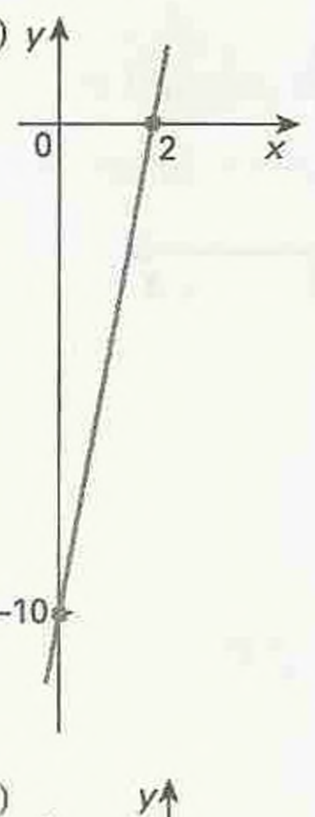
f)



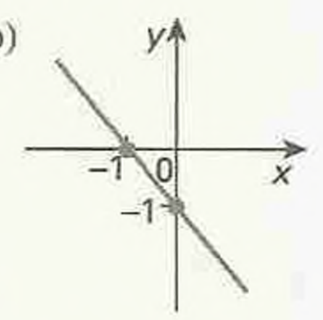
g)



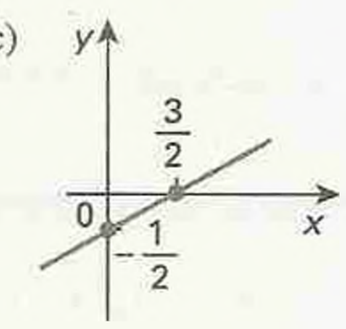
B.2 a)



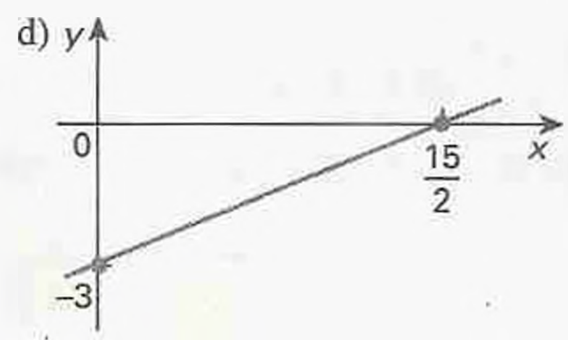
b)



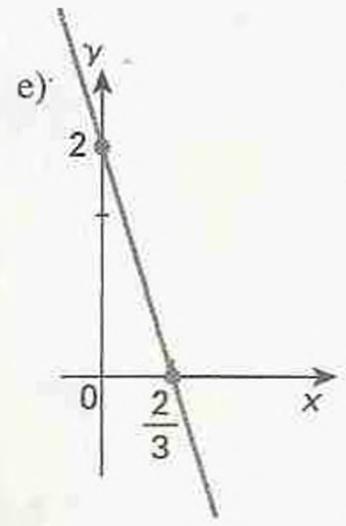
c)



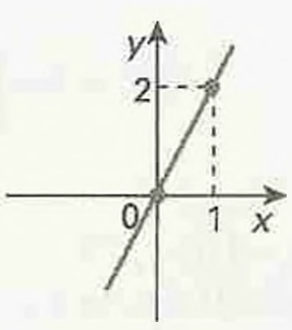
d)



e)

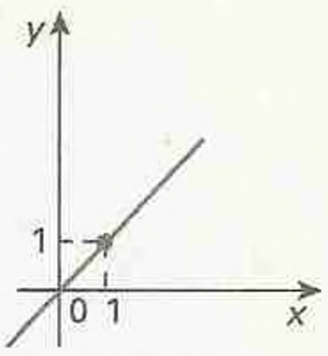


f)



B.3 a) $a = 2$ e $b = 1$; b) $-\frac{1}{2}$ **B.4** $a = -3$ e $b = 0$. **B.5** c.

B.6



$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

B.7 a) R$ 327,00; b) $f(x) = 160 + 0{,}02x$, sendo x e $f(x)$ em reais.
B.8 a) 24 °C; b) 8 °C.

B.9 a)

	2	
$f(x) = 5x - 10$	−	+

b)

	−2	
$f(x) = -5x - 10$	+	−

c)

	−1/3	
$f(x) = 3x + 1$	−	+

d)

	1/3	
$y = -3x + 1$	+	−

e)

	0	
$y = 5x$	−	+

f)

	0	
$y = -5x$	+	−

g)

	2	
$y = x - 2$	−	+

h)

	2	
$y = -x + 2$	+	−

i)

	−1/4	
$f(x) = 4x + 1$	−	+

j)

	1/4	
$f(x) = -4x + 1$	+	−

k)

	0	
$f(x) = x$	−	+

l)

	0	
$f(x) = -x$	+	−

B.10 a)

	5/2	
$f(x) = 2x - 5$	−	+

b)

	−5/2	
$f(x) = -2x - 5$	+	−

c)

	−1/2	
$y = 4x + 2$	−	+

d)

	1/2	
$y = -4x + 2$	+	−

e)

	−3	
$f(x) = \frac{x+1}{3}$	−	+

f)

	3	
$f(x) = -\frac{x+1}{3}$	+	−

g)

	$\sqrt{3}$	
$f(x) = \sqrt{2}x - \sqrt{6}$	−	+

h)

	$-\sqrt{3}$	
$y = -\sqrt{2}x - \sqrt{6}$	+	−

B.11

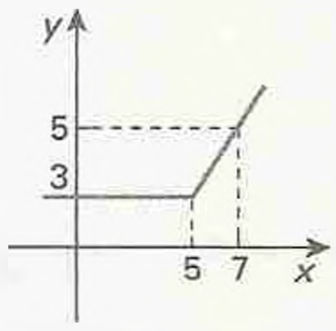
	4/3	
$y = 3x - 4$	−	+

B.12

	$\sqrt{2}$	
$y = -x + \sqrt{2}$	+	−

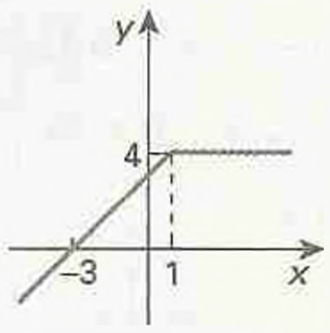
B.13 a) F; b) V; c) V; d) F; e) V; f) V. **B.14** e.

B.15 a)



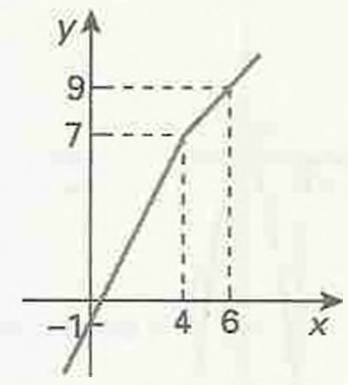
$D(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$.

b)



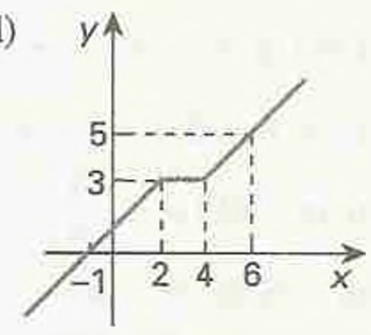
$D(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$.

c)



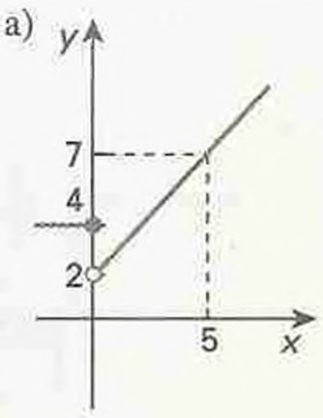
$D(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = \mathbb{R}$.

d)

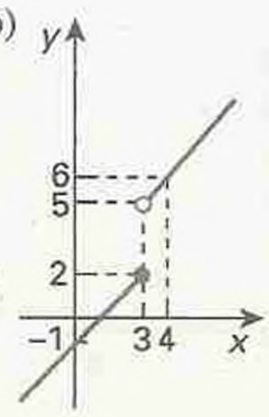


$D(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = \mathbb{R}$.

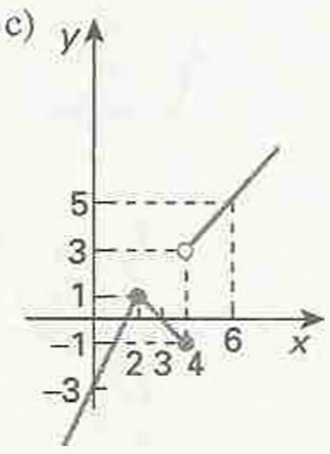
B.16 a)



b)

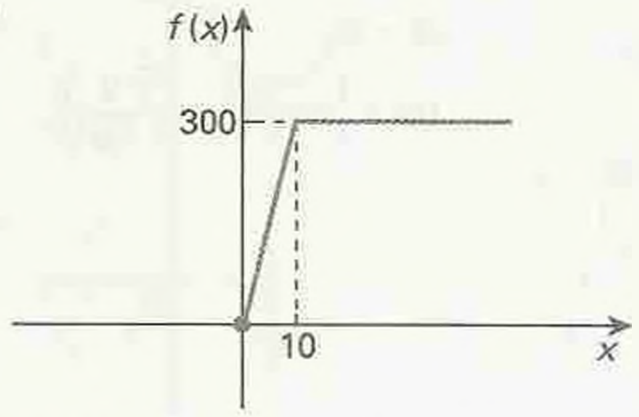


c)



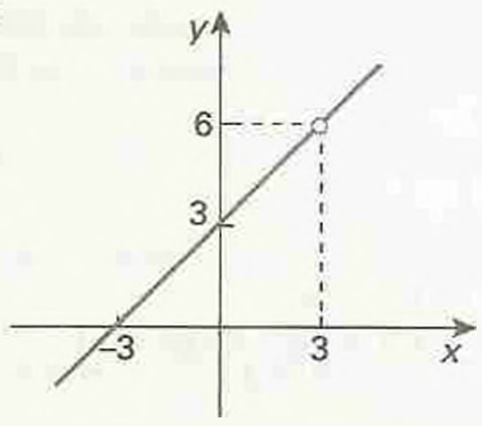
B. 17 a) $f(x) = \begin{cases} 30x \text{ se } 0 \leq x \leq 10 \\ 300 \text{ se } x > 10 \end{cases}$ em que x representa o tempo, em min, e $f(x)$ representa a temperatura em °C;

b)



Exercícios complementares

C.1

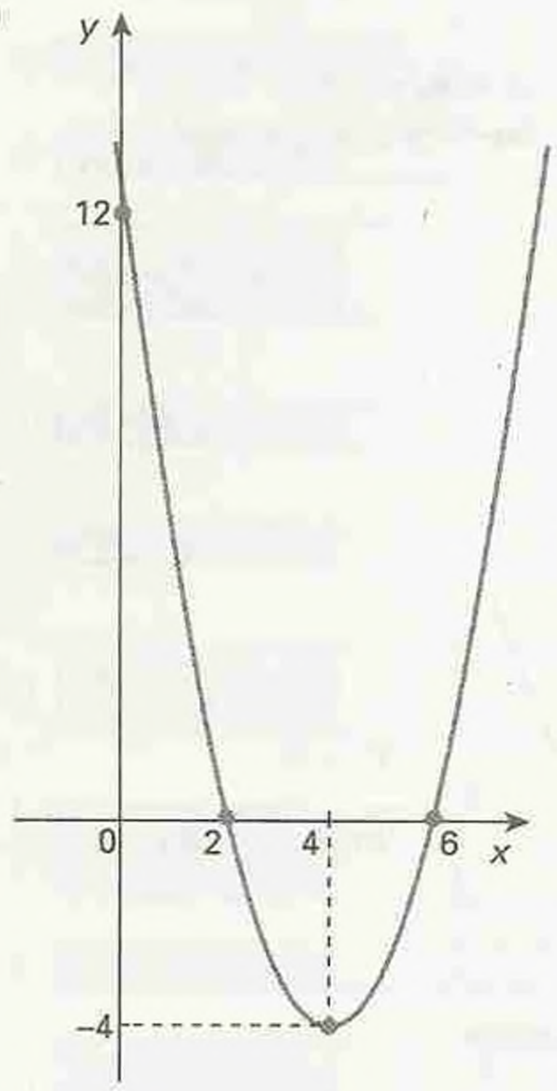


C.2 b. **C.3** a. **C.4** a) 5 min; b) 0 min $\leq x <$ 5 min; c) 5 min $< x \leq$ 6 min.
C.5 a) 27 de abril; b) de 1 a 26 de abril; c) de 28 a 30 de abril.
C.6 a) 15 de maio; b) durante os primeiros catorze dias de maio; c) durante os dezesseis dias que vão de 16 a 31 de maio. **C.7** e. **C.8** b.
C.9 a. **C.10** a.

Capítulo 15

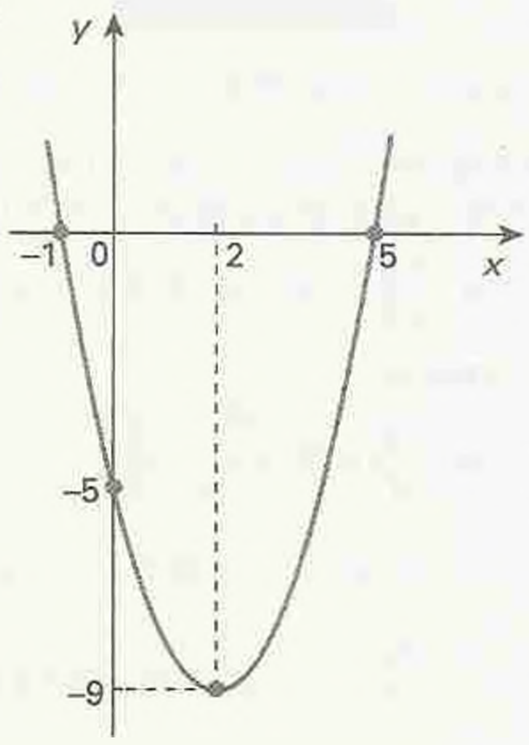
Exercícios básicos

B.1 a)



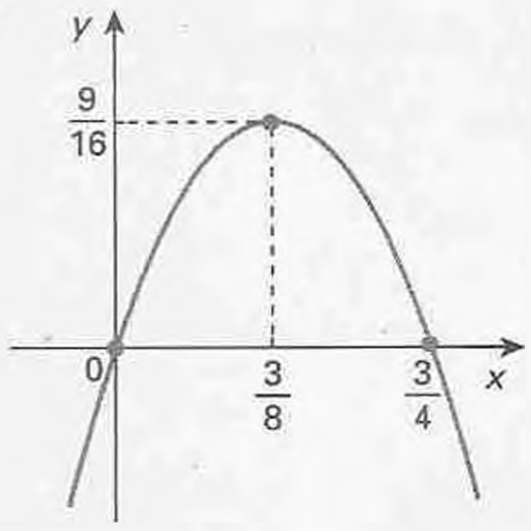
$D = \mathbb{R}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$.

b)



$D = \mathbb{R}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9\}$.

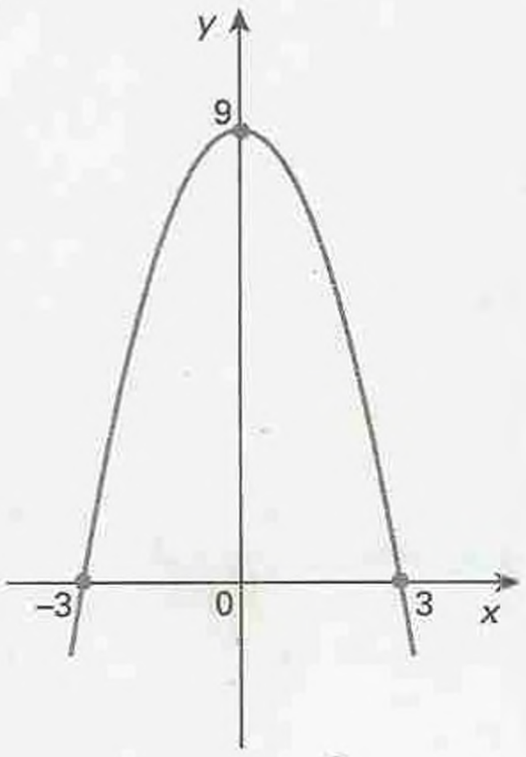
c)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \leqslant \frac{9}{16} \right\}$.

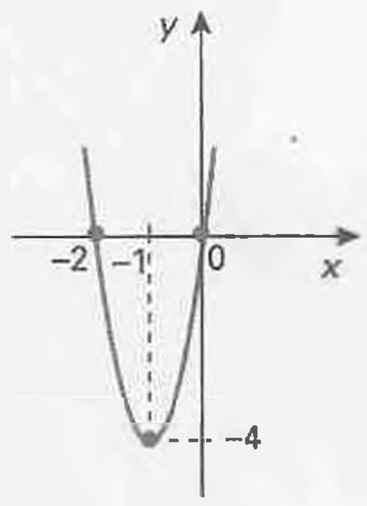
d)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \leqslant 9 \}$.

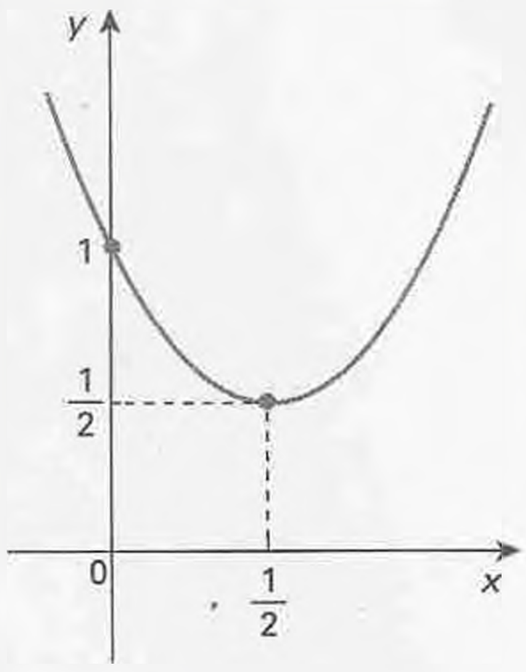
e)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \geqslant -4 \}$.

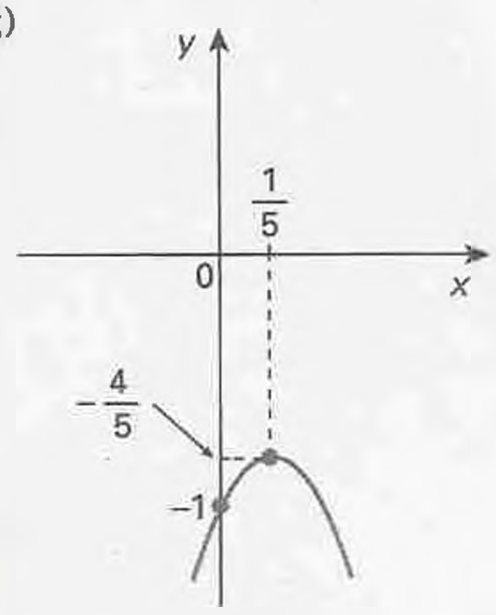
f)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \geqslant \frac{1}{2} \right\}$.

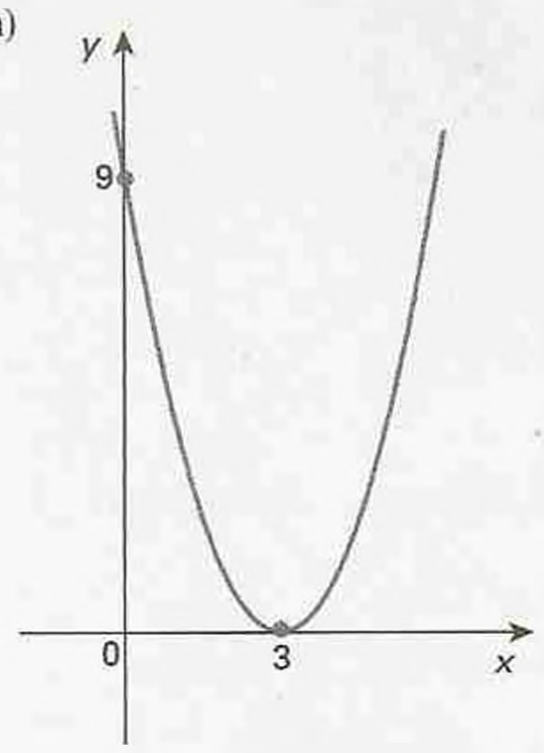
g)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \leqslant -\frac{4}{5} \right\}$.

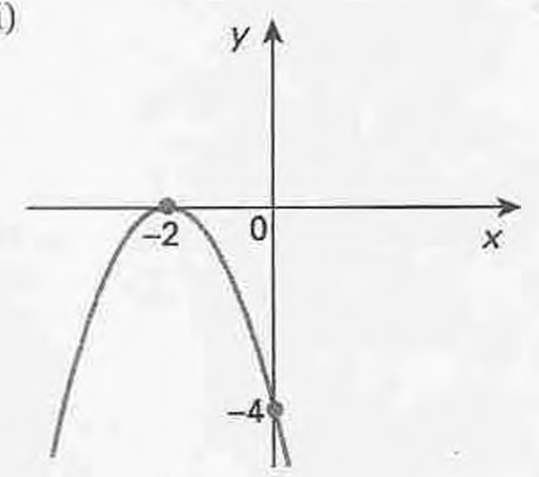
h)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \geqslant 0 \}$.

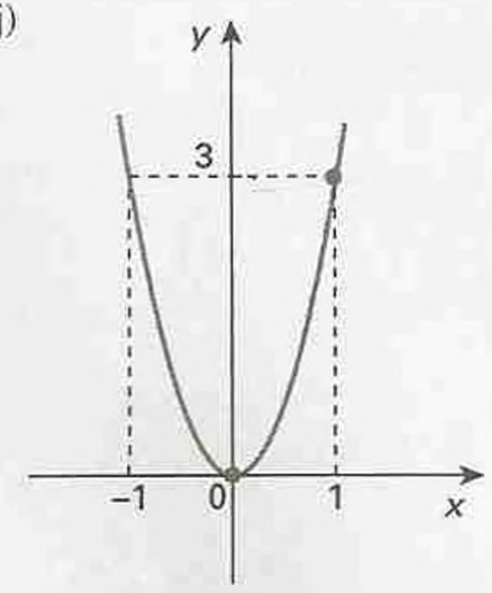
i)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \leqslant 0 \}$.

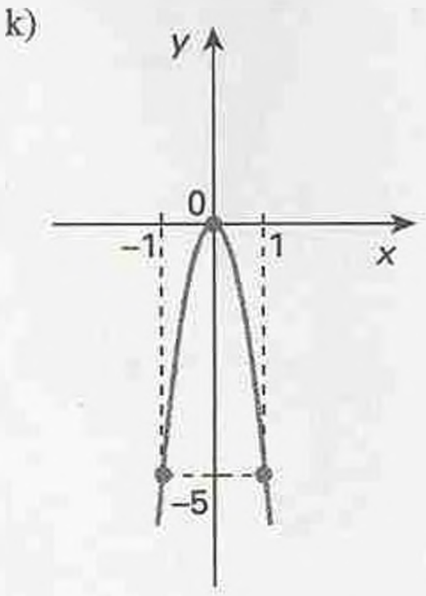
j)



$D = \mathbb{R}$;

$\text{Im} = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \geqslant 0 \}$.

k)



$D = \mathbb{R}$;

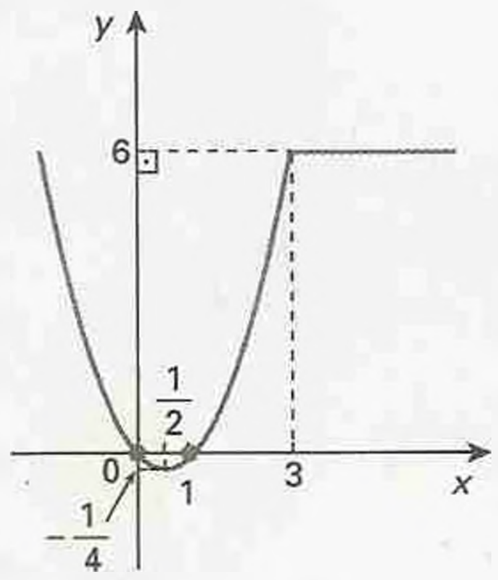
$\text{Im} = \{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \leqslant 0 \}$.

B.2 a) $a = 1, b = -2$ e $c = -3$; b) $\text{Im}(f) = [-4, +\infty[$. **B.3** $a = -\frac{1}{4}$, $b = 1$ e $c = 0$. **B.4** a) $a = 1$, $b = -2$ e $c = 2$; b) $f(4) = 10$.

B.5 $\forall m, m \in \mathbb{R} \,|\, m < \frac{9}{4}$ e $m \neq 0$. **B.6** $m = 2$.

B.7 $\forall m, m \in \mathbb{R} \,|\, m > 6$.

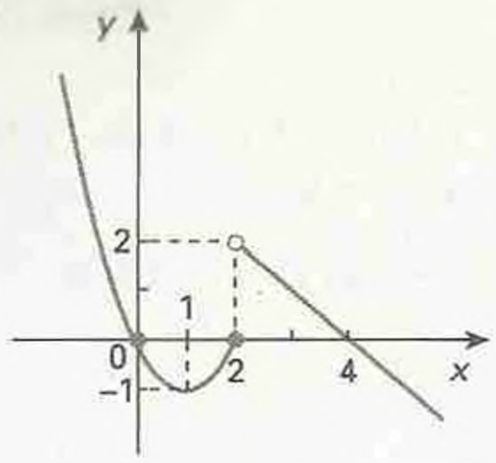
B.8 a)



$D = \mathbb{R}$;

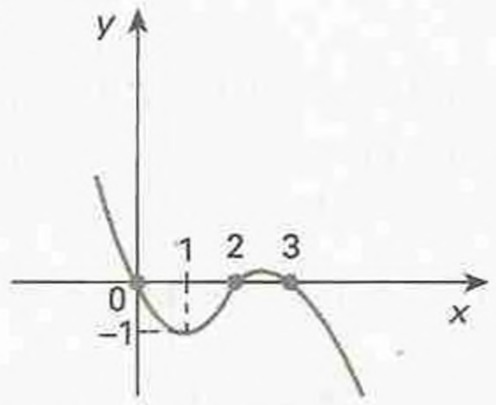
$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,|\, y \geqslant -\frac{1}{4} \right\}$.

b)



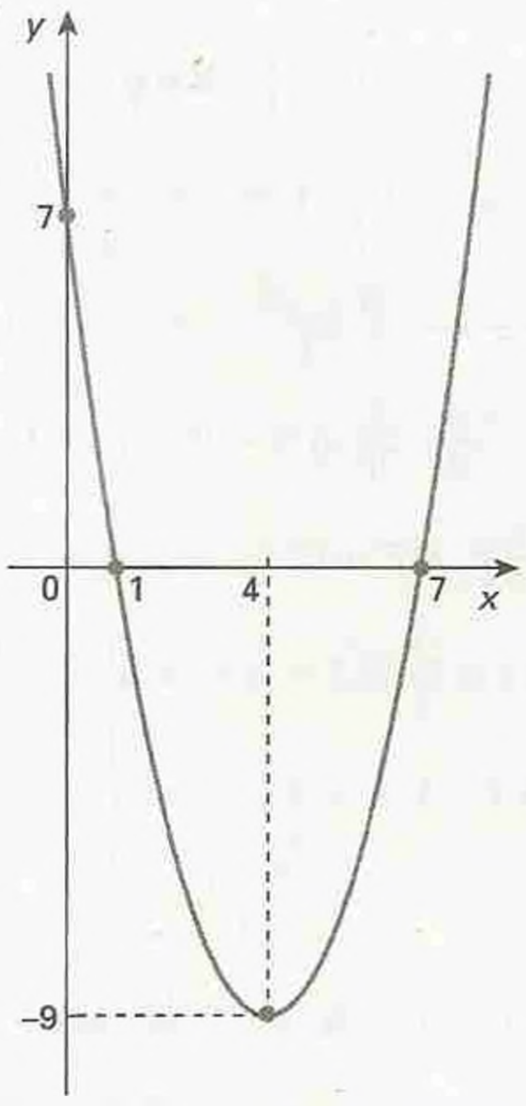
D = ℝ;
Im = ℝ.

c)



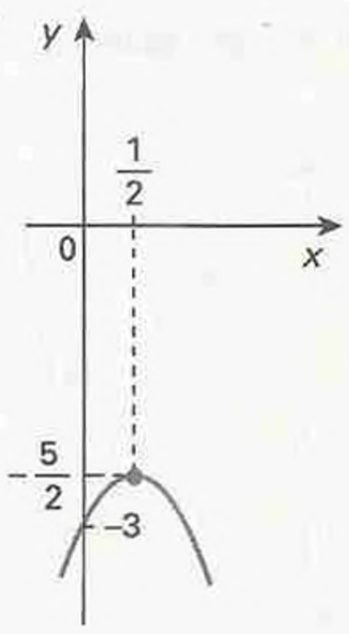
D = ℝ;
Im = ℝ.

B.9 a)



O mínimo da função é −9;
o ponto de mínimo é 4;

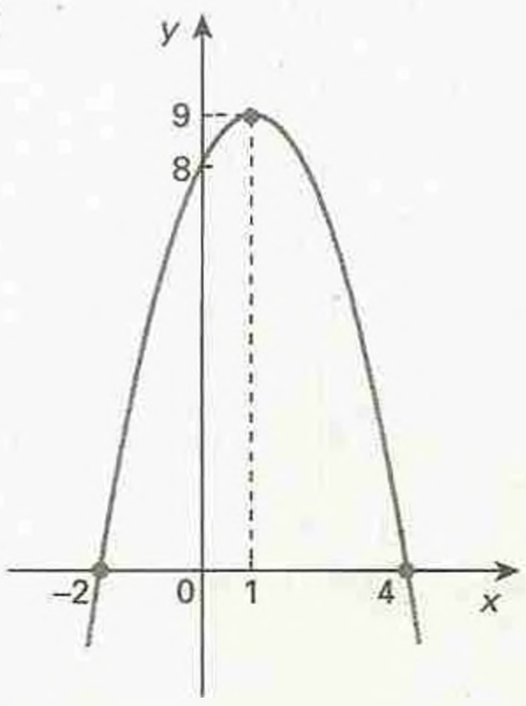
b)



O máximo da função é $-\frac{5}{2}$;

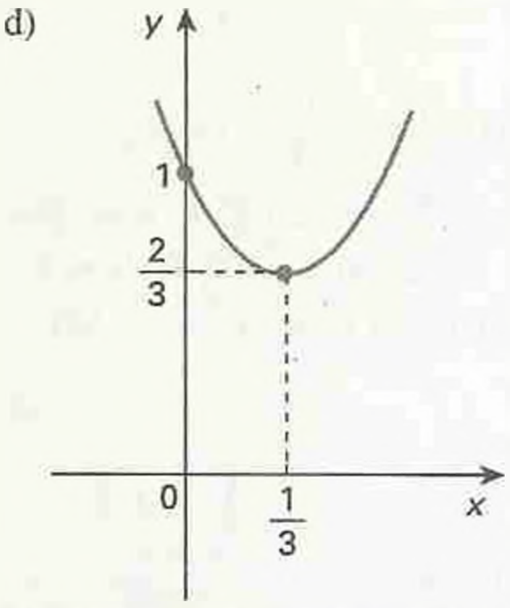
o ponto de máximo é $\frac{1}{2}$;

c)



O máximo da função é 9;
o ponto de máximo é 1;

d)



O mínimo da função é $\frac{2}{3}$;

o ponto de mínimo é $\frac{1}{3}$.

B.10 a) O mínimo da função é −8; o ponto de mínimo é 3; b) O máximo da função é 9; o ponto de máximo é 2; c) O mínimo da função é −9; o ponto de mínimo é 0; d) O máximo da função é 16; o ponto de máximo é 0; e) O mínimo da função é 0; o ponto de mínimo é 0; f) O mínimo da função é 3; o ponto de mínimo é 1; g) O máximo da função é $-\frac{11}{4}$; o ponto de máximo é $\frac{3}{2}$; h) O mínimo da função é $-\frac{81}{4}$; o ponto de mínimo é $-\frac{9}{2}$; i) O máximo de função é 4; o ponto de máximo é −2.

B.11 $m = -3$. **B.12** $m = -6$ ou $m = 2$. **B.13** A altura máxima atingida pela bala é de 500 m; a bala atinge a altura máxima em 5 s. **B. 14** a.

B.15 a)

$f(x) = x^2 - 5x + 4$	+	1 −	4 +

b)

$f(x) = -x^2 + x + 2$	−	−1 +	2 −

c)

$f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$	+	1 +

d)

$f(x) = -x^2 + 6x - 9$	−	3 −

e)

$f(x) = 3x^2 - x + 1$	+

f)

$f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x - \frac{4}{3}$	−

g)

$y = x^2 - 9x + 20$	+	4 −	5 +

h)

$f(x) = -x^2 + 5x - 6$	−	2 +	3 −

i)

$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$	+	1/2 +

j)

$f(x) = -3x^2 + 2x - \frac{1}{3}$	−	1/3 −

k)

$f(x) = 5x^2 - x + 1$	+

l)

$f(x) = -\frac{x^2}{3} + x - \frac{4}{3}$	−

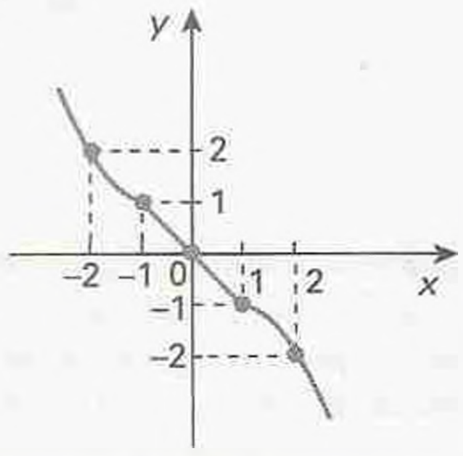
B.16 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 4\}$; b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{2}{3}\right\}$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$; d) $S = \varnothing$; e) $S = \{3\}$; f) $S = \mathbb{R}$; g) $S = \varnothing$; h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 5\}$; i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 2\}$; j) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{3}\right\}$; k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$; l) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$; m) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} < x < \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}\right\}$; n) $S = \mathbb{R}$; o) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$; p) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$; q) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 4\}$; r) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{11}{4} < x < 6\right\}$.

B.17 $\forall m, m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{25}{16}$. **B.18** $\forall m, m \in \mathbb{R} \mid m > -\frac{1}{2}$.

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** $\forall k, k \in \mathbb{R}^*$. **C.3** $\forall k, k \in \mathbb{R} \mid k > \frac{13}{8}$.

C.4 $y = 6x^2 + 9x + 1$. **C.5** $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 20\}$.
C.6 $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\}$. **C.7** $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$.
C.8 b. **C.9** a. **C.10** a) (4, 0) e (−2, 0); b) $\{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 16\}$.
C.11



D = ℝ;
Im = ℝ.

C.12 O máximo da função é 8. **C.13** A área máxima é 8 cm². **C.14** 112.5 m². **C.15** 43. **C.16** a) R$ 90.000,00: b) R$ 93.750,00. **C.17** 90 e 90. **C.18** b. **C.19** c. **C.20** c.
C.21 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}$; b) $D(f) = \mathbb{R}$; c) $D(f) = \{1\}$. d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2 \text{ ou } 6 < x \leq 8\}$. **C.22** e.

Capítulo 16

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 2 < x < 5\}$; b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 7\}$; c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$; d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4\}$; e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$; f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$; g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$; h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}$; i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$; j) $S = \emptyset$; k) $S = \{1, 3\}$; l) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq -\frac{1}{2} \text{ e } x \neq 2\right\}$.

B.2 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{5} \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 5\right\}$; b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 4 \leq x \leq 5\}$; c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ ou } x \geq 4\right\}$. **B.3** c. **B.4** a. **B.5** a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$; b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$; c) $S = \mathbb{R}$; d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$; e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > 5\right\}$; f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{5} \text{ ou } x > \frac{7}{2}\}$; g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$; h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } 3 < x \leq 4 \text{ ou } x > 5\}$; i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 6\}$; j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$; k) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$:
l) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -9 \text{ ou } 0 < x < \frac{3}{2}\right\}$.

B.6 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right\}$; b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{5} < x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{4}{5}\right\}$; c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \text{ ou } x > \frac{1}{6}\right\}$; d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 8\}$; e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ ou } \frac{3}{2} < x \leq 3\right\}$; f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$; g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 - \sqrt{3} \text{ ou } 0 < x \leq -1 + \sqrt{3}\}$.

B.7 a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x \leq 3\right\}$; b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$; c) $D(f) = \mathbb{R}$.

Exercícios complementares

C.1 $x = 2$. **C.2** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } 1 < x < 2\}$.
C.3 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$. **C.4** a) $x > 3$; b) $x = 4\}$. **C.5** b.
C.6 $\forall x, x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 5$. **C.7** $x = 0$.
C.8 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 1\right\}$. **C.9** b.

Capítulo 17

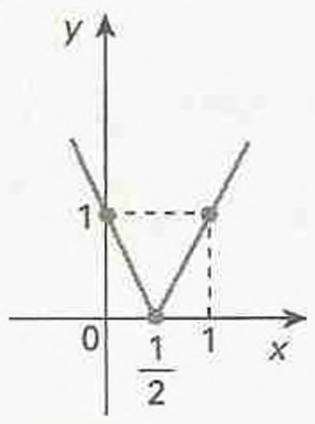
Exercícios básicos

B.1 a) V; b) V; c) V; d) F; e) V; f) V; g) V; h) V; i) F; j) V. **B.2** a) $\sqrt{3}$; b) 2, 4; c)1; d) 0,01. **B.3** a) F; b) V; c) F; d) V; e) V; f) F; g) V; h) V; i) V; j) V; k) F; l) V; m) V; n) F. **B.4** a) $S = \{11, 5\}$: b) $S = \{4, -3\}$; c) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$; d) $S = \{1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$; e) $S = \{6, -1, 2, 3\}$; f) $S = \{0, 2\}$; g) $S = \left\{0, \frac{3}{4}\right\}$. **B.5** a) $S = \{4, -4\}$; b) $S = \{1, -1, 4, -4\}$; c) $S = \emptyset$; d) $S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, 1, -1\right\}$. **B.6** a) $S = \{2, -2\}$; b) $S = \left\{0, \frac{2}{5}\right\}$; c) $S = \{0, 2, 4\}$; d) $S = \{-1, 1, 5\}$; e) $S = \left\{-\frac{3}{7}, \frac{5}{9}\right\}$; f) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; g) $S = \left\{1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$; h) $S = \{-1, 0, 3\}$.

B.7 a) $S = \left\{1, \frac{13}{3}\right\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$; c) $S = \{0, 2\}$; d) $S = \{3\}$; e) $S = \{1, 17\}$; f) $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$; g) $S = \{0, 9\}$; h) $S = \{5\}$.

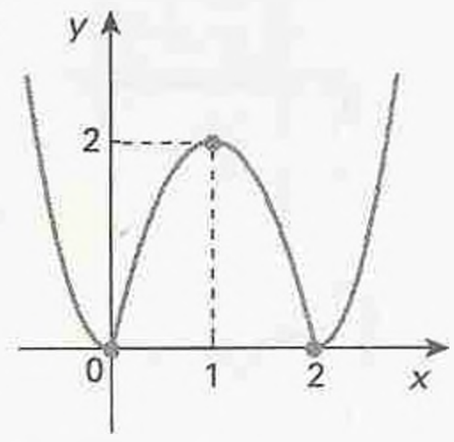
B.8 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{16}{3} \leq x \leq 2\right\}$; b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{15}{4} \text{ ou } x > \frac{9}{4}\right\}$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq -1 \text{ ou } 1 \leq x \leq 3\}$; d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 1 < x < \frac{3}{2}\right\}$; e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 6\}$; f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{22}{3} \text{ ou } x > \frac{26}{3}\right\}$; g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ ou } x \geq 2\}$; h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$. **B.9** c. **B.10** A maior medida possível é 5,008 cm, e a menor é 4,992 cm.

B.11 a)



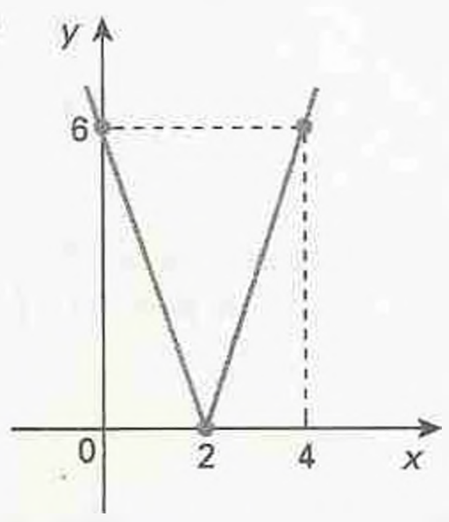
D = ℝ;
Im = [0, +∞[.

c)



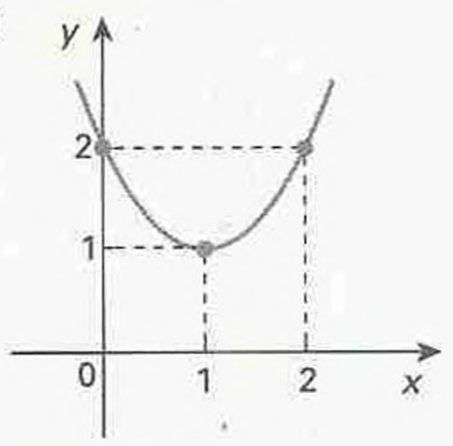
D = ℝ;
Im = [0, +∞[.

b)



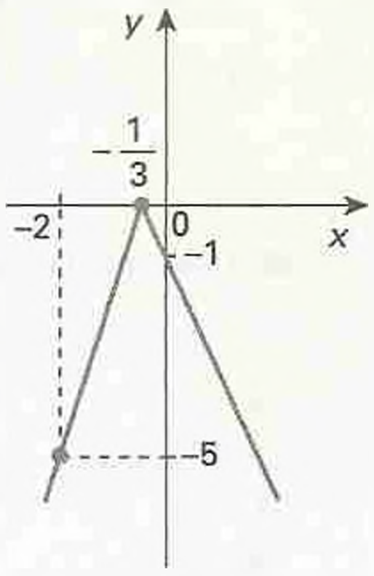
D = ℝ;
Im = [0, +∞[.

d)



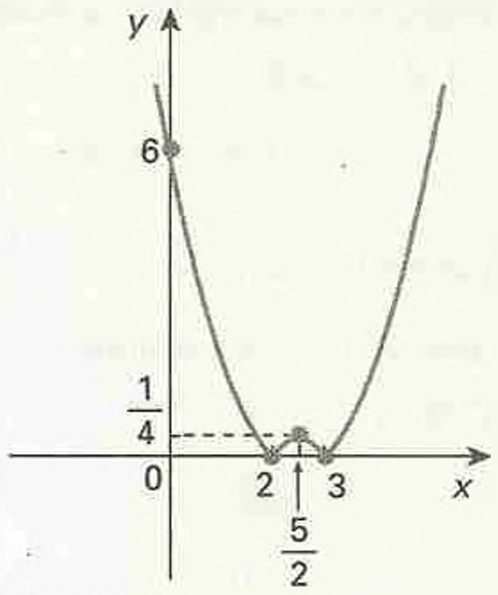
D = ℝ;
Im = [1, +∞[.

e)



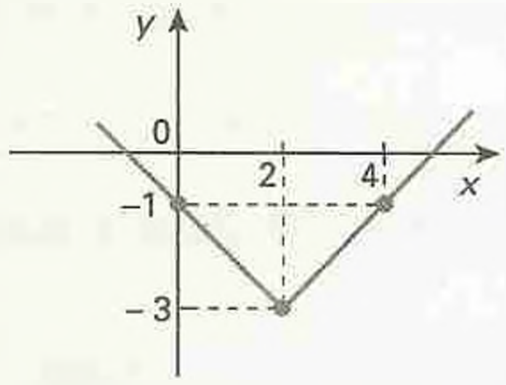
D = ℝ;
Im = $]-\infty, 0]$.

i)



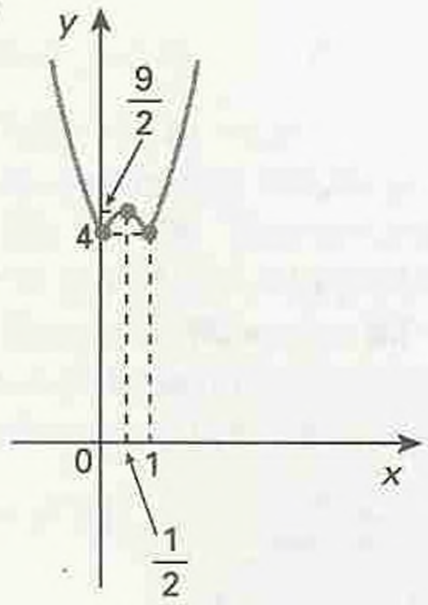
D = ℝ;
Im = $[0, +\infty[$.

b)



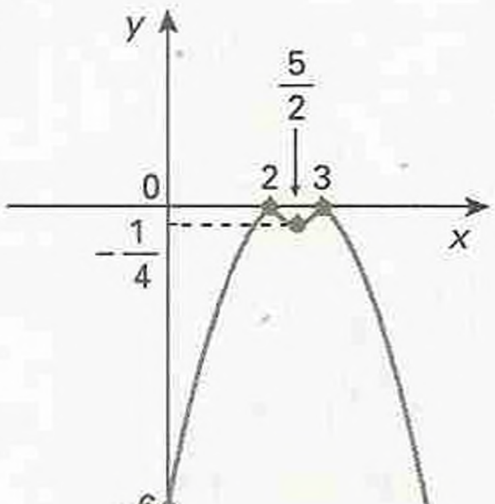
D = ℝ;
Im = $[-3, +\infty[$.

c)



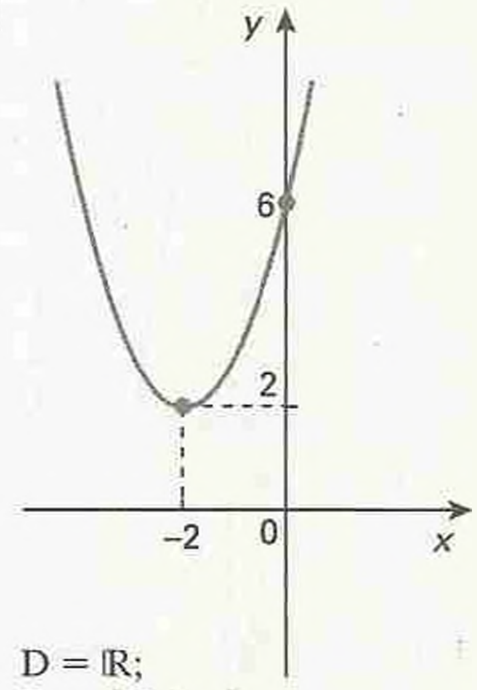
D = ℝ;
Im = $[4, +\infty[$.

f)



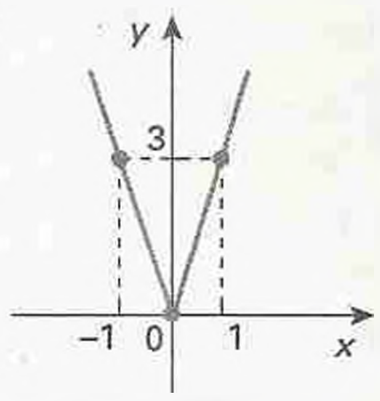
D = ℝ;
Im = $]-\infty, 0]$.

j)



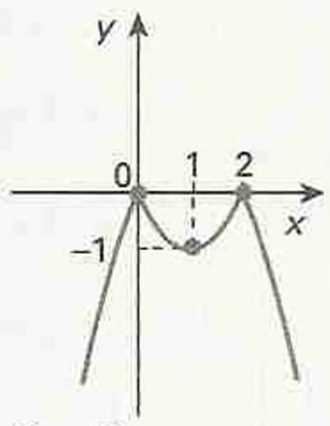
D = ℝ;
Im = $[2, +\infty[$.

g)



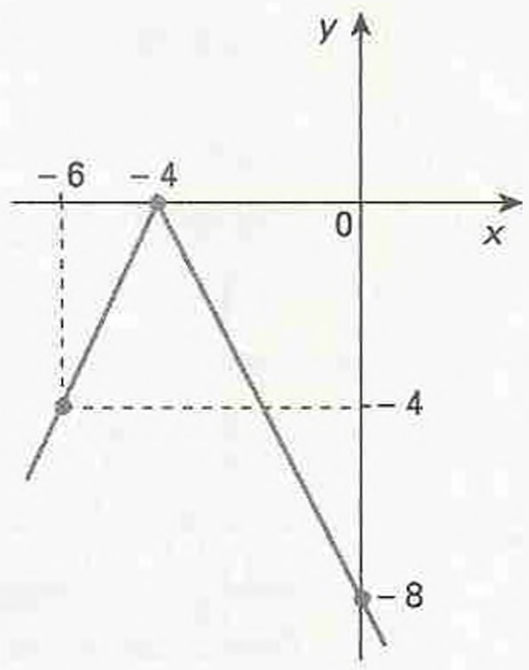
D = ℝ;
Im = $[0, +\infty[$.

k)



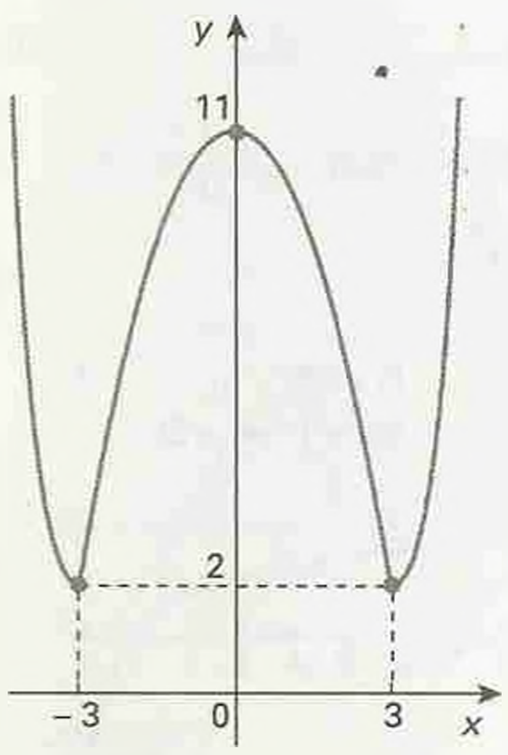
D = ℝ;
Im = $]-\infty, 0]$.

h)



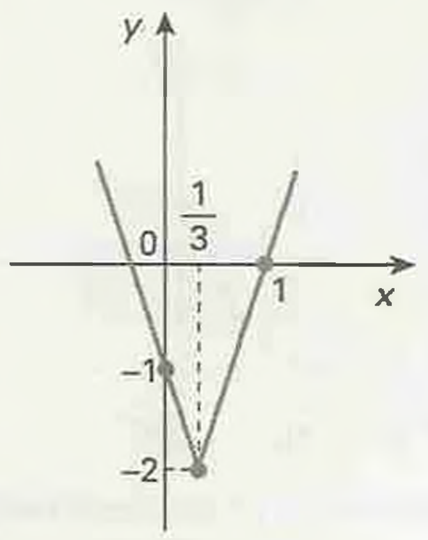
D = ℝ;
Im = $]-\infty, 0]$.

d)



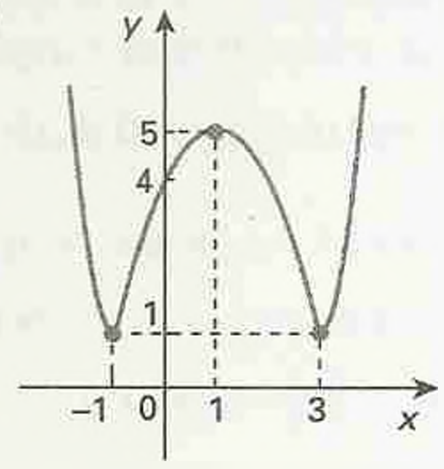
D = ℝ;
Im = $[2, +\infty[$.

e)



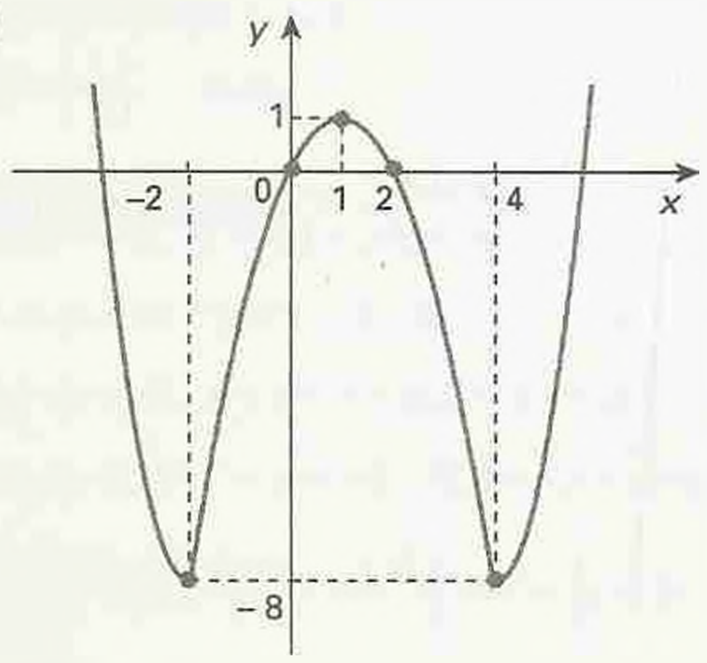
D = ℝ;
Im = $[-2, +\infty[$.

f)



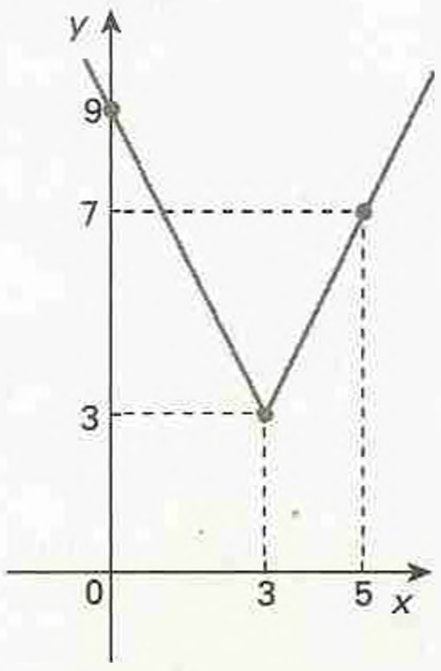
D = ℝ;
Im = $[1, +\infty[$.

g)



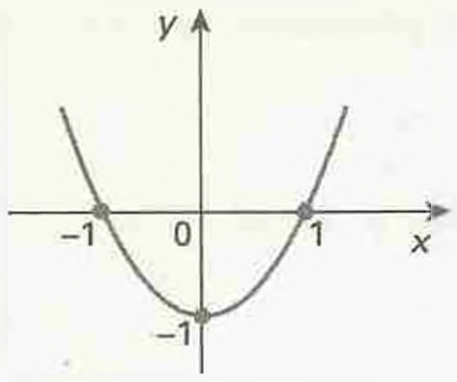
D = ℝ;
Im = $[-8, +\infty[$.

B.12 a)



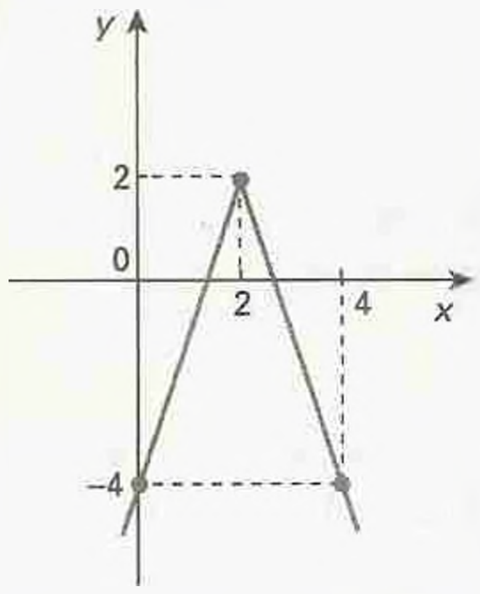
D = ℝ;
Im = $[3, +\infty[$.

h)



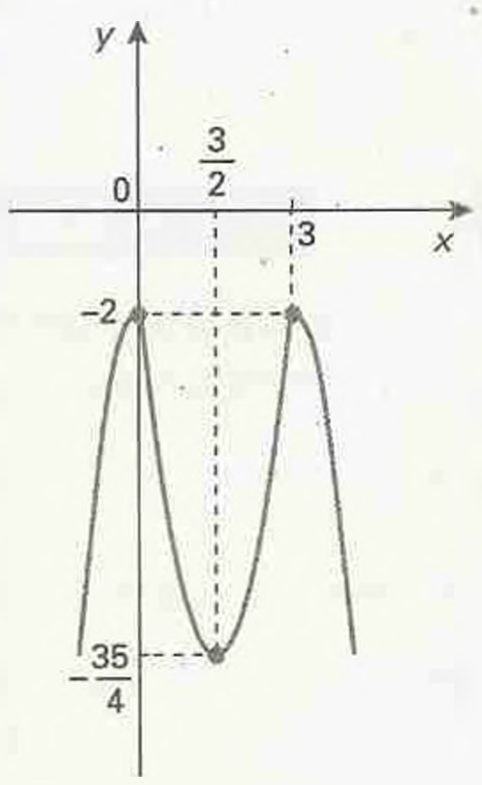
D = ℝ;
Im = [−1, +∞[.

B.13 a)



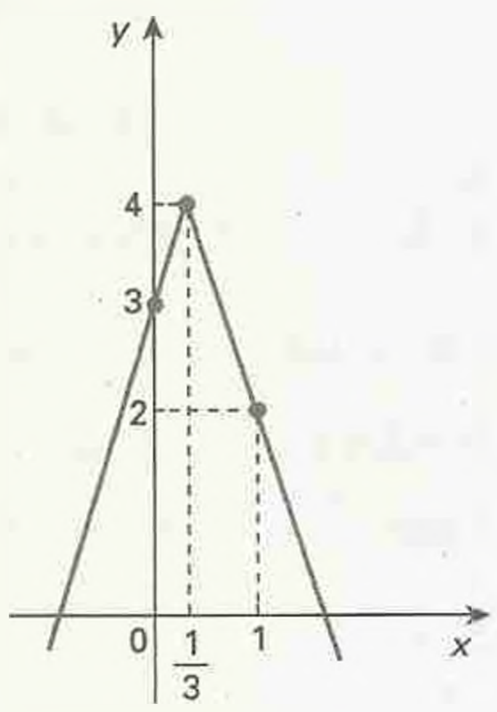
D = ℝ;
Im =]−∞, 2].

b)



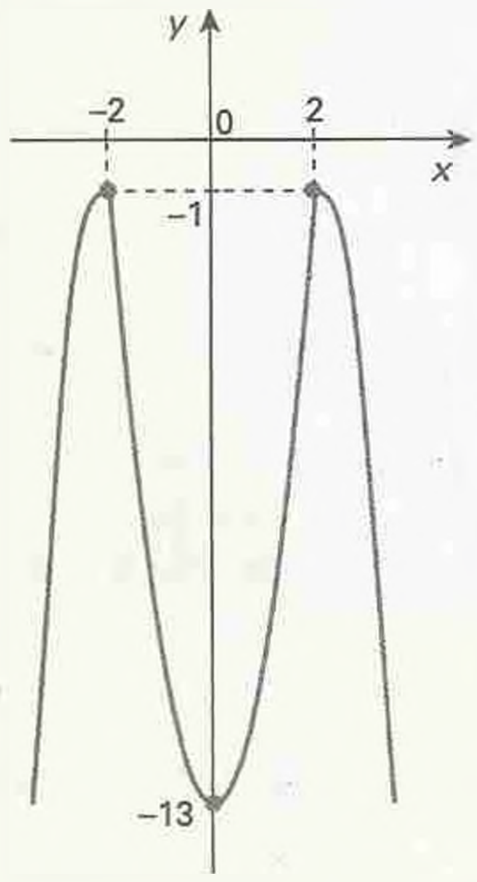
D = ℝ;
Im =]−∞, −2].

c)



D = ℝ;
Im =]−∞, 4].

d)



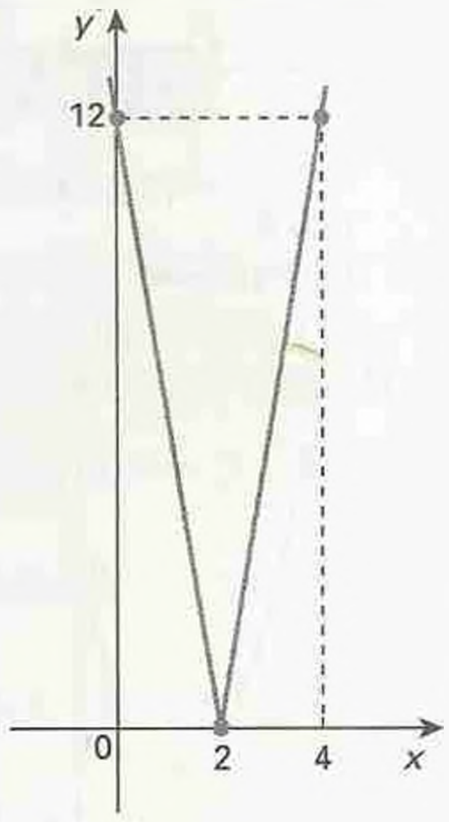
D = ℝ;
Im =]∞, −1].

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** b. **C.3** c. **C.4** a) $x = 4$ ou $x = -1$; b) $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$. **C.5** a. **C.6** d. **C.7** c.

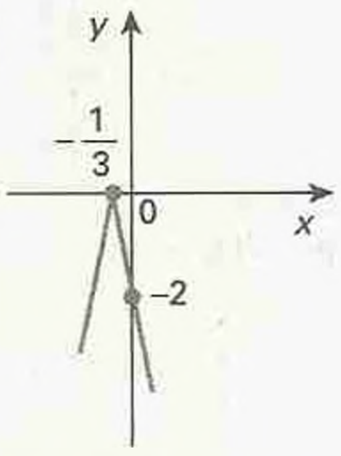
C.8 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x < \frac{11}{3}\right\}$. **C.9** a. **C.10** A temperatura máxima foi 10 °C e a mínima, 2 °C.

C.11 a)



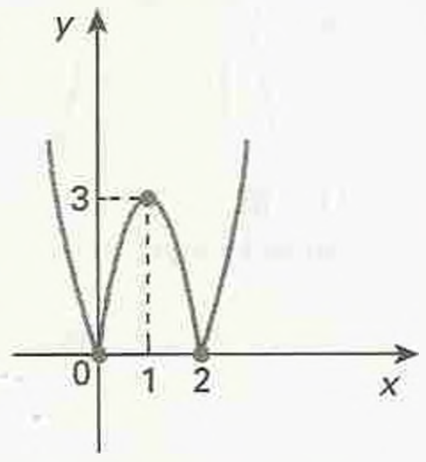
D = ℝ;
Im = [0, +∞[.

b)



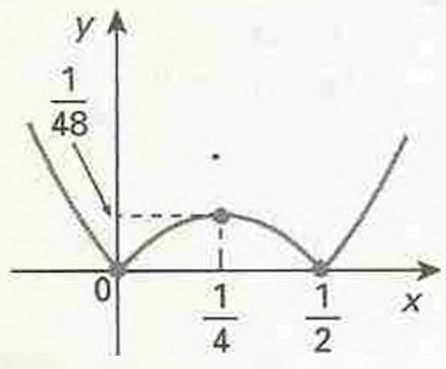
D = ℝ;
Im =]−∞, 0].

c)



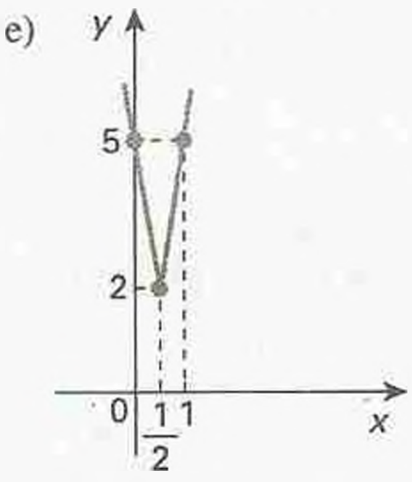
D = ℝ;
Im = [0, +∞[.

d)



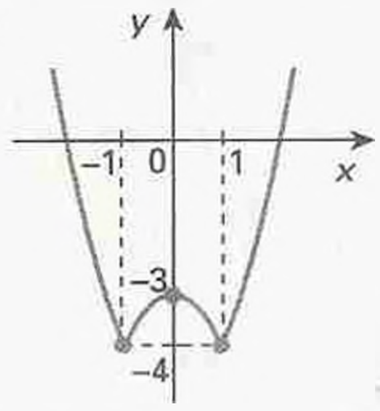
D = ℝ;
Im = [0, +∞[.

e)



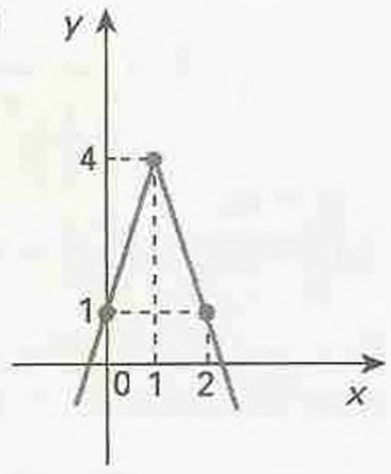
D = ℝ;
Im = [2, +∞[.

f)



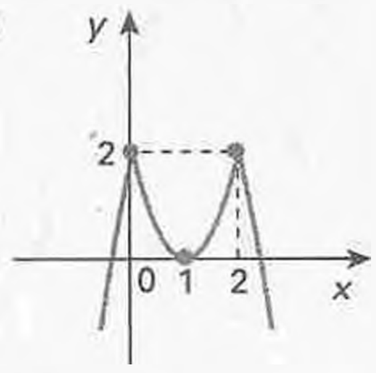
D = ℝ;
Im = [−4, +∞[.

g)



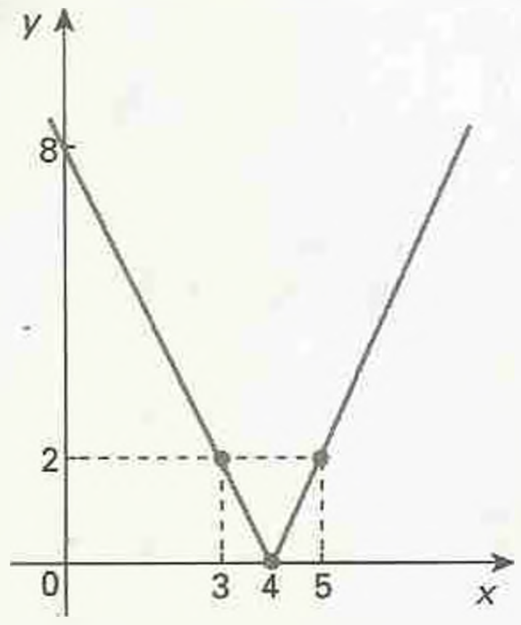
D = ℝ;
Im =]−∞, 4].

h)



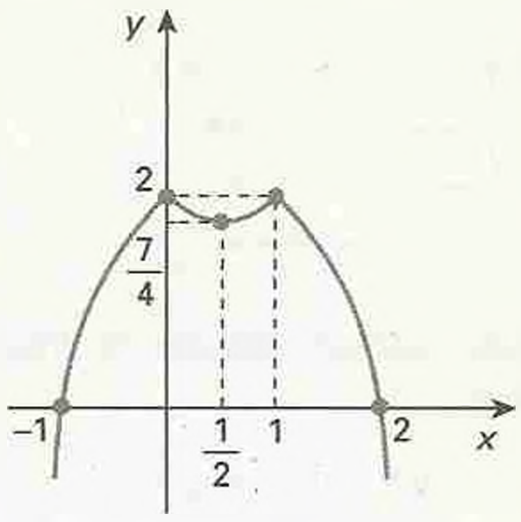
D = ℝ;
Im =]−∞, 2].

C.12



$f(x) \leqslant 2 \Leftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 5$

C.13



Capítulo 18

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$; b) $S = \{-11\}$; c) $S = \left\{-\frac{5}{11}\right\}$; d) $S = \{0\}$; e) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; f) $S = \{0\}$; g) $S = \{10\}$; h) $S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$; i) $S = \{3\}$; j) $S = \{2, 8\}$; k) $S = \{0\}$; l) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.2** a) $S = \{3\}$; b) $S = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$; c) $S = \{3\}$; d) $\left\{-\frac{5}{3}\right\}$; e) $S = \left\{-\frac{23}{25}\right\}$; f) $S = \{2, -2\}$; g) $S = \{0, 2\}$; h) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; i) $S = \left\{\frac{5}{8}\right\}$; j) $S = \left\{\frac{7}{6}\right\}$; k) $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$; l) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$; m) $S = \left\{\frac{6}{17}\right\}$. **B.3** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{2\}$; c) $S = \{3\}$; d) $S = \{2\}$; e) $S = \{4\}$; **B.4** a) $S = \{1, 2\}$; b) $S = \{1, 2\}$; c) $S = \{2\}$; d) $S = \{0, 1\}$; e) $S = \{-1, 1\}$; f) $S = \{2\}$; g) $S = \{2\}$; h) $S = \{3\}$; i) $S = \{1\}$. **B.5** a.

B.6 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{19}{6}\right\}$; b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$; d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{5}{6}\right\}$; e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{4}{3}\right\}$; f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{3}\right\}$; g) $S = \mathbb{R}$; h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$; i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{9}\right\}$; j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$; k) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{4}\right\}$; l) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$. **B.7** b.

B.8 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{4}\right\}$; b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

B.9 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$; b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 5\}$.

Exercícios complementares

C.1 e. **C.2** d. **C.3** $S = \varnothing$. **C.4** 98% aproximadamente. **C.5** b. **C.6** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

Capítulo 19

Exercícios básicos

B.1 a) 2; b) 3; c) $\frac{10}{7}$; d) -2; e) $\frac{4}{5}$; f) 4; g) 1; h) 0; i) 5; j) $\frac{1}{2}$; k) $\frac{8}{3}$; l) $\frac{1}{5}$; m) $\frac{7}{5}$; n) -2; o) -3; p) 2; q) $\frac{3}{4}$; r) 4. **B.2** d.

B.3 a) 25; b) 6; c) $\frac{1}{8}$; d) 1; e) 125; f) 3; g) $\frac{1}{100}$; h) $\frac{1}{2}$; i) 5.

B.4 54. **B.5** 12. **B.6** 3. **B.7** $\frac{10}{3}$. **B.8** 5. **B.9** 9. **B.10** 9.

B.11 75. **B.12** 2. **B.13** a) $\log_b \frac{1}{a} = \log_b a^{-1} = -\log_b a$. (L.3)

b) Fazendo $\log_a b = x$, temos que $a^x = b$; elevando ambos os membros dessa última igualdade a $\frac{1}{x}$, temos $(a^x)^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{x}} \Rightarrow a = b^{\frac{1}{x}}$; por definição de logaritmo, podemos escrever $\frac{1}{x} = \log_b a$, mas $x = \log_a b$; logo, $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$ (c.q.d.). **B.14** a) $-m$; b) $\frac{1}{m}$; c) $-\frac{1}{m}$.

B.15 a) $-m^2$; b) -1. **B.16** a) -3; b) $-\frac{5}{4}$; c) 3.

B.17 a) 1,11; b) $-0,25$; c) 0,25; d) 0,63 (aproximadamente); e) 1,58 (aproximadamente); f) 1,29; g) 1,97; h) 0,07; i) 0,34 (aproximadamente); j) 1,03; k) 3,08. **B.18** a) 1,16; b) 1,85; c) $-0,22$; d) 0,72; e) 1,47; f) 0,78; g) 1,25; h) 0,19 (aproximadamente); i) 1,46 (aproximadamente); j) 2,20 (aproximadamente); k) $-0,17$ (aproximadamente). **B.19** a) 0,79 (aproximadamente); b) 0,44 (aproximadamente). **B.20** a) 0,43 (aproximadamente); b) 0,30 (aproximadamente); c) 0,69 (aproximadamente).

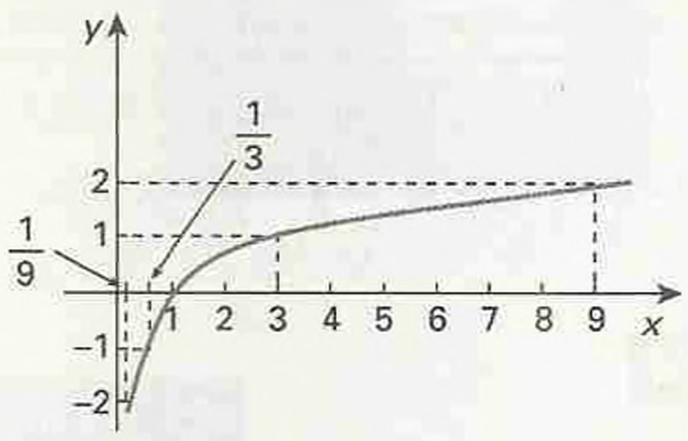
B.21 a) $\log_{b^\alpha} a = \frac{\log_b a}{\log_b b^\alpha} = \frac{\log_b a}{\alpha \log_b b} = \frac{\log_b a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\log_b a$ (L.8, L.3)

(c.q.d.). **B.22** $x = 2$. **B.23** $x = 3$. **B.24** $m + n$. **B.25** $-\frac{3}{2}$.

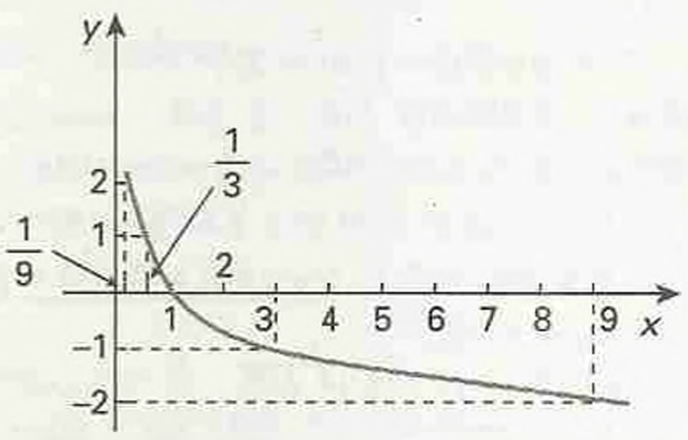
B.26 $-6,8$. **B.27** $\frac{2+k}{k}$. **B.28** $\frac{1+2n}{n}$. **B.29** $1 - a$.

B.30 $\frac{1+m}{2}$.

B.31 a)



b)



B.32 a) crescente; b) decrescente; c) crescente; d) decrescente.

B.33 a) V; b) V; c) F; d) V; e) V. **B.34** a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$; b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 3\}$; c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$; d) $D(t) = \mathbb{R}^*$; e) $D(h) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{6} \text{ e } x \neq 1\right\}$; f) $D(t) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } x \neq \frac{5}{2}\right\}$. **B.35** b. **B.36** a) $S = \{15\}$; b) $S = \{3\}$; c) $S = \{6\}$; d) $S = \{6, 4\}$; e) $S = \{2\}$; f) $S = \{8, 5\}$; g) $S = \{5, 3\}$; h) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.37** a) $S = \{-4, 2\}$; b) $S = \{6\}$; c) $S = \{32\}$; d) $S = \{2\}$; e) $S = \{3, 5\}$; f) $S = \{1, 9\}$; g) $S = \{2\}$; h) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.38** $x = 4$ e $y = 2$. **B.39** 9. **B.40** a. **B.41** b.

B.42 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{33}{2}\right\}$; b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 6\}$; d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} < x \leqslant \frac{6}{7}\right\}$; e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$; f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$; g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 9\}$. **B.43** a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{5}{4}\right\}$; b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{39}{8} < x < 5\right\}$; c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{8}{5} \leqslant x < \frac{7}{2}\right\}$;

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < 1\right\}$; e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8\}$;

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$. **B.44** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 2\}$;
b) $S = \varnothing$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$; d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Exercícios complementares

C.1 $\frac{M_1}{M_2} = 100$ ou $\frac{M_2}{M_1} = \frac{1}{100}$. **C.2** b. **C.3** 4. **C.4** 0,903.

C.5 b. **C.6** $b = \frac{3^c}{a}$. **C.7** 0,857. **C.8** 7,33 (aproximadamente).

C.9 6 meses. **C.10** e. **C.11** e. **C.12** b. **C.13** a.

C.14 a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$;

b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}$.
C.15 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$. **C.16** b. **C.17** e. **C.18** $S = \varnothing$.

C.19 d. **C.20** a)

	Preço do litro da gasolina em contos
1º de janeiro de 2000	1
1º de janeiro de 2001	1,25
1º de janeiro de 2002	$(1,25)^2$
1º de janeiro de 2003	$(1,25)^3$
1º de janeiro de 2004	$(1,25)^4$
1º de janeiro do ano $2000 + k$	$(1,25)^k$

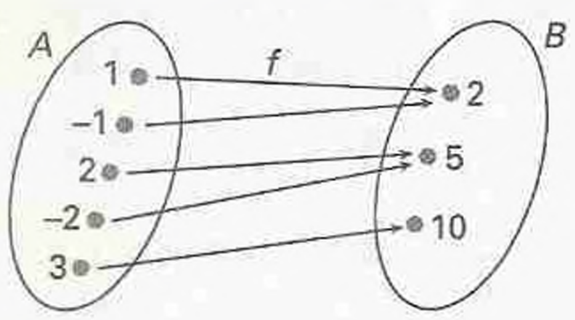
b) 2010. **C.21** a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 9\}$; b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3$ ou $x > 5\}$. **C.22** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} \leq x < 10\right\}$. **C.23** a.

Capítulo 20

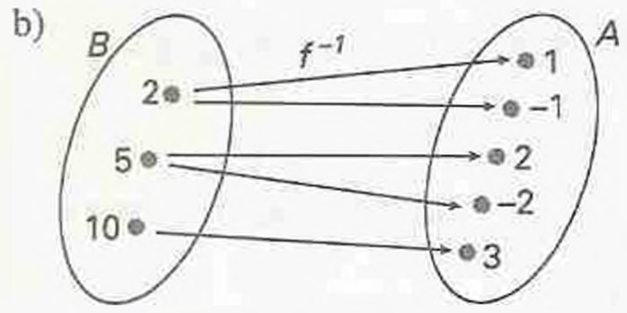
Exercícios básicos

B.1 e. **B.2** a) $(g \circ f)(5) = g(f(5)) = g(6) = 20$;
b) $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(17) = 18$;
c) $(g \circ f)x = g(f(x)) = g(x + 1) = 3(x + 1) + 2 = 3x + 5$;
d) $(f \circ g)x = f(g(x)) = f(3x + 2) = 3x + 2 + 1 = 3x + 3$.
B.3 a) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(8) = 2$; b) $(f \circ g)(1) = f(g(1) = f(1) = 8$;
c) $(f \circ g)(-8) = f(g(-8)) = f(-2) = -1$;
d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + 7) = \sqrt[3]{x^3 + 7}$;
e) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = x + 7$. **B.4** d.

B.5 a)

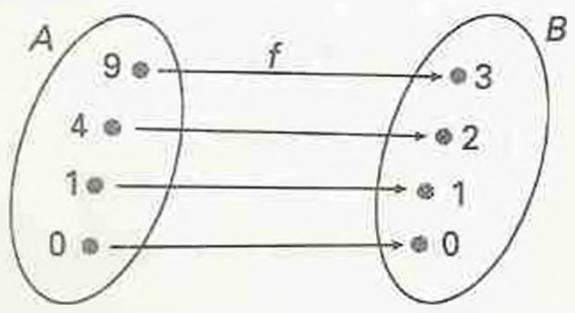


b)

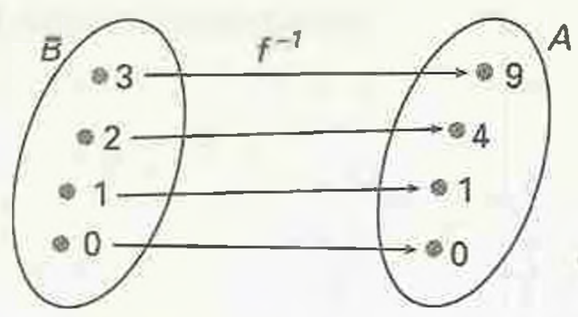


c) f^{-1} **não é função**, pois existe elemento do domínio de f^{-1} com mais de uma imagem.

B.6 a)



b)



c) f^{-1} **é função**, pois todo elemento do domínio de f^{-1} possui uma única imagem.

B.7 a) $y = \frac{x + 5}{3}$; b) $f^{-1}(x) = \frac{x - 4}{8}$; c) $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$;

d) $g^{-1}(x) = \frac{8x + 2}{5 - x}$. **B.8** $f^{-1}(x) = 5^x$.

B.9 a) $f^{-1}(x) = -2 + \log_3 x$; b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(2 + \log_5 x)$. **B.10** c.

Exercícios complementares

C.1 $k = -1$. **C.2** a) $f(20) = 35$; b) $f(x) = 2x - 5$. **C.3** c. **C.4** b.
C.5 a. **C.6** $\text{Im}(f^{-1}) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0 \text{ e } y \neq 1 \text{ e } y \neq -1\}$. **C.7** d.

Capítulo 21

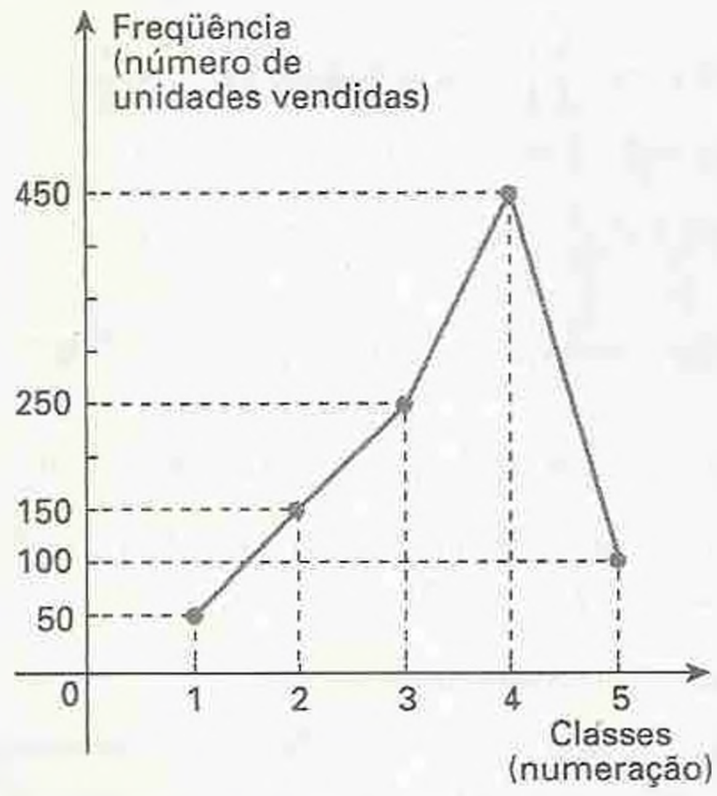
Exercícios básicos

B.1 Uma distribuição possível é:

Classe (em metros)	F	$F\%$
[1,69; 1,76[	3	18,75%
[1,76; 1,83[	5	31,25%
[1,83; 1,92[	5	31,25%
[1,92; 1,93]	3	18,75%

$F_t = \sum F = 16$

B.2 *Gráfico de linha:*



Nota. Também é correto colocar as classes no eixo vertical e as freqüências no eixo horizontal.

Gráfico de barras verticais:

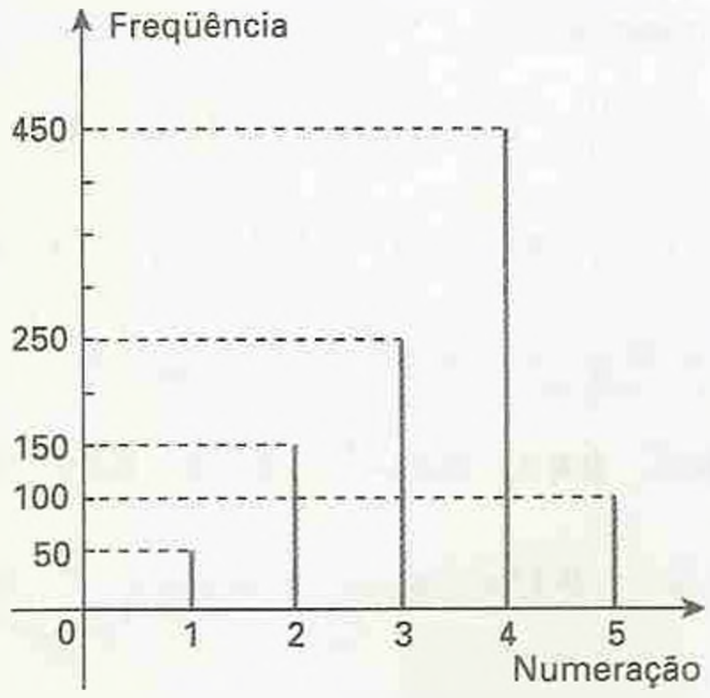


Gráfico de barras horizontais:

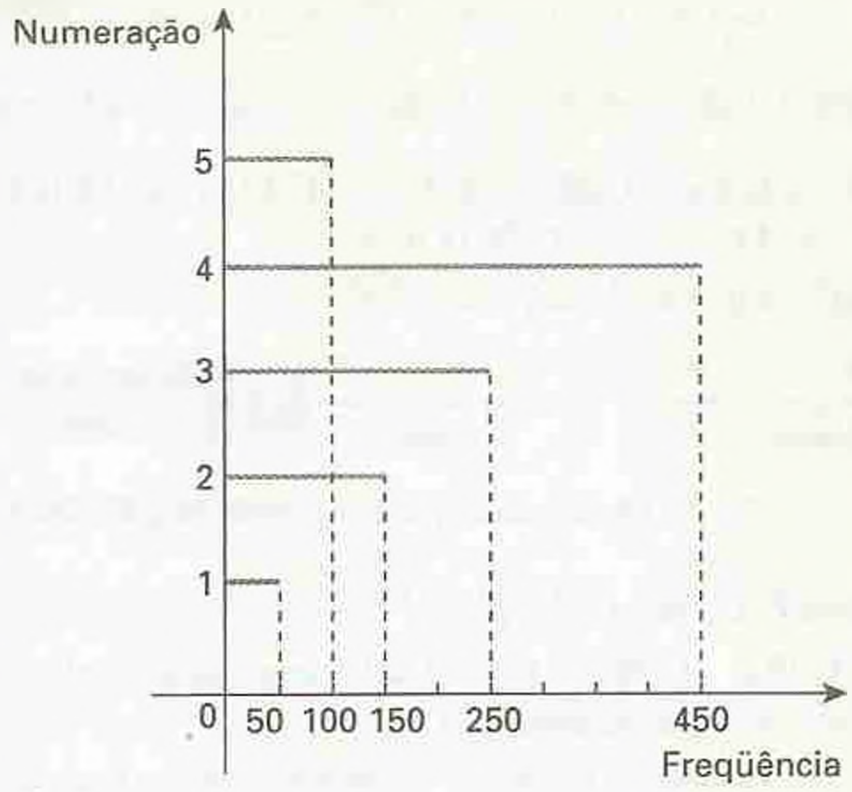
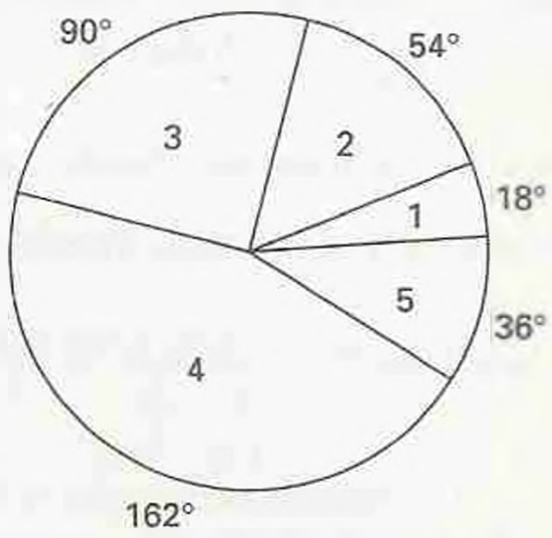


Gráfico de setores:



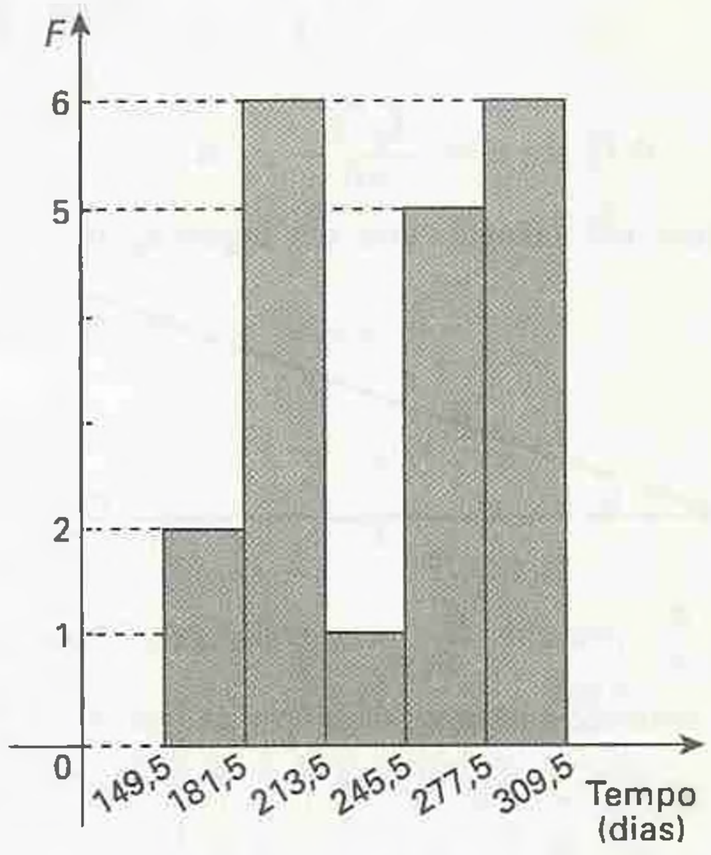
B.3 d. **B.4** I) d; II) a.

B.5 a) 7 alunos; b) 20 alunos; c) 25%.

B.6 a) 700 garrafas; b) aproximadamente 57,14%.

B.7

Classe (tempo, em dias)	*F*
[149,5; 181,5[	2
[181,5; 213,5[	6
[213,5; 245,5[	1
[245,5; 277,5[	5
[277,5; 309,5]	6



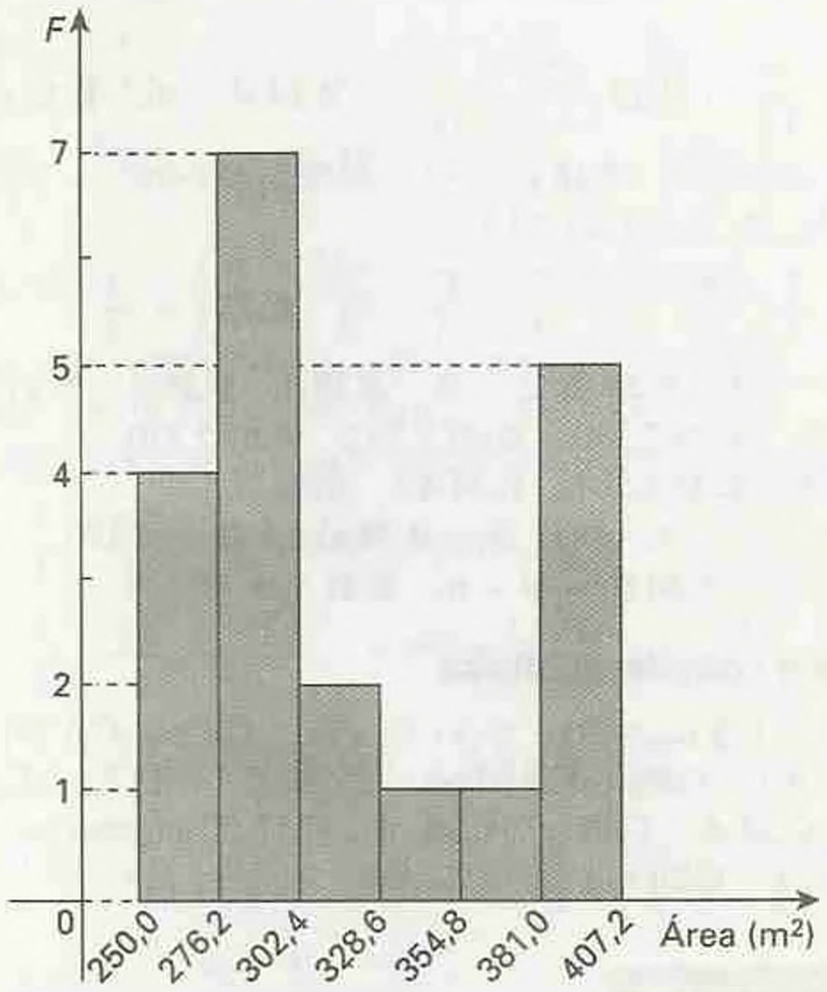
Nota. Os extremos de classe não precisam, necessariamente, pertencer à amostra.

Exercícios complementares

C.1 b. **C.2** d. **C.3** d. **C.4** d.

C.5

Classe (área, em metros quadrados)	*F*
[250,0; 276,2[	4
[276,2; 302,4[	7
[302,4; 328,6[	2
[328,6; 354,8[	1
[354,8; 381,0[	1
[381,0; 407,2]	5



Capítulo 22

Exercícios básicos

B.1 20,2 anos. **B.2** 8. **B.3** R$ 710,00. **B.4** 6,48. **B.5** a) 31; b) aproximadamente 5,7. **B.6** a) 5.120 candidatos; b) não, pois a nota média, nessa questão, é $\bar{x}$ tal que:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 20 + 2 \cdot 32 + 3 \cdot 16 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 10 + 0 \cdot 10}{100} = 2{,}30$$

e, portanto, $\bar{x} > 2$. **B.7** a) $Mo = 2$; b) $Md = 2$. **B.8** 16,325 *t*. **B.9** a) Média = R$ 2.000,00 e mediana = R$ 1.500,00; b) a variância da nova distribuição ficará menor. **B.10** a) Média de *x*: $\bar{x} = 26$. Média de *y*: $\bar{y} = 26$; b) desvio-padrão de *x*: $\sigma_x = 14{,}62$; desvio-padrão de *y*: $\sigma_y = 18{,}00$. Logo, o atirador *x* teve um desempenho mais regular.

Exercícios complementares

C.1 80 mulheres e 40 homens. **C.2** a) $\bar{x} = 6{,}6$; b) $Md = 7$; c) $Mo = 7$. **C.3** b. **C.4** c. **C.5** d. **C.6** a) Jogador *A*: $\bar{x}_A = 20$, jogador *B*: $\bar{x}_B = 20$; b) jogador *A*: $\sigma_A = 1{,}2$, jogador *B*: $\sigma_B = 6{,}5$.
c) Você decide! Observe, porém, que, apesar de os jogadores possuírem a mesma média de pontos por jogo, o desvio-padrão do jogador *A* é menor do que o do jogador *B*. Isso quer dizer que, em muito mais jogos, o jogador *A* esteve mais próximo da média do que o jogador *B*, isto é, *A* foi mais regular do que *B*.

Capítulo 23

Exercícios básicos

B.1 $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$, $a_5 = 6$, $a_6 = 6$ e $a_7 = 6$. **B.2** d. **B.3** c. **B.4** a) (6, 15, 24, 33, 42, ...); b) (3, 6, 12, 24, 48, ...); c) (8, 13, 18, 23, 28, ...); d) (3, 8, 15, 24, 35, ...).

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** b. **C.3** a) $S_{10} = 140$; b) $a_1 = 5$; c) $a_6 = 15$. **C.4** d.

Capítulo 24

Exercícios básicos

B.1 a) (6, 11, 16, 21, 26, 31) é P.A.; b) (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81) não é P.A.; c) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right)$ é P.A.

B.2 $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) + 1 - (4n+1) = 4n + 4 + 1 - 4n - 1 = 4$; logo, a seqüência é P.A. de razão 4. **B.3** $r = -\frac{4}{15}$. **B.4** $r = 5$.

B.5 a) decrescente; b) crescente; c) constante; d) crescente; e) constante; f) crescente. **B.6** $x = 4$. **B.7** $x = 2$ ou $x = 1$. **B.8** $x = 3$.

B.9 $a_{51} = 205$. **B.10** $a_{62} = -207$. **B.11** $a_{25} = \frac{53}{3}$.

B.12 $r = \frac{31}{15}$. **B.13** $r = -\frac{\sqrt{2}}{18}$. **B.14** $n = 36$. **B.15** $n = 51$.

B.16 27. **B.17** 69. **B.18** $r = -3$. **B.19** $a_1 = -10$.

B.20 (4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67).

B.21 $\left(1, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{11}{6}, 2\right)$. **B.22** $r = \frac{1}{8}$.

B.23 $a_{46} = 162$. **B.24** (6, 2, −2). **B.25** d. **B.26** b. **B.27** 9.960.
B.28 4.335. **B.29** 2.310. **B.30** 2.562. **B.31** 2.210.
B.32 5.586. **B.33** 9.504. **B.34** 40. **B.35** 26.
B.36 $a_1 = 2$ e $r = 4$. **B.37** 24. **B.38** a) 2.550; b) 2.420.
B.39 $S_n = n^2$. **B.40** $S_n = n^2 - n$. **B.41** $S_n = n^2 + n$.

Exercícios complementares

C.1 $x = 2$. **C.2** $a_{73} = 99$. **C.3** $r = -11$. **C.4** b. **C.5** 187. **C.6** c. **C.7** $a_{26} = 103$. **C.8** c. **C.9** 50 cm. **C.10** 39. **C.11** 21. **C.12** 4.123. **C.13** a. **C.14** d. **C.15** e. **C.16.** b. **C.17** 20 prestações. **C.18** a. **C.19** $n = 31$. **C.20** b.

Capítulo 25

Exercícios básicos

B.1 a) (6, 12, 24, 48, 96) é P.G., $q = 2$; b) (3, 6, 9, 12, 15, 18) não é P.G.; c) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}\right)$ é P.G., $q = \frac{1}{5}$; d) $\left(\frac{4}{3}, 8, 48, 288, 1.728\right)$ é P.G., $q = 6$; e) (1, 8, 81, 1.024) não é P.G.; f) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ é P.G., $q = \frac{1}{2}$. **B.2** É P.G. **B.3** $q = \frac{1}{3}$.

B.4 $q = \frac{3}{2}$. **B.5** a) constante; b) crescente; c) decrescente; d) quase nula; e) oscilante; f) constante. **B.6** $x = 3$ ou $x = \frac{1}{2}$. **B.7** $x = 3$.

B.8 $a_{10} = 1.536$. **B.9** $a_{11} = 2.187$. **B.10** $q = 2$. **B.11** $q = 3$ ou $q = -3$. **B.12** $n = 20$. **B.13** $n = 11$. **B.14** $a_1 = 1$. **B.15** $q = 2$ ou $q = -2$. **B.16** (3, 6, 12, 24, 48, 96).

B.17 $(1, \sqrt[6]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[6]{32}, 2)$ ou $(1, -\sqrt[6]{2}, \sqrt[3]{2}, -\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, -\sqrt[6]{32}, 2)$.

B.18 $a_{38} = \frac{1}{4.096}$. **B.19** (5, −10, 20) ou (20, −10, 5).

B.20 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$. **B.21** $S_{11} = 4.094$. **B.22** $S_{10} = \frac{1.023}{512}$.

B.23 $S_{10} = -682$. **B.24** $S_{30} = 0$. **B.25** $n = 10$. **B.26** $a_1 = 3$.

B.27 $S_\infty = \frac{135}{2}$. **B.28** $S_\infty = \frac{128}{3}$. **B.29** $x = \frac{5}{2}$.

B.30 $D = \frac{131}{99}$. **B.31** $D = \frac{17}{6}$. **B.32** $q = \frac{1}{3}$. **B.33** e.

B.34 R$ 38.750,00, aproximadamente. **B.35** R$ 3.400,00 (cuidado, esse foi o juro, já que o montante acumulado foi de R$ 13.400,00). **B.36** 20% ao ano, aproximadamente. **B.37** 14,3 meses, aproximadamente. **B.38** R$ 20.000,00. **B.39** R$ 80.800,00, aproximadamente. **B.40** R$ 13.305,60. **B.41** a) R$ 137.261,52; b) 37,26%.
B.42 a) R$ 46.075,00; b) 7,85% **B.43** a) $0.81092p$; b) 18,908%.

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** b. **C.3** a) $(1,02)^5x$; b) $(1,02)^{11}x$; c) $(1,02)^{n-1.999} \cdot x$.

C.4 18ª geração. **C.5** 12 partidas. **C.6** $q = -\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$. **C.7** $q = 2$ ou $q = 0$. **C.8** e. **C.9** c. **C.10** e. **C.11** d. **C.12** c. **C.13** 148.832 calculadoras. **C.14** $n = 11$. **C.15** 18 dias.

C.16 $P_n = a_1q^0 \cdot a_1q^1 \cdot a_1q^2 \cdot a_1q^3 \cdot \ldots \cdot a_1q^{n-1} =$

$= \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1)}_{n \text{ fatores}} \cdot \underbrace{(q^0 \cdot q^1 \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-1})}_{n \text{ fatores}} =$

$= a_1^n \cdot q^{0+1+2+\ldots+(n-1)}$. Observando que o expoente de q é a soma dos n termos de uma P.A., temos $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. **C.17** $P_{18} = 512$.

C.18 $x = 4$. **C.19** b. **C.20** $S = \{5\}$. **C.21** A empresa A doará a soma, em dólares, dos dez primeiros termos da P.G. (100.000, 50.000, 25.000, ...), isto é, $S_{10} \simeq 199.806$ dólares. A empresa B doará a soma, em dólares, dos infinitos termos da P.G. (98.000, 49.000, 24.500, ...), isto é, $S_\infty = 196.000$ dólares. Logo, a empresa A é a mais generosa. **C.22** $S_\infty = \frac{320\pi}{3}$ cm. **C.23** As distâncias percorridas em alguns dos segundos após a freada formam a P.G. $\left(20, 5, \frac{5}{4}, \ldots\right)$. Mesmo que essa P.G. fosse infinita, não haveria o choque do auto com a pedra, pois $S_\infty = \frac{20}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{80}{3} \simeq 26{,}66$. Isto é, a soma dos termos da P.G. é aproximadamente 26,66 m, que é menor do que 100 m. **C.24** c. **C.25** b. **C.26** 25 anos, aproximadamente. **C.27** a. **C.28** c. **C.29** a.

Capítulo 26

Exercícios básicos

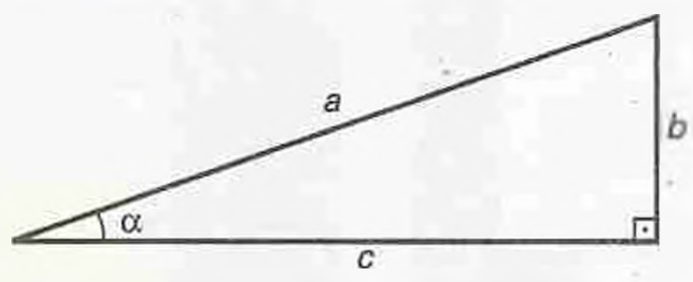
B.1 Aproximadamente, sen 35° = 0,57, cos 35° = 0,81 e tg 35° = 0,70.
B.2 a) $x = 3{,}52$ cm; b) $x = 2{,}3$ cm; c) $x = 5{,}3$ cm. **B.3** $h = 113{,}6$ m.

B.4 Aproximadamente 14,8 m. **B.5** $x = \frac{8}{3}$ m. **B.6** $x = 38{,}3$ cm, aproximadamente. **B.7** $E = 1{,}2$. **B.8** $E = \frac{8}{5}$. **B.9** 16 cm.

B.10 a) $\frac{3}{5}$; b) 2. **B.11** $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{17}$. **B.12** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

B.13 $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. **B.14** $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.15** $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ e $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

B.16 Seja um triângulo retângulo com um ângulo agudo α:



temos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}$, $\cos\alpha = \frac{c}{a}$; pelo teorema de Pitágoras, $b^2 + c^2 = a^2$; dividindo ambos os membros da igualdade anterior por a^2, temos $\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$;
logo, $(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$, isto é, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (c.q.d.).

B.17 $x = 6$ cm. **B.18** $E = \frac{1}{16}$. **B.19** $E = \frac{1}{6}$.

B.20 $x = 10\sqrt{3}$ cm. **B.21** $x = 25$ m.

B.22 a) $100\sqrt{3}$ m; b) $200\sqrt{3}$ m.

Exercícios complementares

C.1 $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$. **C.2** 5 m. **C.3** $R = \frac{h\ \text{sen}\ \theta}{1 - \text{sen}\ \theta}$. **C.4** d. **C.5** d.
C.6 $x = 24$ cm. **C.7** b. **C.8** 48 m. **C.9** 378 m. **C.10** a.
C.11 a) 10 cm²; b) $4\sqrt{3}$ m²; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dm². **C.12** b. **C.13** a.
C.14 $\alpha = 150°$. **C.15** 3 cm.

Capítulo 27

Exercícios básicos

B.1 1,75 rad. **B.2** 45°. **B.3** a) $\frac{4\pi}{3}$ rad; b) $\frac{7\pi}{4}$ rad; c) $\frac{7\pi}{6}$ rad;
d) $\frac{\pi}{4}$ rad; e) $\frac{\pi}{2}$ rad; f) $\frac{3\pi}{2}$ rad; g) $\frac{\pi}{6}$ rad; h) $\frac{5\pi}{3}$ rad;
i) $\frac{\pi}{9}$ rad; j) $\frac{2\pi}{9}$ rad. **B.4** a) 36°; b) 150°; c) 135°; d) 315°;
e) 120°; f) 90°; g) 240°; h) 100°; i) 330°; j) 57° (aproximadamente); k) 85,9° (aproximadamente); l) 40,1° (aproximadamente).
B.5 a) 50°; b) 240°; c) 300°. **B.6** a) $\frac{8\pi}{5}$ rad; b) $\frac{\pi}{2}$ rad;
c) $\frac{5\pi}{4}$ rad. **B.7** N: 159°, P: 201°, Q: 339°. **B.8** N: $\frac{4\pi}{5}$, P: $\frac{6\pi}{5}$,
Q: $\frac{9\pi}{5}$. **B.9** a) M: 60°, P: 240°, Q: 300°; b) M: 30°, N: 150°, Q: 330°;
c) M: 50°, N: 130°, P: 230°. **B.10** a) M: $\frac{2\pi}{7}$, P: $\frac{9\pi}{7}$, Q: $\frac{12\pi}{7}$;
b) M: $\frac{\pi}{3}$, N: $\frac{2\pi}{3}$, Q: $\frac{5\pi}{3}$; c) M: $\frac{\pi}{6}$, N: $\frac{5\pi}{6}$, P: $\frac{7\pi}{6}$.

Exercícios complementares

C.1 48 voltas. **C.2** 6°, aproximadamente. **C.3** $\frac{\pi}{80}$ rad.
C.4 A: 0, 2π, -2π; M: $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$; B: $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$; N: $\frac{3\pi}{4}$,
$-\frac{5\pi}{4}$; A': π, $-\pi$; P: $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$; B': $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$; Q: $\frac{7\pi}{4}$,
$-\frac{\pi}{4}$. **C.5** e. **C.6** e. **C.7** 320°. **C.8** 330°. **C.9** d.

Capítulo 28

Exercícios básicos

B.1 a) $\cos 0 = 1$, $\text{sen}\ 0 = 0$; b) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$; c) $\cos\pi = -1$,
$\text{sen}\ \pi = 0$; d) $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\text{sen}\ \frac{3\pi}{2} = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\text{sen}\ 2\pi = 0$.
B.2 $E = -1$. **B.3** $E = 1$. **B.4** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-\frac{1}{2}$;
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; h) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; i) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; k) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; l) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.5** a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.6** E = $-\frac{1}{3}$. **B.7** c.
B.8 a) V; b) F; c) F; d) V; e) F; f) V; g) F; h) V; i) F; j) V; k) V; l) F.
B.9 $E = -2$. **B.10** a) V; b) F; c) F; d) V. **B.11** a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{2}$. **B.12** $\text{sen}\ \alpha = -\frac{12}{13}$. **B.13** $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
B.14 $\text{sen}\ x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.
B.15 $m = 3$ ou $m = -4$. **B.16** $S = \{-1 + \cos\alpha, -1 - \cos\alpha\}$.
B.17 $\text{sen}\ x = \frac{1}{3}$. **B.18** $\text{sen}\ x = \frac{1}{4}$. **B.19** $E = 4$. **B.20** $E = \frac{5}{4}$.

Exercícios complementares

C.1 $E = -2$. **C.2** $E = -1$. **C.3** d. **C.4** b. **C.5** e. **C.6** c. **C.7** a.
C.8 96 cm². **C.9** a. **C.10** $k = -1$. **C.11** b.
C.12 $S = \left\{\frac{1 - \cos\alpha}{2}, \frac{-1 - \cos\alpha}{2}\right\}$.

Capítulo 29

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$; b) $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$; c) $S = \{0\}$;
d) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$; e) $S = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$; f) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$; g) $S = \{\pi\}$;
h) $S = \{0, \pi\}$; i) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$; j) $S = \varnothing$; k) $S = \varnothing$.
B.2 a) $S = \{30°, 150°\}$; b) $S = \{120°, 240°\}$; c) $S = \{90°\}$;
d) $S = \{90°, 270°\}$; e) $S = \{0°, 180°\}$; f) $S = \{30°, 330°\}$;
g) $S = \{225°, 315°\}$; h) $S = \{45°, 315°\}$; i) $S = \{180°\}$; j) $S = \{270°\}$.
B.3 $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$. **B.4** $S = \{\pi, 3\pi\}$. **B.5** $S = \varnothing$.
B.6 $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$. **B.7** $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
B.8 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. **B.9** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
B.10 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. **B.11** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
B.12 a. **B.13** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
B.14 $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. **B.15** $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$. **B.16** $S = \{0, \pi\}$.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** c. **C.3** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. **C.4** 4π.
C.5 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$. **C.6** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
C.7 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$. **C.8** $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
C.9 $S = \{0\}$. **C.10** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.
C.11 $S = \{0, \pi, 2\pi\}$. **C.12** $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
C.13 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. **C.14** d.
C.15 $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
C.16 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Capítulo 30

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right\}$;
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$; c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$;
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x < 2\pi\right\}$;
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}$;

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$;

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$; h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$; i) $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\pi\}$;

k) $S = \varnothing$; l) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$;

m) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi \text{ e } x \neq \frac{\pi}{3} \text{ e } x \neq \frac{5\pi}{3}\right\}$. **B.2** e.

B.3 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3}\right\}$. **B.4** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leq x < \pi\right\}$.

B.5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{7\pi}{6}\right\}$. **B.6** e.

B.7 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi\right\}$.

B.8 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \pi \leq x < 2\pi\right\}$.

B.9 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi\right\}$.

B.10 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$.

B.11 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.

Exercícios complementares

C.1 e. **C.2** e. **C.3** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

C.4 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi\right\}$.

C.5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

C.6 a. **C.7** e. **C.8** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Capítulo 31

Exercícios básicos

B.1 a) 0; b) 0; c) não existe. **B.2** $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ e $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

B.3 $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$. **B.4** a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) -1; e) 1;

f) -1. **B.5** $E = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.6** a) $-\sqrt{3}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) -1; d) $\sqrt{3}$.

B.7 b. **B.8** e. **B.9** $E = -\frac{3}{5}$. **B.10** $E = -1$. **B.11** a) -1;

b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}$. **B.12** a) $-\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** e. **C.3** $\operatorname{tg} x = -1$. **C.4** O produto é positivo se, e somente se, x é medida de um arco do primeiro ou quarto quadrante. **C.5** Quarto quadrante. **C.6** e.

Capítulo 32

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$; b) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$; c) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$;

d) $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$; e) $S = \{0, \pi\}$; f) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

B.2 $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$. **B.3** e. **B.4** b. **B.5** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

B.6 a. **B.7** a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2}\right\}$;

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$;

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi\right\}$;

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}\right\}$;

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}\right\}$;

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leq x < \frac{3\pi}{2}\right\}$.

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$. **B.8** e.$\mathbb{R}$

B.9 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right\}$.

Exercícios complementares

C.1 $S = \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. **C.2** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$. **C.3** d.

C.4 $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

C.5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} < x \leq 2\pi\right\}$. **C.6** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \pi < x < \frac{5\pi}{4}\right\}$.

C.7 $\alpha \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leq \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq \alpha < 2\pi$.

Capítulo 33

Exercícios básicos

B.1 a) 1; b) 1; c) -1. **B.2** $E = 1$. **B.3** a. **B.4** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

B.5 $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. **B.6** d. **B.7** $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.8** a.

B.9 a) É identidade em $\mathbb{R}$; b) não é identidade em $\mathbb{R}$; c) é identidade em $\mathbb{R}^*$; d) não é identidade em $\mathbb{R}$; e) é identidade em U.

B.10 a) **Usando a técnica II**: a igualdade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ é identidade em $\mathbb{R}$; logo, também o é em U, pois $U \subset \mathbb{R}$; dividindo ambos os membros dessa igualdade por $\operatorname{sen}^2 x$, com $\operatorname{sen} x \neq 0$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x \quad \text{(c.q.d.)}.$$

b) **Usando a técnica (I)**. *Passo 1*: o primeiro membro está definido desde que $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$; o segundo membro está definido desde que $\cos x \neq 0$; logo, ambos os membros estão definidos em U. *Passo 2*: partindo do primeiro membro, temos:

$$\text{primeiro membro} = (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)\operatorname{sen} x =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)\operatorname{sen} x = \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x}\right)\operatorname{sen} x =$$

$$= \frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen} x = \frac{1}{\cos x} = \sec x =$$

$$= \text{segundo membro} \quad \text{(c.q.d.)}.$$

c) **Usando a técnica (I)**. *Passo 1*: o primeiro membro está definido desde que $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\cos x \neq 0$; o segundo membro está definido desde que $\operatorname{sen} x \neq 0$; logo, ambos os membros estão definidos em U. *Passo 2*: partindo do primeiro membro, temos:

$$\text{primeiro membro} = (1 + \operatorname{sen} x)(\operatorname{cossec} x - 1)\sec x =$$

$$= (1 + \operatorname{sen} x)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - 1\right)\frac{1}{\cos x} =$$

$$= (1 + \operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)\frac{1}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x = \text{segundo membro} \quad \text{(c.q.d.)}.$$

d) **Usando a técnica (I).** *Passo 1*: as expressões $\text{sen}^4 x - \cos^4 x$ e $\text{sen}^2 x - \cos^2 x$ estão definidas para qualquer x, $x \in \mathbb{R}$. *Passo 2*: partindo do primeiro membro, temos primeiro membro $= \text{sen}^4 x - \cos^4 x =$
$= (\text{sen}^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^2 x - \cos^2 x) =$
$= 1 \cdot (\text{sen}^2 x - \cos^2 x) = \text{sen}^2 x - \cos^2 x =$ segundo membro (c.q.d.).
e) **Usando a técnica (I).** *Passo 1*: o primeiro membro está definido desde que $\cos x \neq 0$ e $\text{sen } x \neq 0$; o segundo membro está definido para qualquer x real; logo, ambos os membros estão definidos em U. *Passo 2*: partindo do primeiro membro, temos:

$$\text{primeiro membro} = (\sec^2 x - 1)(\text{cossec}^2 x - 1) =$$
$$= \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\left(\frac{1}{\text{sen}^2 x} - 1\right) =$$
$$= \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(\frac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}\right) =$$
$$= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = 1 =$$
$$= \text{segundo membro} \qquad \text{(c.q.d.)}.$$

f) A igualdade $\text{tg } x \cos x = \text{cossec } x \text{ sen}^2 x$ é equivalente a $\text{tg } x \cos x - \text{cossec } x \text{ sen}^2 x = 0$. Demonstrando essa segunda igualdade, a primeira estará, automaticamente, demonstrada. Vamos demonstrar essa segunda igualdade **usando a técnica (I)**. *Passo 1*: o primeiro membro está definido desde que $\cos x \neq 0$ e $\text{sen } x \neq 0$; e o segundo está definido para todo x real; logo, ambos os membros estão definidos em U. *Passo 2*: partindo do primeiro membro, temos primeiro membro $=$

$$= \text{tg } x \cos x - \text{cossec } x \text{ sen}^2 x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \cos x - \frac{1}{\text{sen } x} \cdot \text{sen}^2 x =$$
$$= \text{sen } x - \text{sen } x = 0 = \text{segundo membro} \qquad \text{(c.q.d.)}.$$

B.11 Não, pois a igualdade não se torna verdadeira para todo x, $x \in \mathbb{R}$: por exemplo, $\text{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \neq 2 \text{ sen } \frac{\pi}{4}$. **B.12** $U = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$.

B.13 $\text{cossec } x = 4$. **B.14** $\text{tg } x = -2$. **B.15** $a = 0$. **B.16** $E = \sec x - 1$.

B.17 c. **B.18** $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$. **B.19** $S = \left\{0, \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** c. **C.3** $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. **C.4** $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

C.5 $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. **C.6** $E = \cos^2 x$. **C.7** $k = -2$.

C.8 d. **C.9** a. **C.10** $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$. **C.11** d.

Capítulo 34

Exercícios básicos

B.1 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{R}\right\}$;

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nota. Um outro modo de apresentar esse conjunto solução é $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B.2 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.3 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

g) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.4 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.5 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.6 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.7 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.8** $S = \varnothing$.

B.9 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Nota. Os pontos associados às raízes dessa equação dividem a circunferência trigonométrica em três partes iguais.

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C.3 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C.4 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C.5 $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C.6 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **C.7** b. **C.8** d. **C.9** d.

Capítulo 35

Exercícios básicos

B.1 a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$;

d) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. **B.2** $\frac{\sqrt{4} - 3\sqrt{3}}{10}$. **B.3** $\frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$.

B.4 e. **B.5** b. **B.6** b. **B.7** a) 1º membro $= \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) =$

$$= \text{sen } \frac{3\pi}{2} \cos x + \text{sen } x \cos \frac{3\pi}{2} = -1 \cos x + (\text{sen } x) \cdot 0 =$$
$$= -\cos x = 2º \text{ membro} \quad \text{(c.q.d.)}; \text{ b) } 1º \text{ membro} = \cos(-x) =$$
$$= \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \text{sen } 0 \text{ sen } x = 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \text{sen } x =$$
$$= \cos x = 2º \text{ membro} \quad \text{(c.q.d.)}; \text{ c) } 1º \text{ membro} = \text{sen}(-x) =$$
$$= \text{sen}(0 - x) = \text{sen } 0 \cos x - \text{sen } x \cos 0 = 0 \cdot \cos x - (\text{sen } x) \cdot 1 =$$
$$= -\text{sen } x = 2º \text{ membro} \qquad \text{(c.q.d.)}.$$

B.8 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.9 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.10 $2 - \sqrt{3}$. **B.11** a) $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{7}$. **B.12** 45°.

B.13 $\frac{-b}{a-c}$. **B.14** $\frac{120}{169}$. **B.15** $-\frac{23}{25}$. **B.16** a) $\frac{4}{5}$; b) $-\frac{3}{5}$.

B.17 a) $2a^2 - 1$; b) $8a^4 - 8a^2 + 1$. **B.18** $\frac{56\sqrt{2}}{81}$. **B.19** I. Ambos os membros da igualdade estão definidos para todo x tal que $\operatorname{sen} x \neq \cos x$, isto é, para todo $x \in U$; II. Partimos do primeiro membro:

$$\text{primeiro membro} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \cos x =$$

$$= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \cos x = \cos x + \operatorname{sen} x - \cos x =$$

$= \operatorname{sen} x =$ segundo membro (c.q.d.). **B.20** I. Ambos os membros da igualdade estão definidos para todo $x \in \mathbb{R}$; II. partimos do primeiro membro: primeiro membro $= \cos x \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} x =$
$= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x(1 - \operatorname{sen}^2 x) - 2 \operatorname{sen} x =$
$= 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen}^3 x =$

segundo membro (c.q.d.). **B.21** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.22 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.23 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.24 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.25** $-\frac{4}{3}$. **B.26** a.

B.27 a) $2 \operatorname{sen} 3x \cos x$; b) $2 \operatorname{sen} x \cos 5x$; c) $2 \cos 5x \cos 3x$;
d) $-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x$; e) $2 \operatorname{sen} 15° \cos 5°$; f) $2 \operatorname{sen} 145° \cos 125°$;

g) $-2 \operatorname{sen}^2 5°$; h) $2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$. **B.28** $2 \operatorname{sen} 40° \cos 30°$.

B.29 $-4 \cos 3x \operatorname{sen}^2 x$. **B.30** $4 \operatorname{sen} 4x \cos^2 x$. **B.31** $4 \cos x \cos 4x \cos 2x$.

B.32 $E = 2 \cos x$. **B.33** $E = -\operatorname{cotg} x$. **B.34** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.35** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.36** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.37 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B.38 $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Exercícios complementares

C.1 $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.2** $E = -\frac{7}{5}$. **C.3** a) $\frac{56}{65}$; b) $\frac{63}{65}$. **C.4** $A = 2$.

C.5 c. **C.6** $2 + \sqrt{2}$. **C.7** a) Aproximadamente 14,56 m; b) aproximadamente 33,56 m. **C.8** $\operatorname{tg} y$.

C.9 $\operatorname{tg}(90° + \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} =$

$$= \frac{\operatorname{sen} 90° \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos 90°}{\cos 90° \cos \alpha - \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot 0}{0 \cos \alpha - 1 \operatorname{sen} \alpha} =$$

$= -\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = -\operatorname{cotg} \alpha$ (c.q.d.). **C.10** e. **C.11** e. **C.12** d. **C.13** b.

C.14 $\frac{7}{8}$. **C.15** $4a^3 - 3a$. **C.16** c. **C.17** c.

C.18 $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$. **C.19** b. **C.20** d. **C.21** $y = 1$.

C.22 d. **C.23** b. **C.24** a) $\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} =$

$$= \frac{\operatorname{sen} p \cos q + \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\operatorname{sen}(p + q)}{\cos p \cos q};$$

b) $\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} =$

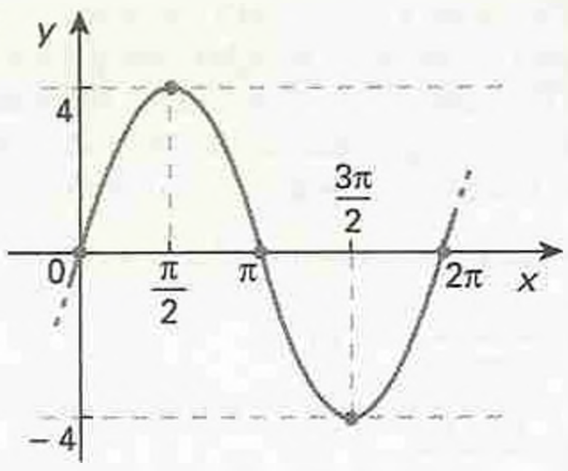
$$= \frac{\operatorname{sen} p \cos q - \operatorname{sen} q \cos p}{\cos p \cos q} = \frac{\operatorname{sen}(p - q)}{\cos p \cos q}.$$

C.25 a) $\frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 3x \cos x}$; b) $\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 5x \cos 2x}$.

Capítulo 36

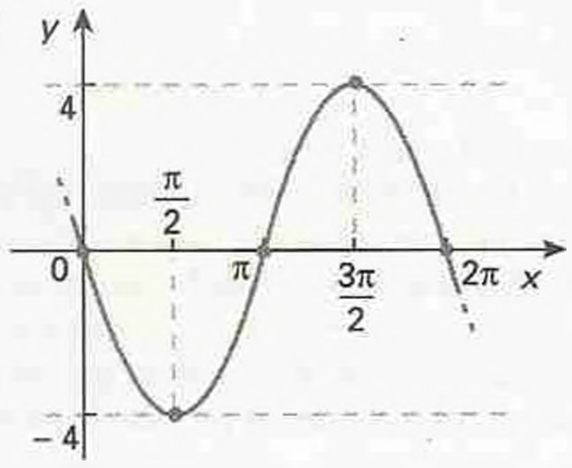
Exercícios básicos

B.1 a)



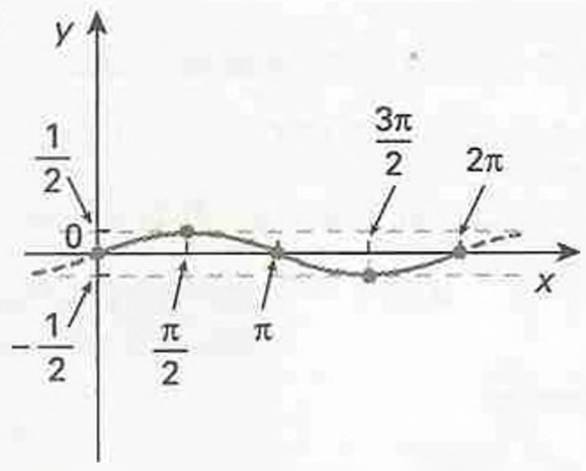
D = ℝ;
Im = [−4, 4];
$p = 2\pi$.

b)



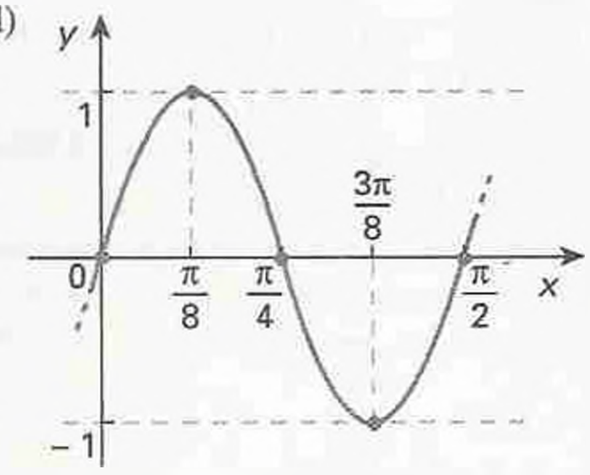
D = ℝ;
Im = [−4, 4];
$p = 2\pi$.

c)



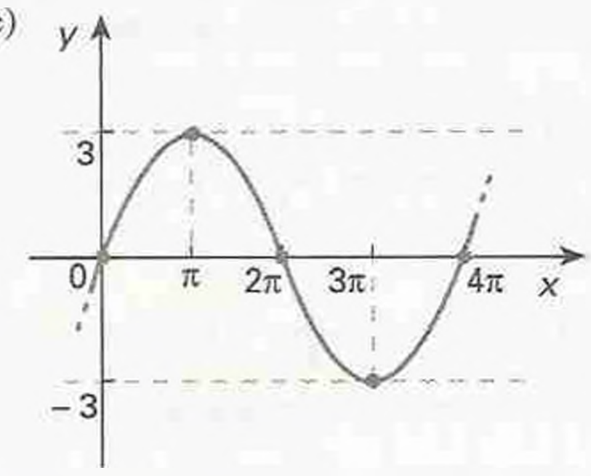
D = ℝ;
Im = $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;
$p = 2\pi$.

d)



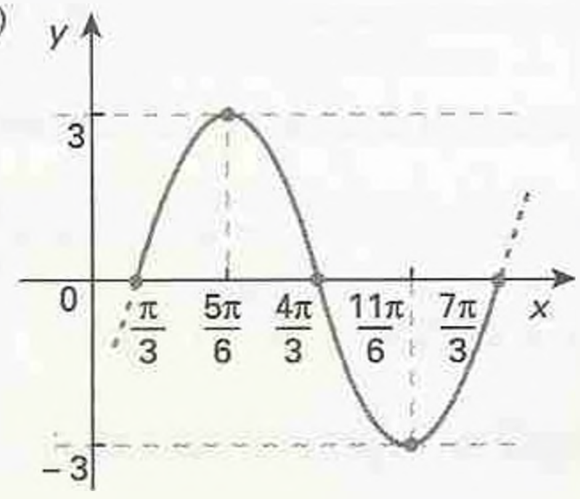
D = ℝ;
Im = [−1, 1];
$p = \frac{\pi}{2}$.

e)



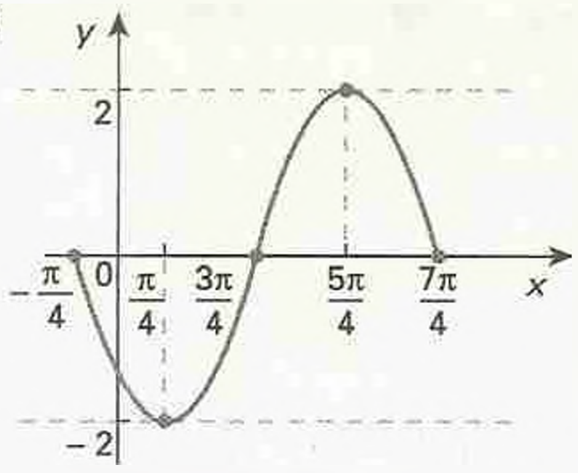
D = ℝ;
Im = [−3, 3];
$p = 4\pi$.

f)



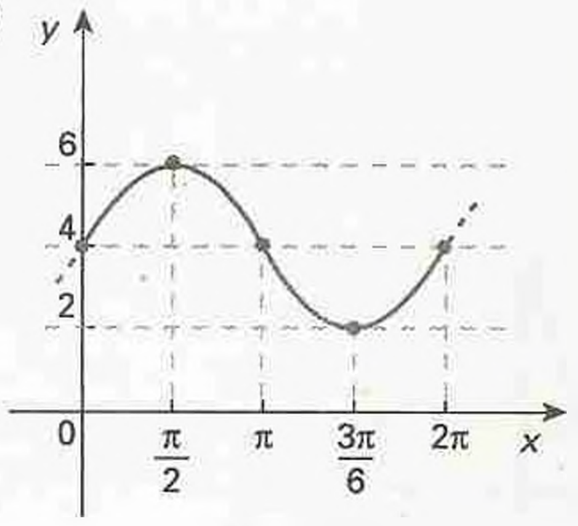
D = ℝ;
Im = [−3, 3];
$p = 2\pi$.

g)



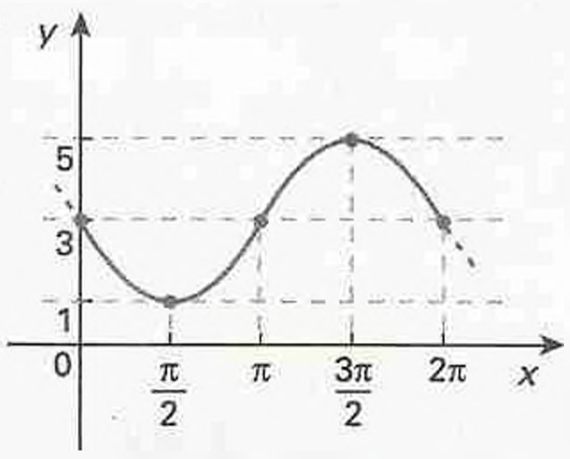
D = ℝ;
Im = $[-2, 2]$;
$p = 2\pi$.

h)



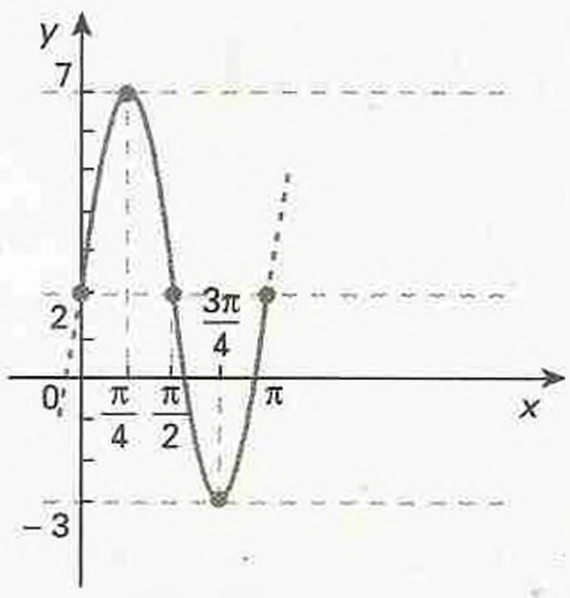
D = ℝ;
Im = $[2, 6]$;
$p = 2\pi$.

i)



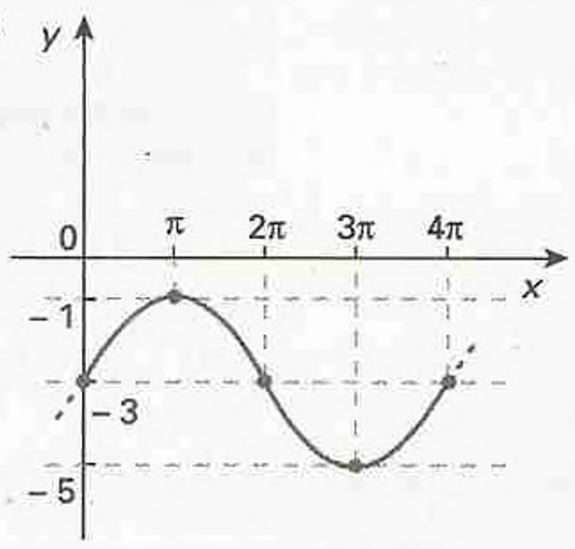
D = ℝ;
Im = $[1, 5]$;
$p = 2\pi$.

j)



D = ℝ;
Im = $[-3, 7]$;
$p = \pi$.

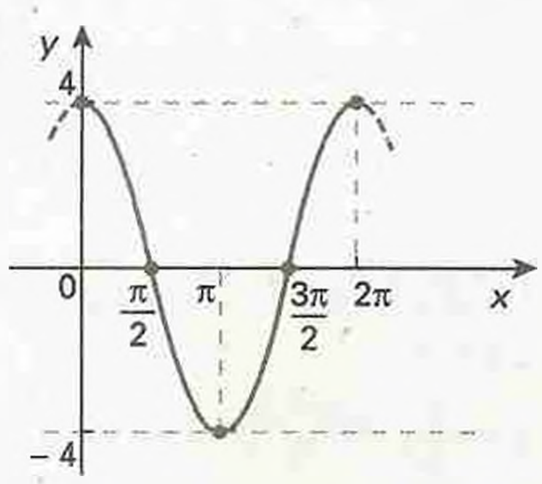
k)



D = ℝ;
Im = $[-5, -1]$;
$p = 4\pi$.

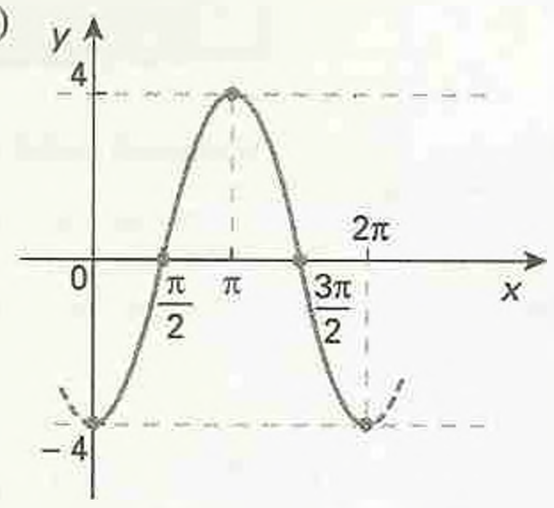
B.2 $\forall m, m \in \mathbb{R} \mid 0 \leq m \leq \frac{2}{3}$. **B.3** $\forall m, m \in \mathbb{R} \mid -1 \leq m \leq \frac{1}{3}$.

B.4 a)



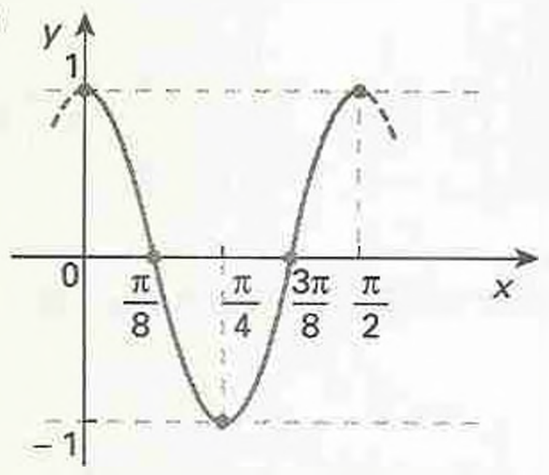
D = ℝ;
Im = $[-4, 4]$;
$p = 2\pi$.

b)



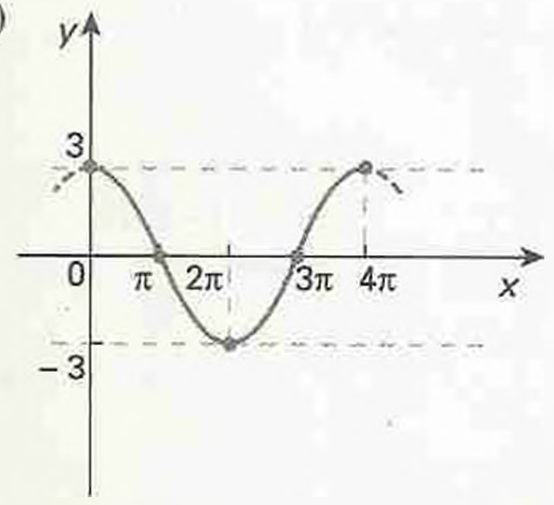
D = ℝ;
Im = $[-4, 4]$;
$p = 2\pi$.

c)



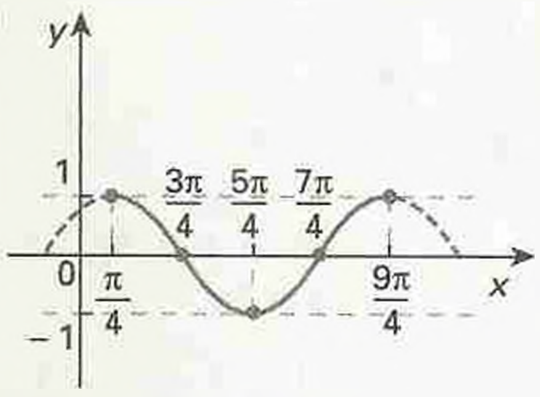
D = ℝ;
Im = $[-1, 1]$;
$p = \frac{\pi}{2}$.

d)



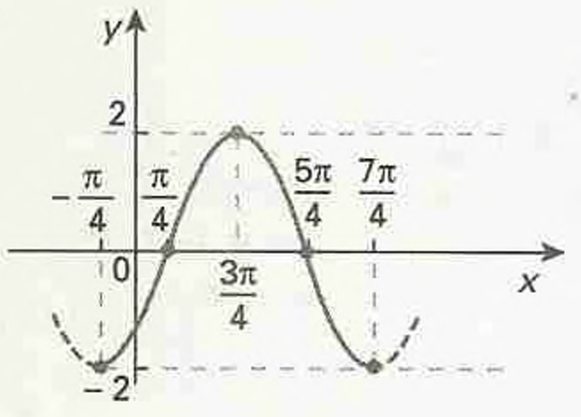
D = ℝ;
Im = $[-3, 3]$;
$p = 4\pi$.

e)



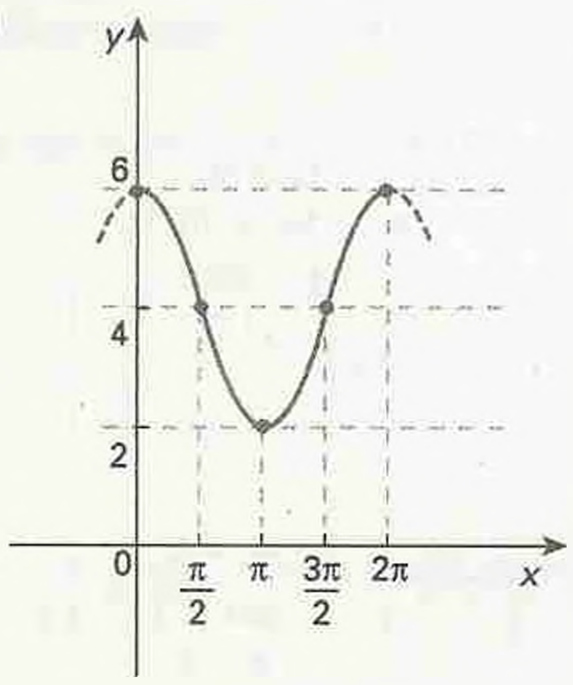
D = ℝ;
Im = $[-1, 1]$;
$p = 2\pi$.

f)



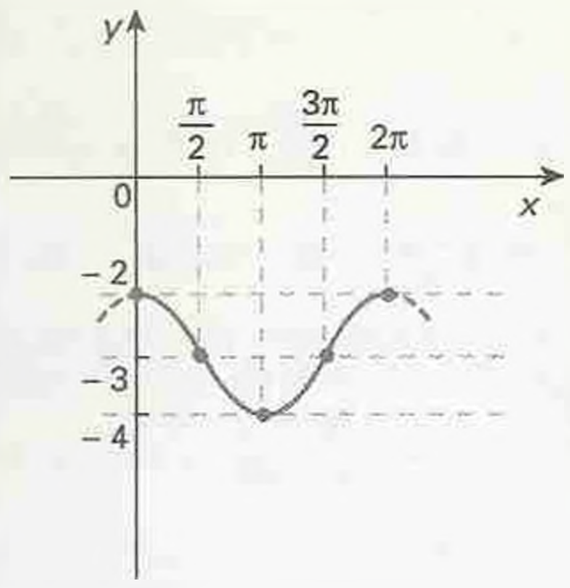
D = ℝ;
Im = $[-2, 2]$;
$p = 2\pi$.

g)



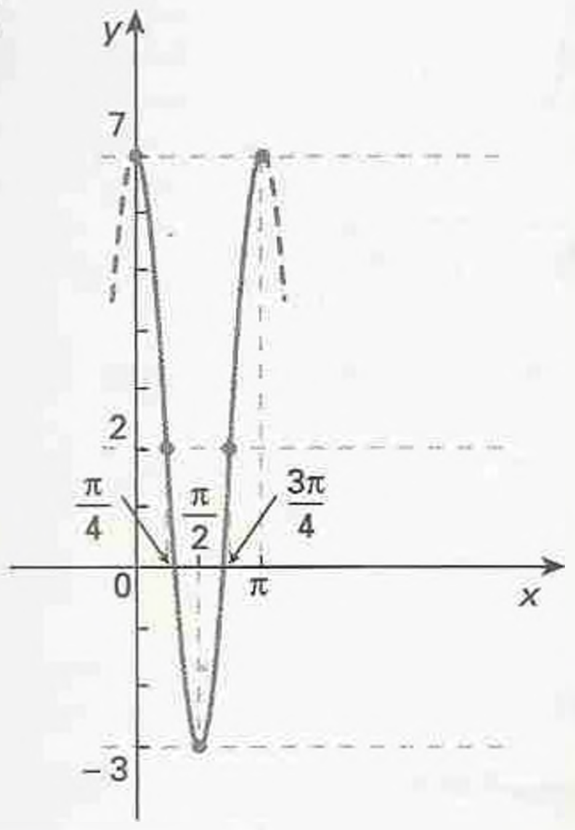
D = ℝ;
Im = $[2, 6]$;
$p = 2\pi$.

h)



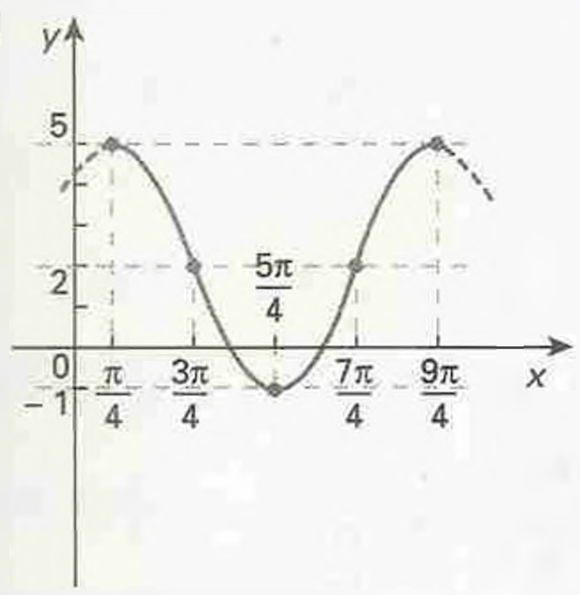
D = ℝ;
Im = $[-4, -2]$;
$p = 2\pi$.

i)



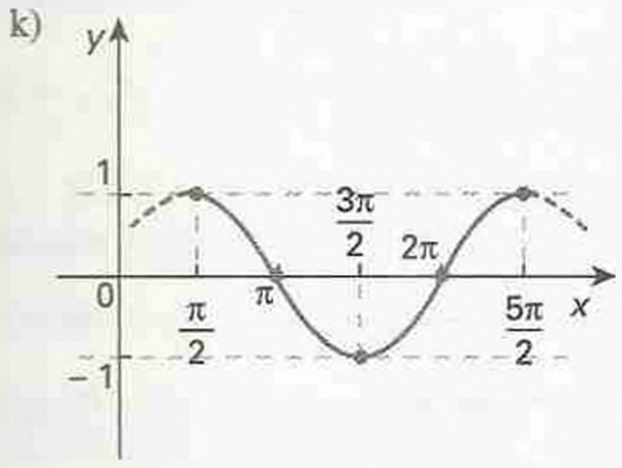
D = ℝ;
Im = $[-3, 7]$;
$p = \pi$.

j)



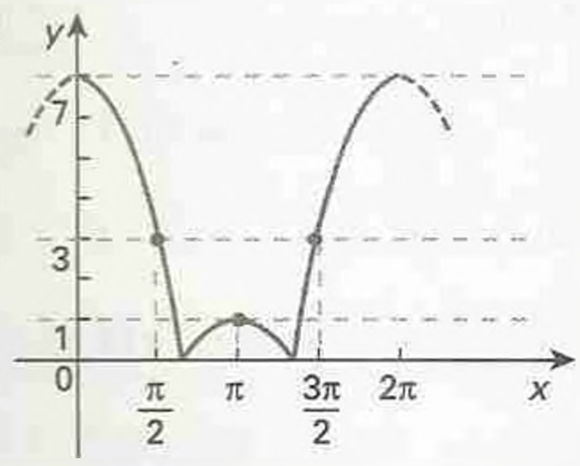
D = ℝ;
Im = $[-1, 5]$;
$p = 2\pi$.

k)



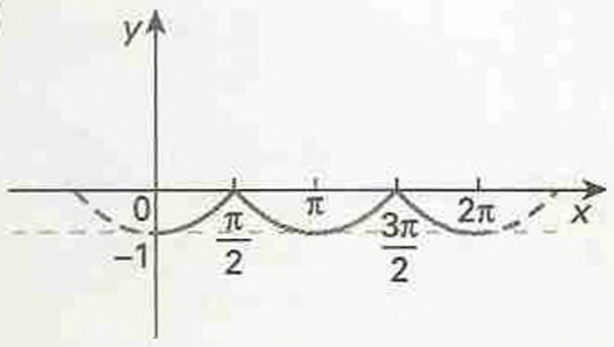
D = ℝ;
Im = $[-1, 1]$;
$p = 2\pi$.

l)



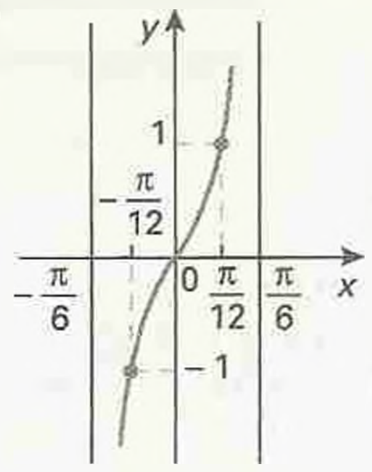
D = ℝ;
Im = $[0, 7]$;
$p = 2\pi$.

m)



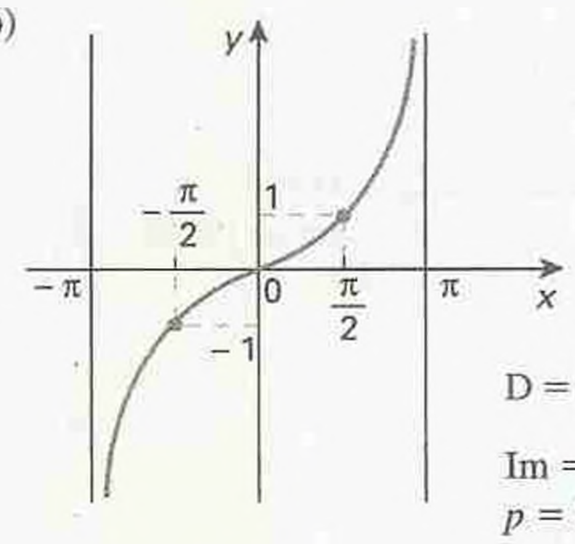
D = ℝ;
Im = $[-1, 0]$;
$p = \pi$.

B.5 $b = 3$ e $m = \pm 2$. **B.6** $\forall m, m \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant m \leqslant 3$. **B.7** b.
B.8 a)



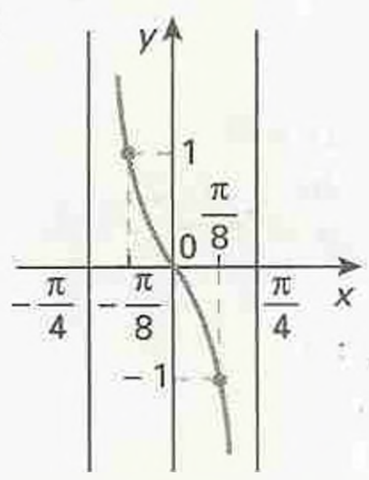
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Im = ℝ;
$p = \frac{\pi}{3}$.

b)



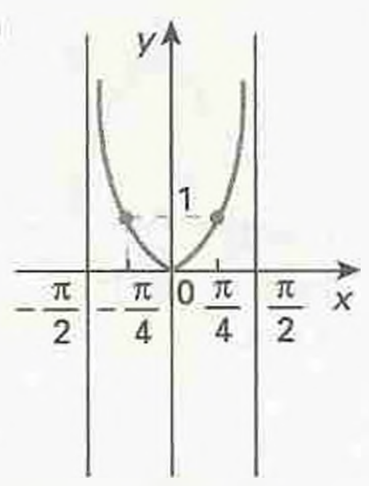
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Im = ℝ;
$p = 2\pi$.

c)



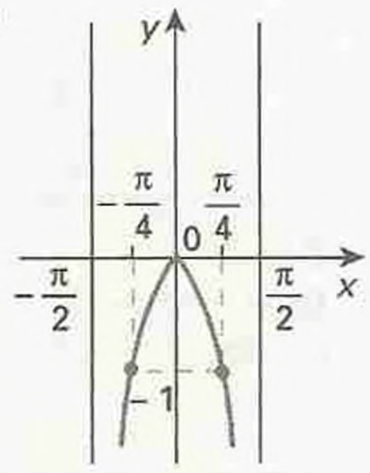
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Im = ℝ;
$p = \frac{\pi}{2}$.

d)



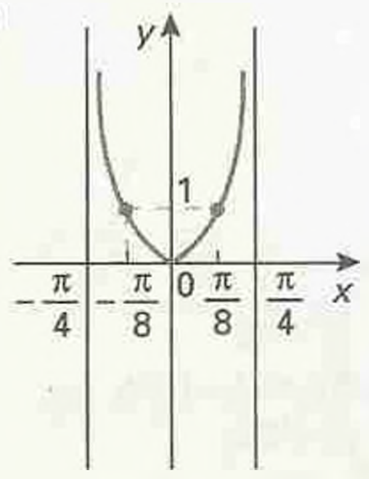
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Im = $\mathbb{R}_+$;
$p = \pi$.

e)



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Im = $\mathbb{R}_-$;
$p = \pi$.

f)

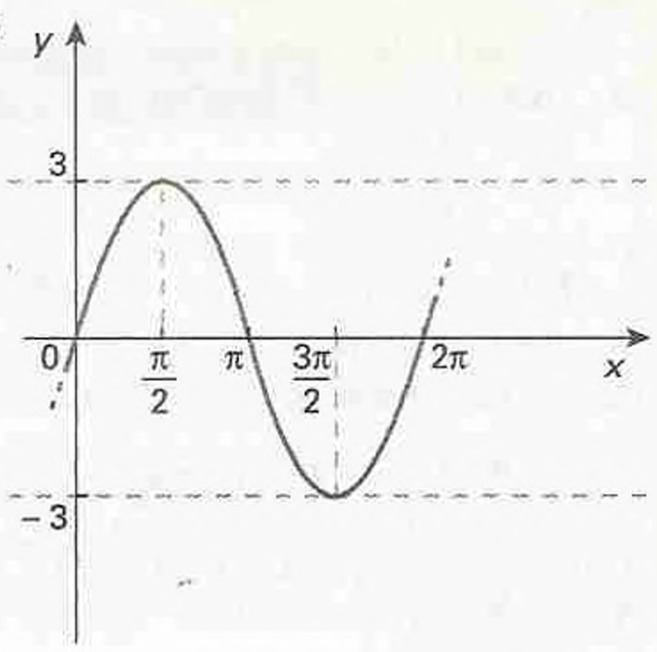


$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;
Im = $\mathbb{R}_+$;
$p = \frac{\pi}{2}$.

Exercícios complementares

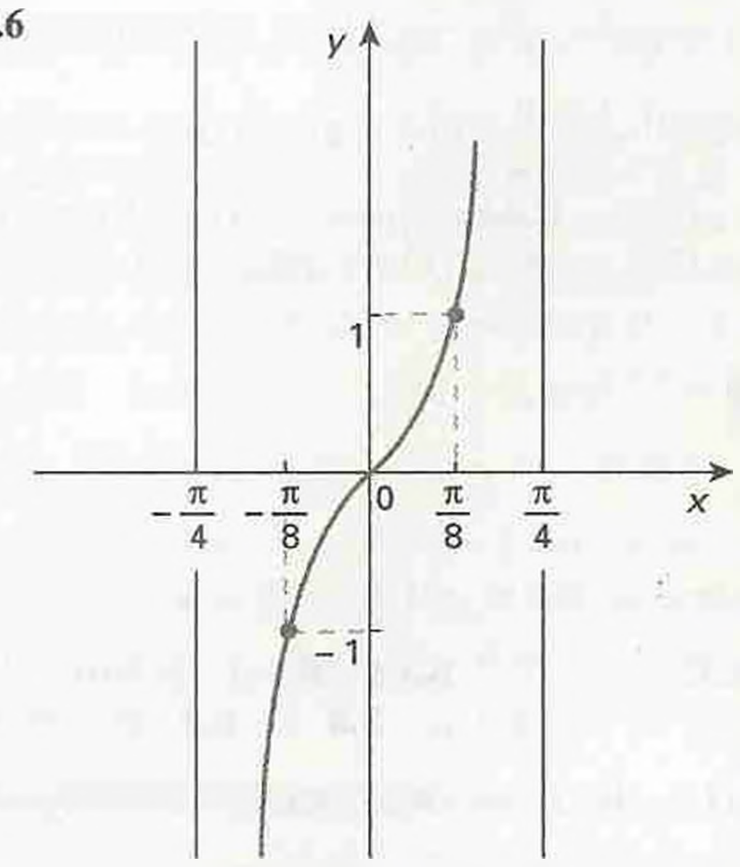
C.1 $\forall m, m \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant m \leqslant \frac{1}{3}$. **C.2** (a): V; (b): V; (c): V; (d): F; (e): V.

C.3



C.4 $\forall m, m \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant \frac{1}{3}$. **C.5** e.

C.6



$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$Im = \mathbb{R}$;

$p = \frac{\pi}{2}$.

Capítulo 37

Exercícios básicos

B.1 $x = 4\sqrt{3}$. **B.2** $x = 2$. **B.3** $x = 7$. **B.4** $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

B.5 $D = 5\sqrt{7}$ cm e $d = 5\sqrt{3}$ cm. **B.6** $x = 6$. **B.7** $x = 6{,}4$.

B.8 $\alpha = 60°$. **B.9** d. **B.10** a) 7,5 cm²; b) 14 cm². **B.11** 22,5 cm².

B.12 $(15\pi - 9)$ cm².

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** 70 m. **C.3** e. **C.4** $\frac{p}{2r}$. **C.5** $BF = 15\sqrt{2}$ km e

$AF = \frac{15(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$ km. **C.6** a) F; b) V; c) V; d) V.

C.7 $A = \left(4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right)$ cm².

Capítulo 38

Exercícios básicos

B.1 a) 2.800 dólares; b) 10.580 dólares; c) 7.730 dólares.

B.2 a) 14 pontos; b) 90 pontos; c) 128 pontos.

B.3 a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$. **B.4** $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. **B.5** $x = 1$ e $y = 4$.

B.6 b. **B.7** e. **B.8** $x = 2$. **B.9** $x = 4$.

B.10 a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 20 & -5 \\ 10 & 15 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 19 & -\frac{15}{2} \\ 7 & \frac{29}{2} \\ 32 & 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -2 & 14 & 0 \end{pmatrix}$.

B.11 b. **B.12** $X = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -9 \\ -12 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **B.13** $X = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e

$Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **B.14** a) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 24 \\ 1 & 18 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 26 \\ -4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

B.15 a) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 14 & 5 \\ 1 & 26 & 7 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 14 & 26 \\ 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

B.16 São iguais. **Nota.** A conclusão desse exercício pode ser generalizada da seguinte maneira: "Se A e B são matrizes tais que existe o produto AB, então $(AB)^t = B^tA^t$". **B.17** b. **B.18** $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B.19 $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$. **B.20** a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercícios complementares

C.1 b. **C.2** a. **C.3** a) V; b) F; c) F; d) V; e) V; f) F; g) V.

C.4 $B = \begin{pmatrix} 50 & 100 \\ 0 & 2600 \end{pmatrix}$. **C.5** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. **C.6** c.

C.7 a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. **C.8** a) F; b) V; c) F; d) V; e) V; f) V.

C.9 Um exemplo possível é:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{C}$$

C.10 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C.11 e.

Capítulo 39

Exercícios básicos

B.1 d. **B.2** c. **B.3** e. **B.4** a) SPD; b) SI; c) SPI; d) SI. **B.5** c.

B.6 a) SPD. S = $\{(2, 1, 3)\}$; b) SPI, S = $\{(7 - 18z, 1 - 3z, z), z \in \mathbb{R}\}$;

c) SPI. $S = \left\{\left(\frac{y-7}{2}, y, 2\right), y \in \mathbb{R}\right\}$. **B.7** e. **B.8** a.

B.9 a) SPD, $S = \{(1, 1, 2)\}$; b) SI, $S = \varnothing$;
c) SPI, $S = \{(6z - 5, 3 - z, z), z \in \mathbb{R}\}$. **B.10** a) SPD, $S = \{(3, -1, 2)\}$;
b) SPI, $S = \left\{\left(1 - \frac{5z}{7}, -\frac{z}{7}, z\right), z \in \mathbb{R}\right\}$; c) SI, $S = \varnothing$.

B.11 a) SI, $S = \varnothing$; b) SPD, $S = \{(-2, 2)\}$; c) SPI,
$S = \{(2y + 3, y), y \in \mathbb{R}\}$. **B.12** c. **B.13** a.

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** $a = 0$. **C.3** $\forall a, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. **C.4** 0,125 kg. **C.5** 9.
C.6 Indicando por V, A e B as quantias de cada pacote vermelho, azul e branco, respectivamente, temos o sistema:

$$\begin{cases} V + 2A + 5B = 150.000 \\ A + 3B = 70.000 \\ V = B + 5.000 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} V + 2A + 5B = 150.000 \xrightarrow{\times (-1)} \\ OV + A + 3B = 70.000 \\ V + OA - B = 5.000 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} V + 2A + 5B = 150.000 \\ OV + A + 3B = 70.000 \xrightarrow{\times (2)} \\ OV - 2A - 6B = -145.000 \xleftarrow{+} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} V + 2A + 5B = 150.000 \\ OV + A + 3B = 70.000 \\ OV + OA + OB = -5.000 \end{cases}$$

Como o sistema é impossível, conclui-se que o gerente mentiu em seu depoimento.

C.7 b. **C.8** c.

Capítulo 40

Exercícios básicos

B.1 a) 23; b) 3; c) −12; d) −5. **B.2** e. **B.3** d. **B.4** e.
B.5 $m \neq 4 \Rightarrow$ SPD; $m = 4 \Rightarrow$ SI. **B.6** $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD; $m = -1 \Rightarrow$ SPI.
B.7 $m \neq -2 \Rightarrow$ SPD; $m = -2 \Rightarrow$ SPI. **B.8** $m \neq 1$ e $m \neq 2 \Rightarrow$ SPD; $m = 1 \Rightarrow$ SI; $m = 2 \Rightarrow$ SI. **B.9** a) $m \neq -8 \Rightarrow$ SPD, $m = -8$ e $n = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ SPI. $m = -8$ e $n \neq -\frac{3}{2} \Rightarrow$ SI;

b) $S = \left\{\left(-\frac{1}{11}, -\frac{18}{11}\right)\right\}$. **B.10** a) $a \neq \frac{2}{5}$; b) $a = \frac{2}{5}$ e $b = 0$;

c) $a = \frac{2}{5}$ e $b \neq 0$. **B.11** c. **B.12** $a = 0 \Rightarrow$ SPD; $a \neq 0 \Rightarrow$ SI.
B.13 $m = 1 \Rightarrow$ SI; $m \neq 1 \Rightarrow$ SPI. **B.14** $k = -9 \Rightarrow$ SPD; $k \neq -9 \Rightarrow$ SI.
B.15 $b \neq 4 \Rightarrow$ SPI; $b = 4$ e $a = 3 \Rightarrow$ SPI; $b = 4$ e $a \neq 3 \Rightarrow$ SI.
B.16 a) SPD; b) SPI. **B.17** $\forall m, m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 4$. **B.18** $a = 1$.
B.19 $k \neq 3$ e $k \neq -8 \Rightarrow$ SPD; $k = 3$ ou $k = -8 \Rightarrow$ SPI. **B.20** a.

Exercícios complementares

C.1 a) $\forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 4$; b) $S = \{(3, 2a)\}$. **C.2** a) $\forall a, a \in \mathbb{R}$; b) $S = \{(a + 1, a - 2)\}$. **C.3** Não existe m.

C.4 A solução geral é $\left(\frac{7 - 5z}{5}, \frac{5z + 4}{5}, z\right), z \in \mathbb{R}$. Duas dessas soluções são $\left(\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$ e $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, 1\right)$. **C.5** a. **C.6** $k = -\frac{22}{5}$.

C.7 $S = \{(7z, -3z, z), z \in \mathbb{R}\}$. **C.8** $k = 4$ ou $k = -1$. **C.9** $k = 0$ ou $k = 2$. **C.10** a) $\forall m, m \in \mathbb{R}$ e $m \neq -3$; b) $S = \{(3z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

Capítulo 41

Exercícios básicos

B.1 a) 13; b) 10; c) 1; d) $\frac{1}{2}$. **B.2** a) −21; b) −38; c) 30;

d) $b(b - a)(a - c)$. **B.3** $S = \{-3, 3\}$. **B.4** d. **B.5** a) −14; b) 0 (zero).
B.6 a) 12; b) 1; c) 1; d) 1. **B.7** a. **B.8** c. **B.9** $\det A = 8$.

B.10 $\det B = \frac{1}{5}$. **B.11** b. **B.12** −9. **B.13** 0 (zero). **B.14** 0 (zero).

B.15 São opostos, isto é, $\det A = -\det B$.
Nota. A conclusão desse exercício pode ser generalizada da seguinte maneira: "Permutando-se duas filas paralelas de uma matriz quadrada A obtém-se uma nova matriz B tal que $\det A = -\det B$".
B.16 São iguais, isto é, $\det A = \det A'$.
Nota. A conclusão dessa propriedade pode ser generalizada da seguinte maneira: "O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante da transposta de A".
B.17 Apenas os itens (a) e (c) apresentam matrizes inversas entre si.
B.18 Apenas os itens (a) e (b) apresentam matriz inversível.

B.19 $\forall x, x \in \mathbb{R}$ e $x \neq 6$. **B.20** d. **B.21** $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

B.22 b. **B.23** $\det M^{-1} = 96$.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** c. **C.3** $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$. **C.4** d. **C.5** −90. **C.6** e.

C.7 b. **C.8** $\det B = -\frac{1}{6}$. **C.9** e. **C.10** d. **C.11** $\det Q = 16$.

C.12 c. **C.13** e. **C.14** c. **C.15** d.

Capítulo 42

Exercícios básicos

B.1 c. **B.2** 6. **B.3** d. **B.4** e. **B.5** a. **B.6** 2.401. **B.7** 840.
B.8 5.880. **B.9** $x = 40$. **B.10** 40 divisores. **B.11** $n(A \cup B) = 351$.
B.12 b. **B.13** $n(B) = 15$. **B.14** 240. **B.15** 144. **B.16** b. **B.17** 45.
B.18 420. **B.19** 432.

Exercícios complementares

C.1 5.000 placas. **C.2** b. **C.3** 32. **C.4** 75. **C.5** 36. **C.6** e. **C.7** e. **C.8** 72. **C.9** e. **C.10** c. **C.11** 186. **C.12** e. **C.13** b. **C.14** b. **C.15** 57ª. **C.16** c. **C.17** c.

Capítulo 43

Exercícios básicos

B.1 (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c). **B.2** (2, 4, 6), (2, 6, 4), (4, 2, 6), (4, 6, 2), (6, 2, 4), (6, 4, 2), (2, 4, 8), (2, 8, 4), (4, 2, 8), (4, 8, 2), (8, 2, 4), (8, 4, 2), (2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2), (4, 6, 8), (4, 8, 6), (6, 4, 8), (6, 8, 4), (8, 4, 6), (8, 6, 4). **B.3** São arranjos simples os agrupamentos dos itens (b) e (d). **B.4** a) $A_{8,3} = 336$; b) $A_{5,4} = 120$; c) $A_{6,6} = 720$.
B.5 a) $A_{4,2} = 12$; b) $A_{5,3} = 60$; c) $A_{4,1} = 4$. **B.6** $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6$.
B.7 $\forall n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 4$. **B.8** 6. **B.9** c. **B.10** a. **B.11** e.

B.12 a) 5.040; b) 12; c) 22; d) $\frac{1}{6}$. **B.13** a) F; b) F; c) V; d) V; e) F; f) F; g) V; h) F. **B.14** a) 120; b) $\frac{1}{30}$; c) 40; d) n; e) $\frac{1}{n^3 - 3n^2 + 2n}$; f) $n^2 + 7n + 12$; g) $\frac{1}{n+3}$; h) $n^2 - 11n + 30$; i) $\frac{1}{n^2 - 7n + 12}$.

B.15 $S = \{1\}$. **B.16** c. **B.17** $S = \{3\}$. **B.18** e. **B.19** a.
B.20 $S = \{5\}$. **B.21** $S = \{8\}$. **B.22** b. **B.23** 2.880. **B.24** 6.
B.25 36. **B.26** a) $7! = 5.040$; b) $6! = 720$; c) $5! = 120$; d) $4 \cdot 6! = 2.880$; e) $3 \cdot 6! = 2.160$; f) $4 \cdot 3 \cdot 5! = 1.440$; g) $4 \cdot 6! + 3 \cdot 6! - 12 \cdot 5! = 3.600$; h) $5! = 120$; i) $3! \cdot 5! = 720$; j) $7! - 3! \cdot 5! = 4.320$. **B.27** c.
B.28 b. **B.29** $P_7^{(2,2)} = 1.260$. **B.30** $P_6^{(3,2)} = 60$. **B.31** 1.260.

B.32 $P_5^{(2)} = 60$. **B.33** $P_5^{(2,2)} = 30$. **B.34** $P_5 + P_5^{(2)} = 180$.

B.35 $P_7^{(3,2)} + P_7^{(3,2)} + P_7^{(2,2)} = 2.100$. **B.36** $P_6^{(3,2)} = 180$. **B.37** a) 21; b) 5; c) 1; d) 9. **B.38** 102. **B.39** $S = \{6\}$. **B.40** $S = \varnothing$. **B.41** a) 36; b) 84. **B.42** a. **B.43** 35. **B.44** d. **B.45** a. **B.46** a. **B.47** b. **B.48** 20.

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** c. **C.3** a) V; b) F; c) V; d) V; e) F; f) V; g) F. **C.4** d. **C.5** b. **C.6** $n = 6$. **C.7** a. **C.8** e. **C.9** c. **C.10** $S = \{2\}$. **C.11** a. **C.12** c. **C.13** 360. **C.14** c. **C.15** a. **C.16** b. **C.17** 120. **C.18** d. **C.19** e. **C.20** 60. **C.21** 28. **C.22** 28. **C.23** 35. **C.24** 2.025. **C.25** 16. **C.26** d. **C.27** e. **C.28** 63. **C.29** 10. **C.30** e. **C.31** e. **C.32** 150. **C.33** d.

Capítulo 44

Exercícios básicos

B.1 a) $\binom{7}{4} = 35$ e $\binom{7}{3} = 35$.

b) $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e $\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. Note, portanto, que números binomiais complementares são iguais.
B.2 a) $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$;
b) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$; c) $16x^4 + 32x^3y^2 + 24x^2y^4 + 8xy^6 + y^8$.
B.3 a) $x^5 - 5x^4a + 10x^3a^2 - 10x^2a^3 + 5xa^4 - a^5$;
b) $16 - 32x^2 + 24x^4 - 8x^6 + x^8$; c) $8x^{12} - 36x^8y + 54x^4y^2 - 27y^3$.
B.4 $x = 2$ e $y = 1$. **B.5** $x = 3$ e $y = 1$ ou $x = 2$ e $y = 4$.
B.6 $E = (2 + 3)^4 = 5^4 = 625$. **B.7** $E = (2 + 1)^5 = 3^5 = 243$.
B.8 $E = (2 - 1)^5 = 1^5 = 1$. **B.9** b. **B.10** c. **B.11** 6. **B.12** 28.
B.13 a. **B.14** e. **B.15** e. **B.16** 180. **B.17** $-448x^{10}$. **B.18** c.

Exercícios complementares

C.1 a) $x = 7$ ou $x = 2$; b) $x = 2$. **C.2** $(3 \cdot 1 - 1)^{10} = 2^{10} = 1.024$.
C.3 $(1 + 1)^8 = 2^8 = 256$. **C.4** d. **C.5** b. **C.6** 2^n. **C.7** c.
C.8 -21.504. **C.9** -20.

C.10 $T = \binom{11}{p}\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)^p x^{11-p} \therefore T = \binom{11}{p}2^p x^{-\frac{p}{2}} x^{11-p}$

$\therefore T = \binom{11}{p}2^p x^{\frac{22-3p}{2}}$. Fazendo $\frac{22-3p}{2} = 0$, tem-se $p = \frac{22}{3}$.

Como $p \notin \mathbb{N}$, segue-se que não existe $\binom{11}{p}$. Logo,

não existe o termo independente de x. **C.11** a. **C.12** d. **C.13** $160x^9$.

Capítulo 45

Exercícios básicos

B.1 c. **B.2** $\frac{2}{5}$. **B.3** d. **B.4** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{5}{6}$; c) 0; d) $\frac{1}{6}$; e) 1. **B.5** a. **B.6** e. **B.7** $\frac{1}{36}$. **B.8** $\frac{1}{8}$. **B.9** $\frac{1}{4}$. **B.10** $\frac{3}{8}$. **B.11** $\frac{3}{5}$. **B.12** $\frac{35}{76}$. **B.13** $\frac{2}{5}$. **B.14** $\frac{16}{33}$. **B.15** e. **B.16** $\frac{3}{4}$. **B.17** $\frac{4}{5}$. **B.18** d. **B.19** a. **B.20** e. **B.21** b. **B.22** e. **B.23** $\frac{3}{7}$. **B.24** c. **B.25** e. **B.26** d. **B.27** a) $\frac{8}{243}$; b) $\frac{16}{81}$; c) $\frac{64}{729}$. **B.28** a) $\frac{6}{35}$; b) $\frac{18}{35}$; c) $\frac{31}{35}$. **B.29** a) $\frac{10}{21}$; b) $\frac{1}{21}$; c) $\frac{20}{21}$; d) $\frac{37}{42}$. **B.30** $\frac{1}{12}$.
B.31 a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$; b) $10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{16}$. **B.32** $\frac{1}{36}$. **B.33** d.
B.34 a) $\frac{1}{11}$; b) $\frac{5}{22}$. **B.35** d.

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** b. **C.3** a. **C.4** a) $C_{48,6} = 12.271.512$; b) $\frac{1}{12.271.512}$.
C.5 $\frac{1}{10.000}$. **C.6** I) b; II) a. **C.7** $\frac{7}{8}$. **C.8** $\frac{4}{13}$. **C.9** $\frac{11}{17}$.
C.10 a) 37%; b) 29%. **C.11** 17%. **C.12** 3%. **C.13** $\frac{2}{7}$. **C.14** $\frac{4}{7}$.
C.15 $\frac{1}{4}$.
C.16 a) $E = \{(M, M, M), (M M, F), (M F, M), (F, M, M), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F), (F, F, F)\}$
$A = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M), (F, F, M), (F, M, F), (M, F, F)\}$
$B = \{(F, F, M), (F, M, F), (M, F, F), (F, F, F)\}$
b) Temos que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{3}{4} \text{ e}$$

$$P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Como $P(A/B) = P(A)$, concluímos que A e B são independentes.
C.17 e. **C.18** $\left(\frac{1}{5}\right)^{50}$. **C.19** $\frac{31}{32}$. **C.20** c. **C.21** 50%.

Capítulo 46

Exercícios básicos

B.1 a) V; b) V; c) F; d) F; e) V; f) V; g) V; h) F; i) V; j) F; k) V; l) F; m) F; n) V; o) V; p) V; q) V; r) F; s) V; t) V; u) F; v) V; w) V; x) F; y) V; z) V. **B.2** b. **B.3** c. **B.4** a) $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$; b) 24 pares de arestas ortogonais. **B.5** 40°. **B.6** 30°. **B.7** a) $3\sqrt{3}$ cm; b) 3 cm. **B.8** 80°.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** c. **C.3** c. **C.4** a. **C.5** e. **C.6** $4\sqrt{3}$ m.

Capítulo 47

Exercícios básicos

B.1 30. **B.2** 32. **B.3** 18. **B.4** 20. **B.5** 10. **B.6** 6. **B.7** 33. **B.8** 12. **B.9** 21. **B.10** a. **B.11** 1.440°. **B.12** 5.760°. **B.13** 8. **B.14** a.

Exercícios complementares

C.1 Não, pois se fizermos $V = A$ na relação de Euler $V - A + F = 2$, teremos $F = 2$, o que é absurdo (o menor número possível de faces de um poliedro é 4).

C.2 $\begin{cases} V - A + F = 2 \\ V = F \end{cases} \therefore V - A + V = 2 \therefore A = 2V - 2$

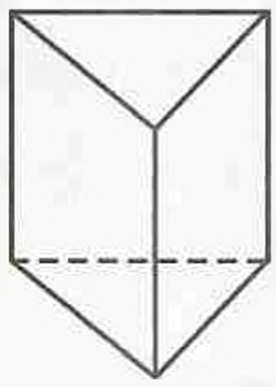
$\therefore A = 2(V - 1)$. Como $V - 1$ é inteiro, temos que $2(V - 1)$ é par. Logo, A é par (c.q.d.).

C.3 Não, pois deveríamos ter $\begin{cases} V - A + F = 2 \\ V + A + F = 17 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} V + F = A + 2 \\ V + F = 17 - A \end{cases} \therefore A + 2 = 17 - A \therefore 2A = 15 \therefore A = \frac{15}{2}.$$

Essa igualdade é absurda, pois o número de arestas deve ser natural e maior que 5. **C.4** d.

C.5 O poliedro possui 5 faces, e um poliedro que satisfaz as condições enunciadas é representado pelo desenho:

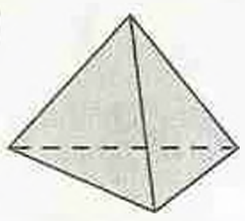


$V = 6$
$A = 9$
$F = 5$

C.6 b. **C.7** a. **C.8** 24. **C.9** 8 ângulos triédricos e 4 tetraédricos.

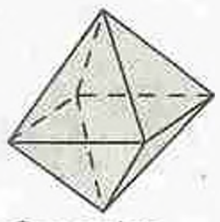
C.10 Hexaedro regular (cubo).

C.11 a)



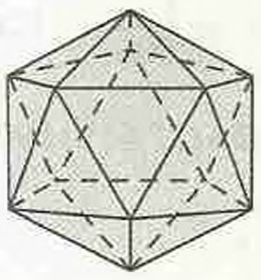
Tetraedro regular

c)



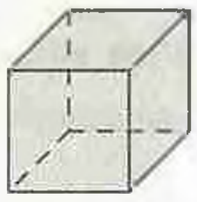
Octaedro regular

e)



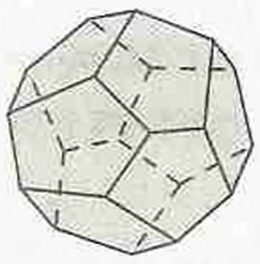
Icosaedro regular

b)



Hexaedro regular

d)



Dodecaedro regular

Capítulo 48

Exercícios básicos

B.1 a) 32 cm²; b) $4\sqrt{3}$ cm²; c) 96 cm²; d) $8(12 + \sqrt{3})$ cm².

B.2 a) 2 dm; b) 48 dm²; c) $12(4 + \sqrt{3})$ dm². **B.3** 6 cm.

B.4 $(\sqrt{6} - 1)$ m, $\sqrt{6}$ m e $(\sqrt{6} + 1)$ m. **B.5** 34 m².

B.6 3 cm, 6 cm e 12 cm. **B.7** c. **B.8** 40 cm³. **B.9** 400.000 ℓ. **B.10** c.

B.11 6 dm³. **B.12** a) $6\sqrt{3}$ cm; b) 216 cm²; c) 144 cm²; d) 216 cm³.

B.13 $2\sqrt{2}$ cm³. **B.14** 2 cm². **B.15** $\sqrt{3}$ m. **B.16** d. **B.17** d.

B.18 20 cm³. **B.19** $120\sqrt{2}$ cm³. **B.20** 300 m³. **B.21** 60.

B.22 $\frac{225\sqrt{3}}{4}$ cm³. **B.23** d. **B.24** $8(6 + \sqrt{3})$ dm².

B.25 $30\sqrt{3}$ cm³. **B.26** d. **B.27** b.

Exercícios complementares

C.1 e. **C.2** b. **C.3** $\frac{20 - 2\sqrt{74}}{3}$. **C.4** $\frac{15 - 5\sqrt{3}}{3}$ cm. **C.5** c.

C.6 b. **C.7** c. **C.8** d. **C.9** a) 8 dm; b) 512 ℓ. **C.10** b. **C.11** d.

C.12 32 cm³. **C.13** $96\sqrt{3}$ m³. **C.14** a) 18; b) 10 cm;

c) $108\sqrt{3}$ cm³.

Capítulo 49

Exercícios básicos

B.1 25 cm. **B.2** 5 cm. **B.3** 10 cm. **B.4** $\sqrt{6}$ cm. **B.5** b.

B.6 a) $3\sqrt{3}$ cm; b) $\sqrt{3}$ cm; c) $36\sqrt{3}$ cm².

B.7 $A_\ell = \frac{135\sqrt{3}}{2}$ cm²; $A_t = 108\sqrt{3}$ cm². **B.8** $A_\ell = 240$ cm²; $A_t = 384$ cm². **B.9** $A_\ell = 27$ cm²; $A_t = 9(3 + \sqrt{3})$ cm².

B.10 $\frac{32}{3}$ dm³. **B.11** 120 cm³. **B.12** 140 cm³. **B.13** 32 cm³.

B.14 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm³. **B.15** $120\sqrt{3}$ m³. **B.16** $A_t = 8\sqrt{3}$ cm²;

$V = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ cm³. **B.17** a) 120 cm³; b) 5,76 cm²; c) 112,32 cm³.

Exercícios complementares

C.1 60°. **C.2** $8(9 + \sqrt{3})$ cm². **C.3** a. **C.4** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.5** e.

C.6 b. **C.7** b. **C.8** $36\sqrt{3}$ m³. **C.9** $\frac{64\sqrt{2}}{3}$ cm³.

C.10 $2\sqrt{6}$ cm³. **C.11** $16\sqrt{6}$ cm³. **C.12** $18\sqrt{2}$ cm³.

C.13 $\frac{32}{3}$ cm³. **C.14** 42 cm³.

Capítulo 50

Exercícios básicos

B.1 $A_\ell = 60\pi$ m² e $A_t = 78\pi$ m². **B.2** 2 m. **B.3** 5 cm.
B.4 $A_\ell = 400\pi$ cm² e $A_t = 600\pi$ cm². **B.5** 32π dm³.
B.6 128π cm³. **B.7** d. **B.8** a) Na embalagem A;
b) a embalagem B. **B.9** a. **B.10** d. **B.11** a. **B.12** 45π cm³.

Exercícios complementares

C.1 $A_\ell = 25\pi^2$ cm² e $A_t = 25\pi(\pi + 2)$ cm². **C.2** $A_\ell = 100\pi$ m² e $A_t = 150\pi$ m². **C.3** $\frac{2}{3}$. **C.4** $\frac{40}{\pi}$ cm. **C.5** c. **C.6** c. **C.7** d.

C.8 a. **C.9** d. **C.10** I) b); II) c.

Capítulo 51

Exercícios básicos

B.1 $5\sqrt{3}$ cm. **B.2** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. **B.3** 45°. **B.4** a) 65π cm²;

b) 90π cm²; c) $\frac{10\pi}{13}$ rad. **B.5** a) 18π cm²; b) 27π cm²; c) 180°.

B.6 $2\sqrt{3}$ cm. **B.7** $3(4 - \sqrt{2})$ cm. **B.8** 75π cm³. **B.9** $15\pi\sqrt{2}$ m³.
B.10 12π dm³. **B.11** 24π dm³. **B.12** a) 12.000π cm³; b) 30π cm³;
c) 400 tulipas. **B.13** 105π cm³. **B.14** c. **B.15** $5\sqrt[3]{4}$ cm.

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** d. **C.3** a. **C.4** 384π cm². **C.5** $\frac{4\pi r^3}{3}$. **C.6** e. **C.7** d.

Capítulo 52

Exercícios básicos

B.1 8 cm. **B.2** e. **B.3** 36π cm³. **B.4** $\frac{40\pi\sqrt{10}}{3}$ cm³. **B.5** a.

B.6 36π cm². **B.7** $4\pi\sqrt[3]{4}$ cm². **B.8** $\frac{500\pi}{3}$ m³. **B.9** 48,8 mℓ.

B.10 b. **B.11** $V = \frac{2\pi R^3}{3}$ e $A = 3\pi R^2$. **B.12** c. **B.13** $\frac{200\pi}{9}$ m².

B.14 $\frac{8\pi}{5}$ cm². **B.15** 2π cm³. **B.16** $\frac{2\pi}{27}$ m³. **B.17** 8 cm.

B.18 216 cm². **B.19** 75π cm². **B.20** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ m³. **B.21** c. **B.22** a.

B.23 $\frac{625\pi}{4}$ cm².

Exercícios complementares

C.1 2 cm ou 14 cm. **C.2** a) $\frac{99}{56}$ cm³; b) 9,9 g. **C.3** a. **C.4** c.

C.5 36 galões. **C.6** e. **C.7** d. **C.8** $3(1 + \sqrt{2})$ cm. **C.9** a.

C.10 36π cm². **C.11** e.

Capítulo 53

Exercícios básicos

B.1 a) 5; b) 10; c) $2\sqrt{5}$; d) 13; e) 5; f) $\sqrt{2}$. **B.2** a) $6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$; b) Basta mostrar que o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados. (Teorema de Pitágoras) **B.3** Há dois pontos possíveis: $P(0, 3)$ e $P'(0, -13)$.

B.4 Há dois pontos possíveis: $P(4, 0)$ e $P'(-20, 0)$. **B.5** $P\left(\frac{87}{10}, 0\right)$.

B.6 d. **B.7** a) $M(6, 8)$; b) $M(1, -3)$; c) $M\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{5}\right)$; d) $M(8, 5)$;

e) $M(2, -2)$; f) $M\left(\frac{1}{4}, \frac{11}{6}\right)$. **B.8** a) $A'(-7, -6)$; b) $A'(6, 4)$.

B.9 $C(6, 9)$ e $D(3, 8)$. **B.10** c.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** d. **C.3** $x = 0$ ou $x = 1$. **C.4** Há dois pontos possíveis: $C(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$ e $C'(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$. **C.5** a. **C.6** e.

C.7 (0, 7) e (4, 7). **C.8** $2(18 + \sqrt{82})$. **C.9** $4\sqrt{2}$.

Capítulo 54

Exercícios básicos

B.1 a) inclinação $\alpha = 45°$; coeficiente angular $m = 1$; b) inclinação $\alpha = 60°$; coeficiente angular $m = \sqrt{3}$; c) inclinação $\alpha = 90°$; não existe coeficiente angular; d) inclinação $\alpha = 0°$, coeficiente angular $m = 0$.

B.2 a) $m = 4$; b) $m = -3$; c) $m = -\frac{3}{2}$; d) $m = 0$; e) não existe;

f) $m = \frac{4}{3}$; g) $m = -\frac{1}{2}$; h) $m = -\frac{3}{2}$; i) $m = 0$; j) não existe.

B.3 b. **B.4** $a = 3$. **B.5** a) São colineares; b) são colineares; c) são colineares; d) não são colineares; e) são colineares; f) são colineares; g) são colineares; h) não são colineares. **B.6** c.

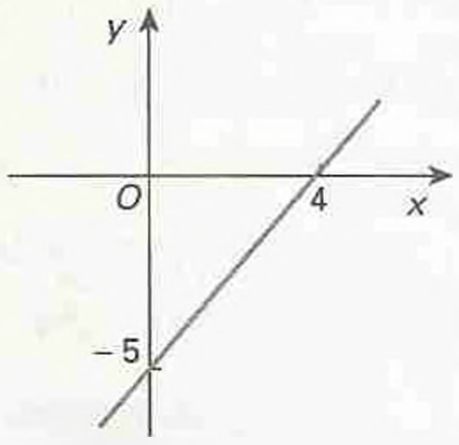
B.7 a) $3x + y - 10 = 0$; b) $2x - y + 8 = 0$; c) $x + 2y - 4 = 0$; d) $6x + 15y - 19 = 0$; e) $4x + y + 1 = 0$; f) $6x - 2y + 7 = 0$; g) $3x + y + 3 = 0$; h) $6x - y = 0$. **B.8** c.

B.9 a) $x - y - 2 = 0$; b) $\sqrt{3}x + 3y - 6 - \sqrt{3} = 0$;

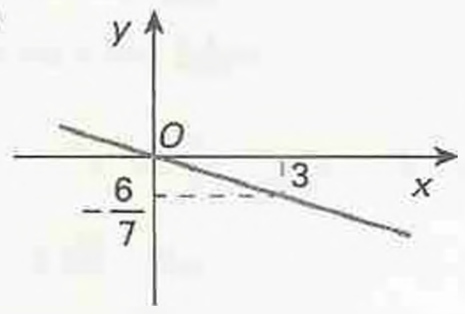
c) $\sqrt{3}x + y + 1 = 0$; d) $x + y - 3 = 0$; e) $\sqrt{3}x - y = 0$. **B.10** e.

B.11 a) $y = 5$; b) $x = 5$. **B.12** a) $x - y + 5 = 0$; b) $2x + y - 10 = 0$; c) $3x - y + 21 = 0$; d) $5x + 2y - 17 = 0$. **B.13** a. **B.14** Há dois pontos possíveis: $P(4, 4)$ e $P'(-4, -4)$. **B.15** Há dois pontos possíveis: $P(4, -4)$ e $P'(7, -7)$. **B.16** $x - 2y + 4 = 0$. **B.17** a) $x - 6 = 0$; b) $y - 6 = 0$.

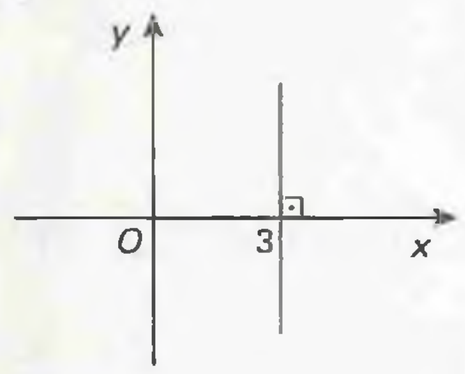
B.18 a)



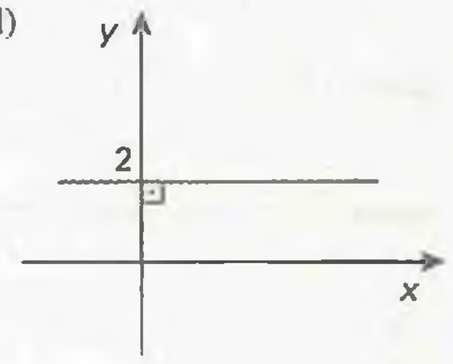
b)



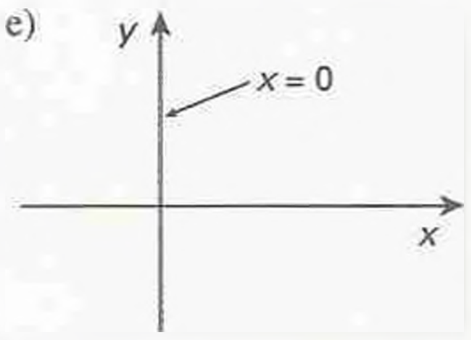
c)



d)



e)



B.19 $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$. $D \neq 0 \Leftrightarrow r$ e s são concorrentes. Resolvendo o sistema formado pelas equações de r e s, obtemos $r \cap s = \{(1, 1)\}$. **B.20** $\forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 6$. **B.21** $r \cap s = \{(-3, 4)\}$.

B.22 $r \cap s = \{(-1, -1)\}$. **B.23** $\left(0, \frac{5}{2}\right)$. **B.24** d. **B.25** d.

B.26 $(-5, 3)$ e $(2, -4)$. **B.27** a) $y - 4 = m(x - 2)$, $m \in \mathbb{R}$, ou $x = 2$; b) $x - y + 2 = 0$; c) nenhuma; d) $y = 4$; e) $x = 2$; f) $4x + y - 12 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 $\sqrt{3}x + 3y - 5\sqrt{3} = 0$. **C.2** Há duas possibilidades: $P(3, 3)$ e $Q(7, 0)$ ou $P(-3, -3)$ e $Q(1, 0)$. **C.3** a. **C.4** d. **C.5** a. **C.6** b.

C.7 e. **C.8** a) $y = mx - 2m$, $\forall m, m \in \mathbb{R}$, ou $x = 2$; b) $y = \frac{5x}{2} - 5$ ou $y = -\frac{5x}{2} + 5$.

Capítulo 55

Exercícios básicos

B.1 a) $y = -8x + 36$ e $8x + y - 36 = 0$; b) $y = \frac{3x}{2} + 3$ e $3x - 2y + 6 = 0$; c) $y = -4x + 1$ e $4x + y - 1 = 0$; d) $y = x$ e $x - y = 0$. **B.2** a) Coeficiente angular $m = 3$ e coeficiente linear $q = -\frac{5}{2}$; b) $m = -\frac{3}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$; c) $m = -4$ e $q = 0$.

B.3 a) $m = 3$ e $q = -6$; b) $m = -\frac{2}{3}$ e $q = \frac{7}{3}$; c) não existe m e não existe q. **B.4** a) Paralelas distintas; b) paralelas coincidentes; c) concorrentes; d) paralelas distintas; e) concorrentes. **B.5** $a = \frac{1}{2}$.

B.6 $\forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq \frac{3}{8}$. **B.7** a) $a = 0$; b) paralelas distintas.

B.8 Não existe a. **B.9** $\forall a, a \in \mathbb{R}$ e $a \neq -\frac{1}{3}$.

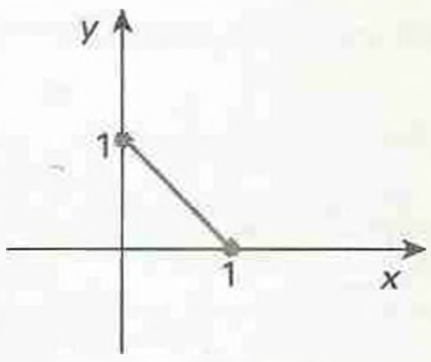
B.10 $x - y + 4 = 0$. **B.11** a) $3x + y = 0$; b) $2x + y - 3 = 0$; c) $x - y + 3 = 0$. **B.12** a. **B.13** $y = 3x + 1$. **B.14** a) $x + 2y - 7 = 0$; b) $5x + y - 44 = 0$; c) $3x + 4y - 9 = 0$. **B.15** a) $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$; b) $y = x$; c) $y = \frac{x}{3} - 3$. **B.16** $x - y - 1 = 0$. **B.17** c.

B.18 a) $P'(-2, 14)$; b) $P'(1, 12)$. **B.19** a) $3x - y + 17 = 0$; b) $2x - y - 6 = 0$. **B.20** d.

Exercícios complementares

C.1 $y = 2x - 4$. **C.2** $4x + y - 30 = 0$. **C.3** e. **C.4** d. **C.5** a. **C.6** a) $x - y + 1 = 0$; b) $y = -x + 5$; c) $P(2, 3)$. **C.7** a. **C.8** $(-3, -7)$. **C.9** e. **C.10** $a = 6$.

C.11



Capítulo 56

Exercícios básicos

B.1 a) 3; b) 2; c) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$; d) 3; e) 3. **B.2** a) 1; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.3** d.

B.4 $\sqrt{2}$. **B.5** $(-5, 0)$ e $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$. **B.6** $(0, -6)$ e $(0, -8)$. **B.7** a.

B.8 c. **B.9** 6. **B.10** 38.5. **B.11** a) São colineares; b) não são colineares; c) são colineares; d) não são colineares. **B.12** Sim, pois o determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a zero. **B.13** $p = 9$ ou $p = 1$.

B.14 $\forall y, y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 8$. **B.15** a) $3x - 2y - 5 = 0$; b) $x - 2 = 0$; c) $x + 2 = 0$.

Exercícios complementares

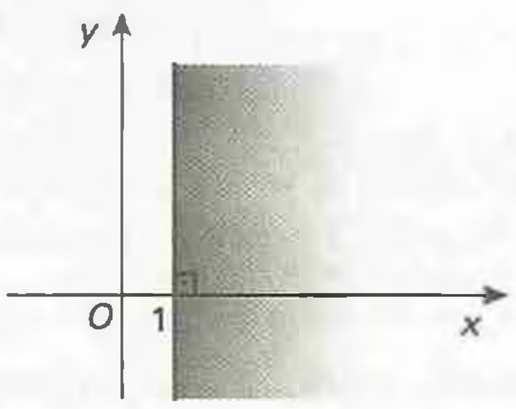
C.1 a. **C.2** d. **C.3** e. **C.4** Há dois pontos possíveis: $P\left(-\frac{71}{7}, -\frac{50}{7}\right)$ e $P'(1, 4)$. **C.5** $\frac{1}{10}$. **C.6** $a = 2$ ou $a = -2$.

C.7 c. **C.8** e. **C.9** Basta mostrar que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a-1 & 3a-2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a zero para todo a, $a \in \mathbb{R}$.

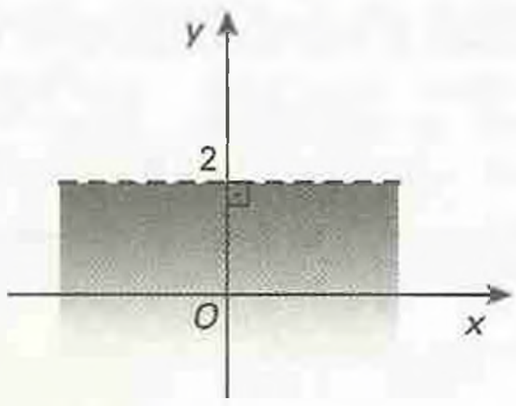
Capítulo 57

Exercícios básicos

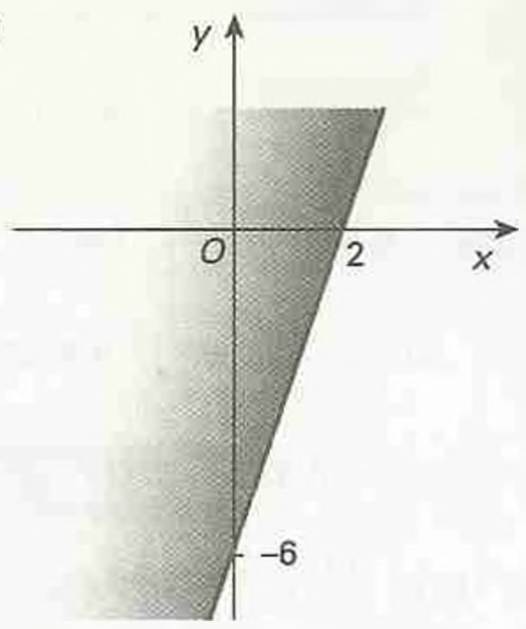
B.1 a)



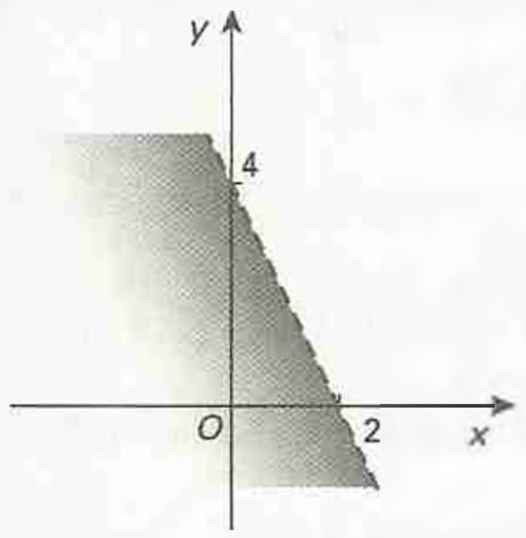
b)



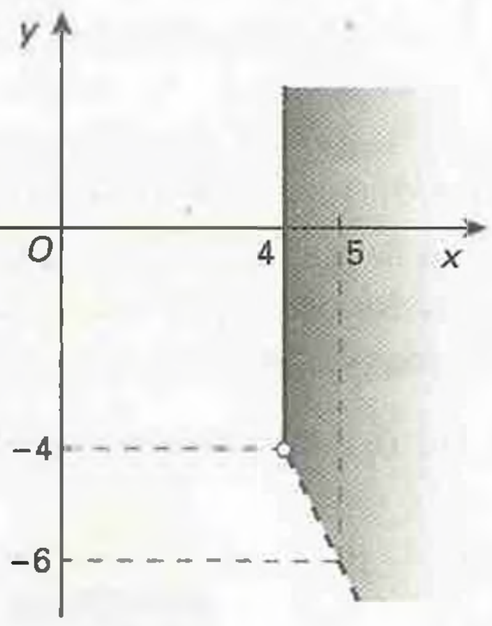
c)



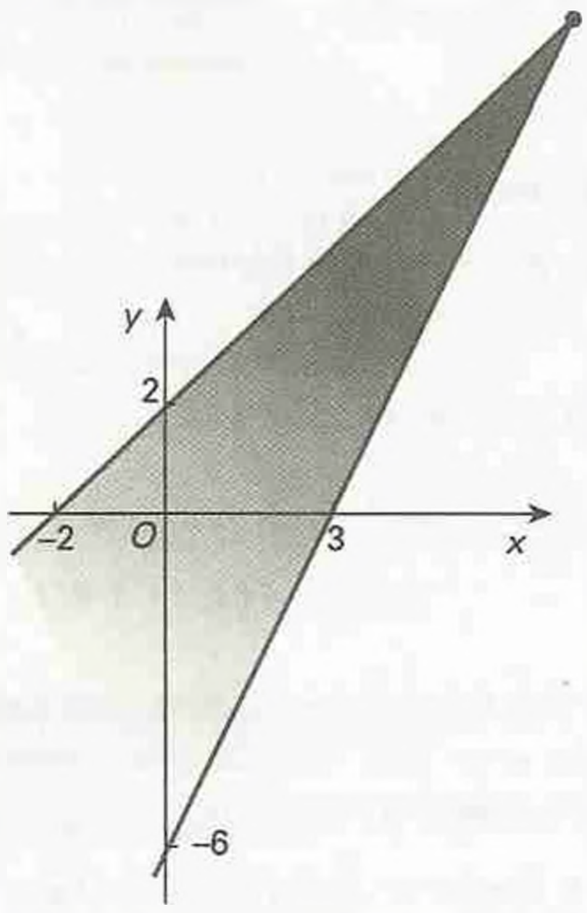
d)



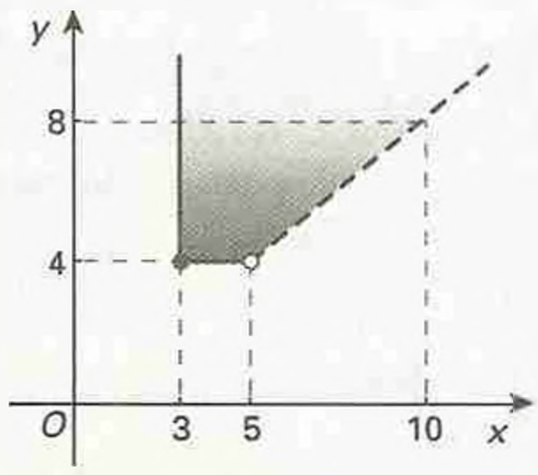
B.2 a)



b)



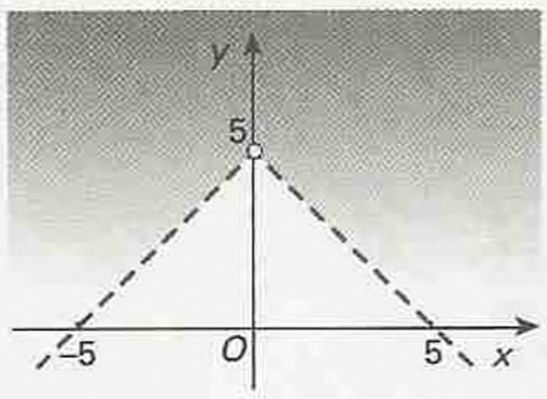
c)



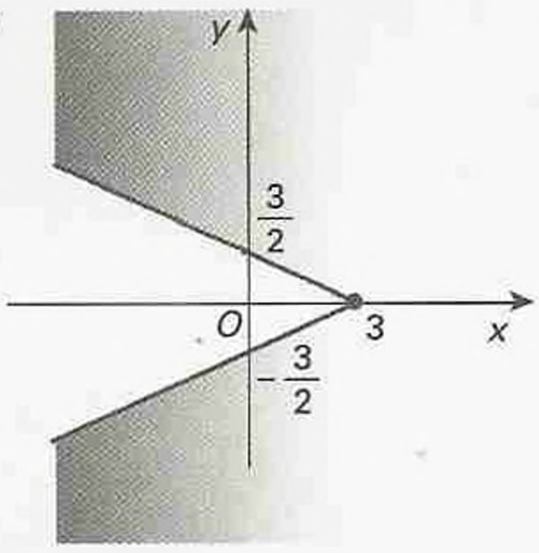
B.3 e.

Exercícios complementares

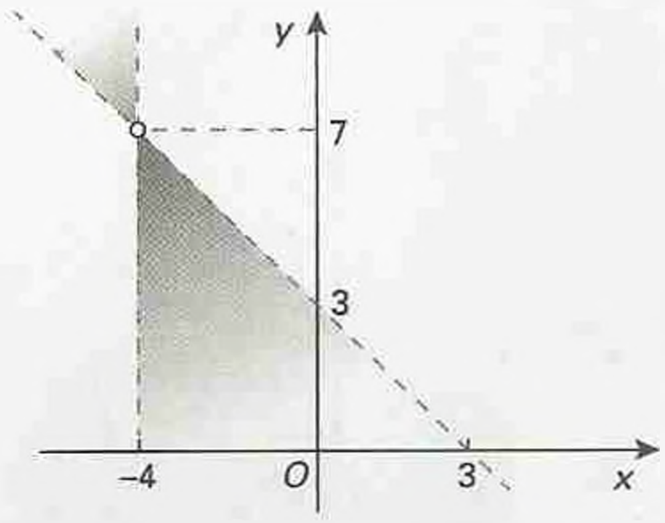
C.1 e. **C.2** a)



b)



C.3



C.4 I) a; II) d.

Capítulo 58

Exercícios básicos

B.1 a) $(x-4)^2+(y-7)^2=64$; b) $x^2+(y-2)^2=7$;

c) $(x+4)^2+(y-1)^2=\frac{1}{9}$; d) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=1$;

e) $(x-1)^2+(y-8)^2=9$; f) $(x+2)^2+y^2=\frac{4}{25}$;

g) $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+(y-1)^2=\frac{2}{9}$; h) $x^2+y^2=1$. **B.2** a) $C(3,1)$ e $R=5$;

b) $C(-5,0)$ e $R=\sqrt{3}$; c) $C\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)$ e $R=3$; d) $C(1,3)$ e $R=4$;

e) $C(0,-1)$ e $R=\sqrt{2}$; f) $C(0,0)$ e $R=2$. **B.3** $(x+4)^2+(y-2)^2=29$.

B.4 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$. **B.5** $k>\frac{4}{3}$. **B.6** a) $k<\frac{1}{2}$;

b) $k=\frac{1}{2}$; c) $k>\frac{1}{2}$. **B.7** c. **B.8** c. **B.9** a) $C(1,-2)$ e $R=3$;

b) $C(-3,0)$ e $R=\sqrt{3}$; c) $C(3,1)$ e $R=\sqrt{10}$; d) $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ e $R=1$;

e) $C(-5,1)$ e $R=2$; f) $C(0,1)$ e $R=\sqrt{6}$; g) $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ e $R=\frac{1}{2}$.

B.10 a) $C(-1,4)$ e $R=3$; b) $C(0,3)$ e $R=\sqrt{5}$; c) $C\left(-\frac{1}{2},1\right)$ e $R=1$; d) $C(-5,10)$ e $R=2$; e) $C(6,0)$ e $R=6$; f) $C\left(\frac{1}{5},1\right)$ e $R=1$.

B.11 $x^2+(y-2)^2=25$. **B.12** $(x-3)^2+(y-3)^2=13$.
B.13 $(x-1)^2+(y-1)^2=5$. **B.14** $x^2+y^2-6x-2y=0$. **B.15** e.
B.16 e.

Exercícios complementares

C.1 c. **C.2** $k=6$. **C.3** 18. **C.4** c. **C.5** b. **C.6** $y=-2x+1$.
C.7 d. **C.8** a. **C.9** e. **C.10** a. **C.11** a.

Capítulo 59

Exercícios básicos

B.1 a) s é tangente a λ; b) s é exterior a λ; c) s é secante a λ; d) s é tangente a λ; e) s é secante a λ; f) s é exterior a λ. **B.2** a.

B.3 $(r)\ 3x+4y+14=0$ e $(s)\ 3x+4y-16=0$.

B.4 $(r)\ x-y+\sqrt{2}=0$ e $(s)\ x-y-\sqrt{2}=0$. **B.5** $2\sqrt{5}$. **B.6** d.
B.7 a. **B.8** a) $s\cap\lambda=\{(3,0),(5,2)\}$; b) $s\cap\lambda=\{(-1,0)\}$;
c) $s\cap\lambda=\varnothing$; d) $s\cap\lambda=\left\{(1,3),\left(-\frac{4}{5},-\frac{12}{5}\right)\right\}$.

B.9 $Ox\cap\lambda=\{(-1,0),(7,0)\}$. **B.10** $Oy\cap\lambda=\varnothing$. **B.11**c.
B.12 a) A e B são os pontos $(4,-2)$, e $(-4,2)$, e o centro da circunferência é $C(-1,-2)$; b) 10. **B.13** $\sqrt{2}$. **B.14** e.

Exercícios complementares

C.1 d. **C.2** a. **C.3** c. **C.4** d. **C.5** e. **C.6** d. **C.7** c.

Capítulo 60

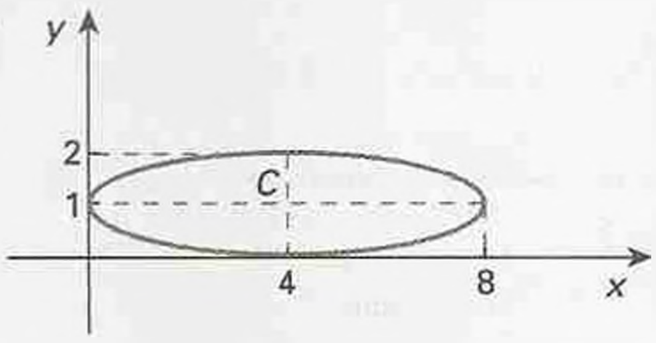
Exercícios básicos

B.1 a) $F_1F_2=2c=6$, $e=\frac{3}{5}$ e $2b=8$; b) $F_1F_2=2c=10$, $e=\frac{5}{13}$ e $2b=24$. **B.2** a) $\frac{(x-9)^2}{25}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$;

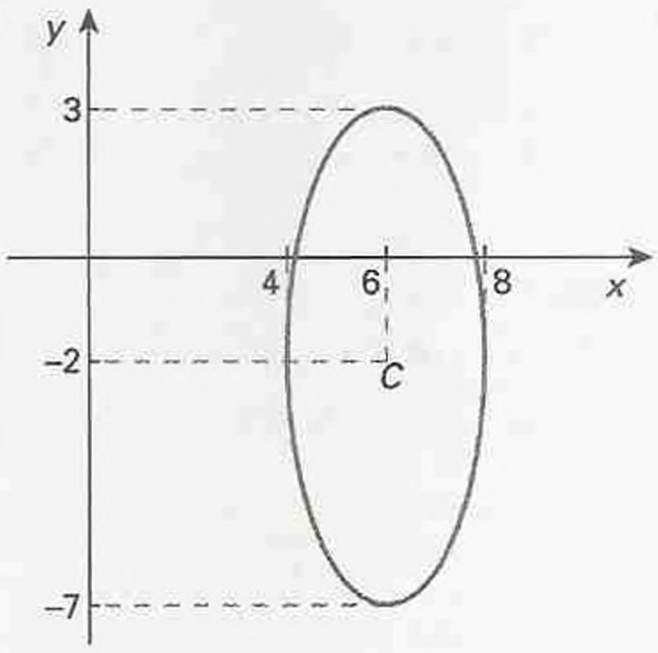
b) $\frac{(x+6)^2}{9}+\frac{(y-7)^2}{36}=1$; c) $\frac{(x+4)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$;

d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

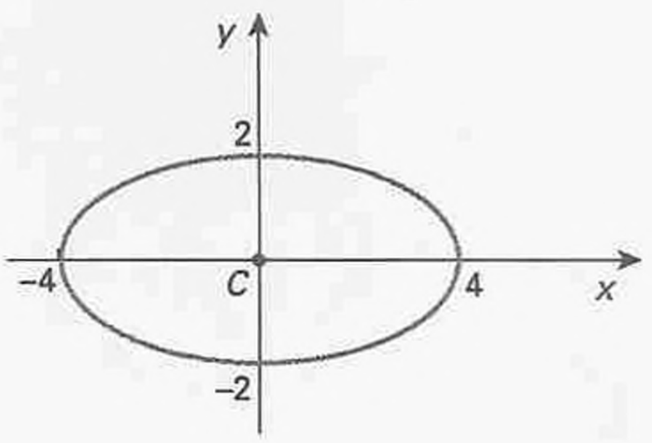
B.3 a)



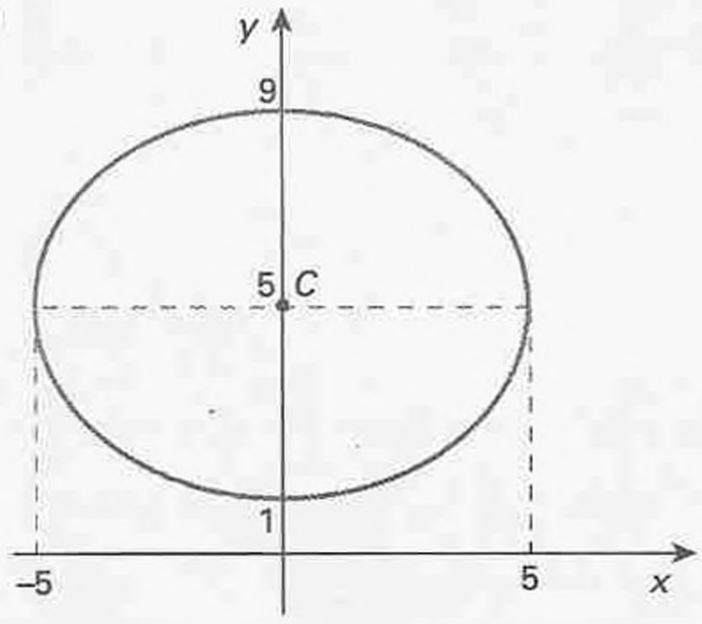
b)



c)



d)



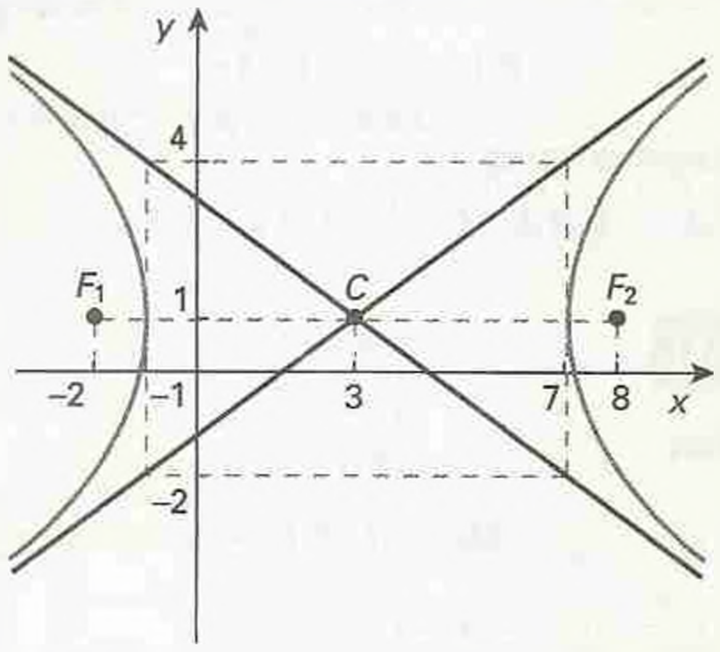
B.4 e.

B.5 a) $2c = 10, e = \frac{5}{3}$, $2b = 8$; b) $2c = 12, e = \frac{6}{1} = 6, 2b = 2\sqrt{35}$.

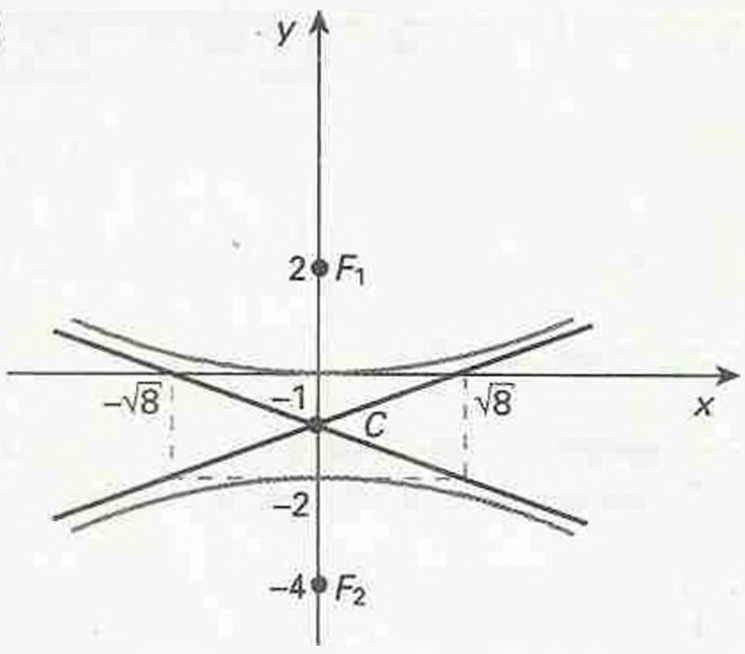
B.6 a) $\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{12} = 1$; b) $\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x+3)^2}{3} = 1$;

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; d) $\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1$.

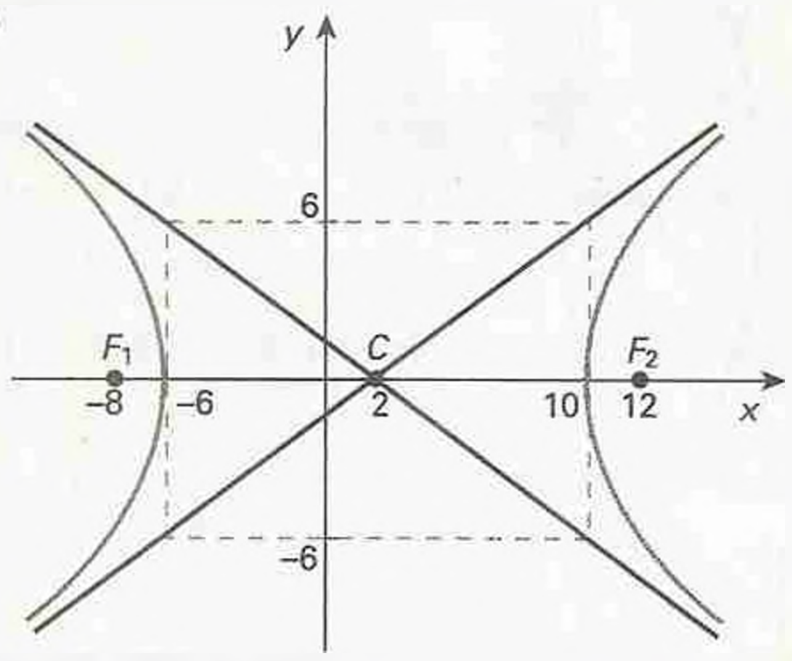
B.7 a)



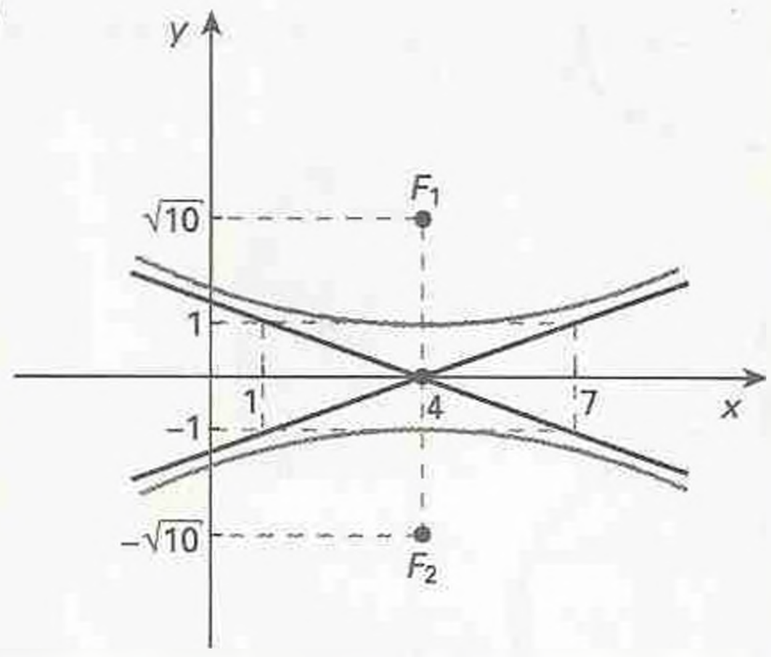
b)



c)

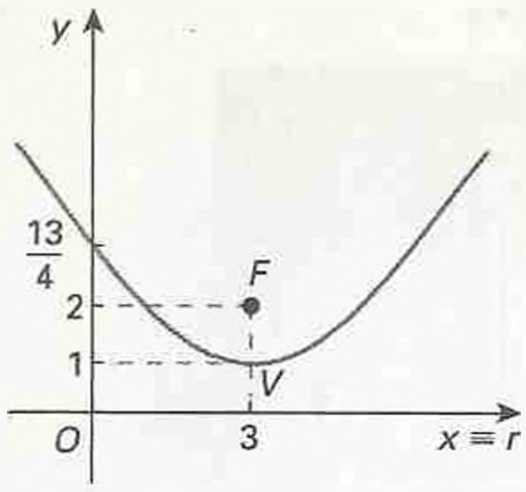


d)

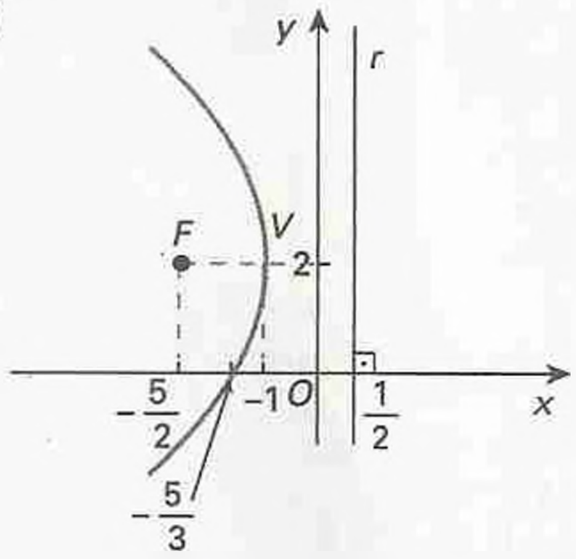


B.8 e. **B.9** a) $p = 5$; b) $p = 2$; c) $p = 2$; d) $p = 6$. **B.10** a) $(x-5)^2 = 8(y-4)$; b) $(y-2)^2 = -6\left(x - \frac{5}{2}\right)$; c) $(x+3)^2 = -8(y-4)$; d) $y^2 = 8x$; e) $x^2 = 4y$; f) $(y-3)^2 = -4(x-1)$.

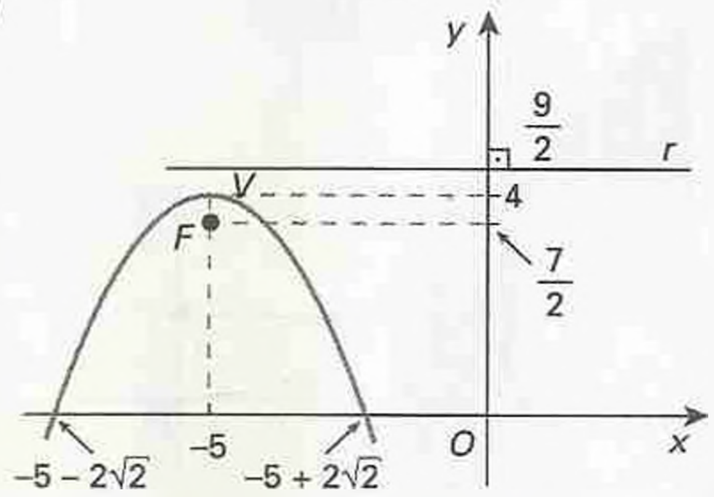
B.11 a)



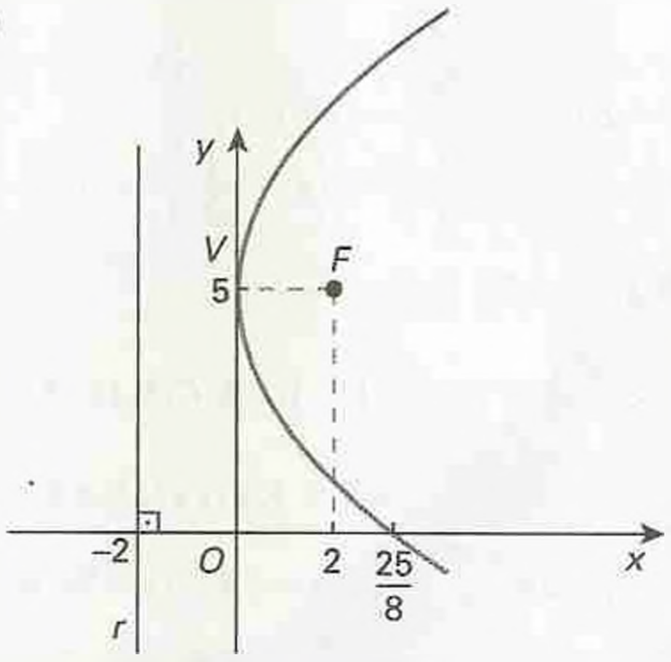
b)



c)



d)



B.12 a) $V(1, 2)$, $p = 6$, $F(4, 2)$ e $r: x + 2 = 0$;
b) $V(-1, 2)$, $p = 2$, $F(-1, 3)$ e $r: y - 1 = 0$;
c) $V(2, 0)$, $p = 4$, $F(2, -2)$ e $r: y - 2 = 0$;
d) $V(-4, 3)$, $p = \frac{1}{2}$, $F\left(-\frac{17}{4}, 3\right)$ e $r: x + \frac{15}{4} = 0$.

Exercícios complementares

C.1 a) $C(2, -5)$, $2a = 10$, $2b = 6$, $2c = 8$, $F_1(-2, -5)$, $F_2(6, -5)$ e $e = \frac{4}{5}$; b) $C(3, -1)$, $2a = 6$, $2b = 4$, $2c = 2\sqrt{5}$, $F_1(3, -1 - \sqrt{5})$, $F_2(3, -1 + \sqrt{5})$ e $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$; c) $C(0, 0)$, $2a = 2\sqrt{3}$, $2b = 2\sqrt{2}$, $2c = 2$, $F_1(0, -1)$, $F_2(0, 1)$ e $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.2** $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C.3 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.4** $\frac{(x-6)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$.

C.5 a) $C(5, 2)$, $2a = 8$, $2b = 6$, $2c = 10$, $F_1(0, 2)$, $F_2(10, 2)$ e $e = \frac{5}{4}$;

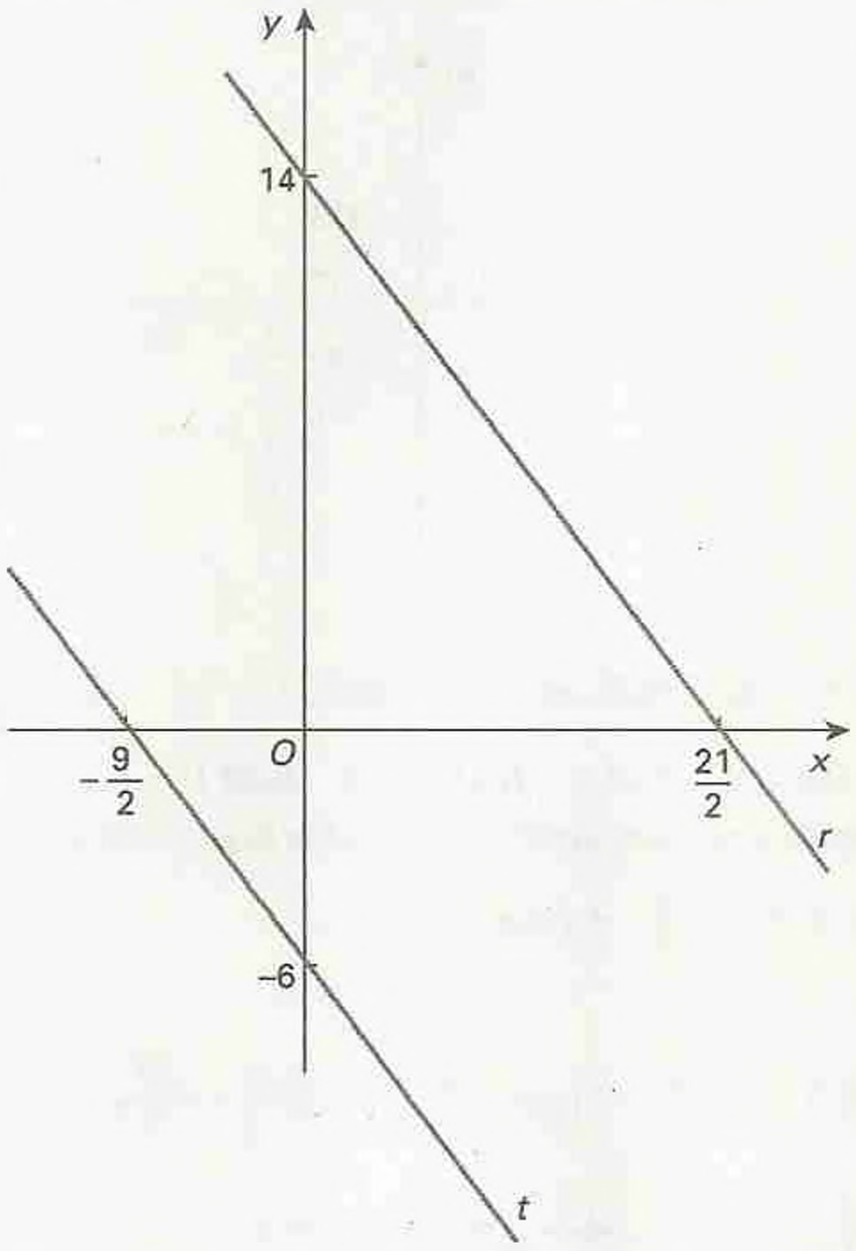
b) $C(2, 5)$, $2a = 2\sqrt{5}$, $2b = 4$, $2c = 6$, $F_1(2, 2)$, $F_2(2, 8)$ e $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$;

c) $C(0, 0), 2a = 2, 2b = 2\sqrt{5}$, $2c = 2\sqrt{6}$, $F_1(-\sqrt{6}, 5), F_2(\sqrt{6}, 5)$ e $e = \sqrt{6}$. **C.6** c. **C.7** e. **C.8** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **C.9** b. **C.10** (4, 8) e (−1, 3). **C.11** d. **C.12** a. **C.13** c.

Capítulo 61

Exercícios básicos

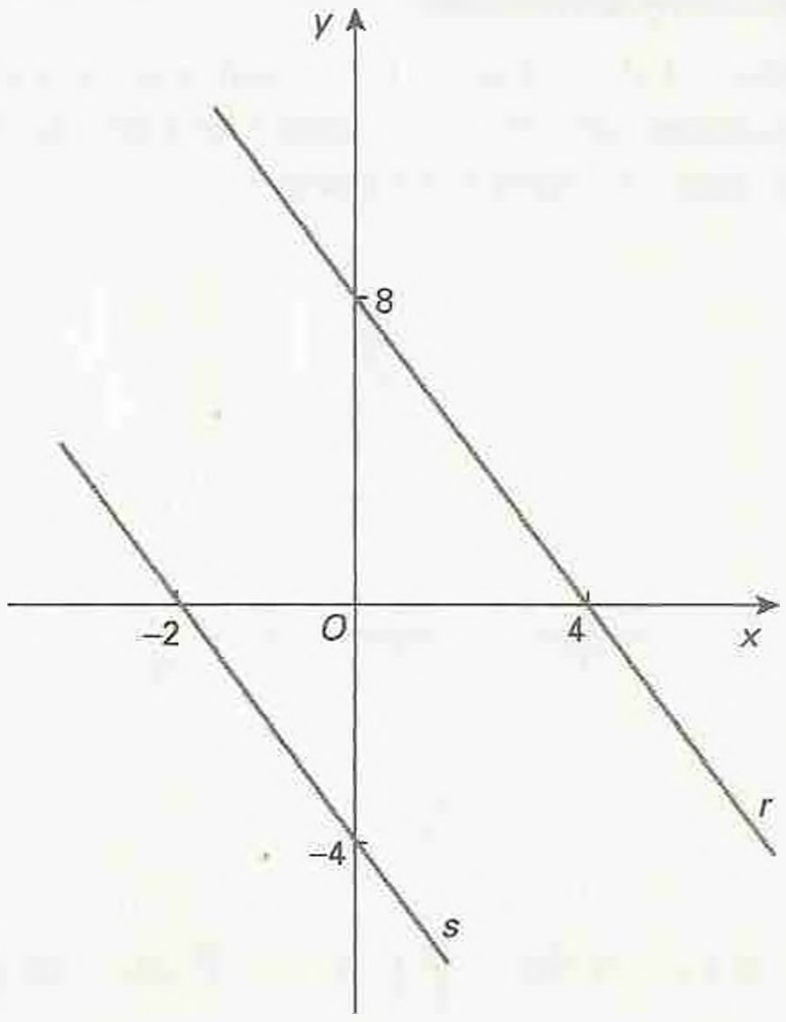
B.1 $x + y - 3 = 0$. **B.2** $2x - 1 = 0$. **B.3** e. **B.4** O L.G. é a reta de equação $x - 1 = 0$. **B.5** $3x^2 + 3y^2 - 8x - 8y + 8 = 0$. **B.6** O L.G. é o par de retas r: $4x + 3y - 42 = 0$ e t: $4x + 3x + 18 = 0$.



B.7 O L.G. é o par de retas t: $2y - 3 = 0$ e u: $6x + 1 = 0$.
B.8 $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$.

Exercícios complementares

C.1 $(x^2 - 4x) + (y^2 - 8y) = 12 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 8y + 16) = 12 + 4 - 16 \therefore (x - 2)^2 - (y - 4)^2 = 0$.
Fatorando o primeiro membro, temos:
$(x - 2 + y - 4)(x - 2 - y + 4) = 0 \therefore x + y - 6 = 0$ ou $x - y + 2 = 0$.
Concluímos, então, que o L.G. é o par de retas r: $x + y - 6 = 0$ e s: $x - y + 2 = 0$. C.2 O L.G. é o par de retas r: $2x + y - 8 = 0$ e s: $2x + y + 4 = 0$.



C.3 O L.G. é a circunferência de centro $C(0, 1)$ e raio 3. **C.4** d. **C.5** c. **C.6** $x^2 = 6\left(y - \frac{1}{2}\right)$.

Capítulo 62

Exercícios básicos

B.1 e. **B.2** a. **B.3** a) $x = 5$ e $y = 3$; b) $x = 3$ e $y = 5$ ou $x = -3$ e $y = 17$; c) $x = 1$ e $y = 3$. **B.4** a) $4 + 8i$; b) $13 + 7i$; c) $12 + 4i$; d) $3 - 2i$; e) 16; f) $12i$; g) $-4 + i$; h) $21 - 3i$. **B.5** a) $x = 2$ e $y = 3$; b) $x = 1$ e $y = 4$. **B.6** a) $18i$; b) $30 - 42i$; c) $21 + 15i$; d) $61 - 41i$; e) 38; f) 74. **B.7** b. **B.8** d. **B.9** a) $z = 2 + 5i$; b) $z = 0 + 0i$; c) $z = 0 + 0i$. **B.10** a) $\frac{10}{17} + \frac{11i}{17}$; b) $2 - 3i$; c) $\frac{15}{13} + \frac{10i}{13}$; d) $-\frac{1}{17} + \frac{4i}{17}$; e) $\frac{21}{17} + \frac{15i}{34}$; f) $-\frac{17}{13} - \frac{6i}{13}$; g) $-\frac{23}{5} - \frac{4i}{5}$. **B.11** b. **B.12** a) $\frac{2}{13} - \frac{3i}{13}$; b) $\frac{4}{17} - \frac{i}{17}$; c) $\frac{3}{20} + \frac{i}{20}$; d) $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$; e) $-i$; f) i; g) $-\frac{i}{3}$. **B.13** e.
B.14 a) -1; b) $-i$; c) 1; d) $-i$; e) $-i$. **B.15** a) $8 + 6i$; b) $-21 - 20i$.
B.16 c. **B17**. a.

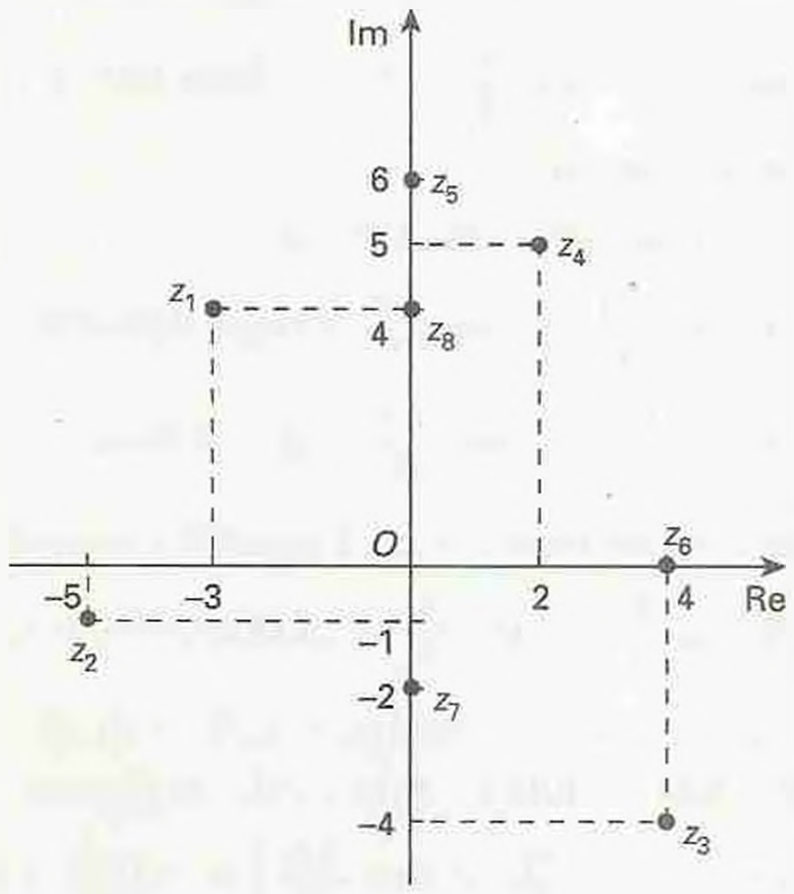
Exercícios complementares

C.1 $x = 5$. **C.2** b. **C.3** $a = -\frac{2}{5}$. **C.4** Não existe x. **C.5** d. **C.6** $x = 1$. **C.7** $x = -\frac{1}{2}$. **C.8** $\forall x, x \in \mathbb{R}$ e $-1 < x < 1$. **C.9** zero. **C.10** $z = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. **C.11** d.

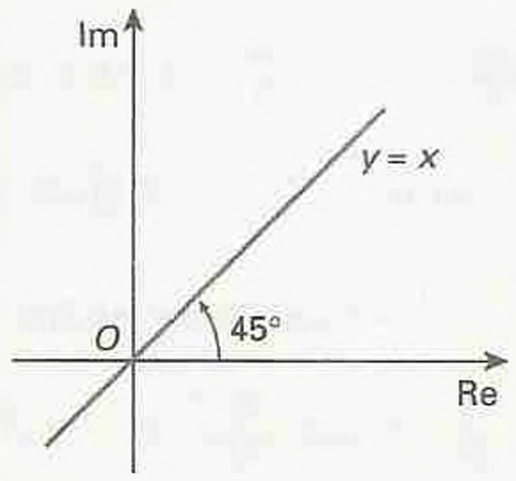
Capítulo 63

Exercícios básicos

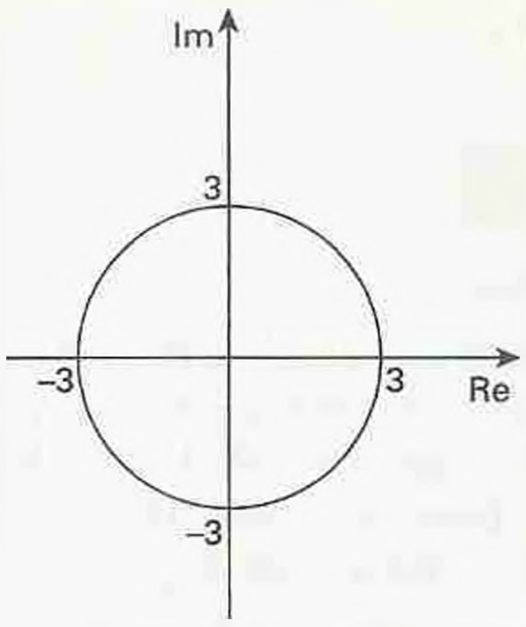
B.1



B.2 É a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.



B.3 O L.G. é a circunferência de centro (0, 0) e raio 3.



B.4 b. **B.5** a) $|z_1| = 10$; b) $|z_2| = \sqrt{5}$; c) $|z_3| = 2$; d) $|z_4| = 4$; e) $|z_5| = 6$; f) $|z_6| = 3$; g) $|z_7| = \sqrt{2}$; h) $|z_8| = 1$; i) $|z_9| = 1$; j) $|z_{10}| = 9$. **B.6** e.

B.7 a) $\sqrt{20}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; c) $\sqrt{2}$; d) 9; e) $\frac{1}{169}$; f) 16; g) $\sqrt{2}$.

B.8 a) 0° (0); b) $270°\left(\frac{3\pi}{2}\right)$; c) 180° ($\pi$); d) $90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

B.9 a) $\frac{11\pi}{6}$; b) $\frac{7\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$. **B.10** a) 140°; b) 40°; c) 320°.

B.11 $\rho = 2$ e $\varphi = 120°\left(\varphi = \frac{2\pi}{3}\right)$; b) $\rho = \sqrt{2}$ e $\varphi = 45°\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $\rho = 3\sqrt{2}$ e $\varphi = 225°\left(\varphi = \frac{5\pi}{4}\right)$;

d) $\rho = 4$ e $\varphi = 330°\left(\varphi = \frac{11\pi}{6}\right)$; e) $\rho = 2$ e $\varphi = 135°\left(\varphi = \frac{3\pi}{4}\right)$;

f) $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\varphi = 45°\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

B.12 a) $z_1 = 2(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$ ou $z_1 = 2\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right)$;

b) $z_2 = \sqrt{2}\ (\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ ou

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$; c) $z_3 = 3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$ ou

$z_3 = 3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$; d) $z_4 = 2(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$ ou

$z_4 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$;

e) $z_5 = 2\sqrt{3}\ (\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ ou

$z_5 = 2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$; f) $z_6 = 4(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

ou $z_6 = 4\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$; g) $z_7 = 2(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$ ou

$z_7 = 2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$; h) $z_8 = 5\sqrt{2}\ (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$ ou

$z_8 = 5\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$. **B.13** a) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$;

b) $z_2 = -i$; c) $z_3 = 4\sqrt{3} + 4i$; d) $z_4 = 5\sqrt{2} - 5i\sqrt{2}$;

e) $z_5 = 5$. **B.14** a. **B.15** c. **B.16** $n = 3$. **B.17** $n = 4$.

B.18 a) $z_1 z_2 = 6\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3} + 3i$;

b) $z_1 z_3 = 12\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = 12i$;

c) $(z_3)^2 = 16\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = -8 + 8\sqrt{3}\,i$;

d) $z_2 z_3 = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -8$; e) $z_1^2 = 9\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \frac{9}{2} + \frac{9i\sqrt{3}}{2}$; f) $z_2^3 = 8(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = 8$;

g) $z_1 z_2 z_3 = 24\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}\right) = -12\sqrt{3} - 12i$.

B.19 a) $\frac{z_1}{z_2} = 5(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \frac{5}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2}$;

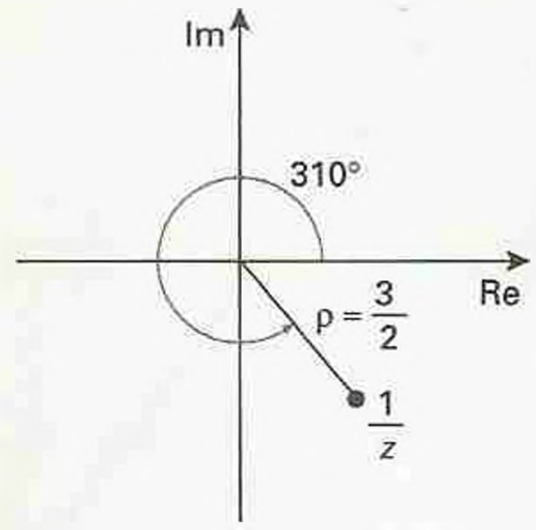
b) $\frac{z_1}{z_3} = 15(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \frac{15\sqrt{3}}{2} + \frac{15i}{2}$;

c) $\frac{z_3}{z_2} = \frac{1}{3}(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i}{6}$;

d) $\frac{z_2}{z_3} = 3[\cos(-30°) + i \operatorname{sen}(-30°)] = 3(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$.

B.20



B.21 $z^4 = -81$. **B.22** a) $512 - 512\sqrt{3}\,i$; b) $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$;

c) $16 + 16i$; d) i. **B.23** c. **B.24** $n = 2$. **B.25** $1; -1; i; -i$.

B.26 Devemos mostrar que $w^5 = z$. A forma trigonométrica do número w é $w = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$.

Logo,

$w^5 = \sqrt{2}^5\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2^5}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -4 - 4i = z$.

Como $w^5 = z$, concluímos que w é uma das raízes quintas de z.

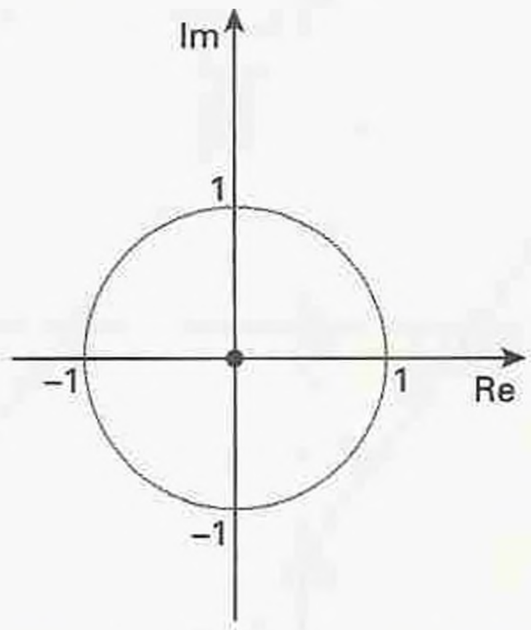
B.27 $1; \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; -1; -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. **B.28** a. **B.29** a) $S = \{3 + i, 3 - i\}$;

b) $S = \{-1 + 2i, -1 - 2i\}$; c) $S = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}\right\}$;

d) $S = \{4 + i, 4 - i\}$.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** e. **C.3** d. **C.4** e. **C.5** A representação geométrica é a reunião do conjunto $\{(0, 0)\}$ com o conjunto dos pontos da circunferência que tem centro na origem e raio unitário:



C.6 a) $\rho = 32$ e $\varphi = 90°\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$; b) $\rho = \sqrt{2}$ e $\varphi = 45°\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$.

C.7 b. **C.8** a) $-\sqrt{3} + i$ e $-2i$; b) $2\sqrt{3}$. **C.9** b.

C.10 $b = \frac{1}{3} - \frac{i\sqrt{8}}{3}$. **C.11** a. **C.12** e. **C.13** d.

C.14 Substituindo z por $\cos 48° + i \operatorname{sen} 48°$, temos:

$(\cos 48° + i \operatorname{sen} 48°)^{10} + (\cos 48° + i \operatorname{sen} 48°)^5 + 1 =$

$= \cos 480° + i \operatorname{sen} 480° + \cos 240° + i \operatorname{sen} 240° + 1 =$

$= \cos 120° + i \operatorname{sen} 120° + \cos 240° + i \operatorname{sen} 240° + 1 =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 1 = 0.$

Logo, $\cos 48° + i \operatorname{sen} 48°$ é raiz da equação $z^{10} + z^5 + 1 = 0$.

C.15 c. **C.16** d. **C.17** a.

Capítulo 64

Exercícios básicos

B.1 e. **B.2** a) 3; b) 2; c) 0; d) não se define. **B.3** $k \neq 3$ e $k \neq -3$.

B.4 $m = 2$ ou $m = -2$. **B.5** $k = -1$. **B.6** a) 47; b) 2; c) 1; d) $-1 - i$.

B.7 $m = 2$ e $n = 1$. **B.8** $a = -5$, $b = 3$ e $c = 2$.

B.9 a) $6x^3 + 6x^2 + 2x - 1$; b) $6x^3 - 2x^2 - 8x + 1$; c) $24x^3 + 8x^2 - 12x$; d) $36x^3 + 37x^2 - 19x + 2$; e) $81x^2 - 36x + 4$; f) $12x^3 - 8x^2 - 21x + 3$; g) $54x^4 + 6x^3 - 27x^2 + 11x - 1$. **B.10** $a = 3$ e $b = -1$. **B.11** c.

B.12 $\partial(P \cdot Q) = 11$. **B.13** a) $Q(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 + x - 3$ e $R(x) \equiv 2x + 6$; b) $Q(x) \equiv 2x^2 + 8$ e $R(x) \equiv -27x^2 + 28x - 14$; c) $Q(x) \equiv x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 0$; d) $Q(x) \equiv 4x + 19$ e $R(x) \equiv 78x^3 + 29x^2 + 6x - 22$; e) $Q(x) \equiv 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ e $R(x) \equiv 8x^2 + 6x + 8$; f) $Q(x) \equiv x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ e $R(x) \equiv 0$.

B.14 $P(x) \equiv x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x + 6$. **B.15** d. **B.16** c.

B.17 a) raízes 1 e $-\frac{1}{3}$; b) raízes i e $-i$; c) raízes 3, -3, i e $-i$; d) raízes 0, 2 e 3; e) raízes $-1 + i$ e $-1 - i$; f) raízes 4 e 3. **B.18** d.

B.19 $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$. **B.20** $a = 3$, $b = 1$ e $c = 4$.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** $a = 1$, $b = 0$ e $c = 1$. **C.3** e. **C.4** a. **C.5** b. **C.6** a. **C.7** d. **C.8** c.

Capítulo 65

Exercícios básicos

B.1 a) $P(2) = 33$; b) $P(-1) = 0$; c) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$; d) $P(-1) = -2$; e) $P(0) = -2$. **B.2** e. **B.3** $m = 10$. **B.4** a. **B.5** $P(x) \equiv 2x^2 - 3x + 1$.

B.6 $P(x) \equiv 3x^2 - 2x - 1$. **B.7** a. **B.8** e. **B.9** $\forall n, n \in \mathbb{N}^*$.

B.10 a) $Q(x) \equiv 6x^3 + 11x^2 + 25x + 51$ e $R(x) \equiv 100$;

b) $Q(x) \equiv 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x$ e $R(x) \equiv 1$; c) $Q(x) \equiv 5x^2 + 17x + 50$ e $R(x) \equiv 153$; d) $Q(x) \equiv x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{7}{8}$ e $R(x) \equiv -\frac{23}{16}$; e) $Q(x) \equiv x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ e $R(x) \equiv 0$.

B.11 $P(x) \equiv (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

B.12 $P(x) \equiv (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

B.13 a) $Q(x) \equiv \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{3} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ e $R(x) \equiv -2$;

b) $Q(x) \equiv 3x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$ e $R(x) \equiv \frac{15}{4}$;

c) $Q(x) \equiv -x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 8x^2 - 16x - 32$ e $R(x) \equiv 63$;

d) $Q(x) \equiv x^3 + 2x^2 + \frac{11x}{2} + \frac{21}{2}$ e $R(x) \equiv 44$;

e) $Q(x) \equiv 16x^4 - 8x^3 + 4x^2 - x$ e $R(x) \equiv -1$;

f) $Q(x) \equiv -2x^2 - \frac{1}{2}$ e $R(x) \equiv -\frac{9}{2}$.

B.14 $Q_1(x) \equiv 3x^2 + 4x - \frac{1}{2}$ e $R_1(x) \equiv 5$. **B.15** a) $P\left(\frac{1}{3}\right) = 1$; b) $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$; c) $P\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{43}{4}$; d) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$; e) $P(0) = -3$. **B.16** $P(x) \equiv 9x^2 + 3x + 1$. **B.17** $a = \frac{13}{2}$.

B.18 $a = 3$ e $b = -11$. **B.19** c. **B.20** $a = -3$ e $b = -4$.

B.21 $a = -9$ e $b = -1$.

Exercícios complementares

C.1 $a = 2$ ou $a = 3$. **C.2** d. **C.3** b. **C.4** e. **C.5** a.

C.6 a) Dividindo $x^3 - a^3$ por $x - a$, temos:

a	1	0	0	$-a^3$
	1	a	a^2	0

Pela propriedade fundamental da divisão, concluímos:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - a^3 & x - a \\ \hline 0 & x^2 + ax + a^2 \end{array} \Rightarrow x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

b) Dividindo $x^3 + a^3$ por $x + a$, obtemos

$-a$	1	0	0	a^3
	1	$-a$	a^2	0

Pela propriedade fundamental da divisão, concluímos:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + a^3 & x + a \\ \hline 0 & x^2 - ax + a^2 \end{array} \Rightarrow x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

C.7 $a = 6$ e $b = 3$. **C.8** $a = -2$ e $b = 1$. **C.9** $a = -\frac{551}{12}$.

C.10 $R(x) \equiv 10x - 13$.

Capítulo 66

Exercícios básicos

B1 a) $S = \{5, -2, -1\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}, i, -i\right\}$.

B.2 $S = \left\{1, \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}\right\}$.

B.3 a) $S = \{2, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$; b) $S = \left\{-1, 4, 0, \frac{1}{3}, 2\right\}$.

B.4 a) $P(x) \equiv 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$; b) $P(x) \equiv x(x - 3)(x - 1)$; c) $P(x) \equiv (x - 1)(x + 1)(x - 4)$. **B.5** e.

B.6 $P(x) \equiv 3(x-1)(x-2)(x-5)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

B.7 $7(x+1)(x-1)(x-2)^2(x+2)^3 = 0$. **B.8** c. **B.9** As outras raízes são $\pm i$. Logo, o conjunto solução da equação é $S = \{-1, i, -i\}$.

B.10 e. **B.11** a) basta mostrar que o polinômio $P(x) \equiv x^6 - 10x^5 + 25x^4 + x^2 - 10x + 25$ é divisível por $(x-5)^2$ e **não** é divisível por $(x-5)^3$; b) basta mostrar que o polinômio $P(x) \equiv x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8$ é divisível por $(x-2)^3$ e **não** é divisível por $(x-2)^4$. **B.12** a) grau 5; b) grau 7; c) grau 10; d) grau 13. **B.13** a) $4(x-3)(x-2-i)(x-2+i)(x-2i)(x+2i) = 0$;
b) $(x+6i)(x-6i)(x-3i)(x+3i)(x-1-i)(x-1+i) = 0$;
c) $6(x-4)(x+2)(x-i)(x+i)(x-1+i)(x-1-i) = 0$;
d) $(x-4)(x-3)(x-i)(x+i) = 0$. **B.14** $S = \{3i, -3i, 1\}$. **B.15** a.

B.16 a) suas raízes racionais são -1 e $\frac{1}{2}$;

b) sua única raiz racional é 2; c) suas raízes racionais são -1 e $\frac{1}{3}$.

B.17 a) $S = \{-1, -2, i, -i\}$; b) $S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}\,i\right\}$;

c) $S = \left\{0, 1, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$. **B.18** a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$;

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{3-4\sqrt{6}}{4}$; e) $\frac{3-4\sqrt{6}}{6}$. **B.19** a) $-\frac{b}{a}$; b) $\frac{c}{a}$;

c) $-\frac{b}{c}$; d) $\frac{b^2-2ac}{a^2}$; e) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$. **B.20** a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{3}$;

d) 6; e) -3; f) $\frac{10}{3}$; g) 30. **B.21** a) 0; b) 1; c) 1; d) 1; e) -2; f) 1; g) 1.

B.22 c. **B.23** e. **B.24** d.

B.25
$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = 3 \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = 1 \\ r_1r_2r_3r_4 = 0. \end{cases}$$

B.26 $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$. **B.27** $S = \{10, 20, 30\}$.

Exercícios complementares

C.1 a. **C.2** c. **C.3** $a = 1$ e $b = -12$. **C.4** $S = \{3, 1\}$. **C.5** a.

C.6 a) $a = -3$; b) $S = \{1, 2, i, -i\}$. **C.7** $S = \{3, 1+3i, 1-3i\}$.

C.8 $b = -1$ e $c = 1$. **C.9** $S = \{1, 2, i, -i\}$.

C.10 A área do retângulo é $\frac{c}{a}$ cm² e o perímetro é $-\frac{2b}{a}$ cm.

C.11 A área total do paralelepípedo é $\frac{2c}{a}$ cm² e o volume é $-\frac{d}{a}$ cm³.

C.12 $b = 0$, $c = -3$ e $d = 2$; ou $b = 3$, $c = 0$ e $d = -4$. **C.13** 4.

C.14 $S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 10\}$. **C.15** $S = \{6, 12, -4\}$.

C.16 $S = \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$. **C.17** a. **C.18** c. **C.19** d.

BIBLIOGRAFIA

BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

BOCHNER, Salomon. *El Papel de la Matemática en el Desarollo de la Ciencia*. Trad. Mariano Martinez Pérez. Madrid, Alianza Editorial, 1991.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher/ Edusp, 1974.

CÂNDIDO, Suzana Laino. *Formas num mundo de formas*. São Paulo, Moderna, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais de Matemática*. Lisboa, Brás Monteiro, 1975.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre Educação e Matemática*. Campinas, Editora da Unicamp, 1986.

EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Campinas, Editora da Unicamp, 1997.

FEHER, F. Howard; CAMP, John; KELLOGG, Howard. *La Revolución en las Matemáticas Escolares (segunda fase)*. Buenos Aires, Eva V. Chesneau.

GRANDE ENCICLOPÉDIA LAROUSSE CULTURAL. São Paulo, Nova Cultural, 1995.

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. Trad. Paulo Moreira da Silva. Porto Alegre, Globo, 1952.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1997.

JOHNSON, Donovan A.; GLENN, William H.; NORTON, M. Scott. *Matemática sem problemas*. São Paulo, José Olympio, 1972.

KARLSON, Paul. *A magia dos números*. Trad. Henrique Carlos Pfeifer. Porto Alegre, Globo, 1961.

KASNER, Edward e NEWMAN, James. *Matemática e imaginação*. Rio de Janeiro, Zahar, 1968.

LEME, Ruy Aguiar da Silva. *Curso de Estatística*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico.

LESH, R. & LANDAU, M. *Aquisition of Mathematics Concepts and Process*. London, Academic Press, 1983.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e realidade*. São Paulo, Autores Associados, 1987.

MIORIM, Maria Ângela. *O ensino de Matemática: evolução e modernização*. Campinas, 1995.

MIRSHAWKA, Victor. *Análise dimensional*. São Paulo, Nobel, 1968.

PENROSE, Roger. *A mente nova do rei*. Trad. Waltensir Dutra. Rio de Janeiro, Campus, 1991.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. *Arqueologia da Matemática*. São José dos Campos, Prandiano, 1991.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. *Matemática curso colegial*. Trad. Lafaiete de Moraes e Lydia C. Lamparelli.

SPIEGEL, Murray R. *Estatística*. Trad. Pedro Cosentino. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, 1976.

TROTTA, Fernando; Imenes, Luiz Márcio P.; Jakubovic, José. *Matemática aplicada*. São Paulo, Moderna, 1979.

VALENTE, Wagner Rodrigues. *Uma história da Matemática escolar no Brasil (1730-1930)*. Tese de doutoramento apresentada à FEUSP-SP, 1997.

VERAS, Lilia Ladeira. *Matemática aplicada à Economia*. São Paulo, Atlas, 1995.

coleção

BASE

A única obra escrita com base nas *Matrizes curriculares de referência para o SAEB* (Sistema Nacional de Avaliação de Educação Básica).

Conteúdo programático dosado conforme orientação do MEC/INEP.

Obra compromissada com a educação para a cidadania.

Textos que promovem a atualização, a contextualização e a interdisciplinaridade.

Questões de verificação da aprendizagem voltadas para o cotidiano do aluno.

Todas as matérias trazem questões extraídas dos ENEMs, dos vestibulares seriados e dos exames de ingresso às principais instituições de ensino superior.

Endereço na Internet — www.moderna.com.br/base — para atualização, dúvidas, acompanhamento.

A mais adequada para professores que pretendam implementar as reformas propostas pelo MEC.

Coleção Base — prazer de ensinar; prazer de aprender.

EDITORA MODERNA

ISBN 85-16-02570-5

9 788516 025700